Ә. Шыныбеков

ГЕОМЕТРИЯ

Умумтаълим ўрта мактабларининг 9-синфи учун дарслик

9

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги тасдиқлаган

Алматы «Жазушы» 2017

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.151 я 72
Ш 97

Фойдаланилган шартли белгилар:

$\boxed{?}$ – Мавзунинг асосий материаллари бўйича саволлар;

$\boxed{\text{ПТ}}$ – Амалий топшириқлар;

$\boxed{\text{Т}}$ – тарихий маълумотлар;

А – I даражали топшириқлар;
В – II даражали топшириқлар;
С – III даражали топшириқлар;
* – Ижодий ёки юқори мураккаб масалалар ва математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган мактабларга мўлжалланган материаллар.

Таржимон: Бегжанов Муратжон

Шыныбеков А.Н.
Ш 97 Геометрия. Умумтаълим ўрта мактабларининг 9-синфи учун дарслик. – Алматы: “Жазушы”, 2017.– 208-бет.

© Шыныбеков А.Н. 2017
© “Жазушы” нашриёти,
бадиий безак берилган, 2017
Барча ҳуқуқлари ҳимояланган
Нашрнинг мулкий ҳуқуқлари
“Жазушы” нашриётига тегишли

ISBN 978-601-200-570-7

7 – 8-синф материалларини такрорлаш

Геометрияда, умуман математикада илгари ўтилган мавзулар кейинги, янги мавзуларни баён қилишда қўлланилиши маълум. Шу сабабли геометриядан 9-синфда ўтиладиган материалларни яхши ўзлаштириш учун 7–8-синфларда ўтилган мавзуларни эсга тушириб, мустаҳкамлаб олиш керак. Айниқса, қуйидаги муҳим саволларга эътибор бериш ўринли бўлади.

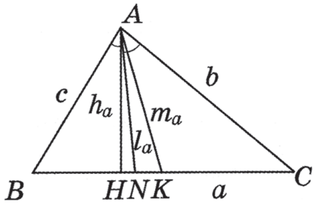
?

1. Қандай бурчаклар: а) қўшни бурчаклар деб аталади? б) вертикал бурчаклар деб аталади? Чизмасини чизиб кўрсатинг.
2. Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесганда ҳосил бўладиган бурчакларнинг чизмасини чизинг.
3. Қандай тўғри чизиқлар а) параллел тўғри чизиқлар деб аталади? б) перпендикуляр тўғри чизиқлар деб аталади?
4. Тўғри чизиқларнинг нечта параллеллик аломатлари бор? Уларни таърифланг.
5. Қандай фигура учбурчак деб аталади? Унинг қандай турлари бор? Учбурчакнинг қандай элементлари бор, уларни айтинг.
6. Учбурчаклар тенглигининг нечта аломати бор? Уларни таърифланг.
7. Қавариқ кўпбурчак нима? n бурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси ва ташқи бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?
8. Қандай тўртбурчак параллелограмм деб аталади? Параллелограммнинг хоссаларини таърифлаб,чизмадан кўрсатинг.
9. Тўғри тўртбурчак, ромб, квадрат нима ва уларнинг қандай хоссаларини биласиз?
10. Учбурчакнинг ўрта чизиғи нима? Унинг қандай хоссаларини биласиз?
11. Трапеция нима ва унинг қандай турларини, хоссаларини биласиз?
12. Айланага ташқи ва ички чизилган тўртбурчакларнинг қандай хоссалари бор?
13. Пифагор теоремасини ёзиб, унга мос келадиган учбурчакни чизинг.
14. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг тригонометрик функциялари билан учбурчак томонлари орасидаги муносабатларни ёзиб кўрсатинг.
15. $30°$, $45°$, $60°$ бурчаклардаги тригонометрик функцияларнинг қиймати нимага тенг?
16. Тўғри тўртбурчак, учбурчак, параллелограмм, трапециянинг юзалари қандай формулалар билан аниқланади? Формулаларда фойдаланилган элементларнинг чизмасини чизинг.

ПЛАНИМЕТРИЯНИНГ АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАРИ

<table>
<tr><th>№</th><th>Фигура</th><th>Асосий формулалар</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>

Ихтиёрий учбурчак



</td><td>

$P = a + b + c; \quad p = \frac{1}{2}(a + b + c);$

$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}};$

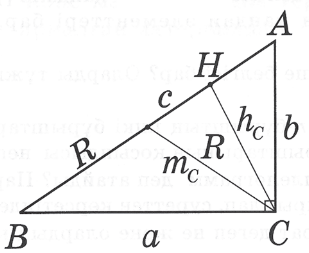
$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p};$

$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a; \quad S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A;$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Тўғри бурчакли учбурчак



</td><td>

$c^2 = a^2 + b^2, \quad \angle C = 90^\circ.$

$h_c = \sqrt{AH \cdot BH}; \quad a^2 = c \cdot BH;$

$b^2 = c \cdot AH;$

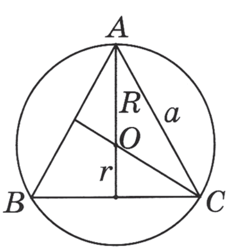
$a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B;$

$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B};$

$b = b \cdot tgA = b \cdot ctgB; \quad S = \frac{1}{2} a \cdot b.$

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

Мунтазам учбурчак



</td><td>

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ;$

$AB = AC = BC = a;$

$R = \frac{\sqrt{3}}{3} a; \quad r = \frac{\sqrt{3}}{6} a; \quad R = 2r;$

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$

</td></tr>
<tr><td>4</td><td>

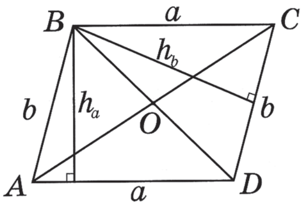
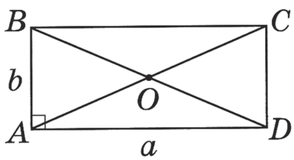
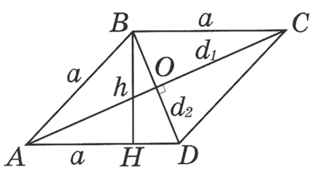
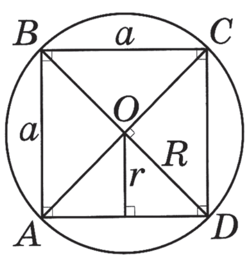
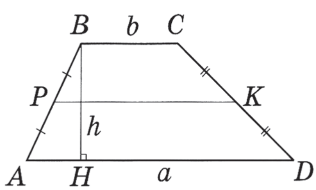
Параллелограмм

</td><td>

$AO = OC; \quad BO = OD;$

$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ;$

</td></tr>
</table>

1	2	3
		$AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$; $S = a \cdot h_a$; $S = b \cdot h_b$; $S = a \cdot b \cdot \sin A$.
5	**Тўғри тўртбурчак** 	$AC = BD$; $AO = OC$, $BO = OD$; $S = a \cdot b$.
6	**Ромб** 	$AC \perp BD$; $AO = OC$; $BO = OD$; $AB = BC = CD = AD = a$; $S = a \cdot h$; $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.
7	**Квадрат** 	$AC \perp BD$; $AC = BD$; $AO = OC = BO = OD = R$; $AC = \sqrt{2a}$; $R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$; $r = \frac{a}{2}$; $S = a^2$.
8	**Трапеция** 	$PK = \frac{a+b}{2}$; $S = \frac{h}{2}(a+b)$; $AD \parallel BC$.

МИСОЛЛАР

А

1. AB ва CD кесмалар ҳар бирининг ўртаси бўладиган O нуқтада кесишади. $\Delta AOC = \Delta BOD$ тенглик бажариладими? Бу масала шартида яна бошқа тенг учбурчаклар жуфтни кўрсатинг?

2. $ABCD$ параллелограммнинг периметри 12 см, ABD учбурчакнинг периметри 8 см. BD диагонали узунлигини топинг.

3. Барча бурчаклари ўзаро тенг: 1) тўртбурчак; 2) учбурчак тўғрисида нима дейиш мумкин? Чизмасини чизинг.

4. Бир диагонали томонига тенг ромбнинг бурчакларини топинг.

5. 1) Параллелограмм; 2) тўғри туртбурчак; 3) ромб; 4) квадрат томонларининг ўрталарини кетма-кет туташтирганда қандай фигура ҳосил булади? Жавобингизни исботланг.

6. Учбурчакнинг томонлари 10 см, 12 см ва 15 см га тенг. Унинг ўрта чизиғининг узунлигини топинг.

7. Трапециянинг бир асосидаги бурчаклари $60°$ ва $80°$ бўлса, қолган икки бурчаги нимага тенг?

8. Тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари $120°$ ва $60°$. Тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

9. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b га, гипотенузаси c га тенг, a катетига қарама-қарши ётган бурчакги α га тенг бўлса, берилганлар бўйича номаълумларни топинг: 1) $a = 4$ см, $b =3$ см; 2) $a =12$ см, $c = 13$ см; 3) $\alpha = 30°$, $c = 40$ см; 4) $\alpha = 45°$, $b = 4$ см; 5) $\alpha = 60^0$, $b = 5$см; 6) $c =10$ дм, $b= 6$ дм.

10. Томонлари a ва b га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзасини топинг: 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см; 2) $a = \sqrt{2}$ м, $b = \sqrt{8}$ м; 3) $a = \frac{3}{2}$ дм, $b = 2\frac{2}{3}$ дм;

11. Икки томони ва улар орасидаги бурчак бўйича: а) параллелограммнинг; б) учбурчакнинг юзини топинг: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 4$ м, $b = \sqrt{3}$ м, $\alpha = 60°$; 3) $a = 1{,}7$ см, $b = 2{,}2$ см, $\alpha = 45°$; 4) $a = \frac{4}{3}$ м, $b = \frac{3}{4}$ м, $\alpha = 30°$.

12. a асоси ва унга туширилган h_a баландлиги бўйича: а) параллелограммнинг; б) учбурчакнинг юзини топинг: 1) $a = 4$ см, $h_a = 5$ см; 2) $a = 1{,}2$ м, $h_a = 0{,}5$ м; 3) $a = 1\frac{1}{3}$ см, $h_a = 2\frac{1}{7}$ см.

13. Томони билан бир диагонали 4 см бўлган ромбнинг юзини топинг.

14. Асослари a ва b, баландлиги h бўлган трапециянинг юзини топинг: 1) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $h = 2$ см; 2) $a = 7$ см, $b = 3$ см, $h = 5$ см; 3) $a = 0{,}2$ м, $b = 3{,}5$ м, $h = 1{,}4$ м; 4) $a = 1\frac{1}{2}$ см, $b = \frac{1}{2}$ см, $h = 3$ см.

B

15. ABC учбурчакнинг B учидаги ташқи бурчагининг биссектрисаси билан C бурчагининг биссектрисаси $\frac{1}{2}(\angle A)$ га тенг бурчак билан кесишишини исботланг.

16. Параллелограммнинг икки томони нисбати 3:4 га тенг. Унинг периметри 28 см га тенг. Параллелограмм томонларини топинг.

17. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига туширилган медиана гипотенузанинг ярмига тенг бўлишини исботланг.

18. Ромбнинг периметри 16 см, баландлиги 2 см. Ромбнинг бурчакларини топинг.

19. Диагоналлари бўйича квадрат ясанг.

20. Ҳар бир бўлакларидан параллелограмм ясаш бўладигандек қилиб учбурчакни икки бўлакка бўлиш мумкин эканлигини исботланг.

21. Тенг ёнли трапециянинг асослари 17 см ва 27 см, ўткир бурчаги 60^0 га тенг. Трапециянинг периметрини топинг.

22. ABC учбурчак билан AB ва AC томонларининг ўрталари бўлган D ва E нуқталари берилган. Фақат чизғич ёрдамида BC томонининг ўртасини топинг.

23. Агар параллелограммга ички айлана чизиш мумкин бўлса, унинг ромб бўлишини исботланг.

24. Ҳар бири 5 кг бўлган икки куч ўзаро тўғри бурчак остида бир нуқтага таъсир этади. Уларнинг тенг таъсир этувчи кучини топинг.

25. Ромбнинг диагоналлари 10 см ва $10 \cdot \sqrt{3}$ см. Ромбнинг бурчакларини топинг.

26. Периметрлари бир хил бўлган тўғри тўртбурчаклар орасида квадратнинг юзи катта бўлишини исботланг.

27. Қўшни томонлари 4 см ва 7 см бўлган параллелограммнинг юзи 7 см^2 га тенг. Унинг баландлиги билан ўткир бурчагини топинг.

28. Учбурчакнинг a томони ва унга ёпишган α ва β бурчаклари бўйича унинг юзини топинг.

29. Юзи 594 м^2 бўлган трапециянинг баландлиги 22 м, асосларининг айирмаси 6 м. Трапециянинг асосларини топинг.

C

30. Узунлиги радиусига тенг ватарнинг учларидан айланага икки уринма ўтказилган. Шу уринмалар орасидаги бурчакни топинг.

31. n нинг қандай қийматида қавариқ n бурчакнинг диагоналлари сони n га тенг бўлади?

32. Параллелограммнинг қарама-қарши икки бурчагининг биссектрисалари параллел бўлишини исботланг.

33. Диагоналлари бурчакларининг биссектрисаси бўлган тўртбурчак ромб бўлишини исботланг.

34. Икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медиана бўйича учбурчак ясанг.

35. Тенг ёнли трапециянинг кичик асоси ён томонига тенг, катта асосидан эса икки марта кичик. Унинг бурчакларини топинг.

36. Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланалар диаметрлари йиғиндиси унинг катетлари йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

37. Қавариқ тўртбурчакнинг ташқи бурчаклари биссектрисалари орқали чизилган тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

38. Диагоналлари перпендикуляр бўлган тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари квадратларининг йиғиндиси ўзаро тенг бўлишини исботланг.

39. Квадратни тенг иккита бўлакка бўлганда қандай қилиб шу квадратдан иккинчи квадратни кесиб олиш мумкин?

40. Асоси a, ён томонига туширилган h баландлиги бўйича тенг ёнли учбурчакнинг юзини топинг.

I боб. ТЕКИСЛИКДАГИ ВЕКТОРЛАР

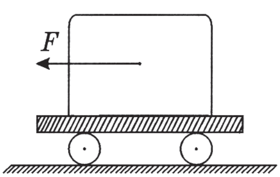
1-§. Вектор тушунчаси. Векторларнинг тенглиги

1.1. Вектор тушунчаси

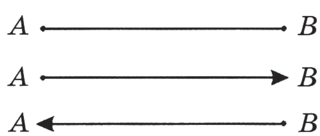
Биз ҳар хил катталикларни биламиз. Масалан: узунлик, юза, ҳажм, масса ва бошқалар (маълум ўлчов бирликларида) сон қийматлари билан тўлиқ аниқланади. Бундай катталикларни **скаляр катталиклар** деб аталади.

Кўплаган физик катталиклар, масалан, куч, моддий жисмнинг ҳаракати, тезлиги ва шунга ўхшаш катталиклар фақат миқдорий қиймати билан эмас, балки йўналиши билан ҳам аниқланади. Бундай катталиклар **вектор катталиклар** ёки оддийгина **вектор** деб аталади. Масалан: бирор бир жисмга маълум бир куч билан таъсир этилса, унда физика курсида бу куч «йўналтирилган кесма» деб аталади (1-расм). Бунда кесманинг узунлиги кучнинг сон қийматига мос келса, стрелка кучнинг таъсир йўналишини билдиради.

Шунга ўхшаш, геометрик вектор тушунчасини киритиш мумкин. Физика билан солиштирганда геометрик векторларнинг аниқ табиати қаралмайди (яъни векторларнинг бирор бир кучни, тезликни, ҳаракатни бошқа физикавий ёки бошқа катталикларни эътиборга олинмайди). Геометрик векторлар «йўналтирилган кесма» сифатида қаралади. Масалан: ҳар қандай кесманинг икки учи бўлишини яхши биламиз. Агар шу учларнинг бирини ***бошлангич нуқтаси*** ёки ***боши*** деб, иккинчисини эса – ***учи*** деб олсак, у ҳолда бу кесма йўналтирилган кесмага айланади. 2-расмда йўналтирилган кесманинг учи стрелка билан кўрсатилган (2-расм). Ҳақиқатан ҳар қандай кесмадан (боши ва учини танлаб олишга боғлиқ) икки турли йўналтирилган кесма олиш мумкин. Энди геометрик векторларни аниқлайлик.



1-расм

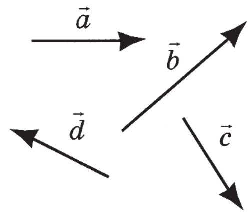


2-расм

1-таъриф. *Ихтиёрий йўналтирилган кесма* ***вектор*** *деб аталади.*

AB кесманинг A нуқтаси – бош нуқта, B нуқтаси эса – учи деб олсак, вектор $\overrightarrow{AB}$ деб белгиланади. Масалан: 2-расмда $\overrightarrow{AB}$

ва $\overrightarrow{BA}$ векторлар кўрсатилган. Шунинг учун $\overrightarrow{AB}$ вектор берилса, A нуқта – векторнинг боши, B учи бўлади. $\overrightarrow{BA}$ векторда аксинча, B нуқта – боши, A нуқта – учи бўлади. Векторлар лотин алфавитининг кичик ҳарфлари билан белгиланади: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ...



3-расм

Векторнинг боши унинг охири билан устма-уст тушиши мумкин. Бундай вектор *ноль вектор* деб аталади. Ноль вектор устига чизиқча қўйилган ноль $\vec{0}$ билан белгиланади. Текисликдаги исталган нуқтани ноль вектор деб қараш мумкин.

1.2. Векторларнинг тенглиги

AB кесманинг узунлиги $\overrightarrow{AB}$ векторнинг ***модули*** деб аталади ва $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ деб белгиланади. Шунга ўхшаш, $\vec{a}$ векторнинг модули (узунлиги) $|\vec{a}|$ билан белгиланади. Масалан: 2- ва 3-расмларда кўрсатилган векторларнинг модуллари қуйидагича бўлади: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{BA}\right| = 3$, $|\vec{a}| = 1,5$, $|\vec{b}| = 2,1$, $|\vec{c}| = 1,5$, $|\vec{d}| = 1,4$.

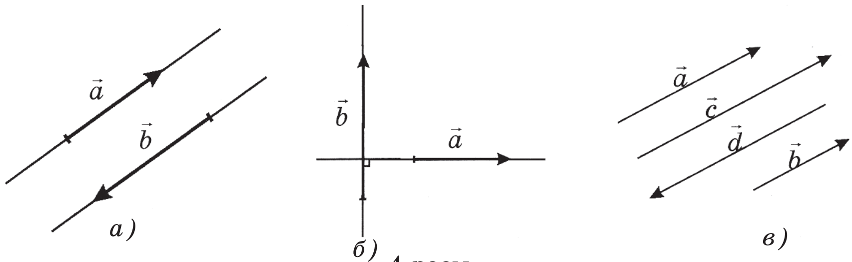
Агар AB кесма a тўғри чизиқда ётса, у ҳолда $\overrightarrow{AB}$ вектор a тўғри чизиқда ётади.

Агар икки вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётадиган бўлса, у ҳолда бу векторлар **коллинеар (чизиқли)** векторлар деб аталади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг коллинеарлиги $\vec{a} \parallel \vec{b}$ билан белгиланади (4,*а*-расм).

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқларда ётса,у ҳолда бу векторлар ***ўзаро перпендикуляр*** (***ортогональ***) векторлар деб аталади ва қуйидагича белгиланади: $\vec{a} \perp \vec{b}$ (4,*б*-расм).

Шунга ўхшаш, агар $\vec{a}$ вектор с тўғри чизиққа параллел (перпендикуляр) тўғри чизиқда ётса, у ҳолда $\vec{a}$ вектор билан $\vec{c}$ тўғри чизиқ параллел (перпендикуляр) деб аталади ва $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ($\vec{a} \perp \vec{c}$) билан белгиланади.

Агар коллинеар векторларнинг йўналишлари бир хил бўлса, у ҳолда бу векторлар **йўналишдош** векторлар



4-расм

деб аталади ва $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ кўринишда белгиланади. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар ва қарама-қарши йўналган бўлса, у ҳолда бу векторлар ***қарама-қарши йўналган векторлар*** деб аталади ва қуйидагича белгиланади: $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Умуман, ноль вектор ҳар қандай векторга коллинеар деб ҳисобланади. Бундай деб олишнинг сабаблари кейинги мавзуларда ўрганилади.

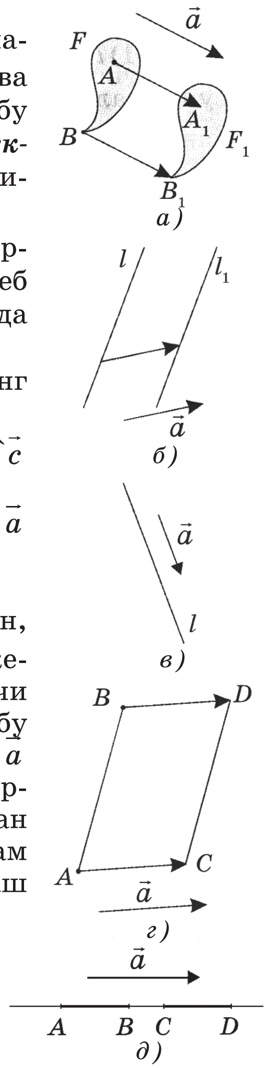
Бир хил йўналган векторларнинг қуйидаги хоссалари бор:

1°. Агар $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ва $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$ бўлади.

2°. Агар $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{d}$ ва $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{d}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}$

$\uparrow\uparrow\vec{b}$ бўлади.

Исботи. 1. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ва $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{c}$ бўлганидан, $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг коллинеарлиги келиб чиқади (агар икки тўғри чизиқ учинчи тўғри чизиққа параллел бўлса,у ҳолда бу тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади). $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг йўналишлари $\vec{b}$ векторнинг йўналиши билан бир хил бўлганидан $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг йўналишлари ҳам бир хил бўлади. 2-хосса ҳам шунга ўхшаш исботланади (4, *б*-расм).



5-расм

2-таъриф. Агар векторлар бир йўналишдош ва уларнинг узунликлари (модуллари) тенг бўлса, бу векторлар ***тенг векторлар*** деб аталади.

Ҳақиқатан, агар $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ва $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар тенг векторлар деб аталади ва қуйидагича белгиланади: $\vec{a} = \vec{b}$.

Фараз қилайлик, F ва F_1 фигуралар берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $A \in F$ нуқта билан $\vec{a}$, ($|\vec{a}| \neq 0$) вектор учун $A_1 \in F_1$ нуқта мавжуд бўлиб, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ тенглик бажарилса, у ҳолда F_1 фигура F фигурани $\vec{a}$ векторга нисбатан параллел кўчириш билан олинди дейилади (5, *а*-расм). F фигура $\vec{a}$ вектор ёрдамида F_1 фигурага кўчиши $\vec{a}$ векторга нисбатан параллел кўчириш ***алмаштириши*** деб аталади. $\vec{a}$ векторга параллел кўчиришда: 1) l тўғри чизиқ $l \nparallel \vec{a}$ бўлганда ўзига параллел тўғри чизиққа кўчади (5,*б*-расм), $l \parallel \vec{a}$ бўлганда ўз-ўзига кўчади (5,*в*-расм); 2) ҳар бир кесма ўзига тенг ва параллел кесмага (5,*г*-расм) (ёки ўзи билан бир тўғри чизиқда ётадиган кесмага (5,*д*-расм)) кўчади.

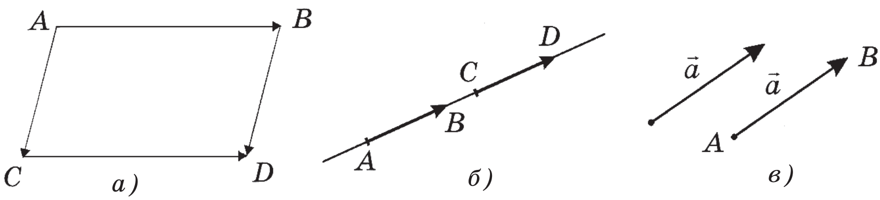
Умуман параллел кўчириш алмаштиришнинг бунга эквивалент таърифи билан хоссалари III-бобда тўлароқ қаралади.

1.3. Векторлар тенглигининг хоссалари

Теорема. *Ўзаро тенг векторларни қандайдир параллел кўчириш орқали устма-уст тушириш мумкин ва аксинча, параллел кўчириш орқали устма-уст тушувчи векторлар ўзаро тенг бўлади.*

Фараз қилайлик, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар ўзаро тенг бўлсин (6, *а*-расм). Таърифга асосан $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ва $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ бўлади, яъни $ABCD$ тўртбурчакнинг AB ва CD томонлари параллел ва узунликлари тенг. Бу тўртбурчак – параллелограмм. У ҳолда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, яъни $\overrightarrow{AB}$ векторни $\overrightarrow{CD}$ векторга параллел кўчириш орқали устма-уст тушириш бажарилса. Бу параллел кўчиришда A нуқта C нуқтага, B нуқта эса D нуқтага параллел кўчади.

Аксинча, $\overrightarrow{AB}$ векторни $\overrightarrow{CD}$ векторга параллел кўчириш орқали устма-уст тушириш мумкин бўлсин. Бунда A нуқта C нуқтага, B нуқта эса D нуқтага кўчсин. Параллел кўчиришнинг хоссаларига асосан $AC=BD$ ва $AC \parallel BD$ бўлади, яъни $ABCD$ – параллелограмм. Бундан $|\overrightarrow{AB}| \parallel |\overrightarrow{CD}|$ ва $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ эканлиги келиб чиқади. Параллел кўчиришда $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторларнинг боши бошига, учи учига кўчганидан $|\overrightarrow{AB}| \uparrow\uparrow |\overrightarrow{CD}|$ бўлади, яъни $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



6-расм

Агар $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар бир тўғри чизиқда ётса, бу теоремани исботлаш мураккаб эмас (бу ҳолни мустақил исботланг).

1-натижа. *Агар* $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ *бўлса, у ҳолда* $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, *бўлади (6, а, б-расмлар).*

Агар A нуқта $\vec{a}$ векторнинг боши бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ вектор A нуқтадан бошлаб қўйилган бўлади (6, *в*-расм).

2-натижа. *Ихтиёрий А нуқтадан бошлаб* $\vec{a}$ *векторга тенг ягона вектор қўйиш мумкин.*

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}$ векторнинг бош нуқтасини A нуқтага кўчирадиган фақат ягона параллел кўчириш мавжуд. Бу параллел кўчиришда олинадиган $\vec{a}$ векторнинг тасвири ҳам ягона ва бу тасвирни $\vec{a}$ векторга тенглиги теоремадан келиб чиқади.

Шундай қилиб, ҳар бир вектор маълум бир параллел кўчиришни билдиришини ва аксинча, ихтиёрий параллел кўчириш маълум бир вектор билан аниқланишини кўрдик.

?

1. Вектор катталик билан скаляр катталикнинг фарқи қандай?
2. Вектор нима? У қандай белгиланади?
3. Қандай векторлар коллинеар векторлар деб аталади? Йўналишдош ва қарама-қарши йўналган векторларга мисоллар келтиринг.
4. Қандай векторлар ўзаро тенг векторлар деб аталади?
5. Тенг векторлар билан параллел кўчириш орасида қандай боғланиш бор? Параллел кўчириш дегани қандай тушунасизлар?
6. Векторнинг узунлиги (модули) нима?
7. Ноль вектор қандай вектор?

ПТ

1. *а*) узунликлари бир хил, лекин коллинеар эмас;
б) узунликлари бир хил ва йўналишдош;
в) узунликлари бир хил ва қарама-қарши йўналган икки вектор чизинг.

г) *а*), *б*), *в*) саволларнинг қайси бирида чизилган векторлар ўзаро тенг бўлади? Жавобингизни исботлаб беринг.

2. Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$.) чизинг. О нуқтани белгиланг. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ тенгликлар ўринли бўладиган $OABC$ параллелограмм чизинг.
3. Дафтар чизиқлари билан устма-уст тушмайдиган ва $|\vec{a}|=3$ см ли $\vec{a}$ вектор чизинг. A нуқтани белгилаб, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ тенглик бажариладиган $ABCD$ квадрат чизинг. Бундай квадратларнинг нечтасини чизиш мумкин?

МАСАЛАЛАР

А

41. $ABCD$ параллелограммнинг диагоналлари O нуқтада кесишади. Бошлари ва учлари параллелограмм учлари билан O нуқтада бўлган: 1) BD тўғри чизиқда ётувчи; 2) AD тўғри чизиққа параллел; 3) $\overrightarrow{AB}$ векторга коллинеар; 4) $\overrightarrow{CB}$ векторга тенг; 5) $\overrightarrow{OC}$ векторга тенг векторларни топинг.

42. Тўғри чизиқда учта A, B, C нуқталар берилган бўлиб, B нуқта A ва C нуқталар орасида ётади. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлар орасидан бир хил йўналганларини ва қарама-қарши йўналганларини айтинг.

43. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг томонлари орқали берилган векторлардан: 1) коллинеар; 2) перпендикуляр; 3) тенг векторларни кўрсатинг.

44. Агар 1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, 3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ шартлари бажарилса, у ҳолда A, B, C нуқталар ўзаро қандай жойлашади?

45. ABC учбурчакнинг AD медианаси ўтказилган. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ тенглик ўринли бўладими?

46. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари O нуқтада кесишади. $AB = 6$ см, $AD = 8$ см бўлса, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$ векторларнинг узунлигини топинг.

47. ABC тенг ёнли учбурчакнинг A учидан асосига AD баландлик туширилган. 1) модуллари тенг; 2) ўзаро тенг; 3) ўзаро перпендикуляр векторлар жуфтларини кўрсатинг.

B

48. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг: $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, N нуқта – AB томонининг ўртаси бўлсин. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторларнинг модулларини топинг.

49. $ABCD$ трапецияда: $\angle A = 90$, $\angle D = 45°$, $AD = 12$ см, $AB = 5$ см. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ векторларнинг узунликларини топинг.

50. A ва B нуқталар берилган. $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$ тенгликни қаноатлантирувчи X нуқтани топинг.

51. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ва $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$; 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ бўлса, $ABCD$ тўртбурчак турини аниқланг.

52. C нуқтадан бошлаб $\vec{a}$ векторга тенг векторни қандай ясаш мумкин ($\vec{a}$ вектор билан C нуқта бир тўғри чизиқ ётган ва ётмаган ҳолларини қаранг).

53. Бир тўғри чизиқда ётмаган A, B, C, D нуқталар учун $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ тенглик бажарилса, AC ва BD кесмалар кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.

C

54. $ABCD$ тўртбурчакнинг диагоналлари O нуқтада кесишади. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ва 1) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$; 2) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$ ва $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}|$ бўлса, $ABCD$ тўтрбурчак қандай тўртбурчак?

55. 53-масалага тескари масалани, яъни AC ва BD кесмалар кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинса, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ тенглик ўринли бўлишини исботланг.

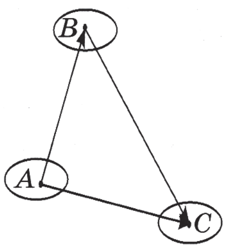
56. Шаҳардан бир вақтда 600 км/соат ва 800 км/соат тезлик билан чиққан икки самолётдан бири ғарбга, иккинчиси шимолга қараб учиб чиқди. 1 соатдан кейин самолётлар орасидаги масофа қандай бўлади?

57. 56-масала шартида самолётлар 2 соатдан кейин бурилиб, бир-бирига қарама-қарши учса (ҳар хил баландликда), улар қанча вақтдан сўнг учрашади?

2- §. Векторларни қўшиш ва айириш

2.1. Векторларни қўшиш

Фараз қилайлик, ихтиёрий бир жисм A нуқтадан B нуқтага, кейин B нуқтадан C нуқтага кўчсин. Бунда жисмнинг ўрин алмаштириши (ҳаракатланиши) параллел кўчириш бўлади. Мана шу икки параллел кўчириш $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлар билан ифодаланади. Бунда A нуқта C нуқтага кўчганини кўрамиз. Бу кўчиш натижасини $\overrightarrow{AC}$ вектор билан ифодалаш мумкин. (7-расм). Бу эса $\overrightarrow{AC}$ вектор билан ифодаланган параллел кўчириш $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлар билан ифодаланган параллел кўчиришларни кетма-кет қўйиш орқали ифодалаш мумкин. $\overrightarrow{AC}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторларнинг йиғиндиси бўлади:

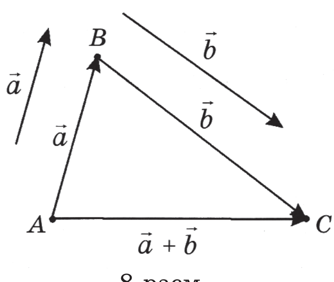


7-расм

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Шунга ўхшаш ихтиёрий икки векторнинг йиғиндиси аниқланади.

1-таъриф. *$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган. Текисликда A нуқта олиб, ундан $\vec{a}$ векторга тенг $\overrightarrow{AB}$ векторни, B нуқтадан эса $\vec{b}$ векторга тенг $\overrightarrow{BC}$ векторни қўямиз. Натижада ҳосил бўлган $\overrightarrow{AC}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси деб аталади: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (8-расм).*

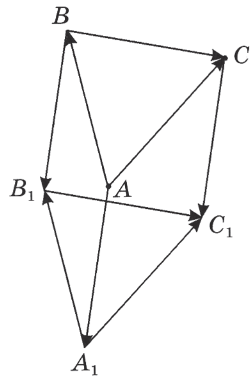


8-расм

Икки вектор йиғиндисини ҳосил қилишнинг бундай усули векторларни қўшишнинг «*учбурчак қоидаси*» деб аталади.

Энди векторларни қўшиш таърифида берилган A нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмаслигини кўрсатайлик.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ ва $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ тенгликлардан $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ тенглик келиб чиқишини аниқлайлик.



9-расм

Ҳақиқатан, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ тенгликдан 1-§ даги 1-натижага асосан $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB_1}$ тенглик бажарилади. Худди шундай $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ тенгликдан $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ тенглик бажарилади. Бундан $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. 1-натижага асосан $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ ўринли бўлиши керак (9-расм).

Векторларни қўшиш учбурчак қоидасига асосан ҳар бир $\vec{a}$ вектор учун $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ тенглик бажарилишини аниқлайлик.

Ихтиёрий A, B, C нуқталар учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ тенглик бажарилишини ҳам учбурчак қоидасидан келтириб чиқариш мумкин. A, B, C нуқталар бир-бири билан устма-уст тушишлари ҳам мумкин.

2.2. Векторларни қўшиш хоссалари

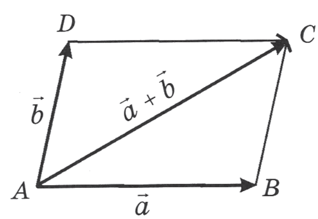
1-теорема. Ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар учун

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (ўрин алмаштириш қонуни);

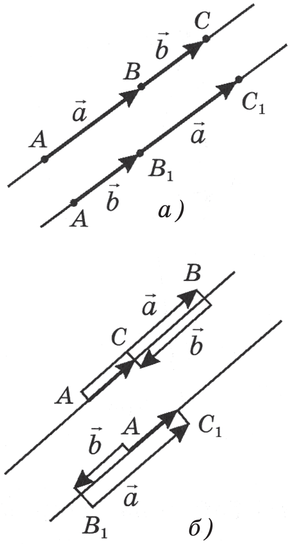
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{c}+\vec{b})$ (группалаш қонуни) бажарилади.

Исботи. 1) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлмасин. Текисликда берилган A нуқтадан $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ва $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторларни ўтказайлик. Унда $ABCD$ параллелограмм ҳосил бўлади(10-расм). Учбурчак қоидасига кўра, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$. Шунга ўхшаш, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Бундан $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ тенглик келиб чиқади.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ва $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторлар бир тўғри чизиқда ётади. (11-расм). У ҳолда $\overrightarrow{AB_1} = \vec{b}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{a}$ векторлар ҳам шу тўғри чизиқда ётади. C ва C_1 нуқталарнинг устма-уст



10-расм



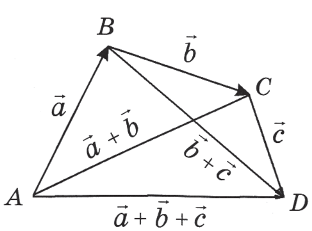
11-расм

тушишини исботлаш керак. Агар $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ бўлса, C ва C_1 нуқталарнинг устма-уст тушиши кесмаларнинг қўшиш қоидасидан келиб чиқади. (11,*а*-расм). Агар $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ бўлса, C ва C_1 нуқталарнинг устма-уст тушиши кесмаларнинг айириш қоидасидан келиб чиқади (11,*b*-расм).

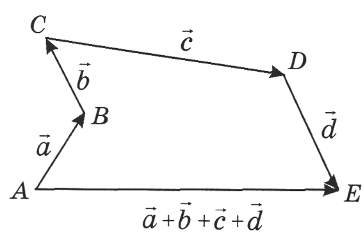
2) Текисликда A нуқтани белгилаб, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ва $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ векторларни қўямиз (12-расм). Унда $(\vec{a}+\vec{b})+$ $+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. Иккинчи томондан, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+$ $+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$. Бундан $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ тенглик келиб чиқади. Теорема исботланди.

1-хоссани исботланишида $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлмаганда $\vec{a}+\vec{b}$ йиғинди параллелограмм диагоналлари билан аниқланишини кўрдик, яъни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндисини топиш учун ихтиёрий A нуқтадан $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторларни ўтказиб, уни $ABCD$ параллелограммга тўлдирганда $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ бўлишини кўрдик. Векторларни қўшишнинг бу усули параллелограмм қоидаси деб аталади. Параллелограмм қоидаси кўпинча, физикада, масалан, икки кучни қўшишда фойдаланилади.

Векторларни қўшишнинг ўрин алмаштириш ва группалаш хоссаларидаги бир неча векторларни йиғиндисидаги қўшилувчиларнинг ўринларини ўзимиз хохлаганча алмаштириш, группалаш мумкин. Бу бир неча векторларни (иккитадан ортиқ) қўшишни осонлаштиради. Фараз қилайлик, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$

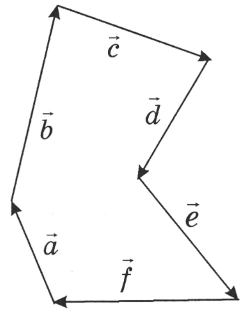


12-расм



13-расм

векторларни қўшайлик (13-расм). Ихтиёрий A нуқтадан бошлаб $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ ва $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$ векторларни қўямиз. Унда $ABCDE$ синиқ чизиқнинг бош ва охирги нуқталарини қўшсак, $\overrightarrow{AE}$ вектор берилган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ва $\vec{d}$ векторларининг йиғиндиси бўлади: $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

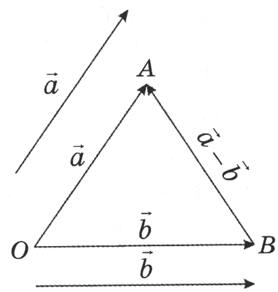


$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=0$

14-расм

Умуман, текисликдаги ҳар қандай A_1, A_2, ..., A_n нуқталар учун $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$ тенглик бажарилади. Векторларни бундай қўшиш усули кетма-кет қўшиш ёки кўпбурчаклар қоидаси деб аталади. Агар векторларни кетма-кет қўшиш вақтида ёпиқ синиқ чизиқ ҳосил бўлса, яъни биринчи векторнинг боши билан охирги векторнинг учи устма-уст тушса, у ҳолда бу векторларнинг йиғиндиси ноль вектор бўлади (14-расм).

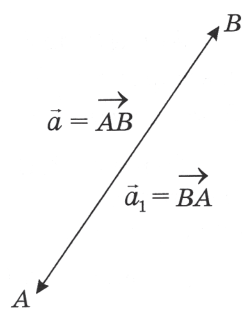
2.3 Векторларнинг айирмаси



15-расм

2-таъриф. *$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб $\vec{b}$ вектор билан йиғиндиси $\vec{a}$ векторга тенг бўлган векторга айтилади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси $\vec{a}-\vec{b}$ каби белгиланади.*

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси қуйидагича ясалади: ихтиёрий O нуқтадан $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ векторларни қўямиз. Ҳосил бўлган $\overrightarrow{BA}$ вектор $\vec{a}-\vec{b}$ айирмага тенг (15-расм). Чунки, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$ тенглик ўринли бўлади. Шунинг учун $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$ деб ёзиш мумкин. Расмдаги $\vec{a}-\vec{b}$ айирманинг стрелкаси $\vec{a}$ векторнинг учига қараб қўйилади.



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=0$

16-расм

Ноль бўлмаган ҳар бир $\vec{a}$ вектор учун $|\vec{a}|=|\vec{a}_1|$ ва $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}_1$ шартларни қаноатлантирувчи $\vec{a}_1$ вектор $\vec{a}$ векторга **қарама-қарши йўналган вектор** деб аталади. $\vec{a}$ га қарама-қарши вектор $-\vec{a}$ деб белгиланади: $\vec{a}_1 = -\vec{a}$. Ноль вектор ўз-ўзига қарама-қарши вектор деб олинади. $\vec{a}_1 - \overrightarrow{BA}$ векторга $\vec{a} - \overrightarrow{AB}$ қарама-қарши вектор бўлади (16-расм). Қарама-қарши векторларнинг йиғиндиси ноль вектор бўлади: $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$.

Аксинча, икки векторнинг йиғиндиси ноль вектор бўлса, бу векторлар қарама-қарши векторлар деб аталади.

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a} + \vec{a}_1 = 0$ бўлса, у ҳолда $|\vec{a}| = |\vec{a}_1|$ ва $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}_1$ бўлади, яъни $\vec{a}$ ва $\vec{a}_1$ – қарама-қарши векторлар.

Векторларнинг айирмасини уларнинг йиғиндисига келтириш мумкин. Ҳар қандай $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ тенглик ўринли бўлади.

15-расмда кўрсатилгандек $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ бўлсин. Учбурчак қоидасига кўра, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$. Шу билан бирга $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -\vec{b}$. Шунинг учун $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) = \vec{a} + (-\vec{b})$.

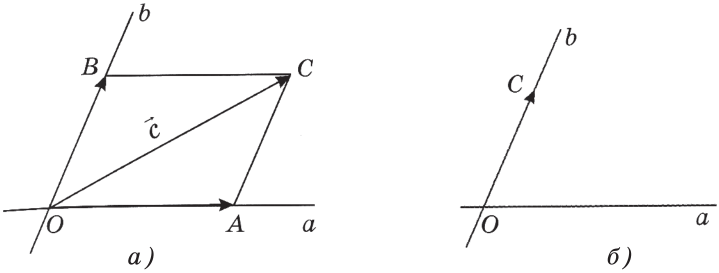
Бундан векторларни тенгликнинг иккинчи томонига ишорасини ўзгартириб ўтказиш мумкинлиги келиб чиқади: $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ дан $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ тенглик келиб чиқади.

2.4. Векторларни кесишувчи тўғри чизиқларда ётган ясовчиларнинг йиғиндисига ёйиш

3-таъриф. *Агар $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар $\vec{a}$ векторнинг* ***ясовчилари*** *деб аталади. Бунда $\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ ясовчиларга* ***ёйилган*** *деб аталади.*

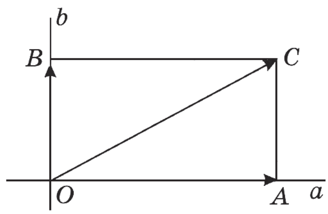
2-теорема. *Ўзаро кесишадиган икки тўғри чизиқ берилсин. Унда ихтиёрий векторнинг ясовчилари шу тўғри чизиқда ётадиган қилиб қўшилувчиларга ёйиш мумкин.*

Исботи. Фараз қилайлик, a ва b тўғри чизиқлар O нуқтада кесишсин. Берилган $\vec{c}$ векторни O нуқтадан бошлаб қўямиз: $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Унда a ва b тўғри чизиқлардан диагонали OC қилиб $OACB$ параллелограмм ясаймиз (17,*а*-расм). Параллелограмм қоидасига асосан, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. бунда $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ векторлар $\overrightarrow{OC} - \vec{c}$ га мос a ва b тўғри чизиқларда ётган ясовчилар бўлади.



17-расм

Биз $\overrightarrow{OC}$ вектор a ва b тўғри чизиқларда ётмайди деб олдик. Агар $\overrightarrow{OC}$ вектор a ёки b тўғри чизиқларнинг бирида ётса, у ҳолда бу векторнинг ясовчиларидан бири $\overrightarrow{OC}$ векторнинг ўзига тенг, иккинчиси эса ноль векторга тенг бўлади (17,*б*-расм). Теорема исботланди.



18-расм

Агар $\overrightarrow{OC}$ векторнинг ясовчилари ўзаро перпендикуляр ($\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$), бўлса, у ҳолда *OACB* тўғри тўртбурчак ва унинг OA ва OB томонлари *OC* диагоналнинг проекциялари бўлади (18-расм).

?

1. Векторларни қўшишнинг учбурчак ва параллелограмм қоидаларини айтинг.
2. Параллелограмм қоидаси векторни ўлчаб қўядиган нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмаслигини исботланг.
3. Векторларни қўшишнинг қандай хоссаларини биласиз?
4. Векторларнинг айирмаси қандай аниқланади?
5. Қандай векторлар қарама-қарши йўналган векторлар деб аталади?
6. Векторларни ўзаро кесишувчи тўғри чизиқлар бўйича қандай ясаш мумкин?

ПТ

1. Жуфт-жуфти билан ўзаро коллинеар бўлмаган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ векторларнинг: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{c}+\vec{d}$; в) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$; г) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$ йиғиндиларини ясанг.
2. Ўзаро коллинеар бўлмаган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларини олиб: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{c}-\vec{a}$; г) $-\vec{b}$; д) $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$ векторларни ясанг.

3 Ўзаро коллинеар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$) векторлар олиб: $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{b}+\vec{c}$; в) $\vec{a}-\vec{b}$; г) $\vec{a}-\vec{c}$ векторларни ясанг.

МАСАЛАЛАР

А

58. $ABCD$ тўртбурчак берилган: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ тенгликларни исботланг.

59. $ABCD$ параллелограммда: 1) $\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{DA}$ қандай векторларнинг йиғиндиси эканлигини аниқланг; Қўшилувчи векторларнинг учлари параллелограмм учларида ётиши керак.

60. Қуйидаги векторларнинг йиғиндисини топинг: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$; 3) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN}$; 4) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}$.

61. Қуйидаги векторларнинг йиғиндисини топинг: 1) $\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}$; 3) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RO}$.

62. $\overrightarrow{BC}$ векторни $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторлар орқали ифодаланг.

63. ABC учбурчакнинг BC томонидан D нуқта олинган. $\overrightarrow{BD}$ векторни $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AD}$ векторлар орқали ифодаланг.

64. $ABCD$ параллелограмм берилган: 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$ айирмани топинг.

65. Қуйидаги векторларнинг айирмасини топинг: 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}$; 4) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{CD}$; 5) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN}$.

66. $ABCD$ параллелограмм берилган: 1) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ векторларни ясанг.

67. $ABCD$ параллелограмм берилган: 1) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{AC}$; 2) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})-\overrightarrow{OD}$ векторларни топинг. O – параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси.

B

68. ABC учбурчакда AB=6 см, BC=8 см, $\angle B$=90°. 1) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$

ва $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ ва $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{BC}|$ ва $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$;

4) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$ ва $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$ ларни топинг.

69. Самолет аввал шимолга қараб 200 км, сўнгра шарққа қараб 300 км учди. Самолётнинг учган йўлини векторлар билан белгилаб, унинг учиб чиққан ердан қанча масофага узоқлашганини аниқланг.

70. Эни a бўлган дарёни йўловчи қайиқда оқим йўналишига перпендикуляр ҳолда сузиб ўтмоқчи бўлди. Агар оқим тезлиги v_1, қайиқнинг тезлиги эса v_2 бўлса, дарё оқими қайиқнинг чиққан жойидан қанча масофага олиб кетади? Қайиқ йўлининг узунлигини қандай аниқлаш мумкин?

71. 1) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD})$; 2) $(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-$ $-(\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KD})$ ифодаларни соддалаштиринг.

72. ABC учбурчакда $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ деб: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ векторларни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан ифодаланг.

73. H ва N нуқталар мос равишда ABC учбурчакнинг AB ва AC томонларининг ўрталари. $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{HN}$, $\overrightarrow{BN}$ векторларни $\vec{a}=\overrightarrow{AH}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$ векторлар билан ифодаланг.

74. $ABCD$ параллелограмм диагоналлари O нуқтада кесишади. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$ векторларни $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ векторлар билан ифодаланг.

75. И.А.Криловнинг оққуш, чўртан балиқ ва қисқичбақа ҳаракатларини векторлар билан тасвирланг.

76. Томонлари a бўлган ABC учбурчак берилган: 1) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$; 4) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; 5) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$ ларнинг қийматини топинг.

77. Ҳар қандай $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун: 1) $|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}-\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$; тенгсизликларнинг ўринли бўлишини исботланг. Қандай шарт бажарилса тенглик ўринли бўлади?

78. *ABCD* параллелограмм берилган. *P* ва *O* нуқталар *BC* ва *CD* томонларнинг ўрталари бўлса: 1) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{PO}$ векторларнинг *AB* ва *AD* тўғри чизиқларда олинган ясовчилари бўйича ясанг; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторларнинг *AP* ва *AO* тўғри чизиқларда олинган ясовчилари бўйича ясанг.

79. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг бошларини бир нуқтадан чиқаринг. 1) $\vec{b}$ векторни $\vec{a}$ нинг ясовчиси деб олиб, иккинчи ясовчиси $\vec{c}$ векторни ясанг; 2) аксинча, $\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ нинг ясовчиси деб олиб, $\vec{b}$ нинг иккинчи ясовчиси $\vec{d}$ векторни ясанг. $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторлар ўзаро қандай жўйлашган?

80. Узунлиги 10 га тенг векторнинг модуллари 1) 1 га; 2) 100 га тенг бўлган ясовчиларга ёйиш мумкинми?

C

81. *ABCD* параллелограмм берилган. Текисликдаги ҳар қандай *X* нуқта учун $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$ тенглик ўринли бўлишини исботланг.

82. Қайиқ v_1 тезлик билан шарққа қараб йўл олди. Агар шимолдан эсаётган шамолнинг тезлиги v_2 бўлса, сув v_3 тезлик билан жанубий-шарққа қараб оқаётган бўлса, қайиқнинг қандай йўналишда сузишини аниқланг.

83. *ABC* учбурчакнинг ташқи томонида унинг томонларидан *AKLB, BMNC, CPQA* параллелограммлар чизилган: *а*) *LM, NP, QK;* *б*) *LP, MQ, NK* кесмалардан учбурчак ясаш мумкинми? Ясалган учбурчакларнинг томонлари мос кесмаларга параллел бўлиши керак.

84. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$, $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторлар орасидаги бурчак 120°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ бўлса, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ тенглик ўринли бўлишини исботланг.

85. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ортогонал, $\vec{a}$ ва $\vec{c}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар орасидаги бурчак 135^0. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=\sqrt{2}$ бўлса, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ тенглик ўринли бўлишини исботланг.

86. *ABCD* қавариқ тўртбурчак томонларининг ўрталари мос равишда *P, Q, R, K* билан белгиланган. Шу текисликнинг ҳар қандай O нуқтаси учун $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OK}$ тенглик ўринли бўлишини исботланг.

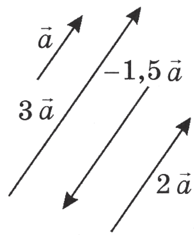
87. $ABCD$ трапециянинг $\angle A=90^\circ$, $\angle ACB=45^\circ$ ва $\angle ACD=90^\circ$ бўлса, $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}|$ ни топинг. Бунда $AB=a$.

3-§. Векторни сонга кўпайтириш

3.1. Векторларни сонга кўпайтириш ва унинг хоссалари

Таъриф. *$\vec{a}\neq\vec{0}$ векторнинг k сониги кўпайтмаси деб модули $|k|\cdot|\vec{a}|$га тенг ва йўналиши $k>0$ ҳолда $\vec{a}$ вектор йўналиши билан бир хил, $k<0$ ҳолда $\vec{a}$ векторнинг йўналиши билан қарама-қарши йўналган векторга айтилади. k сони билан $\vec{a}$ векторнинг кўпайтмасини $k\cdot\vec{a}$ деб белгиланади.*

Агар $k=0$ бўлса, $0\cdot\vec{a}=0$ бўлади. 19-расмда $\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $2\vec{a}$ векторлар тасвирланган.



19-расм

1-Теорема. *Ҳар қандай α, β сонлари билан $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун:*

1°. $(\alpha\cdot\beta)\,\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ (группалаш қонуни);

2°. $(\alpha+\beta)\,\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (I тақсимот қонуни)

3°. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (II тақсимот қонуни)

тенгликлар ўринли бўлади.

Исботи. 1°. Агар $\alpha\beta>0$ бўлса, α ва β сонларнинг ишоралари бир хил бўлса, $(\alpha\cdot\beta)\,\vec{a}$ ва $\alpha(\beta\vec{a})$ векторлар $\vec{a}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлади, α ва β сонларининг ишоралари ҳар хил бўлса, $(\alpha\cdot\beta)\,\vec{a}$ ва $\alpha(\beta\vec{a})$ векторлар $\vec{a}$ вектор йўналиши билан қарама-қарши йўналган бўлади. Ҳар қандай α, β сонлар учун $(\alpha\cdot\beta)\,\vec{a}$ ва $\alpha(\beta\vec{a})$ векторлар ўзаро бир хил йўналган бўлади. $(\alpha\cdot\beta)\,\vec{a}$ ва $\alpha(\beta\vec{a})$ векторларнинг модуллари $|(\alpha\cdot\beta)\,\vec{a}|=|\alpha\beta|\cdot|\vec{a}|=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$; $|\alpha(\beta\vec{a})|=|\alpha|\,|\beta\vec{a}|=$ $=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$ тенглик келиб чиқади.

2°. $\vec{a}\neq0$, $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ бўлса, $(\alpha+\beta)\,\vec{a}$ ва $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ векторлар бир хил йўналган ва модуллари тенг бўлишини исботлайлик. Икки хил усул бўлиши мумкин: *а*) α ва β сонларининг ишоралари бир хил; *б*) α ва β сонларининг ишоралари ҳар хил.

а) α ва β сонларнинг ишоралари бир хил бўлсин. У ҳолда

$$|(\alpha+\beta)\vec{a}\,| = |\alpha+\beta|\cdot|\vec{a}|. \qquad (1)$$

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ векторнинг узунлиги $\alpha>0$, $\beta>0$ бўлганда $(\alpha+\beta)\cdot|\vec{a}|$ га тенг, $\alpha<0$, $\beta<0$ бўлганда $(-\alpha-\beta)\cdot|\vec{a}|$ га тенг бўлади. У ҳолда

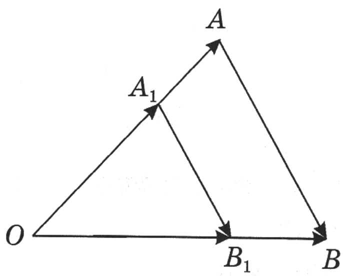
$$|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}| = |\alpha+\beta|\cdot|\vec{a}|. \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгликлардан $(\alpha+\beta)\vec{a}$ ва $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ векторларнинг узунликлари бир хил бўлади. Бу векторлар бир хил йўналганлигини аниқлайлик.

Ҳақиқатан ҳам, $\alpha>0$, $\beta>0$ бўлгандан, $(\alpha+\beta)\vec{a}$ ва $\alpha\vec{a}++\beta\vec{a}$ векторлар $\vec{a}$ вектор билан бир хил йўналади, $\alpha<0$, $\beta<0$ бўлганда бу векторлар $\vec{a}$ вектор билан қарама-қарши йўналади.

Яъни $(\alpha+\beta)\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ бўлади.

б) $\alpha\cdot\beta<0$ бўлганда шунга ўхшаш исботланади.



20-расм

3°. OA_1B_1 ва OAB учбурчакларда $\overrightarrow{A_1B_1}\parallel\overrightarrow{AB}$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\alpha$ бўлсин. Пропорционал кесмаларнинг хоссасига асосан, $\dfrac{OA}{OA_1}=\dfrac{OB}{OB_1}=\alpha$ тенглик ўринли бўлади. Агар $OA_1=\vec{a}$, $A_1B_1=\vec{b}$ деб олсак, $\overrightarrow{OB_1}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ ўринли бўлади. Иккинчи томондан,

$\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{OA_1}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{A_1B_1}=\alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ тенглик ҳосил бўлади. Бундан $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ эканлиги келиб чиқади. Агар α сони билан $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда бу хоссаларни исботлаш осон бўлади.

3.2. Векторларнинг коллинеарлик аломати

Векторларни сонга кўпайтиришни фойдаланиб, векторларнинг коллинеарлик белгисини исботлаш мумкин.

2-теорема. *$\vec{b}$ вектор нолдан фарқли $\vec{a}$ векторга коллинеар бўлиши учун шундай α сони мавжуд бўлиб, $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ тенгликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурлиги. Агар $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлса, шундай α сони мавжуд бўлиб, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботлаш керак. Икки хил усулда исботланади.

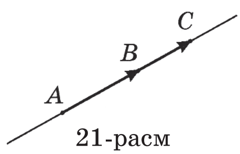
1) Агар $\vec{b} = 0$ бўлса, $\alpha=0$ да, $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} = 0$ тенглик ҳосил бўлади.

2) Агар $\vec{b} \neq 0$ бўлсин. *а*) агар $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ бўлса, $\alpha = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ дан $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ тенглик ҳосил бўлади, чунки $\vec{b} \uparrow\uparrow \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ ва $|\vec{b}| = \left|\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

б) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ бўлса, $\alpha = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ дан $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ тенглик ҳосил бўлади.

Етарлилиги. Агар $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ бўлса, таърифга асосан $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлади. Теорема исботланди.

Натижа. *С нуқта АВ тўғри чизиқда ётиши учун шундай* α сони мавжуд бўлиб, $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ тенглик бажарилиши зарур ва етарли.



21-расм

?

1. Агар: 1) $\vec{a} = 0$; 2) $k=0$ бўлса, $k \cdot \vec{a}$ кўпайтма қандай бўлади?
2. Нолдан фарқли векторни нолдан фарқли сонга қандай кўпайтирилади?
3. Векторларни сонга кўпайтиришнинг қандай хоссаларини биласиз?
4. Коллинеар векторларнинг аломатини исботланг.
5. *A*, *B* ва *C* нуқталар бир тўғри чизиқда ётиши учун қандай шарт бажарилиши зарур ва етарли?

ПТ Коллинеар бўлмаган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардан: *а*) текисликда *O* нуқтадан $3 \cdot \vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{b}$; $0{,}4\vec{c}$ векторларни ясанг.

б) $2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $3\vec{b} - 2\vec{c}$ векторларни бошқа бир *A* нуқтадан бошлаб ясанг.

МАСАЛАЛАР

А

88. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан α ва β сонлар берилган. $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг **чизиқли комбинацияси** деб аталади. 1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{0}$ векторлар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси бўладими? 2) Агар $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлса, бу векторларнинг чизиқли комбинацияси $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга нисбатан қандай жойлашади?

89. C нуқта AB тўғри чизиқда ётиши учун қандай шарт бажарилиши керак?

90. Коллинеар бўлмаган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар берилган. α ва β сонлар мавжуд бўлиб, $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

91. Агар $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$ бўлса: 1) $2\vec{x}-2\vec{y}$; 2) $2\vec{x}+\dfrac{\vec{y}}{2}$; 3) $-\vec{x}-\dfrac{\vec{y}}{3}$ векторларни $\vec{m}$ ва $\vec{n}$ векторлар орқали ифодаланг.

92. $ABCD$ параллелограммнинг диагоналлари O нуқтада кесишади. E нуқта CD томоннинг ўртаси. 1) $\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{AE}$ векторларни $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AD}$ векторлар орқали ифодаланг.

93. $ABCD$ квадратнинг диагоналлари O нуқтада кесишади. E ва K нуқталар мос равишда AB ва AD томонларнинг ўртаси. 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{OD}$; 4) $\overrightarrow{KE}$; 5) $\overrightarrow{ED}$; 6) $\overrightarrow{KC}$ векторларни $\overrightarrow{AE}$ ва $\overrightarrow{AK}$ векторлар орқали ифодаланг.

В

94. N нуқта $ABCD$ параллелограммнинг BC ётади ва BN : NC =3: 1 шарт бажарилса, $\overrightarrow{AN}$ ва $\overrightarrow{ND}$ векторларини $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ векторлар орқали ифодаланг.

95. $ABCD$ параллелограммнинг диагоналлари O нуқтада кесишади, N нуқта AD томонини $AN : ND = 1 : 2$ нисбатда бўлади: 1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$; 2)

$\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{ON}$ векторларни $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$ ва $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ векторлар орқали ифодаланг.

96. *Агар:* 1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$; 3) $|2\vec{a}-3\vec{b}|=$ $=2|\vec{a}|+3|\vec{b}|$ тенгликлар ўринли бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар қандай жойлашади?

97. A ва B векторлар берилган: 1) $\overrightarrow{XA}=3\overrightarrow{XB}$; 2) $\overrightarrow{BX}=-\overrightarrow{AX}$; 3) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{AB}$ тенгликлар бажарилса, X нуқтанинг жойлашиш ўрнини топинг.

98. O нуқта ABC учбурчакнинг AD медианасининг ўртаси бўлсин. $\overrightarrow{AO}$ векторни $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ векторлар орқали ифодаланг.

99. $ABCD$ параллелограммнинг BC томонини H нуқта $BH : HC = 1 : 4$ нисбатда бўлади. $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HD}$ векторларни $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторлар орқали ифодаланг.

100. $PQRT$ ромбнинг QR томони $QK=5\cdot KR$ шарт бажариладиган қилиб K нуқта, PQ томоннинг ўртаси қилиб E нуқта олинган. $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{KE}$ векторларни $\overrightarrow{TP}=\vec{m}$ ва $\overrightarrow{TR}=\vec{n}$ векторлар орқали ифодаланг.

C

101. P ва O нуқталар $ABCD$ тўртбурчакнинг AC ва BD диагоналларининг ўртаси бўлса, $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)$ тенгликни исботланг.

102. Томонлари берилган ABC учбурчакнинг мос медианаларига параллел ва тенг учбурчак ясаш мумкинми?

103. Трапеция диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи кесма унинг асосларига параллел ва асослари айирмасининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

104. Ҳар қандай тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари ўрталарини туташтирувчи кесмалар кесишадиган нуқтада тенг иккига бўлинишини исботланг.

105. A, B ва C нуқталар $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ шартга асосан жойлашган. Ихтиёрий O нуқта учун $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ тенглик бажарилишини исботланг.

4-§. Векторлар орасидаги бурчак. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

4.1. Векторлар орасидаги бурчак тушунчаси

Таъриф. *$\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторларнинг орасидаги бурчак деб BAC бурчакка айтилади.*

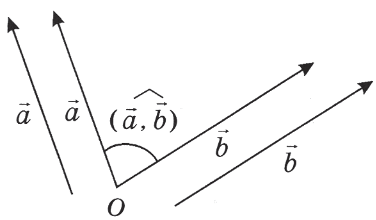
Нолдан фарқли $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак деб уларни бир нуқтадан бошлаб қўйганда ҳосил бўладиган бурчакка айтилади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчакни $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ билан белгиланади (22-расм). 23-расмда кўрсатилгандек, тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатларидан векторлар орасидаги бурчак уларни ўлчаб қўядиган нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмас эканлигини кўрамиз.

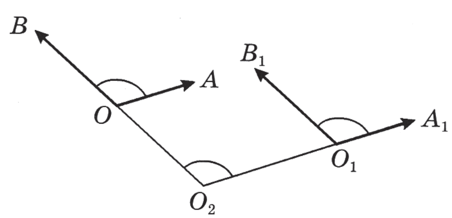
Йўналишдош векторлар орасидаги бурчак $0°$ га тенг, қарама-қарши йўналган векторлар бурчак $180°$ га тенг бўлади.

4.2. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Таъриф. *Икки векторларнинг **скаляр кўпайтмаси** деб, векторларнинг модулларини улар орасидаги бурчакнинг косинусига кўпайтмасига тенг сонга айтилади, яъни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси* $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos((\widehat{\vec{a},\vec{b}}))$ га тенг.



22-расм



23-расм

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a}\cdot\vec{b}$ билан белгиланади. Шундай қилиб, агар $\varphi = ((\widehat{\vec{a},\vec{b}}))$ бўлса,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (1)$$

бўлади.

Тенг векторларнинг скаляр кўпайтмаси шу векторнинг скаляр квадрати деб аталади ва $\vec{a}^{\,2}$ билан белгиланади. (1) формулага асосан $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2$, яъни $\vec{a}^{\,2}=|a|^2$ тенглик бажарилади.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ортогонал (перпендикуляр) бўлса, у ҳолда $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90^\circ$ бўлиб, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^\circ=0$ бўлади. Аксинча, нолдан фарқли $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ бўлса, у ҳолда (1) формулага асосан $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 0^\circ=0$. Бунда $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{b}|\neq 0$ бўлганлигидан, $\cos\varphi=0$, яъни $\cos\varphi=90^\circ$ тенглик бажарилиши керак. Шу билан бирга Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлиши учун $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли бўлишини кўрсатдик.

Векторларнинг скаляр кўпайтмасининг қуйидаги хоссалари бор:

1°. *Ҳар бир* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторлар учун*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

тенглик ўринли бўлади.

2°. *Ҳар бир* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ва* α *векторлар учун*

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

тенглик бажарилади.

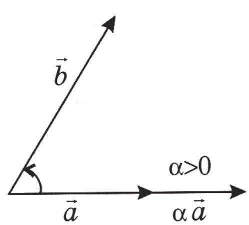
3°. *Ҳар бир* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ва* $\vec{c}$ *векторлар учун*

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

тенглик бажарилади.

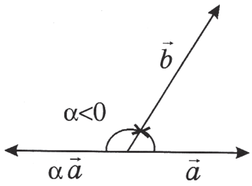
1°- ва 2°- хоссаларнинг исботи таърифдан ((1) формула) келиб чиқади. Масалан, 2° - хоссани исботлашни кўрайлик.

Агар $\alpha>0$ бўлса, $\vec{a}\uparrow\uparrow\alpha\vec{a}$ бўлиб, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ $=(\widehat{(\alpha\vec{a}),\vec{b}})$ тенглик бажарилади (24-расм). Шундай қилиб, $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\alpha\vec{a},\vec{b}})=$ $=|\alpha||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\times\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\alpha|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}))=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.



24-расм

Агар $\alpha<0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}\uparrow\downarrow\alpha\vec{a}$ бўлиб,($(\widehat{\alpha\vec{a}),\vec{b}})=180^\circ-(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ тенглик ўринли бўла



25-расм

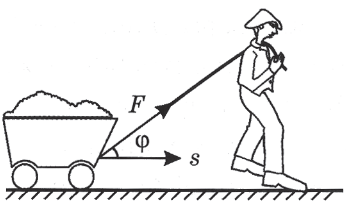
ди (25-расм). Бундан $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=|\alpha\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\times$ $\times\cos(\widehat{\alpha\vec{a},\vec{b}})=|\alpha|\quad|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(180^\circ-(\widehat{\vec{a},\vec{b}}))=$ $=-|\alpha||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\alpha|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ $=\alpha(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Бу ерда $-|\alpha|=\alpha$ экани эътиборга олинди.

3°- хоссанинг бажарилишини кейинги мавзуларда қараймиз.

4.3. Векторларнинг баъзи бир қўлланишлари

Векторларнинг скаляр кўпайтмасини амалда қўлланилишига мисолларни физика курсидан биламиз. Масалан, механикада жисмнинг $\vec{s}$ йўл билан ҳаракатлантириш учун $\vec{F}$ куч таъсир этса, у ҳолда бажарилган А иш



26-расм

$$A=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\varphi$$

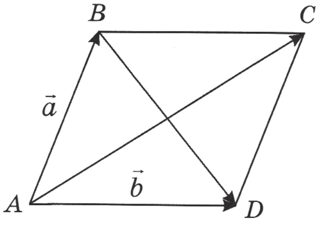
– формула билан аниқланади (26-расм).

1-масала. Агар $|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$ бўлса, $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўладиган ҳолни кўрайлик.

Ечилиши. Бунинг учун $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботлаш етарли. Ҳақиқатан ҳам, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=$ $=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$.

2-масала. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг. Шуни исботланг.

Ечилиши. *ABCD* параллелограммда $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ деб олайлик (27-расм). Унда $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+$ $+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$ ва $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ тенгликлар тўғри бўлади. Бундан



27-расм

$AC^2=\overrightarrow{AC}^{\,2}=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\,\vec{b}=$ $=\overrightarrow{AB}^{\,2}+\overrightarrow{AD}^{\,2}+2\vec{a}\,\vec{b}=\overrightarrow{AB}^{\,2}+\overrightarrow{AD}^{\,2}+2\times$ $\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $BD^2+\overrightarrow{BD}^{\,2}=(\vec{b}-\vec{a})^2=\vec{a}^{\,2}+$ $+\vec{b}^{\,2}-2\vec{a}\,\vec{b}=\overrightarrow{AB}^{\,2}+\overrightarrow{AD}^{\,2}-2\vec{a}\,\vec{b}=\overrightarrow{AB}^{\,2}+$ $+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ тенглик ҳосил бўлади. Уларни ҳадма-ҳад қўшадиган бўлсак, у ҳолда $AC^2+BD^2=AB^2+AD^2+AB^2+AD^2=$ $=AB^2+BC^2+BC^2+AD^2$ тенглик келиб чиади. Бу ерда $AD=BC$, $AB=CD$ тенгликлар қўлланилди.

Векторларга қўлланиладиган амалларни ўрганадиган математиканинг бўлими вектор алгебраси деб аталади. Бу бўлимда ўрганилган векторларга қўлланилган амаллар вектор алгебрасининг асосини ташкил этади. Вектор алгебраси аппаратлари геометрия ва физика масалаларини ечишда қулай. Ҳар бир масала векторлар ёрдамида ечилиш процессини уч босқичга бўлиб қараш керак.

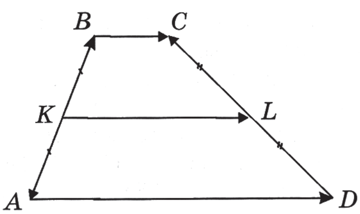
1-босқич. *Қулайли ҳолда векторлардан фойдаланиб, масала шартини векторлар орқали ёзиш керак.*

2-босқич. *Вектор кўринишида ёзилган масала шартини ўзгартириб, берилган масаланинг ечимини вектор кўринишда ёзиш керак.*

3-босқич. *Вектор кўринишда олинган жавобни масаланинг дастлабки берилган шартига келтириб ёзиш керак.*

3-масала. Трапеция диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи кесма унинг асосларига параллел ва асослари йиғиндисининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

Ечилиши. $ABCD$ трапециянинг асослари AD ва BC, ўрта чизиғи KL бўлсин (28-расм) K нуқта AB томон ўртаси деганни вектор кўринишда $\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$ тенглик билан, L нуқта CD томон ўртаси деганни вектор кўринишда $\overrightarrow{LD}=-\overrightarrow{LC}$ тенглик билан ва $AD\|BC$ бўлганидан $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ кўринишда ёзамиз (1-босқич).



28-расм

$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=0$ ва $\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{LD}=0$. Шу билан бирга $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+$ $+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}$ ва $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}$ тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб $2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ тенгликни оламиз. Бундан $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ тенглик келиб чиқади (2-босқич).

Сўнгра (3-босқич), $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ эканлигидан, $\overrightarrow{KL}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{KL}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ эканлигидан, яъни $\overrightarrow{KL}\|\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KL}\|\overrightarrow{BC}$ эканлигини аниқлаймиз. Шу билан бирга, $\overrightarrow{AD}\|\overrightarrow{BC}$ бўлганидан $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|=$

$=|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|=AD+BC$ тенгликдан $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ тенглик келиб чиқади. Шуни исботлаш талаб этилган эди.

Т Векторли масалалар ривожланиши тарихи асосан уч йўналишда юз берди: геометрик (йўналган кесмалар масаласи), алгебраик ва физик йўналишда.

Йўналган кесмалар масалаларининг асосчиси норвегиялик Каспар Вессель (1745-1818) бўлди. У ҳаётининг кўп йилларини Дания фанлар Академиясида геодезист, картограф ва ер ўлчовчи вазифасини бажариш билан ўтказган. Шунинг учун ўз меҳнатларини алгебраик катталиклар ва йўналишлар бўйича кесмани аниқлашга бағишлаган, геодезист-ер ўлчовчилар меҳнатларини осонлаштириш мақсадида қулайли «геометрик масалалар» тузишга ҳаракат қилган.

Векторли масалаларни янада ривожланишига инглиз математиги Уильям Гамильтон (1805-1865) ва немис олими Герман Грассман (1809–1877) катта ҳисса қўшган. У. Гамильтон векторли масалаларнинг ҳозирги кундаги даражагача ривожланишининг алгебраик асоси бўлган комплекс сонлар алгебраси ва бошқа назарияларнинг асосини ташкил қилади. У ўзининг ишларида биринчи бўлиб «вектор» тушунчасини (лотинча *vektor* – «кўчирувчи» маъносида қўлланилади, вектор нуқтани унинг бош нуқтасидан учига қараб кўчиришни тасвирлайди) ва «скаляр» тушунчасини (лотинча *scalaris* – босқич, поғона сўзидан тузилган, бу ҳақиқий сонлар тўплами тартиблик муносабатини, яъни ҳақиқий сонларни бир-бири билан таққослаш мумкинлигини билдиради) киритган. Гамильтон билан бир вақтда ва мустақил ҳолда Грассман ҳам ўз ишларида геометрик нуқтаи назардан векторли масалалар асосини тузди.

Векторларни ўрганишнинг учинчи босқичи табиатшунослик фанларининг эҳтиёжидан ҳосил бўлди. Масалан, XIX асрнинг биринчи ярмида векторли масалалар ривожланишининг бу интилиши француз механик-олими Сен-Венан (1797-1886) ишларида, таниқли рус олими И.И. Сомовнинг (1815-1876) «Рационал механика» асарида, буюк инглиз олими электромагнит майдон назариясининг асосини яратган олимлардан бири Джеймс Кларк Максвелл (1831-1879) ишларида ва бошқа таниқли олимларнинг ишларида давом эттирилди.

Гамильтон ўзгармас векторларни ўрганадиган векторли алгебра билан бирга ўзгарувчан векторларни, функцияларни ўрганадиган векторли анализ асосини яратди. Векторли масалалар XIX асрнинг охирларида системали ҳолда электромагнит майдон назарияси ва гидромеханикада, XX асрда эса назарий механикада, аналитик геометрия билан дифференциал геометрияда системали ҳолда қўлланила бошланди.

?

1. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторлар орасидаги бурчак қандай аталади?
2. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак қандай аниқланади?
3. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб нимага айтилади? Век-

торларнинг скаляр кўпайтмасининг жавоби сон бўладими ёки вектор бўладими?

4. Скаляр кўпайтманиг хоссаларини айтинг.
5. Икки вектор перпендикуляр бўлиши учун қандай шарт бажарилиши зарур ва етарли?
6. Векторли алгебра элементларидан фойдаланиш асосларини айтинг.

ПТ Бош нуқталари ҳар хил ва орасидаги бурчак: *а*) 30^0; *б*) 45^0; *в*) 60^0; *г*) 90^0; *д*)180^0 бўлган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни ясанг. Жавобини, уларни бир нуқтага параллел кўчириш орқали транспортирда текширинг.

МАСАЛАЛАР

А

106. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак 1) ўткир; 2) ўтмас бўлса, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасининг ишораси қандай бўлади? Жавобингизни асосланг.

107. Агар $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтма: 1) мусбат; 2) нолга тенг; 3) манфий бўлса, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ бурчак қандай бўлади?

108. Агар $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ ва $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ бурчак: 1) *а*) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 150° бўлса, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

109. Агар $\vec{a} \cdot \vec{b}$ бирлик векторлар учун $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \varphi$ бўлса, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\varphi$ тенглик ўринли бўлишини аниқланг.

110. Жадвални тўлдиринг:

$\lvert\vec{a}\rvert$	5	$\sqrt{3}$	0,5		a
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	2		2	b
$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	0,6		0,8	0,5	
$\vec{a} \cdot \vec{b}$		3	4	5	$0,5\ a \cdot b$

111. Томони 1 га тенг *ABCD* бўлган квадрат берилган. Ҳисобланг:

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
5) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; 7) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$; 8) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$

112. Томони 1 га тенг бўлган ABC тенг томонли учбурчак берилган. 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; 3) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$; 4) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$ ни ҳисобланг.

B

113. Жадвални тўлдиринг:

$\lvert\vec{a}\rvert$	$\sqrt{3}$	8	7	0,01		$\sqrt{2}$	4
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	5		9,01	2	6	$\sqrt{3}$
$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	30°	45°		120°	135°		
$\vec{a}\cdot\vec{b}$		20	7	0	–3		–6

114. Ифоданинг шаклини алмаштиринг:

1) $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})$; 2) $\vec{c}(\vec{a}+\vec{c})-\vec{a}(\vec{a}+\vec{c})$;

3) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})$.

a

115. Тенгликларни исботланг:

1) $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2})$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\,\vec{b}$;

3) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}$.

116. Агар $\vec{l}_1$ ва $\vec{l}_2$ бирлик векторлар учун $\left(\widehat{\vec{l}_1,\vec{l}_2}\right)=\alpha$ бўлса: 1) $\vec{l}_1$ ва $\vec{l}_1+\vec{l}_2$; 2) $\vec{l}_1$ ва $\vec{l}_1-\vec{l}_2$; 3) $\vec{l}_2$ ва $\vec{l}_1+\vec{l}_2$; 4) $\vec{l}_2$ ва $\vec{l}_1+\vec{l}_2$; 5) $\vec{l}_1+\vec{l}_2$ ва $\vec{l}_1+\vec{l}_2$ векторлар орасидаги бурчак қандай бўлади?

117. Агар $\vec{l}_1$ ва $\vec{l}_2$ ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар бўлса: 1) $\vec{a}=2\vec{l}_1-\vec{l}_2$, $\vec{b}=\vec{l}_1+2\vec{l}_2$ деб олиб, $\lvert\vec{a}\rvert$, $\lvert\vec{b}\rvert$, $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert$, $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert$ сонлари билан $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторлари орасидаги бурчакни топинг.

118. $\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert=1$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60°$ деб олиб, $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert$ нинг қиймати билан $\left(\widehat{\vec{a},\vec{a}+\vec{b}}\right)$ бурчакни топинг.

119. Агар $\lvert\vec{a}\rvert=\lvert\vec{b}\rvert=1$, $\vec{a}\nparallel b\ \vec{b}$ бўлса, $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлишини исботланг.

120. $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлса, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

121. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ва $\vec{a}\perp\vec{b}$ бўлса, $\vec{a}+2\vec{b}$ ва $2\vec{a}+\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

122. $\vec{a}$ вектори берилган. $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ тенгликни қаноатлантирувчи $\vec{b}$ бирлик векторни топинг. Бундай $\vec{b}$ вектор ҳар доим ҳам мавжуд бўладими?

123. A учидаги бурчаги $60°$ га тенг бўлган $ABCD$ ромбнинг томони a га тенг. O ромбнинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CO}$; 3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$; 4) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DO}$; 5) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}$.

124. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

C

125. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ тенгликдан $\vec{b}=\vec{c}$ тенглик бажарилиши келиб чиқадими? Жавобингизни асосланг.

126. Агар $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, $\vec{a}\nparallel\vec{c}$, $\vec{b}\nparallel\vec{c}$ бўлса, $ax=bx=cx$ тенгликни қаноатлантирадиган $\vec{x}$ векторни топинг.

127. Ҳар қандай $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ тенгсизликнинг тўғри бўлишини кўрсатинг. Қандай ҳолда тенглик белгиси тўғри бўлади?

128. α, β, γ сонлар учун $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\alpha\gamma)$ тенглик тўғри бўлиши аниқ. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси учун, масалан ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$ шунга ўхшаш тенглик тўғри бўладими? Жавобингизни асосланг.

129. Текисликнинг ҳар қандай A, B, C, D нуқталари учун $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ тенглик тўғри бўлишини кўрсатинг.

130. *ABC* учбурчак томонларига ташқи ABB_1A_2 , BCC_1B_2 ва ACC_2A_1 параллелограммлар чизилган . Томонлари A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 кесмаларга тенг ва уларга параллел бўладиган учбурчак ясаш мумкинлигини кўрсатинг.

131. Учбурчак медианалари квадратлариниг йиғиндиси томонлари квадратлари йиғиндисининг $\frac{3}{4}$ қисмига тенг. Шуни исботланг.

132. *ABC* учбурчакнинг CC_1 медианаси ўтказилган. Агар:
1) $2CC_1 > AB$ бўлса, C бурчак ўткир;
2) $2CC_1 = AB$ бўлса, C бурчак тўғри;
3) $2CC_1 < AB$ бўлса, C бурчак ўтмас бўлишини кўрсатинг.

133. Агар $AB=c$, $AC=b$, $BC=c$, $\angle C=\gamma$ бўладиган ҳар бир *ABC* учбурчак учун $c^2 = a^2 + b^2 - ab\cos\gamma$ тенглик бажарилишини кўрсатинг. Шу тенгликдан фойдаланиб, Пифагор теоремасини исботланг.

134. $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{q}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{q})$ ва $\vec{q}$ векторларнинг ўзаро перпендикуляр бўлишини исботланг.

135. *ABCD* параллелограммнинг *AD* томонида $AK=\lambda\cdot AD$, $(0<\lambda<1)$ тенглик ўринли бўладиган қилиб *K* нуқта олинган. *BK* тўғри чизиқ *AC* диагоналини *N* нуқтада кесиб ўтади. $AN:AC$ нисбатни топинг.

5*- §. Векторнинг координаталари

5.1. Векторни коллинеар бўлмаган икки вектор бўйича ёйиш

1-теорема. *Агар нолдан фарқли* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторлар коллинеар бўлмаса, у ҳолда ихтиёрий* $\vec{c}$ *вектор учун x ва y сонлари мавжуд бўлиб,*

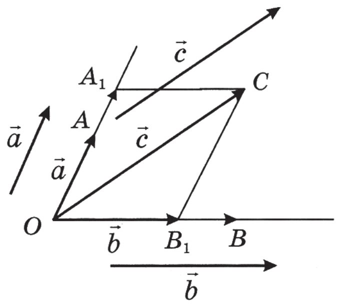
$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \qquad (1)$$

тенглик бажарилади ва бу тенглик ягона бўлади.

Исботи. Текисликда олинган *O* нуқтадан $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларни қўямиз. Ҳосил бўлган векторларнинг учларига мос равишда *A*, *B* ва *C* нуқталарни қўямиз (29-расм). Унда **2-§. 2.4.** мавзудаги векторни кесишадиган тўғри чизиқлар бўйича ясовчи векторларга ёйиш тўғрисидаги 2-теоремага асосан

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} \qquad (2)$$

тенглик бажариладиган OA ва OB тўғри чизиқлар бўйлаб битта $\overrightarrow{OA_1}$ ва $\overrightarrow{OB_1}$ вектлорлар ҳосил бўлади. $\overrightarrow{OA} \| \overrightarrow{OA_1}$ ва $\overrightarrow{OB} \| \overrightarrow{OB_1}$ бўлганидан **3-§. 3. 2.** мавзудаги 2-теоремага асосан (коллинеарлик шарти) x ва



29-расм

y сонлари битта бўлади, $\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OA} = x\vec{a}$ ва $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB} = y \cdot \vec{b}$ тенгликлар тўғри бўлади. У ҳолда, (2) тенгликдан

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

тенглик бажарилиши келиб чиқади.

Теорема исботланди.

Шу теоремадан ҳар қандай векторни коллинеар бўлмаган ҳар қандай икки векторга ёйиш мумкинлиги келиб чиқади. Агар текисликда коллинеар бўлмаган икки вектор танлаб олинса, бу векторларни ***базис векторлар*** деб аталади. Шу билан бирга ноколлинеар ҳар қандай икки векторни шу текисликнинг базис векторлари сифатида олиш мумкин ва ҳар қандай вектор шу векторлар орқали ёйиш мумкин. Исботланган теоремадаги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар – базис векторлар. x ва y сонлар $\vec{c}$ векторнинг $\vec{a}$, $\vec{b}$ базисдаги ***координаталари*** деб аталади.

5.2. Векторнинг тўғри бурчакли координаталар системасидаги координаталари

Oxy тўғри бурчакли координаталар системасини олайлик. $\vec{i}$ вектор Ox ўқи билан йўналишдош, $\vec{j}$ – Oy ўқи билан йўналишдош бирлик векторлар бўлсин. Бу векторларни ***координата векторлари (ортлар)*** деб аталади. $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ векторлар ноколлинеар бўлганидан уларни базис векторлар мисолида қараш мумкин. Бу базис векторлар ***ортонормалланган базис векторлар*** деб аталади. 1-теоремага асосан ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун ягоня x ва y сонлар мавжуд бўлиб,

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (3)$$

тенглик тўғри бўлади. Бунда x ва y сонлар $\vec{a}$ векторнинг

Oxy тўғри бурчакли координаталар системасидаги **координаталари** деб аталиб, қуйидагича белгиланади: $\vec{a}=(x;y)$.

Вектор координаталарининг хоссаларини кўрайлик:

1.Тенг векторларнинг мос координаталари ҳам тенг. Агар $\vec{a}=(x;\ y)$ ва $\vec{b}=(u;\ v)$ бўлса, у ҳолда $x=u,\ y=v$.

Аксинча, мос координаталари тенг векторлар ўзаро тенг бўлади. Агар $\vec{a}=(x;\ y)$ ва $\vec{b}=(u;\ v)$ ва $x=u,\ y=v$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}=\vec{b}$.

Ҳақиқатан ҳам, $x\vec{i}+y\vec{j}=\vec{a}=\vec{b}=u\vec{i}+v\vec{j}$. Бундан $(x-u)\vec{i}+(y-v)\vec{j}=0$ тенглик ҳосил бўлади. Агар $x \neq u$ (ёки $y \neq v$) бўлса, у ҳолда $\vec{i}=-\dfrac{y-v}{x-u}\vec{j}$ (ёки $\vec{j}=-\dfrac{x-u}{y-v}\vec{i}$) тенглик бажарилиб, $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ векторлар коллинеар бўлар эди. Ҳосил бўлган зиддият $x-y=0$, $y-v=0$, яъни $x=u,\ y=v$ тенглик тўғри бўлишини кўрсатади.

Аксинча, агар $x=u,\ y=v$ бўлса, (3) тенгликка асосан $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}=u\vec{i}+v\vec{j}=\vec{b}$ тенгликни оламиз.

2. Векторларни қўшганда уларнинг мос координаталари қўшилади: $\vec{a}=(x;\ y)$ ва $\vec{b}=(u;\ v)$ бўлса, $\vec{a}+\vec{b}=(x+u;\ y+v)$.

Ҳақиқатан ҳам, (3) тенгликка асосан

$$\vec{a}+\vec{b}=(x\vec{i}+y\vec{j})+(u\vec{i}+v\vec{j})=(x-u)\vec{i}+(y-v)\vec{j}.$$

Шуни исботлаш талаб этилган эди.

3. Векторларни сонга кўпайтиришда унинг координаталари ҳам шу сонга кўпайтирилади: $\vec{a}=(x;y)$ учун $\lambda\cdot\vec{a}=(\lambda\cdot x;\ \lambda\cdot y)$.

Ҳақиқатан ҳам, $\lambda\cdot\vec{a}=\lambda(x\vec{i}+y\vec{j})=\lambda(x\vec{i})+\lambda(y\vec{j})=(\lambda x)\vec{i}+(\lambda y)\vec{j}$.

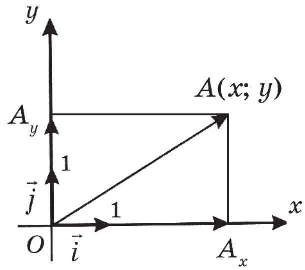
Натижа. *Икки вектор айирмасининг ҳар бир координатаси шу векторларнинг мос координаталари айирмасига тенг*: $\vec{a}=(x;\ y)$ ва $\vec{b}=(u;\ v)$ бўлса, $\vec{a}-\vec{b}=(x-u;\ y-v)$.

Исботи: 2- ва 3-хоссалардан келиб чиқади.

5.3.Учларининг координаталари берилган векторнинг координаталари. Радиус-вектор

Агар *Oxy* текисликда $A(x;y)$ нуқта берилса, у ҳолда $\overrightarrow{OA}$ вектор A нуқтанинг **радиус-вектори** деб аталади. $\overrightarrow{OA}$ *радиус-вектор учун* $\overrightarrow{OA}=(x;y)$ *бўлади, яъни нуқта радиус-векторининг координаталари шу нуқтанинг мос координаталарига тенг бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, A нуқта Ox ўқдаги проекцияси A_x, Oy ўқидаги проекцияси A_y бўлсин. Унда $A_x(x;\ 0)$ ва $A_y(0;\ y)$ бўлади (30-расм). Бунда $\overrightarrow{OA_x} \parallel \vec{i}$ ва $\overrightarrow{OA_y} \parallel \vec{j}$ бўлганлигидан, берилган бирлик масштаб билан кесмани сон ўқига ўлчаб қўйиш усулига асосан $\overrightarrow{OA}_x = x\vec{i}$ ва $\overrightarrow{OA}_y = y\vec{j}$ ёки $\overrightarrow{OA}_x = x\vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ ва $\overrightarrow{OA}_y = 0 \cdot \vec{i} + y\vec{j}$ тенгликлар бажарилади. $\overrightarrow{OA}_x(x;\ 0)$ ва $\overrightarrow{OA}_y(0;\ y)$ ва 2-хоссага асосан



30-расм

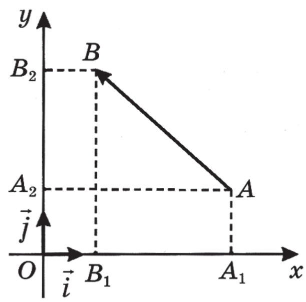
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_x + \overrightarrow{OA}_y = (x+0;\ 0+y) = (x;\ y).$$

Фараз қилайлик, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектор берилган ва $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ бўлса,

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \qquad (4)$$

тенглик ўринли бўлади, яъни $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Ҳақиқатан ҳам, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB} = (x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1;\ y_1)$ бўлганидан, натижаларга асосан $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ (31-расм).



31-расм

Икки нуқта орсидаги масофа формуласига асосан $\overrightarrow{AB}$ векторнинг модули

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (5)$$

формула билан топилади. Умуман, агар $\vec{a} = (x;y)$ вектор берилса,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (6)$$

формула бажарилади.

Агар $\vec{a}$ вектор учлари $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ бўлса, (4) формулага асосан $\vec{a} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ ва (5) формулага кўра

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$ тенгликни оламиз. Вектор координаталарининг $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$ тенгликлар бажарилиб, (6) формулани тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз.

1-масала. $A(2; -3)$ ва $B(3; 4)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари билан модулини топинг.

Ечилиши. (4) формулага асосан, $\overrightarrow{AB} = (3-2;\ 4-(-3))=(1;\ 7)$.

(6) формулага асосан $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

2-масала. $\vec{a}=(5; -4)$ векторни $\vec{p}=(1; 1)$ ва $\vec{q}=(1; -2)$ векторлар орқали ифодаланг.

Ечилиши. $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ векторлар ноколлинеар бўлганидан (векторларнинг коллинеарлик шарти кейинги параграфда келтирилади), бу векторлар текисликда базис векторлар бўлади. Теорема 1 га асосан $\vec{a}$ векторни $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ векторлар орқали ифодалаш мумкин, яъни x ва y сонлар мавжуд бўлиб, $\vec{a}=x\vec{p}+y\vec{q}$ тенглик тўғри бўлади. Бизнинг мақсадимиз x ва y сонларининг қийматини топиш.

Шу билан бирга

$$x \cdot (1;\ 1)+y \cdot (1;\ -2) = (5;\ -4)$$

тенгликдан x ва y сонларнинг қийматини аниқлаш керак. Вектор координаталарининг 3-ва 2-хоссаларига асосан $(x \cdot 1;\ x \cdot 1) + (y \cdot 1;\ y \cdot(-2)) = (5;\ -4) \Rightarrow (x+y;\ x-2y) = (5;\ -4)$ тенглик ҳосил бўлади. Векторларнинг тенглигига асосан

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Унинг ечими: $x=2$, $y=3$. У ҳолда $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$ тенглик ўринли бўлади.

$\boxed{?}$

1. Ҳар қандай ноколлинеар икки вектор орқали ёйиш тўғрисидаги теоремани таърифлаб, исботланг.
2. Текисликдаги базис векторлар деб нима аталади?
3. Координата векторлари деб қандай векторларга айтилади ва улар қандай белгиланади?
4 Тўғри бурчакли координаталар системасида вектор координаталари деб нимага айтилади ва у қандай ёзилади?
5. Вектор координаталарининг хоссаларини айтинг ва уларни исботланг.
6. Нуқтанинг радиус-вектори деб қандай векторга айтилади?

7. Учларининг координаталари бўйича вектор координаталари қандай аниқланади?
8. Вектор модулини аниқлаш формуласини ёзинг.

ПТ *Oxy* текислигида координаталари бутун сонлар билан ифодаланган *A* ва *B* нуқталарни белгиланг. Ўлчов асбоби ёрдамида *AB* кесманинг узунлигини аниқланг. Ўлчов натижасини (5) формула ёрдамида текширинг.

МАСАЛАЛАР

А

136. 1) $A(1;\ -2)$; 2) $A(0;\ 3)$; 3) $A(-2;\ 0)$; 4) $A(\sqrt{2};\ 0{,}7)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторнинг координаталарини топинг.

137. Тўғри бурчакли *Oxy* координаталар системасида: $\vec{a}=(3;\ 0)$, $\vec{b}=(2;\ -1)$, $\vec{c}=(0;\ -3)$, $\vec{d}=(1;\ 1)$, $\vec{e}=(2;\ \sqrt{2})$ векторларни *O* нуқтадан бошлаб қўйинг.

138. 1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$; 2) $A(-2;\ 1)$, $B(-4;\ 2)$; 3) $A(p;\ q)$, $B(-p;\ -q)$ нуқталар берилса, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

139. $\vec{a}+\vec{b}$ йиғинди билан $\vec{a}-\vec{b}$ айирманинг координаталарини топинг: 1) $\vec{a}=(0;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ 0)$; 2) $\vec{a}=(-2;\ 1)$, $\vec{b}=(4;\ -3)$; 3) $\vec{a}=(\sqrt{2};\ \frac{1}{3})$, $\vec{b}=(-\sqrt{2};\ \frac{1}{6})$; 4) $\vec{a}=(\frac{2}{7};\ -0{,}6)$, $\vec{b}=(4;\ \frac{1}{3})$.

140. $\vec{a}=(4;\ -2)$ вектор билан λ сони берилган. $\lambda\vec{a}$ векторнинг координаталарини топинг:1) $\lambda=2$; 2) $\lambda=-3$; 3) $\lambda=\frac{1}{2}$; 4) $\lambda=\sqrt{3}$.

141. $A(1;\ 2)$, $B(-3;\ 0)$, $C(4;\ -2)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ векторларнинг координаталари билан модулларини топинг.

142. $A(1;\ 2)$, $B(-3;\ 0)$, $C(4;\ -2)$ нуқталар берилган. 1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ бажариладиган қилиб, *D* нуқтанинг координаталарини аниқланг.

143. $A(0;1)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;2)$, $D(2;1)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар тенг бўладими?

144. $\vec{a}=(5;\ m)$, $\vec{b}=(n;\ 24)$, $|\vec{a}|=13$ ва $|\vec{b}|=25$ бўлса, m ва n сонларни топинг.

145. $\vec{a}=(-2;\ 1)$ вектор берилган. $\vec{a}$ вектор билан бир хил йўналган ва модули $|\vec{a}|$ сонидан: 1) 2 марта катта; 2) 2 марта кичик векторнинг координаталарини топинг.

B

146. $A(1;\ 1)$, $B(3;\ -1)$, $C(7;\ 3)$ нуқталар берилган. 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, 2) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$ векторларнинг координаталари билан модулларини топинг.

147. $\vec{a}$ бирлик вектор Ox ўқининг мусбат йўналишида α бурчак ҳосил қилса, бу векторнинг координаталари $\vec{a}=(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ бўлишини исботланг.

148. Ox ўқининг мусбат йўналиши билан 0°; 30°; 45°; 60°; 120°; 135°; 150°; 180° бурчак ҳосил қиладиган бирлик вектор координаталарини топинг.

149. $A(1;\ -3)$, $B(8;\ 0)$, $C(4;\ 8)$, $D(-3;\ 5)$ нуқталар берилган. $ABCD$ тўртбурчакнинг параллелограмм бўлишини исботланг.

150. $A(-1;3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ ва $D(5;\ 2)$ нуқталар берилган. 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; 3) $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}$; 4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ векторларнинг координаталарини аниқланг.

151. $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 2)$ ва $D(-1;\ 1)$ нуқталар берилган. $ABCD$ тўртбурчакнинг квадрат бўлишини исботланг.

152. $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$ ва $D(-1;\ 2)$ нуқталар берилган. $ABCD$ тўртбурчакнинг тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.

153. 1) $\vec{a}=(6;8)$ вектор билан бир хил йўналган; 2) $\vec{b}=(-2;\ 5)$ вектор билан қарама-қарши йўналган бирлик векторнинг координаталарини топинг.

154. Параллелограммнинг $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ -5)$, $C(0;\ 4)$ учлари берилган. D учининг координаталарини топинг.

155. m нинг қандай қийматларида учлари $A(1;\ 3)$, $B(2;\ -1)$, $C(4;\ m)$ нуқтада бўлган учбурчак тенг ёнли бўлади?

156. AA_1–ABC учбурчакнинг медианаси, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторларни базис векторлар деб олиб, $\overrightarrow{AA_1}$ векторни шу векторлар орқали ифодаланг.

157. $\vec{p}=(3;-2)$ ва $\vec{q}=(-1;0)$ векторлар берилган. 1) $5\vec{p}-2\vec{q}$; 2) $4\vec{p}+\vec{q}$ векторнинг координаталари билан модулини топинг.

C

158. Агар $\vec{a}=(x;y)$ ва $\vec{b}=(u;v)$ векторлар учун $x{:}y=u{:}v$ тенглик бажарилса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлишини исботланг.

159. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ноколлинеар бўлса: 1) $\vec{a}+\vec{b}$ билан $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $2\vec{a}+\vec{b}$ билан $\vec{a}+\vec{b}$ векторлар ҳам ноколлинеар бўлишини исботланг.

160. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ноколлинеар бўлса: 1) $3\vec{a}-x\vec{b}=y\vec{a}+\vec{b}$; 2) $4\vec{a}+5\vec{b}-x\vec{a}+y\vec{b}=0$; 3) $x\vec{a}+3\vec{b}-y\vec{b}=0$ тенгликлардан x ва y ларнинг қийматини аниқланг.

161. $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(1;\ -2)$ нуқталар берилган. ABC учбурчакнинг тури қандай бўлади?

162. Oxy координаталар системасида $\overrightarrow{OA_1}=(1,\ 2)$ ва $\overrightarrow{A_1A_2}=(-2,\ 3)$ векторлар берилган. A_2 нуқта координаталарини топинг.

163. 1) $\vec{a}=(5;\ 3)$; 2) $\vec{b}=(-2;\ 3)$; 3) $\vec{c}=(0;2)$; 4) $\vec{d}=(0;0)$ векторлар $\vec{p}=(-1;1)$ ва $\vec{q}=(1;\ 1)$ векторларни орқали ифодаланг.

164. Координаталари бутун сонлар бўладиган ва $A(\sqrt{2}-1;\ \frac{1}{3})$ нуқтадан бир хил масофада жойлашган иккита нуқта мавжуд бўлмаслигини исботланг.

165. $\vec{a}$ вектор билан A нуқта координаталари билан берилган. $\vec{a}$ векторни A нуқтадан бошлаб қўйганда ҳосил бўладиган вектор учининг координаталарини топинг: 1) $\vec{a}=(3;\ 4)$, $A(-2;\ 3)$; 2) $\vec{a}=(3;\ 0)$, $A(0;\ 0)$; 3) $\vec{a}=(-5;\ 4)$, $A(1;\ 0)$; 4) $\vec{a}=(3;\ -1)$, $A(-1;\ -2)$.

166. Координата усулидан фойдаланиб, учбурчак ўрта чизиғининг хоссаларини исботланг.

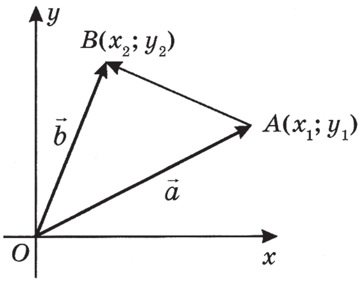
6- §*. Скаляр кўпайтманинг вектор координаталари орқали ифодаланишш

6.1. Векторлар скаляр кўпайтмасининг координата усули

$\vec{a}=(x_1; y_1)$ ва $\vec{b}=(x_2; y_2)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2 \qquad (1)$$

формула билан аниқланишини кўрайлик.



32-расм

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}=(x_1;y_1)$ ва $\vec{b}=(x_2;y_2)$ векторларни координаталар бошидан бошлаб қўйсак, у ҳолда $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ радиус-векторни оламиз (32-расм).

Унда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Бундан $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=$ $=(\vec{b}-\vec{a})^2=\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\overrightarrow{AB}^2)$. Бу ерда $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; \; y_2-y_1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)$, $\vec{a}^2=x_1^2+y_1^2$, $\vec{b}=x_2^2+y_2^2$ бўлишини эътиборга олсак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2-y_1^2+2y_1y_2-y_2^2)=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2.$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Исбот талаб этилган ҳам шу эди.

6. 2. Векторларнинг перпендикулярлик ва коллинеарлигининг координата усули. Векторлар орасидаги бурчакни аниқлаш

Агар $\vec{a}=(x_1; y_1)$ ва $\vec{b}=(x_2; y_2)$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90°$ бўлади. Шунинг учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90°=0$. Унда (1) формулага асосан

$$x_1x_2+y_1y_2=0 \qquad (2)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу ноль бўлмаган векторларнинг перпендикулярлик шарти.

Фараз қилайлик, $\vec{a}=(x_1; y_1)$ ва $\vec{b}=(x_2; y_2)$ векторлар коллинеар бўлсин. Унда 3- §.3.2. мавзудаги 2- теоремага асосан k сони мавжуд бўлиб, $\vec{a} = k\vec{b}$ тенглик, яъни $(x_1;\ y_1) = (kx_2;\ ky_2)$ тенглик ўринли бўлади. Бундан $x_1=kx_2$, $y_1=ky_2$ Агар $x_2\neq0$; $y_2\neq0$ бўлса,охирги тенгликдан $\frac{x_1}{x_2} = k$, $\frac{y_1}{y_2} = k$, яъни

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \qquad (3)$$

тенгликни оламиз.Демак, **коллинеар векторларнинг мос координаталари ўзаро пропорционал бўлади.**

(1) формулага асосан $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ ва $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ векторлар орасидаги бурчак косинусини топамиз. Ҳақиқатан ҳам, формуладан $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ тенглик ҳосил бўлади.

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Бундан (1) формула ва $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$; $\vec{b}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ тенгликка асосан

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \quad (4)$$

формула ҳосил бўлади.

?

1. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси унинг координаталари орқали қандай аниқланади? Формуласини ёзиб, исботланг.
2. Векторларнинг перпендикулярлик шартини ёзиб, исботланг.
3. Векторларнинг коллинеарлик шартини ёзиб, исботланг.
4. Векторлар орасидаги бурчак қандай формула билан аниқланади? Уни исботланг.

МАСАЛАЛАР

A

167. Нолдан фарқли $\vec{a}=(m;\ n)$ ва $\vec{b}=(-n;\ m)$ векторларнинг перпендикуляр бўлишини исботланг.

168. $\vec{a}=(3;\ 4)$ ва $\vec{b}=(m;\ 2)$ векторлар m нинг қандай қийматида перпендикуляр бўлади?

169. 1) $\vec{a}=(1;\ 1)$ ва $\vec{b}=(2;\ 3)$; 2) $\vec{c}=(0;\ 4)$ ва $\vec{d}=(-1;\ 2)$; 3) $\vec{m}=(0;\ \sqrt{3})$ ва $\vec{n}=(2;\ \sqrt{3})$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини аниқланг.

170. 1) $\vec{a}=(2;\ 3)$ ва $\vec{b}=(3;\ -2)$; 2) $\vec{a}=(-5;\ 1)$ ва $\vec{b}=(-1;\ 5)$ векторлар перпендикуляр бўладими?

171. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини аниқланг: 1) $\vec{a}=(a;\ 0)$, $\vec{b}=(b;\ 0)$; 2) $\vec{a}=(a;\ 0)$, $\vec{b}=(0;\ b)$; 3) $\vec{a}=(a;\ b)$, $\vec{b}=(a;\ b)$; 4) $\vec{a}=(a;\ b)$, $\vec{b}=(-a;\ -b)$.

172. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўладими: 1) $\vec{a}=(-2;1)$, $\vec{b}=(4;-2)$; 2) $\vec{a}=(1;-3)$, $\vec{b}=(1;3)$; 3) $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(-3;2)$; 4) $\vec{a}=(1;0)$, $\vec{b}=(3;0)$; 5) $\vec{a}=(0;-1)$, $\vec{b}=(1;0)$; 6) $\vec{a}=(0;0)$, $\vec{b}=(-2;3)$?

173. Икки вектор коллинеар бўлса, уларнинг мос координаталари пропорционал бўлишини исботланг. Агар $\vec{a}=(x;y)$, $\vec{b}=(u;\ v)$ ва $\vec{a}\parallel\vec{b}$ бўлса, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{u}{v}$ тенглик тўғри бўлишини кўрсатинг.

174. Агар $\vec{a}\parallel\vec{b}$ бўлса: 1) $\vec{a}+3\vec{b}$ ва $\vec{a}$; 2) $\vec{b}-2\vec{a}$ ва $\vec{a}$ векторлар коллинеар бўлишини исботланг.

175. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг: 1) $\vec{a}=(1;\ 0)$, $\vec{b}=(2;\ 2)$; 2) $\vec{a}=(1;\ 1)$, $\vec{b}=(-1;\ \sqrt{3})$; $\vec{a}=(-\sqrt{3};\ 3)$, $\vec{b}=(0;\ 1)$; 4) $\vec{a}=(2;\ 0)$, $\vec{b}=(1;\ -\sqrt{3})$.

176. Векторларнинг қайси жуфтлари ўзаро перпендикуляр бўлади: 1) $\vec{a}=(2;\ 5)$, $\vec{b}=(-10;\ 4)$; 2) $\vec{c}=(1;\ 2)$, $\vec{d}=(1;\ -3)$; 3) $\vec{p}=(3;\ 1)$, $\vec{q}=(2;\ -6)$?

B

177. Агар: $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, $|\vec{m}|=0{,}5$ см, $|\vec{n}|=2$ см; 2) $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, $|\vec{m}|=12$ см, $|\vec{n}|=24$ см бўлса, $\vec{n}=k\vec{m}$ тенгликни қаноатлантирадиган k сонини топинг.

178. O нуқта $ABCD$ параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтаси, N–AO кесманинг ўртаси бўлсин. 1) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$; 5) $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{DA}$; 6) $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{CA}$;

7) $\overrightarrow{NC}=k\overrightarrow{AN}$; 8) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AN}$; 9) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$; 10) $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{BD}$ тенгликларни қаноатлантирадиган k мавжудми?

179. Агар $|\vec{a}|=1$ ва $\vec{a}$ вектор Ox ва Oy ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклар мос равишда α ва β га тенг бўлса, $\vec{a}=(\cos\alpha;\ \cos\beta)$ бўлиши ва $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ тенгликнинг бажарилишини исботланг.

180. Агар $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ ва $\angle(\vec{a},\ \vec{b})$ бурчак: 1) $60°$ га; 2) $135°$га; 3) $90°$ га 4) $0°$ га; 5) $180°$ га тенг бўлса, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ кўпайтмани топинг.

181. $\vec{a}=(1;\ 2)$ ва $\vec{b}=(-2;\ 3)$ векторлар берилган: $2\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}\cdot(-\vec{b})$; 3) $(-\frac{1}{2}\vec{a})\cdot(-\frac{1}{3}\vec{b})$; 4) $\vec{b}(\vec{a}+\vec{b})$; 5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 6) $((\vec{a}-\vec{b}))^2$ 7) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$ ифодаларнинг қийматини топинг.

182. $\vec{a}=(a;\ b)$ векторга перпендикуляр бирлик вектор координаталарини топинг.

183. $A(-1;\ 2)$, $B(-2;\ -3)$, $C(1;\ 4)$, $D(4;\ 2)$ нуқталар берилган. 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$; 4) $(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$ ифодаларнинг қийматини топинг.

184. Агар K ва N нуқталар $ABCD$ квадратнинг CD ва BC томонларининг ўрталари бўлсин. 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; 5) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; 7) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; 8) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AN}$; 9) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$ скаляр кўпайтмаларнинг қийматини топинг. Квадратнинг томони a га тенг.

185. Агар K ва N нуқталар томонлари $2a$ бўлган тенг томонли ABC учбурчакнинг BC ва AC томонларининг ўрталари бўлсин: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; 4) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\times$ $\times(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$; 5) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BN}$; 7) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\overrightarrow{KN}$ ифодаларнинг қийматини топинг.

186. $\vec{m}=(1;\ 0)$ ва $\vec{n}=(0;1)$ векторлар берилган. $2\vec{m}+\vec{n}$ ва $\vec{m}-2\vec{n}$ векторлар перпендикуляр бўладими?

187. *ABCD* параллелограммда $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+3\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$ *AC* ва *BD* кесмаларнинг узунлигини топинг.

188. $A(1;1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$ нуқталар берилган. *ABC* учбурчак бурчакларининг косинусини топинг.

189. Учлари $A(0;\ \sqrt{3})$, $B(2;\ \sqrt{3})$, $C(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ нуқталар бўлган учбурчакнинг бурчакларини топинг.

190. $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$ ва $D(-1;2)$ нуқталар берилган. *ABCD* нинг тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.

191. $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 4)$, $C(0;\ 4)$ ва $D(-1;2)$ нуқталар берилган. *ABCD* нинг квадрат бўлишини исботланг.

C

192. $\vec{a}=(1;\ 0)$ ва $\vec{b}=(1;\ 1)$ векторлар берилган. $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ ва $\vec{a}$ векторлар перпендикуляр бўлиши учун α нинг қиймати қандай бўлиши керак?

193. Агар $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ва $\angle(\vec{a},\ \vec{b})=60°$ бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{a}+\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчакни аниқланг.

194. *ABC* учбурчакнинг $\angle B=90°$ бўлиши учун $AC^2=AB^2+BC^2$ бажарилиши зарур ва етарли бўлишини исботланг(скаляр кўпайтмадан фойдаланинг).

195. Томонлари *a*, *b* ва *c* га тенг бўлган бўладиган учбурчакнинг биссектрисаларини топинг.

196. Трапеция диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг параллел бўлмаган томонлари квадратлари билан асосларининг иккиланган кўпайтмасининг йиғиндиси тенг бўлишини исботланг.

197. Икки медианаси тенг учбурчакнинг тенг ёнли бўлишини исботланг.

198. Агар $\vec{i}=(1;\ 0)$, $|\vec{a}|=3$ ва $\angle(\vec{i},\ \vec{a})=30°$ бўлса, $\vec{a}$ векторнинг координаталарини топинг.

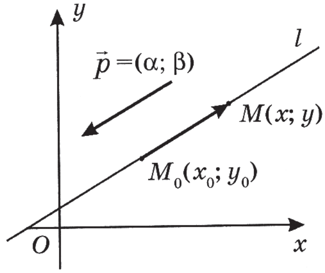
199. Агар $A(-2;\ 1)$ ва $B(3;\ 3)$ бўлса, *ABCD* квадратнинг қолган учларининг координаталарини топинг.

200. $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(5;\ 0)$ ва $D(7;\ -5)$ нуқталар берилган. *ABCD* тўртбурчакнинг трапеция бўлишини исботланг.

7- §*. Координаталар методи.

7.1.Тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи ва нормал вектори

Тўғри чизиқнинг тенгламасини турли усуллар билан келтириб чиқариш мумкин. Масалан, 8-синфда тўғри чизиқ кесманинг ўрта перпендикуляри сифатида ифодаланган. Энди тўғри чизиқнинг тенгламасини векторлар ёрдамида ифодалайлик. Фараз қилайлик, бизга $M_0(x_0;y_0)$ нуқта билан $\vec{p}=(\alpha,\ \beta)$ вектор берилган бўлсин. Унда тўғри чизиқнинг тенгламасини M_0 нуқта орқали $\vec{p}$ векторга параллел қилиб битта параллел l тўғри чизиқ ўтади. Бунда M_0 нуқтани тўғри чизиқнинг Бошланғич нуқтаси деб, $\vec{p}$ векторни эса тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори деб аталади. Шундай қилиб l тўғри чизиқ M_0 бошланғич нуқта билан $\vec{p}$ йўналтирувчи вектор орқали ифодаланади (33-расм).



33-расм

Агар $M(x;y)$ l тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{p}$ бўлади. Бунда $\vec{p}=(\alpha,\ \beta)$ вектор координата ўқларига параллел эмас деб қаралади ($\alpha\neq0$, $\beta\neq0$). $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\ y-y_0)$ эканлигини эсга туширсак, векторларинг коллинеарлик шартига кўра

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta} \qquad (1)$$

тенглик ҳосил бўлади

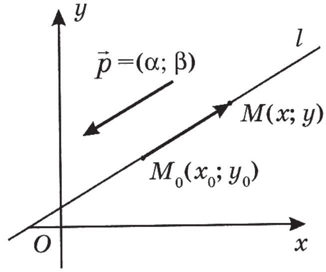
1-масала. $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Ечилиши. M_1M_2 тўғри чизиқ координаталар ўқларига параллел эмас деб оламиз ($x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$). M_1 нуқта ни тўғри чизиқнинг бошланғич нуқтаси, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ вектор унинг йўналтирувчи вектори деб олсак, у ҳолда (1) формулага асосан M_1M_2 тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

кўринишда бўлади (34-расм).

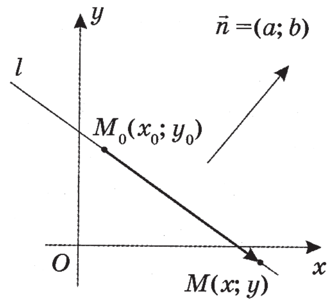
Бизга l тўғри чизиқ билан $\vec{n}=(a;\ b)$ берилган бўлсин. Агар $l \perp \vec{n}$ шарт ўринли бўлса, $\vec{n}$ вектор l тўғри чизиқнинг нормаль вектори деб аталади. l тўғри чизиқ $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтадан (бошланғли нуқтаси бўлса) ўтса, ихтиёрий $M(x;\ y) \in l$ нуқта учун $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ шарт, яъни $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}=0$ тенглик ўринли бўлади. У ҳолда



34-расм

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \qquad (3)$$

$M_0(x_0;\ y_0)$ бошланғич нуқта билан $\vec{n}=(a;\ b)$ нормаль вектор орқали ифодаланган тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади (35-расм). Биз тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектор билан нормаль вектор билан ифодаланган тенгламасини ёздик ((1) ва (3)). Бу тенгламалардан 8-синфдан бизга маълум бўлган тўғри чизиқ тенгламасини келтириб чиқариш мумкин:



35-расм

$$ax+by+c=0 \qquad (4)$$

Ҳақиқатан ҳам, масалан, (1) тенгламани $\beta(x-x_0)+\alpha(y-y_0)=0 \Rightarrow \beta x-\alpha y+(\alpha y_0-\beta x_0)=0$ кўринишда ёзиб, $a=\beta$, $b=-\alpha$, $c=\alpha y_0-\beta x_0$ деб белгилаб, (4) тенгламани ҳосил қиламиз.

Аксинча, l тўғри чизиқ (4) тенглама билан берилса, у ҳолда $\vec{p}=(-b;\ a)$ вектор йўналтирувчи вектори; $\vec{n}=(a;\ b)$ вектор эса нормаль вектори бўлишини кўрамиз.

Аксинча, (4) тенгламада $b \neq 0$ бўлса, у ҳолда тенгламани b сонига бўлиб, $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ кўринишида ёзиш мумкин. Бунда $k=-\frac{a}{b}$, $r=-\frac{c}{b}$ деб белгилаб, бизга маълум бўлган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти орқали ёзилган тенгламасини оламиз:

$$y = kx+r. \qquad (5)$$

7.2.Координаталар усулининг баъзи қўлланишлари

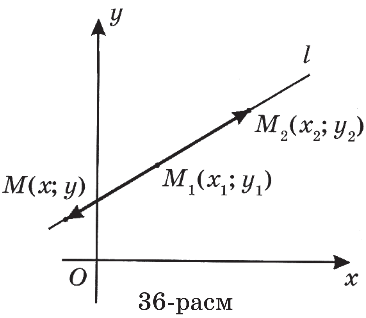
l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак ўрнида уларга мос $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормаль векторлар орасидаги бурчакни қараймиз. Фараз қилайлик, бу тўғри чизиқлар мос равишда

$a_1x+b_1y+c_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2=0$ тенгламалар билан берилган бўлсин. У ҳолда a нормаль векторлар $\vec{n}_1=(a_1;\ b_1)$ ва $\vec{n}_2=(a_2;\ b_2)$ кўринишда ифодаланади. $\varphi=(\widehat{l_1 l_2})=(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})$ деб белгиласак, **6- §.6.2.** пунктидаги (4) формуладан

$$\cos\varphi=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \qquad (6)$$

формулани оламиз.

$M_0(x_0;y_0)$ нуқта билан бу нуқтадан ўтмайдиган l тўғри чизиққача бўлган масофани топайлик. l тўғри чизиқ $ax+by+c=0$ тенглама билан берилган бўлсин. Агар $M_1(x_1;\ y_1)$ нуқта M_0 нуқтадан l тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асоси бўлса (36-расм), у ҳолда M_0 нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган d масофа $d=|\overrightarrow{M_0M_1}|$ тенглик билан аниқлади. Шунинг учун M_1 нуқтанинг номаълум x_1 ва y_1 координаталарини аниқлаш керак бўлади. $\vec{n}=(a;b)\|\overrightarrow{M_0M_1}$ бўлганидан t сони топилиб, $\overrightarrow{M_0M_1}=tn_1$ тенглик, яъни $x_1-x_0=at$, $y_1-y_0=bt$ тенгликлар ўринли бўлади. Шунинг учун



36-расм

$x_1=x_0+at$, $y_1=y_0+bt$. Иккинчи томондан, M_1 нуқта l тўғри чизиққа тегишли: $a_1x+b_1y+c_1=0\Rightarrow a(x_0+at)+$ $+b(y_0+bt)+c=0\Rightarrow ax_0+by_0+c+(a^2+b^2)t=0\Rightarrow t=\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$. Шунинг учун $x_1=x_0-a\cdot\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$; $y_1=y_0-b\cdot\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$.

У ҳолда $d=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=$.

$$=\sqrt{a^2\cdot\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}+b^2\cdot\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}=\sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Шундай қилиб

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (7)$$

ўринли бўлади.

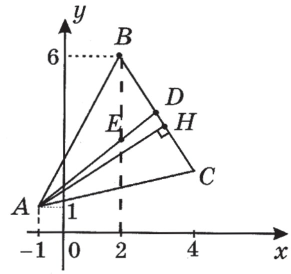
2-масала. $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 6)$, $C(4;\ 2)$ нуқталар берилган. 1) ABC учбурчакнинг томонларида ётувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини ёзинг; 2) BAC бурчакни топинг; 3) AH баландликни топинг; 4) медианаларининг E кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

Ечилиши. 1) Тўғри чизиқларнинг тенгламаларини (2) формуладан аниқлаймиз (37-расм).

(AB) тўғри чизиқ учун: $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-1}{6-1}\Rightarrow\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{5}\Rightarrow 5x-3y+8=0;$

(AC) тўғри чизиқ учун: $\frac{x+1}{4+1}=\frac{y-1}{2-1}\Rightarrow\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{1}\Rightarrow x-5y+6=0;$

(BC) тўғри чизиқ учун: $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-6}{2-6}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y-6}{-4}\Rightarrow 2x+y-10=0.$



37-расм

2) BAC бурчак ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) бурчак билан устма-уст тушади. $\overrightarrow{AB}=(3;\ 5)$, $\overrightarrow{AC}=(5;\ 1)$ бўлганидан,

$$\cos(\angle BAC)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{3\cdot5+5\cdot1}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{25+1}}=$$

$$=\frac{20}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{26}}=\frac{10}{\sqrt{221}}=\frac{10\cdot\sqrt{221}}{221}.$$

Керак бўлса, BAC бурчакнинг қийматини аниқлаш мумкин.

3) AH баландлик A нуқтадан BC тўғри чизиққача бўлган масофага тенг. (7) формулага асосан

$$AH=\frac{\left|2\cdot(-1)+10-10\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt5}=\frac{11\cdot\sqrt5}{5}\ \text{(бирлик).}$$

4) Учбурчакнинг AD медианаси унинг медианаларининг E кесишиш нуқтасида 2:1 нисбатда бўлинишини қўллаш керак, яъни E нуқта AD кесмани $\lambda=2$ муносабатда бўлади. Аввалига BC кесманинг ўртаси , бўлган D нуқтанинг координаталари аниқланади:

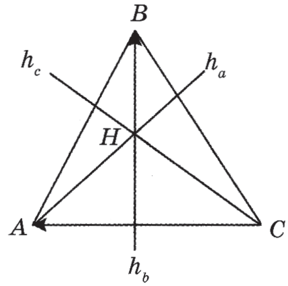
$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+4}{2}=3,\quad y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{6+2}{2}=4,\ \text{яъни}\ D(3;\ 4).$$

Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласидан

$$x_E=\frac{x_A+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{-1+2\cdot3}{1+2}=\frac{5}{3},\quad y_e=\frac{y_A+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{1+2\cdot4}{1+2}=3.\ E(\frac{5}{3};\ 3).$$

3-масала. Учбурчак баландликларининг бир нуқтада кесишишини исботланг.

Исботи. Фараз қилайлик, h_a, h_b, h_c тўғри чизиқлар A, B, C учлардан ўтказилган баландликларда ётсин. H нуқта h_a ва h_b тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. $h_a \perp BC$ ва $h_b \perp AC$ бўлганидан, $HA \perp BC$ ва $HB \perp AC$ бўлади ёки $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ёки $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ бўлади (38-расм).



38-расм

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$, бўлганидан, $\overrightarrow{HA}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$ ва $\overrightarrow{HB}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$ ёки $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$ ва $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA}$ тенгликлардан $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ тенглик ҳосил бўлади. Бундан $(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA})\overrightarrow{HC} = 0$ ёки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ тенглик келиб чиқади. У ҳолда HC тўғри чизиқ AB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади, яъни H нуқтада h_a ва h_b тўғри чизиқлар кесишади. Учбурчак баландликларининг бир нуқтада кесишиши исботланди.

?

1. Қандай вектор тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори деб аталади?
2. Тўғри чизиқнинг бошланғич нуқтаси нима? Бошланғич нуқта ва йўналтирувчи вектордан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг. Нима учун йўналтирувчи векторнинг координата ўқларига параллел бўлмаслигини тушунтиринг.
3. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.
4. Тўғри чизиқнинг нормал вектори нима? Нормал вектор ва бошланғич нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.
5. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси бўйича йўналтирувчи ва нормаль векторлари билан бурчак коэффициентини ёзиб кўрсатинг.
6. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак қандай формула билан аниқланади?
7. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа қандай формула билан аниқланади?

МАСАЛАЛАР

А

201. Тўғри чизиқ тенгламасини $\vec{p}$ йўналтирувчи вектор билан $M_0(x_0;\ y_0)$ бошланғич нуқта орқали ёзинг: 1) $\vec{p} = (2;\ -1)$, $M_0(-3;\ 2)$; 2) $\vec{p} = (-3;\ 4)$, $M_0(3;\ 5)$; 3) $\vec{p} = (0{,}5;\ 2{,}5)$, $M_0(5;\ 1)$; 4) $\vec{p} = (\frac{1}{3};1\frac{1}{2})$, $M_0(0;\ 1)$.

202. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг: 1) $A(1; 0)$, $B(0; 1)$; 2) $M_1(-3; 4)$, $M_2(5; 2)$; 3) $C(0; -3)$, $D(4; 1)$; 4) $H(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$, $K(-2,5; 1\frac{1}{3})$.

203. $M_0(x_0; y_0)$ бошланғич нуқта билан $\vec{n}$ нормал вектор орқали тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг: 1) $M_0(2; 1)$, $\vec{n}=(-3; 2)$; 2) $M_0(-3; 4)$, $\vec{n}=(3; 5)$; 3) $M_0(2; -3)$, $\vec{n}=(0,5; 2,5)$; 4) $M_0(\frac{2}{3}; -1,5)$, $\vec{n}=(0; 1)$.

204. Берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини, нормал векторини ва бурчак коэффициентини аниқланг:

1) $x+y+4=0$; 2) $2x-y-3=0$; 3) $3x+4y-1=0$;
4) $2y-x+4=0$; 5) $5x+6y=0$; 6) $x-y=0$.

205. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг:

1) $4x-y+7=0$ ва $3x+2y=0$;
2) $3x-2y+7=0$ ва $2x+3y-3=0$;
3) $x-2y-4=0$ ва $2x-4y+3=0$;
4) $3x+2y-1=0$ ва $2x-4y+3=0$.

206. Берилган нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани топинг:

1) $A(2; -1)$, $3x+4y-1=0$; 2) $B(-2; 3)$, $x+3y+2=0$;
2) $C(5; -3)$, $2x-y-1=0$; 4) $D(0; -1)$, $4x-y+2=0$.

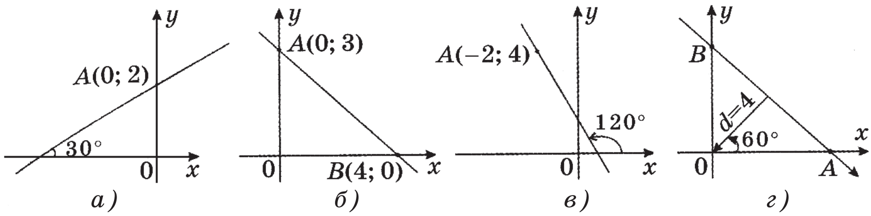
207. ABC учбурчакнинг томонлари ётувчи тўғри чизиқлар тенгламалари берилган: $4x-3y-65=0$, $7x-24y+55=0$ ва $3x+4y-5=0$. Учбурчак учларининг координаталарини топинг.

208. ABC учбурчак учларининг координаталари берилган: $A(2; 1)$, $B(-1; 4)$, $C(3; -2)$. 1) AB, AC, BC тўғри чизиқлар тенгламаларини; 2) AH_1, BH_2, CH_3 баландликлар ётувчи тўғри чизиқлар тенгламаларни; 3) бурчакларни; 4) баландликларнинг узунликларини топинг.

209. k бурчак коэффициенти ва $M_0(x_0; y_0)$ бошланғич нуқтаси нуқтаси бўйича тўғри чизиқлар тенгламаларини ёзинг: 1) $k=1$, $M_0(0; 1)$; 2) $k=-2$, $M_0(1; -2)$; 3) $k=\frac{1}{2}$, $M_0(1; 0)$; 4) $k=\frac{1}{3}$, $M_0(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$.

B

210. 39, *а,б,в,с*-расмларда берилган тўғри чизиқлар тенгламаларини ёзинг. Бу тўғри чизиқларнинг: 1) йўналтирувчи векторини; 2) нормаль векторини; 3) бурчак коэффициентини топинг (39, *а,б,в,с*-расм).



39-расм

211. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{p}=(\alpha;\ \beta)$: 1) *Ox* ўқига; 2) *Oy* ўқига параллел бўлса ва у $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтадан ўтса, тўғри чизиқ тенгламаси билан йўналтирувчи вектори қандай бўлади?

212. $a_1x+b_1y+c_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2=0$ тенгламалар билан тўғри чизиқлар: 1) параллел бўлиши; 2) перпендикуляр бўлиши; 3) устма-уст тушиши учун қандай шарт бажарилиши керак?

213. 1) $-2x-3y=4$; 2) $y=-5$; 3) $x=3$; 4) $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_2;\ y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топинг.

214. $M_0(-2;\ 1)$ нуқтадан ўтувчи ва $\overrightarrow{AB}$ векторга: 1) параллел; 2) перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг. Бу ерда $A(0;\ 1)$, $B(4;\ -3)$.

215. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтликларидан қайси бири параллел, қайси бири перпендикуляр бўлади:

1) $3x-y+5=0$ ва $x+3y-1=0$;
2) $3x+4y+1=0$ ва $4x-3y+8=0$;
3) $6x-2y+1=0$ ва $3x-y+7=0$;
4) $9x-12y+1=0$ ва $8x+6y-13=0$;
5) $6x-15y+3=0$ ва $10x+4y-2=0$;
6) $3x-4y+7=0$ ва $6x-8y+1=0$.

216. b нинг қандай қийматида учта тўғри чизиқ: $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$ ва $bx+y-13=0$ бир нуқтада кесишади?

217. $M_0(4;\ -1)$ нуқтадан ва $12x-5y-27=0$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигини топинг.

218. Учбурчак томонлари ётган тўғри чизиқлар берилган. Учбурчакнинг тенг ёнли бўлишини исботланг:

1) $x-2y+6=0$; $x+y=0$; $2x-y-6=0$;
2) $x+y+9=0$; $4x-7y+25=0$; $7x-4y-14=0$.

219. Қуйидагиларнинг маъноси қандай:

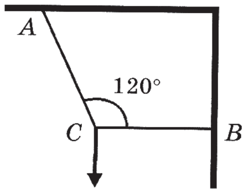
1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{PO}=k\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AK}=0{,}5\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$; 7) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}$; 8) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BD}|$?

220. 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{BD}|$; 2) $\overrightarrow{AB}^2=0$; 3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PO}=0$; 4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|$; 5) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OD}|$ шартларнинг геометрик маъноси қандай?

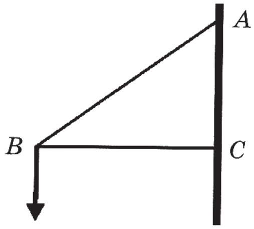
221. Агар $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}-3\vec{b}$, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$ ва $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$ бўлса, $ABCD$ параллелограмм диагоналларининг узунликларини топинг.

222. Параллелограмм диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.

223. Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлишини исботланг.



40-расм



41-расм

224. 40-расмда кўрсатилгандек қилиб AC ва BC ипларга C нуқтада 30 кг ли юк осилган.Агар $\angle ACB=120°$ бўлса, ипларга таъсир этаётган кучни топинг.

225. 60 кг юк 41-расмда кўрсатилгандек AB ва CB пружинага осилган. Агар $\angle ACB=90°$, $\angle ABC=30°$ бўлса, пружинага таъсир этаётган кучни топинг.

226. Томонлари a, b, c бўлган учбурчакнинг: 1) бурчакларининг косинусларини; 2) медианаларининг узунлигини; 3) биссектриссаларининг узунлигини; 4) баландликларининг узунлигини топинг.

227. Учбурчак медианалари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратлари йиғиндисининг $\frac{3}{4}$ қисмига тенг бўлишини исботланг.

228. Ихтиёрий қавариқ тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограмм учлари бўлишини исботланг.

C

229. Ёруғлик нури $x-2y+5=0$ тенглама билан тўғри чизиқ бўйлаб тарқалиб, $3x-2y+7=0$ тенглама билан берилган тўғри чизиққа етиб, ундан қайтади. Қайтган ёруғлик нури тарқаладиган тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

230. a ва b қийматларида $ax+8y+b=0$ ва $2x+ay-1=0$ тўғри чизиқлар ўзаро: 1)устма-уст тушади; 2) параллел; 3) перпендикуляр бўлади?

231. q нинг қандай қийматида $qx+(2q+3)y+q+6=0$ ва $(2q+1)x+(q-1)y+q-2=0$ тўғри чизиқлар ордината ўқида ўтувчи нуқтада кесишади?

232. $A(4;\ 13)$ ва $B(0;\ -7)$ нуқталардан ўтадиган тўғри чизиққа $D(-3;\ 4)$ нуқтадан туширилган перпендикулярнинг асоси билан AB кесма орасидаги боғланишни топинг.

233. Бир учи $A(2;\ -4)$ нуқта ва маркази $K(5;\ 2)$ нуқтада бўладиган квадрат томонларининг тенгламасини ёзинг.

234. Координата ўқларини $|a|$ ва $|b|$ кесмага тенг узоқликда кесиб ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

бўлишини исботланг. Бу тенглама тўғри чизиқнинг кесмалар тенгламаси деб аталади.

235. $A(8;\ 6)$ нуқтадан ўтадиган ва координата бурчагидан юзи 12 га тенг учбурчакни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

236. $y=k_1x+b_1$ ва $y=k_2x+b_2$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

формула билан аниқланишини исботланг.

237. $y=k_1x+b_1$ ва $y=k_2x+b_2$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлиши учун $k_1=-\frac{1}{k_2}$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарли бўлишини исботланг.

238. $a_1x+b_1y+c_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2=0$ $\left(\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\right)$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак биссектрисасининг тенгламасини ёзинг.

239. 1) $x-3y+2=0$ ва $3x+y-1=0$; 2) $\sqrt{3}\,y-x=12$ ва $3x+4y=15$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак биссектрисасининг тенгламасини ёзинг.

240. $y=0$, $3x-4y=0$, $4x+3y-50=0$ тўғри чизиқлардан иборат учбурчакнинг: 1) медианалари; 2) баландликлари; 3) биссектрисалари тенгламаларини ёзинг.

241. ABC учбурчакнинг AB томонида K нуқта олинган. $KC \cdot AB < KA \cdot BC + KB \cdot AC$ тенгсизлик бажарилишини исботланг (вектор усули билан).

242. Томонлари ABC учбурчакнинг мос медианаларига тенг ва параллел бўладиган учбурчак ясаш мумкинлигини исботланг.

243. C нуқта AB кесмани p:q нисбатда бўлади. Текисликдаги ихтиёрий O нуқта учун $\overrightarrow{OC} = \frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$ тенглик бажарилишини исботланг.

244. $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ ва векторлар коллинеар эмас. X нуқта $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ тенглама билан аниқланади. *а*) Агар 1) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ бўлса; 2) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \leqslant 0$ бўлса; 3) $\alpha = 1$, $\beta \in (-\infty; +\infty)$ бўлса; 4) $\alpha \geqslant 0$, $\beta = -1$, бўлса; 5) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta = 2$ бўлса, барча X нуқталар тўплами қандай фигура бўлади? *б*) X нуқталар тўплами: 1) AOB учбурчак; 2) параллелограмм бўлиши учун α ва β нинг қийматлари қандай бўлиши керак?

245. $A_1B_1C_1$ ва $A_2B_2C_2$ учбурчаклар медианалари кесишиш нуқталари мос равишда O_1 ва O_2 бўлсин. $3\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}$ тенгликни бажарилишини исботланг.

II боб. ТЕКИСЛИКДАГИ ФИГУРАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

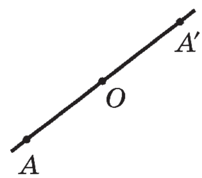
Агар F фигуранинг ҳар бир нуқтаси бирор қонуниятга асосан текисликдаги бошқа нуқталарга кўчириш (силжитиш ёки алмаштириш) натижасида F′ фигура ҳосил бўлса, F фигурани F′ фигурага алмаштирилди деб аталади.

Шу усул билан текисликнинг ҳар бир M нуқтаси M' нуқтага кўчса, у ҳолда **текисликни шакл алмаштириш** берилди деб аталади. Бунда текисликнинг ҳар бир M нуқтасига фақат битта M' нуқта мос келади. M' –M нуқтанинг *тасвири* деб, M эса M' нуқтанинг *асли* деб аталади. Шунга ўхшаш, F фигурани F' фигурага алмаштирсак, F' фигура F фигуранинг тасвири, F' фигура эса F фигуранинг асли деб аталади. Текисликдаги алмаштиришнинг тўртта тури билан танишайлик.

1-§. Марказий ва тўғри чизиққа нисбатан симметрия

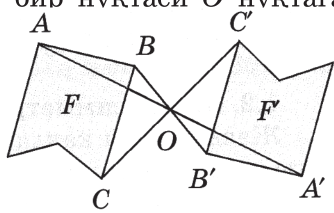
1.1. Марказий симметрия

O – тайин нуқта A – текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. OA кесманинг давомида $OA = OA'$ тенглик бажариладиган қилиб A' нуқтани оламиз. A' нуқта O нуқтага нисбатан A нуқтага ***симметрик нуқта*** дейилади. O нуқта ***симметрия маркази*** деб аталади (42-расм).

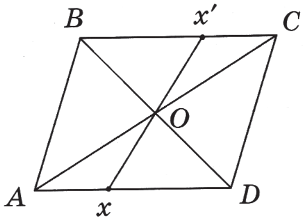


42-расм

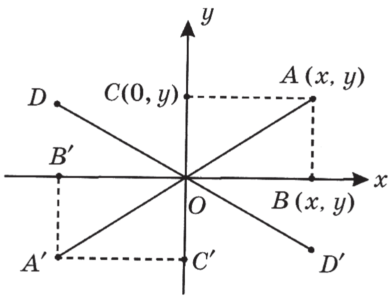
Текисликдаги ҳар бир нуқтани тайинли бир O марказга нисбатан симметрик нуқталарга ***алмаштириш марказий симметрия*** *деб аталади.* F фигурани F' фигурага алмаштирганда F нинг ҳар бир нуқтаси O нуқтага нисбатан симметрик нуқтага ўтса, бу алмаштириш O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш деб аталади. Бунда F ва F' фигуралар O нуқтага нисбатан ***симметрик фигуралар*** деб аталади (43-расм). Агар O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш F фигурани ўз-ўзига ўтказса, яъни $F= F'$ бўлса, у ҳолда F фигуранинг симметрия маркази бор деб ҳисоблаб, O нуқтани эса F фигуранинг симметрия маркази деб атаймиз. Масалан, параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси унинг симметрия маркази бўлади (44-расм).



43-расм



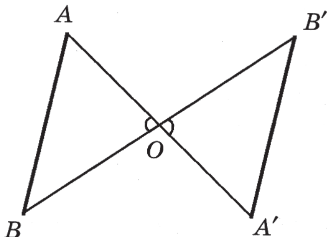
44-расм



45-расм

Фараз қилайлик, координаталар боши билан симметрия маркази устма-уст тушсин. $A(x;\ y)$ нуқтага симметрик A' нуқтанинг координаталарини топайлик. Марказий симметрия таърифига асосан, $OA = OA'$ ва вертикал бурчаклар сифатида $\angle AOB=\angle A'OB'$. Гипотенузаси билан ўткир бурчаги $\Delta AOB=\Delta A'OB'$ (45-расм). $OB=OB'$ ва $OC=OC'$ бўлганидан $B'(-x;\ 0)$ ва $C'(0;\ -y)$ бўлади. Шунинг учун $A'(-x;\ -y)$ бўлади. Координаталар бошига нисбатан симметрик нуқталарни мос координаталарининг модуллари тенг ва ишоралари қарама-қарши, яъни $A(x;\ y)$ ва $A'(x';\ y')$ симметрик нуқталар бўлса, у ҳолда $x'=-x$, $y'=-y$ бўлади.

1-теорема. *Марказий симметрия мос нуқталар орасидаги масофани сақлайди.*



46-расм

Исботи. Теореманинг шартига асосан, маркази O нуқтада бўлган симметрия пайтида A ва B нуқталарга мос A' ва B' нуқталарга кўчса, $AB = BA'$ тенглик ўринли бўлади. Шуни исбот қилиш керак.

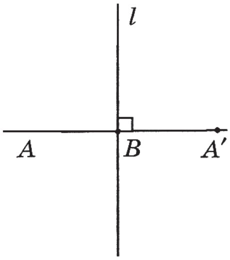
Ҳақиқатан ҳам, $\angle AOB=\angle A'OB'$, $OA=OA'$, $BO=OB'$ тенгликлардан $\Delta AOB=\Delta A'OB'$ (учбурчаклар тенглигининг 1-аломати). Бундан $AB=A'B'$ келиб чиқади (46-расм). Теорема исботланди.

1.2. Тўғри чизиққа нисбатан симметрия

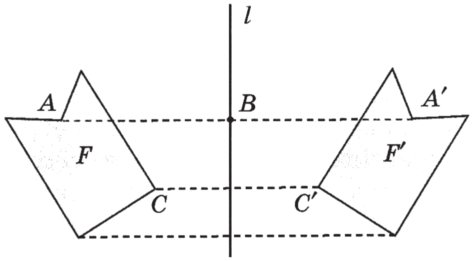
Текисликда l тўғри чизиқ олайлик. Ихтиёрий А нуқтадан l тўғри чизиққа AB перпендикуляр туширамиз. Перпендикуляр давомига $AB=B'A'$ $(B\in l)$ шартни қаноатлантирувчи A' нуқтани қўямиз. A ва A' нуқталар l тўғри чизиққа нисбатан **симметрик нуқталар**, l тўғри чизиқ эса **симметрия ўқи** деб аталади (47-расм). Бошқача айтганда, A нуқта l тўғри чизиққа нисбатан симметрик A' нуқтага кўчади.

*Текисликдаги ҳар бир нуқтани l тўғри чизиққа нисбатан симметрик нуқтага алмаштириш **тўғри чизиққа нисбатан симметрия** деб аталади.*

F фигурани F' фигурага алмаштиришда F нинг ҳар бир нуқтаси берилган l тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган



47-расм

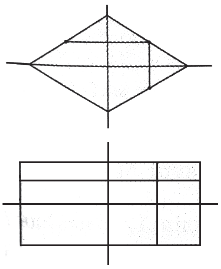


48-расм

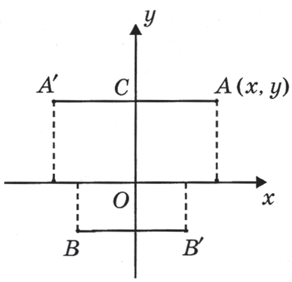
нуқтага ўтса, F' фигурани оламиз. F ва F' фигуралар l тўғри чизиққа нисбатан **симметрик фигуралар** деб аталади (48-расм).

Агар l тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришда F фигура ўз-ўзига ўтса, бу фигура l тўғри чизиққа нисбатан **симметрик фигура** деб аталади, l тўғри чизиқ эса F фигуранинг **симметрия ўқи** дейилади. Масалан, ромбнинг диагоналлари ётган тўғри чизиқлар унинг симметрия ўқлари бўлади. Тўғри тўртбурчакда ҳам иккита симметрия ўқи бор.Улар – қарама-қарши томонларнинг ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқлар бўлади (49-расм).

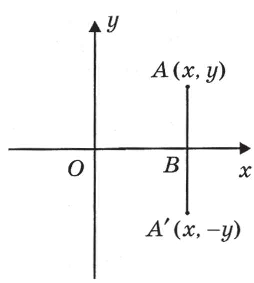
Координата ўқларидан бирини симметрия ўқи деб олиб, шу ўққа нисбатан симметрик нуқталар координаталарининг қандай ўзгаришини аниқлайлик. Фараз қилайлик, Oy – симметрия ўқи, $A(x;\ y)$ ва $A'(x';\ y')$ нуқталар шу ўққа нисбатан симметрик нуқталар бўлсин. Таърифга асосан, $AA' \perp Oy$. Демак, $AA' \parallel Ox$, яъни $y'=y$. Иккинчидан, $AC=AC'$, ($C=AA' \cap Oy$) бўлганидан, $x'=-x$. Шундай қилиб, *Oy ўқига нисбатан симметрик нуқталарнинг иккинчи координаталари тенг, биринчи координаталарининг модуллари тенг ва ишоралари қарама-қарши бўлади*. Шунга ўхшаш, *Ox ўқига нисбатан симметрик нуқталарнинг биринчи координаталари тенг, иккинчи координаталарининг модуллари тенг ва ишоралари қарама-қарши бўлади* (51-, 52-расм).



49-расм



50-расм



51-расм

2-теорема. *Тўғри чизиққа нисбатан симметрияда мос нуқталар орасидаги масофа сақланади.*

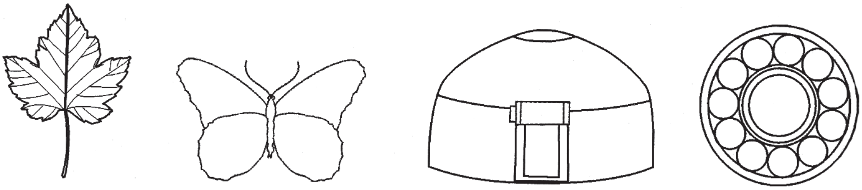
Исботи. Фараз қилайлик, A ва B нуқталар l тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган мос A' ва B' нуқталарга ўтсин. Oxy координаталар системасини Oy ўқи l симметрия ўқи билан устма-уст тушсин. Агар $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ бўлса, унда $A'(-x_1;\ y_1)$, $B'(-x_2;\ y_2)$. Энди $AB=A'B'$ тенгликнинг бажарилишини кўрайлик.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A'B' = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

У ҳолда $AB = A'B'$. Теорема исботланди.

Умуман, атроф-муҳит, кундалик ҳаётда кўп нарсалар, объектлар симметрия марказига эга экани кузатилади. Масалан, дарахтларнинг баргларида, гулларда, меваларда ва бошқаларда симметрияни учратамиз. Симметрияни тасвирий санъатда, архитектурада, техникада, кундалик турмушда кўп қўллаймиз. Масалан, уйдаги гилам нақшларининг, турли техник механизмларнинг симметрик ўқи ёки симметрия маркази бор.(52-расм).



52-расм

?

1. Текисликни алмаштириш деб нимага айтилади?
2. Фигуранинг асли ва тасвири нима?
3. Қандай алмаштириш марказий симметрия деб аталади? Симметрия маркази нима?
4. Фигуранинг симметрия маркази ҳар доим ҳам бўладими? Мисол келтиринг.
5. Марказий симметриянинг қандай хоссалари бор? Агар координаталар боши симметрия маркази бўлса, марказий симметрия қандай аниқланади?
6. Қандай алмаштириш тўғри чизиққа нисбатан симметрия деб аталади? Симметрия ўқи деб қандай тўғри чизиққа айтилади?
7. Ҳар қандай фигуранинг симмертия ўқи бўладими? Мисол келтиринг.

8. Тўғри чизиққа нисбатан симметриянинг қандай хоссалари бор? Агар координата ўқлари симметрия ўқи бўлса, симметрик нуқталарнинг координаталари қандай бўлади?

ПТ
1. *а*) Параллелограммнинг; *б*) тўғри тўртбурчакнинг; *в*) ромбнинг; *г*) квадратнинг; *д*) айлананинг; *е*) кесманинг симметрия марказини аниқланг.
2. 1-топшириқдаги фигураларнинг симметрия ўқини аниқланг. Уларда нечта симметрия ўқи бор?
3. Ихтиёрий фигура олиб унга берилган нуқтадан симметрик фигура ясанг.
4. 3-топшириқни тўғри чизиққа нисбатан бажаринг.

МАСАЛАЛАР

246. Учбурчакнинг симметрия ўқи мавжудми? Жавобингизни асосланг.

247. Ҳар қандай учбурчакнинг симметрия ўқи мавжудми? Қандай учбурчакнинг симметрия ўқи бўлади ва нечта бўлиши мумкин?

248. A ва B нуқталар берилган. B нуқтага нисбатан A нуқтага симметрик A' нуқтани ясанг.

249. 1) кесманинг; 2) нурнинг; 3) тўғри чизиқнинг; 4) бурчакнинг нечта симметрия маркази бор?

250. A нуқта ва l тўғри чизиқ берилган. l тўғри чизиққа нисбатан A нуқтага симметрик A' нуқтани ясанг. $A \in l$ ва $A \in l$ бўлган ҳолларни кўриб чиқинг.

251. A, B ва C нуқталар берилган. C нуқтага AB кесманинг ўртасига нисбатан симметрик бўлган C' нуқтани ясанг.

252. Трапециянинг симметрия маркази ва симметрия ўқи мавжудми?

253. $(2; -3)$ нуқтага: 1) координаталар бошига; 2) Ox ўқига; 3) Oy ўқига нисбатан симметрик нуқталарнинг координаталарини топинг.

B

254. Ўзаро параллел тўғри чизиқларнинг нечта симметрия маркази бор?

255. 250-масалани фақат циркуль ёрдамида бажаринг.

256. Ихтиёрий тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган A ва B нуқталар билан C нуқта берилган. Шу тўғри чизиққа нисбатан C нуқтага симметрик C' нуқтани ясанг.

257. Ромбнинг диагоналлари унинг симметрия ўқи бўлишини исботланг.

258. Параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтаси унинг симметрия маркази эканлигини исботланг.

259. Бурчак биссектрисаси ётадиган тўғри чизиқ шу бурчакнинг симметрия ўқи бўлишини исботланг.

260. Симметрия маркази мавжуд бўлган тўртбурчак параллелограмм бўлишини исботланг.

261. Учлари $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 1)$, $C(-2;\ 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Учбурчакка: 1) координаталар бошига; 2) Ox ўқига; 3) Oy ўқига нисбатан симметрик учбурчак учларининг координаталарини топинг.

C

262. 248-масалани фақат циркуль ёрдамида бажаринг.

263. Агар фигурани ўзаро перпендикуляр икки симметрия ўқи бўлса, бу ўқларнинг кесишиш нуқтаси шу фигуранинг симметрия маркази бўлишини исботланг.

264. Кесишишадиган икки тўғри чизиқ ва улар орасида ётувчи нуқта берилган. Учлари берилган тўғри чизиқларда ётадиган ва берилган нуқта ўртаси бўладиган кесма ясанг.

265. Ўзаро жуфт-жуфти билан кесишадиган ва бир нуқтадан ўтмайдиган a, b, c тўғри чизиқлар берилган. b тўғри чизиққа перпендикуляр ва ўртаси b тўғри чизиқда ётадиган, учлари эса a ва c тўғри чизиқларда ётадиган кесмани ясанг. Масаланинг ечими ҳар доим ҳам бўладими?

266. Учлари $A(2;\ 1)$, $B(5;\ 4)$, $C(11;\ -2)$ ва $D(8;\ -5)$ нуқталарда бўлган тўғри тўртбурчак берилган. Тўғри тўртбурчакнинг: 1) симметрия маркази координаталарини; 2) симметрия ўқларининг тенгламаларини ёзинг.

267. Ихтиёрий бир диагонали симметрия ўқи бўладиган қавариқ тўртбурчак *дельтоид* деб аталади. Дельтоидларнинг қандай хоссалари бўлишини аниқланг.

268. A ва B нуқталар m тўғри чизиқнинг бир томонида ётади. $AK+AB$ йиғинди энг кичик қиймат қабул қиладиган қилиб, m тўғри чизиқда K нуқтани белгиланг.

269. A ва B нуқталар m тўғри чизиқнинг икки томонида ётади. m тўғри чизиқ ACB бурчакнинг биссектрисаси бўладиган қилиб, m тўғри чизиқда C нуқтани белгиланг.

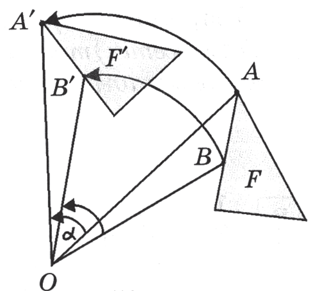
270. Номаълум марказли айлана билан унинг ўзаро тенг бўлмаган икки параллел ватари берилган. Фақат чизғич билан шу ватарларни тенг икки бўлакка бўлинг.

271. A нуқтадан m тўғри чизиққа уч хил AB, AC ва AD оғмалар ўтказилган. Шу кесмалар диаметрлари бўладиган қилиб ясалган учта айлананинг A нуқтадан бошқа яна битта умумий нуқтаси бўлишини исботланг.

2-§. Буриш ва параллел кўчириш

2.1. Буриш

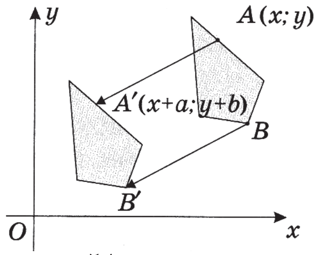
Текисликда O нуқта билан α бурчак берилсин. Шу текисликда ихтиёрий A нуқта учун OA нурни бирор бир йўналишда (соат стрелкаси йўналишида ёки унга қарама-қарши йўналишда) O нуқта атрофида α бурчакка бурганда A нуқта A' нуқтага ўтсин. Бунда, $\angle AOA' = \alpha$ ва $OA = OA'$ тенглик бажарилади ва текисликдаги нуқталар бир йўналишда ўринларини алмаштиради. Фақат O нуқта ўз-ўзига кўчади. Текисликдаги бундай ***алмаштириш буриш*** деб аталади. O нуқта ***буриш маркази***, α бурчак эса ***буриш бурчаги*** дейилади. Масалан. 53-расмда соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши йўналишда α бурчакка буриш тасвирланган. Бу буришда F фигуранинг ҳар бир нуқтаси ўринларини алмаштириб, F' фигура ҳосил қилса, у ҳолда F' фигура F фигурани α бурчакка буришда ҳосил бўлди дейилади. Буришда мос нуқталар орасидаги масофа ўзгармайди.



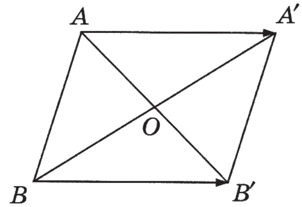
53-расм

2.2. Параллел кўчириш

Текисликда Декарт координаталар системаси киритамиз, унда ихтиёрий $A(x;\ y)$ нуқта $A'(x+a;\ y+b)$ нуқтага ўтса, алмаштириш ***параллел кўчириш*** деб аталади. Бунда a ва b – аниқ, ўзгармас сонлар. Шундай қилиб, агар параллел кўчиришда $A(x;\ y)$ нуқта $A'(x';\ y')$ нуқтага алмашса, у ҳолда $x'=x+a,\ y'=y+b$ тенглик ўринли бўлади (54-расм).



54-расм



55-расм

Параллел кўчиришда нуқталар параллел (ёки устма-уст тушувчи) тўғри чизиқлар бўйлаб бир хил масофага силжийди.

Ҳақиқатан, $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ нуқталар $A'(x_1+a;\ y_1+b)$ ва $B'(x_2+a;\ y_2+b)$ нуқталарга ўтсин. AB' ва $A'B$ кесмалар кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади, сабаби бу нуқта координаталари бир хил:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

Бундан $AA'B'B$ тўртбурчакнинг диагоналлари кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади, деган хулоса чиқади. Демак, бу тўртбурчак параллелограммдир (55-расм). Параллелограммда эса $AA'\|BB'$ ва $AA'=BB'$ қарама-қарши ётган томонлар тенг ва параллел. Параллелограммнинг бошқа икки томони AB ва $A'B'$ ҳам тенг ва параллел.

1-теорема. *Параллел кўчиришда нуқталар параллел (ёки устма-уст тушувчи) тўғри чизиқлар бўйлаб бир хил масофага силжийди, улар орасидаги масофа ўзгармайди.*

?

1. Қандай алмаштириш буриш дейилади? У қандай аниқланади?
2. *а*) Буриш маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқлар; *б*) маркази буриш маркази билан устма-уст тушувчи айлана; *в*) учи буриш марказида бўлган бурчак маълум бир бурчакка бурилганда қандай фигураларни тасвирлайди?
3. Қандай фигураларни буриш ёрдамида ўз-ўзига ўтказиш мумкин? Мисол келтириб, буриш маркази билан бурчакни аниқланг.
4. Параллел кўчириш нима? У қандай аниқланади?
5. Параллел кўчиришда мос нуқталар орасидаги масофаларнинг ўзгармаслигини исботланг.
6. Параллел кўчиришда ўз-ўзига ўтадиган, яъни ўзгармайдиган нуқта мавжуд бўладими? Ўзгармайдиган фигура-чи?

ПТ

1. AB кесма билан бу кесмада ётмайдиган O буриш маркази берилган. AB кесмани: *а*) 30° га; *б*) 60° ; *в*) 120° га; *г*) 180° га бурганда тасвирни ясанг.

2. Берилган ABC учбурчакни A учидан соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши $60°$ га буришда шу учбурчак ўтадиган фигурани ясанг.
3. A, B, C нуқталар берилган. A нуқтани B нуқтага ўтказувчи параллел кўчиришда C нуқта ўтадиган C' нуқтани ясанг.

МАСАЛАЛАР

А

272. Узунлиги 4 см бўлган AB кесманинг A нуқтаси атрофида $90°$ га бурганда AB_1 кесмаси ҳосил бўлади. BB_1 кесманинг узунлигини топинг.

273. O нуқта билан m тўғри чизиқ берилган. O нуқта атрофида m тўғри чизиқни $60°$ га буришда (соат стрелкаси йўналишига қарама-қарши) ҳосил бўладиган m' тўғри чизиқни ясанг. 1) $O \in m$ 2) $O \notin m$ бўлган ҳолларни кўринг.

274. Ихтиёрий ABC учбурчак берилган. Параллел кўчиришда A нуқта B нуқтага ўтсин. $AB'C'$ учбурчакни ясанг.

275. AB чизиқни параллел кўчириш орқали шундай алмаштирингки A нуқта С нуқтага ўтсин: 1) $C \notin AB$; 2) $C \in AB$ ҳоллари кўриб чиқинг.

276. Параллел кўчириш қуйидаги формулалар билан берилган: Бундай параллел кўчириш натижасида (0; 0), (2; 1) ва (–1; 2) нуқталар қандай нуқталарга ўтади?

277. $x'=x+a$, $y'=y+b$ формула билан берилган параллел кўчиришда: 1) (1; 2) нуқта (3; 4) нуқтага; 2) (2; –1) нуқта (–1; 2) нуқтага; 3) (–1; –3) нуқта (0; –2) нуқтага ўтса, a ва b сонларнинг қийматини топинг.

B

278. Параллел кўчиришда (1; 1) нуқта (–1; 3) нуқтага ўтса, координаталар боши қандай нуқтага ўтади?

279. 1) (1; 2) нуқтани (3; 4) нуқтага ва (0; 1) нуқтани (–1; 0) нуқтага кўчирадиган; 2) (2; –1) нуқтани (1; 0) нуқтага ва (3; 1) нуқтани (2; 2) нуқтага кўчирадиган параллел кўчириш мавжудми?

280. Берилган айланани икки йўналишда (соат стрелкаси йўналиши бўйича ва унга қарама-қарши йўналишда) унда ётган A нуқта атрофида $120°$ га буринг. Берилган айлана билан унинг тасвирлари ўзаро қандай жойлашган?

281. $ABCD$ квадратни A учи атрофида B учини C учига ўтадиган қилиб буришда, ADC_1D_1 квадрат олинади. $AB = \alpha$ бўлса CD_1 ва CC_1 томонларни аниқланг.

282. $\angle ABC = \alpha$ бурчакни B учидан A нуқтани C нуқта йўналишида $60°$ га буришда A_1BC_1 бурчак ҳосил бўлади. ABC_1 ва CBA_1 бурчакларни топинг.

283. b ва c параллел тўғри чизиқларда ётмайдиган A нуқта берилган. B ва C учлари мос равишда b ва c параллел тўғри чизиқларда ётадиган тенг томонли ABC учбурчак ясанг.

284. Томонлари ва диагоналлари бўйича трапеция ясанг.

285. Айланани параллел кўчиришда унга уринувчи айлана олинди. Бу айлана қандай масофага параллел кўчирилган?

286. Ўзаро тенг ва параллел бўлмаган икки кесма берилган. Буриш натижасида бу кесмалар бир-бирига ўтадиган бўлса, буриш марказини аниқланг.

287. Қандай шарт бажарилса: 1) икки кесма; 2) икки тўғри чизиқ; 3) икки нур; 4) икки айлана параллел кўчириш орқали бир-бири билан устма-уст тушириш мумкин.

C

288. Икки жуфт параллел тўғри чизиқлар берилган: $a \| a_1$ ва $b \| b_1$. a ни a_1 га ва b ни b_1 га ўтказадиган параллел кўчириш ҳар доим ҳам мавжуд бўладими?

289. Тенг ёнли трапециянинг ўткир бурчаги 60^0 га тенг. Унинг кичик асоси катта асоси билан ён томони айирмасига тенг бўлишини исботланг.

290. AOB бурчакнинг ичида ётадиган C нуқта берилса, учлари OA ва OB нурларда ётадиган, C нуқтада тенг иккига бўлинадиган DE кесмани чизинг. Масалани: 1) буриш орқали; 2) марказий симметрияни қўллаб ечинг.

291. Мунтазам n бурчакнинг маркази атрофида, камида қандай бурчакка бурилса ўзи билан ўзи устма-уст тушади?

292. Ўзаро тенг икки квадратни буришда бир-бирига ўтадиган қилиб, буриш марказини топинг.

293. Буриш билан марказий симметрия орасида қандай боғланиш бор?

294. Ўзаро тенг айланалар K нуқтада ташқи уринади. Уларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиққа параллел кесувчи бир айланани A ва B нуқталарида, иккинчи айланани эса C ва D нуқталарда кесувчи тўғри чизиқ ўтказилган. AKC бурчак кесувчи тўғри чизиқни танлаб олишга боғлиқ бўлмаслигини исботланг.

295. Тенг ёнли учбурчак маркази орқали ва бир-биридан $60°$ бурчак остида икки тўғри чизиқ ўтазилган. Бу тўғри чизиқларнинг учбурчак томонлари билан чегараланган кесмалари ўзаро тенг бўлишини исботланг.

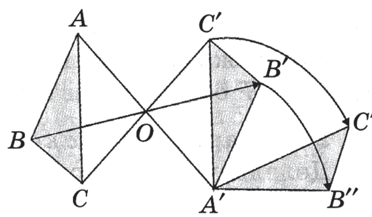
3-§. Ҳаракат

3.1. Ҳаракат ва унинг хоссалари

Биз ўрганган алмаштиришнинг барча турига умумий бўлган хосса – улардаги нуқталар орасидаги масофанинг ўзгармаслиги.

Таъриф. *Текисликда нуқталар орасидаги масофани ўзгартирмайдиган шакл алмаштириш ҳаракат деб аталади.*

Аввалги мавзуларда ўрганилган тўртта алмаштириш ҳаракат ҳисобланади. 56-расмда ABC учбурчак аввал $A'B'C'$ учбурчакка алмашгани, сўнгра $A'B'C'$ учбурчакни A' учидан соат стрелкаси йўналишида $60°$ га буриш орқали $A'B''C''$ учбурчакка ўткзилгани тасвирланган.



56-расм

Бу ерда кетма-кет қўлланилган алмаштиришнинг иккаласи ҳам ҳаракат бўлганидан ABC, $A'B'C'$ учбурчаклар ва $A'B'C'$, $A'B''C''$ учбурчаклар тенг бўлади. Натижада ABC учбурчакни $A'B''C''$ учбурчакка ўтказадиган алмаштириш ҳам ҳаракат бўлади. Бир нечта ҳаракат кетма-кет қўлланилиши натижасида юз берадиган алмаштириш ҳам ҳаракат ҳисобланади.

1-теорема. *Ҳаракатда кесма ўзига тенг кесмага ўтади.*

Исботи. Ҳаракатда нуқталарнинг орасидаги масофа ўзгармаслигидан, теоремани исботлаш учун кесмани кесмага ўтишини исботлаш етарли.

Фараз қилайлик, AB кесманинг учлари ҳаракатда A_1 ва B_1 нуқталарга мос равишда ўтсин. AB кесмада ётадиган ихтиёрий P нуқта олиб, унинг тасвирини P_1 билан белгилайлик. $P \in AB$ эканлигидан $AP+BP=AB$ тенглик ўринли бўлади ва ҳаракатда нуқталарнинг орасидаги масофа ўзгармаслигидан, $AB=A_1B_1$, $A_1P_1=AP$ ва $B_1P_1=BP$ тенгликлар бажарилади. $A_1P_1+B_1P_1=AP+BP=AB=A_1B_1$, яъни $A_1P_1+B_1P_1=A_1B_1$ тенгликлар ўринли бўлишидан, P_1 нуқта A_1B_1 кесманинг нуқталарига ўтишини кўрамиз.

Аксинча, A_1B_1 кесманинг ҳар бир нуқтаси учун AB кесмадан нуқталарнинг асли мавжудлигини кўрсатайлик.

Фараз қилайлик, $P_1 \in A_1B_1$ бўлсин. Ҳаракатда ихтиёрий бир P нуқта P_1 нуқтага ўтказиш керак. Юқорида исботлангaнга ўхшаш $A_1P_1+B_1P_1=A_1B_1$ тенгликдан $AP+BP=AB$ тенглик келиб чиқади, яъни $P \in AB$ бўлади. Теорема исботланди.

1-натижа. *Ҳаракатда тўғри чизиқ тўғри чизиққа ўтади.*

Исботи. l тўғри чизиқ ва унга тегишли A ва B нуқталар берилсин. Ҳаракатда A ва B нуқталар мос равишда A_1 ва B_1 нуқталарга ўтсин. A_1 ва B_1 нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқни l_1 билан белгилайлик. Агар $P \in l$ нуқтани олсак, P нуқтанинг тасвири P_1 нуқта l тўғри чизиқда ётиши теорема исботидан келиб чиқади. $P \in AB$, $A \in PB$ ёки $B \in AP$ бўлишини уч хил усулда кўриб чиқиш мумкин.

2-натижа. *Ҳаракатда нур нурга ўтади.*

Исботи 1-натижага ўхшаш.

3-натижа. *Ҳаракатда учбурчак ўзига тенг учбурчакка ўтади.*

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, исботланган теоремага асосан ҳаракатда учбурчакнинг томонлари ўзига тенг кесмаларга ўтади. Демак, учбурчак ўзига тенг учбурчакка ўтади.

4-натижа. *Ҳаракатда бурчак ўзига тенг бурчакка ўтади.*

Исботи 2- ва 3- натижалардан келиб чиқади.

3.2. Ҳаракат ва устма-уст тушириш

Биз шу вақтгача фигуралар тенглигини устма-уст тушириш орқали аниқлаб келдик. Бошқача айтганда, Φ ва Φ_1 фигуралар бир-бири билан устма-уст тушадиган бўлса, у ҳолда Φ ва Φ_1 фигуралар ўзаро тенг деб қаралди. Устма-уст тушириш тушунчаси геометриянинг асосий тушунчаларидан бири (нуқта, тўғри чизиқ, орасида ётади ва б.) каби таърифсиз қабул қилиб келдик. Φ фигурани Φ_1 фигурага устма-уст тушишини Φ фигурани Φ_1 фигурага ***алмаштириш*** деб ҳам кўриб чиқиш мумкин. Шунинг билан бирга устма-уст туширишда фақат Φ фигуранинг нуқталаригина эмас, балки текисликнинг ихтиёрий нуқтаси ҳам шу текисликнинг маълум бир нуқтасига ўтади. У ҳолда, устма-уст туширишни текисликни ўзини-ўзига алмаштириш деб қараш мумкин. Албатта, устма-уст тушириш текисликдаги ҳар хил нуқталарни ҳар хил нуқталарга ўтказади.

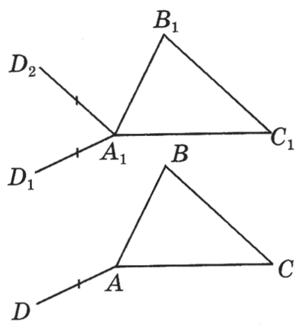
2-теорема. *Устма-уст тушириш ҳаракат бўлади.*

Исботи. AB кесманинг учлари устма-уст туширишда A_1 ва B_1 нуқталарга ўтсин. У ҳолда $AB=A_1B_1$. Демак, устма-уст тушириш нуқталар орасидаги масофани ўзгартирмайди, яъни ҳаракат бўлади. Теорема исботланди.

3-теорема. *Ҳар қандай ҳаракат устма-уст тушириш бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, қандайдир, ҳаракатда ABC учбурчак $A_1B_1C_1$ учбурчакка алмаштирайлик. 3-натижага асосан бу учбурчаклар тенг бўлганидан, A, B ва C нуқталар A_1, B_1 ва C_1 нуқталарга ўтказадиган устма-уст тушириш мавжуд бўлади. Энди шу ҳаракат билан устма-уст тушириш ўзаро «тенг» ўтказиш эканини, яъни ҳаракат ҳам, устма-уст тушириш ҳам текисликнинг ҳар бир D нуқтасини худди шундай D_1 нуқтага ўтказишини исботлайлик.

Фараз қилайлик, ҳаракатда D нуқтаси D_1 нуқтага, устма-уст туширишда D_2 нуқтага ўтсин ва $D_1 \neq D_2$ бўлсин. Ҳаракат ҳам, устма-уст тушириш ҳам нуқталар орасидаги масофани сақланганлигидан, $AD=A_1D_1$, $AD=A_1D_2$ тенгликлардан $A_1D_1=A_1D_2$ бўлади. Шунга ўхшаш, $B_1D_1=B_1D_2$ ва $C_1D_1=C_1D_2$ тенгликлар ҳам ўринли бўлади. Яъни A_1,B_1 ва C_1 нуқталар D_1 ва D_2 нуқталар бир хил масофада ётади (57-расм). Демак, A_1,B_1 ва C_1 нуқталар D_1D_2 кесманинг ўрта перпендикулярида ётишлари керак. Бундай бўлиши мумкин эмас, яъни $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг учлари бир тўғри чизиқда ётмайди. Ҳосил бўлган зиддият қаралаётган ҳаракат билан устма-уст тушириш бир хил алмаштириш эканини кўрсатади. Теорема исботланди.



57-расм

?
1. Қандай алмаштириш ҳаракат деб аталади?
2. Ҳаракатда кесма ўзига тенг кесмага ўтишини исботланг.

3. Ҳаракатда: *а*) тўғри чизиқнинг; *б*) бурчакнинг; *в*) учбурчакнинг; *г*) айлананинг тасвирлари қандай фигура бўлади?
4. Ҳаракат билан устма-уст тушириш орасида қандай боғланиш бор?

ПТ Рангли қоғоздан ўзаро тенг бўлган учта фигура кесинг.

а) Уларнинг иккитасини: 1) марказий симметрияни; 2) симметрия ўқини; 3) буришни; 4) параллел кўчиришни қўллаб, бир-бирига ўтадиган қилиб жойлаштиринг.

б) Учаласини 56-расмда кўрсатилгандек: 1) буриш билан марказий симметрияни; 2) буриш билан симметрия ўқини; 3) буриш билан параллел кўчиришни; 4) параллел кўчириш билан симметрия ўқини; 5) параллел кўчириш билан марказий симметрияни қўллашга мумкин қилиб жойлаштиринг.

МАСАЛАЛАР

А

296. Ҳаракатда: 1) тўғри чизиқ тўғри чизиққа; 2) нур нурга; 3) бурчак ўзига тенг бурчакка; 4) айлана ўзига тенг айланага ўтишини исботланг.

297. Ҳаракатда: 1) параллелограмм параллелограммга; 2) трапеция трапецияга; 3) ромб ромбга; 4) тўғри тўртбурчак тўғри тўртбурчакка; 5) квадрат квадратга ўтишини исботланг.

298. 1) Узунликлари бир хил кесмаларнинг; 2) градус ўлчовлари тенг бурчакларнинг; 3) радиуслари бир хил айланаларнинг ўзаро тенглигини, яъни ҳаракат натижасида устма-уст тушишини исботланг.

299. Агар ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар учун $AB= A_1B_1$, $AC= A_1C_1$, $BC= B_1C_1$ тенгликлар бажарилса, A,B,C нуқталарни A_1, B_1, C_1 нуқталарга ўтказадиган фақат битта ҳаракат мавжудлигини исботланг.

300. $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммларда $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ ва $\angle A=\angle A_1$. Параллелограммлар ўзаро тенг, яъни ҳаракат натижасида улар устма-уст тушишини исботланг.

301. Агар икки ромбнинг диагоналлари тенг бўлса, улар тенг бўлишини исботланг.

302. Икки айлананинг кесишиш нуқтаси уларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлишини исботланг.

В

303. Тўртбурчакнинг диагоналлари унинг симметрия ўқи бўлса, унинг ромб бўлишини исботланг.

304. Симметрия маркази бор бўлган олтибурчакнинг мунтазам олтибурчак бўлиши шартми? Жавобингизни асосланг.

305. Параллел ватарларнинг ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқ айлананинг маркази орқали ўтишини кўрсатинг.

306. Бир трапециянинг томонлари иккинчи трапециянинг мос томонларига тенг бўлса, уларнинг тенг бўлишини исботланг.

307. Кўпбурчакнинг симметрия маркази мавжуд бўлса, унинг томонлари сони жуфт бўлишини исботланг.

308. Квадрат марказидан ўтувчи ва ўзаро перпендикуляр икки тўғри чизиқ квадратнинг томонлари билан чегараланган кесмалари ўзаро тенг бўлишини исботланг.

C

309. Айланага ABC учбурчак ички чизилган. Шу айланага $AB \perp A_1B_1$, $AC \perp A_1C_1$, $BC \perp B_1C_1$ шартларни қаноатлантирувчи $A_1B_1C_1$ учбурчакни чизинг.

310. $l_1 \| l_2$ деб олиб, l_1 ва l_2 тўғри чизиқларга нисбатан симметрия ўқларини кетма-кет қўллаш параллел кўчириш бўлишини исботланг.

311. Марказлари O_1 ва O_2 нуқталар бўлган марказий симметрияни кетма-кет қўллаш параллел кўчириш бўлишини исботланг.

312. Фигуранинг икки хил симметрия маркази бўлади деб олиб, унинг чексиз кўп симметрия марказлари бўлишини исботланг.

313. Тўғри чизиқ билан унинг икки томонида ётувчи айланалар берилган. Икки учи мос равишда икки айланада ётадиган, учинчи учидан ўтказилган баландлик берилган тўғри чизиқда ётадиган тенг томонли учбурчак ясанг.

314. Учи қоғоз бетидан сиртда жойлашган AOB бурчак ва бурчак томонларининг бирида ётадиган C нуқта берилган. OC кесмани ясанг.

315. Ўзаро кесишадиган икки айлана берилган. Учлари берилган айланаларда ётадиган ва ўртаси айланларнинг кесишиш нуқталарининг бирига тўғри келадиган кесмани ясанг.

316. Учта медианаси бўйича учбурчак ясанг.

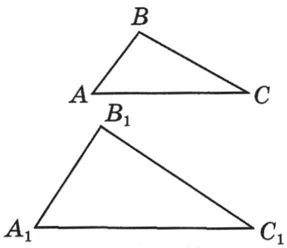
317. $ABCD$ тўртбурчакнинг B ва D учларидаги бурчаклари тенг, BD диагонали AC диагоналини тенг иккига бўлади. $ABCD$ параллелограмм бўлишини исботланг.

318. A ва B нуқтада кесишадиган c ва d тўғри чизиқлар берилган. C ва D учлари мос равишда c ва d тўғри чизиқларда ётадиган $ABCD$ квадрат ясанг.

4-§. Ўхшашлик алмаштириши

4.1. Ўхшашлик алмаштириши тушунчаси ва унинг хоссалари

Аввалги параграфда текисликда алмаштиришнинг битта тури, яъни ҳаракат билан танишдик. Ҳаракатда нуқталар орасидаги масофа ўзгармайди. Алмаштиришнинг турлари жуда кўп.



58-расм

Масалан, 58-расмда ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тасвирланган. Бу учбурчакларнинг томонларининг нисбатлари 2 га тенг: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = 2.$

A, B, C нуқталарни A_1, B_1, C_1 нуқталарга ўтказадиган алмаштириш нуқталар орасидаги масофани 1:2 нисбатда ўзгартиради (2 марта ўзгартиради). Бунда ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар ўхшаш дейилади, ўхшашлик коэффициенти 2 га тенг.

Таъриф. *Агар Φ фигурани Φ_1 фигурага алмаштиришда нуқталар орасидаги масофалар бир хил k сон марта ўзгарса, бундай алмаштириш ўхшашлик алмаштириши деб аталади.* Бу эса, агар Φ фигуранинг ихтиёрий A ва B нуқталари ўхшашлик алмаштириш натижасида Φ_1 фигуранинг A_1 ва B_1 нуқталарига ўтса, у ҳолда

$$A_1B_1 = k \cdot AB \qquad (1)$$

бўлади, яъни Φ ва Φ_1 фигуралар ўхшаш дейилади, k сони **ўхшашлик коэффициенти** дейилади. $k>1$ бўлиши керак.

$k=1$ бўлганда нуқталар орасидаги масофа ўзгармайди, яъни ўхшашлик алмаштириш ҳаракат бўлади.

Φ ва Φ_1 фигуралар ўхшашлиги қуйидагича белгиланади: $\Phi \backsim \Phi_1$. Ўхшашлик коэффициентини кўрсатиш керак бўлса, $\Phi \overset{k}{\backsim} \Phi_1$.

1) Ҳар қандай фигура ўз-ўзига ўхшаш $\Phi\overset{1}{\backsim}\Phi$; тенг фигуралар ўзаро ўхшаш бўлади: $\Phi=\Phi_1 \Rightarrow \Phi\backsim\Phi_1$. Ўхшашлик коэффициенти 1 га тенг.

2) Агар $\Phi_1\overset{k}{\backsim}\Phi_2$ бўлса, у ҳолда $\Phi_2\overset{\frac{1}{k}}{\backsim}\Phi_1$ бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, агар $\Phi_1\overset{k}{\backsim}\Phi_2$ бўлса, ихтиёрий A_2, $B_2\in\Phi_2$ нуқталар учун уларнинг асли бўладиган, мос A_1, $B_1\in\Phi_1$ нуқталар мавжуд бўлиб, $A_1B_1=k\cdot A_2B_2$ тенглик бажарилади. Бундан $A_2B_2=\frac{1}{k}A_1B_1$ тенглик келиб чиқади. У ҳолда Φ_2 фигура Φ_1 фигурага $\frac{1}{k}$ коэффициентга бўйича ўхшаш бўлади.

3) Агар $\Phi\overset{k_1}{\backsim}\Phi$ ва $\Phi_1\overset{k_2}{\backsim}\Phi_2$ бўлса, у ҳолда $\Phi\overset{k_1\cdot k_2}{\backsim}\Phi_2$ бўлади.

Исботи. A ва B нуқталар Φ фигуранинг ихтиёрий нуқталари бўлса,

$$A_1B_1=k_1\cdot AB \qquad (2)$$

шартни қаноатлантирувчи A_1, $B_1 \in \Phi_1$ нуқталар мавжуд бўлади. $\Phi_1\overset{k_2}{\backsim}\Phi_2$ бўлганидан

$$A_2B_2=k_2\cdot A_1B_1 \qquad (3)$$

тенгликни қаноатлантирувчи A_2, $B_2 \in \Phi_2$ нуқталар мавжуд бўлади. (2)- ва (3)- тенгликлардан $A_2B_2=k_1\cdot k_2\cdot AB$ тенглик келиб чиқади. Демак, Φ фигура Φ_2 фигурага ўхшаш ва ўхшашлик коэффициенти $k_1\cdot k_2$ га тенг.

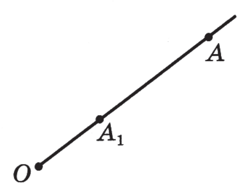
4.2. Гомотетия

Текисликда O нуқта ва k мусбат сон берилсин.

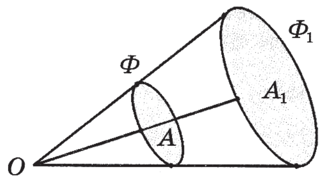
Таъриф. *Ихтиёрий A нуқта учун OA нурда ётадиган ва*

$$\frac{OA_1}{OA}=k \qquad (4)$$

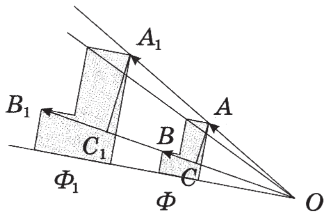
шартни қаноатлантирувчи A_1 нуқтани A нуқтага ***гомотетик нуқта*** *дейилади. Бунда O –* ***гомотетия маркази****; k –* ***гомотетия коэффициенти (ўхшашлик коэффициенти)*** *деб аталади.* 59-расмда гомотетик нуқталар тасвирланган. Бунда $OA_1 = \frac{1}{3}OA$ бўлганидан $k = \frac{1}{3}$. Агар Φ фигуранинг ҳар бир O нуқтага нисбатан Φ_1 фигурасига гомотетик бўлса, у ҳолда Φ ва Φ_1 фигуралар ***гомотетик*** фигуралар дейи-



59-расм



60-расм



61-расм

лади. 60-расмдаги гомотетик фигуралар учун $k = 2$.

Теорема. *Гомотетия ўхшашлик алмаштиришдир.*

Исботи. O – гомотетия маркази, k – гомотетия коэффициенти, Φ ва Φ_1 фигуралар O нуқтага нисбатан гомотетик бўлсин. Φ фигуранинг A ва B нуқталарига гомотетик бўлган A_1 ва B_1 нуқталарни Φ_1 фигурадан олайлик (61-расм). $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{OB_1}{OB} = k$ бўлганидан, $AB \| A_1B_1$ (пропорционал кесмалар хоссасига асосан). A ва A_1 нуқталардан OB нурга AC ва A_1C_1 перпендикулярлар ўтказамиз. $\angle OBA = \angle OB_1A_1 = \varphi$ бўлади. Агар $\angle AOB = \alpha$ деб олсак, у ҳолда OAC ва OA_1C_1 тўғри бурчакли учбурчаклардан $AC = OA \sin\alpha$ ва $A_1C_1 = OA_1 \sin\alpha$ тенгликларни оламиз. Булардан

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OA_1 \sin\alpha}{OA \sin\alpha} = \frac{OA_1}{OA} = k \qquad (5)$$

келиб чиқади. ABC ва $A_1B_1C_1$ тўғри бурчакли учбурчаклардан $AC = AB \sin\alpha$ ва $A_1C_1 = A_1B_1 \sin\alpha$ тенгликлар чиқади. (5) тенгликни эсга олсак,

$$k = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1C_1 \sin\varphi}{AC \sin\varphi} = \frac{A_1B_1}{AB}$$

бўлади. A ва B нуқталар Φ фигуранинг ихтиёрий нуқталари бўлганидан, Φ ва Φ_1 фигураларнинг ўхшашлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

Гомотетиянинг қуйидаги оддий хоссалари бор:

1°. *Гомотетия тўғри чизиқни ўзига параллел тўғри чизиққа ўтказади, гомотетия маркази орқали ўтадиган тўғри чизиқ ўзига ўтади.*

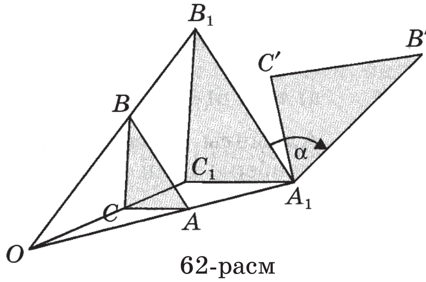
2°. *Гомотетия кесмани ўзига параллел кесмага ўтказади.*

3°. *Гомотетия бурчакни ўзига тенг бурчакка ўтказади.*

4°. *Гомотетия айланани айланага ўтказади. Умуман, ҳар қандай икки айланани ўзаро гомотетик деб олишга бўлади. Бу ҳолда ўхшашлик коэффициенти уларнинг радиуслари нисбатига тенг бўлади.*

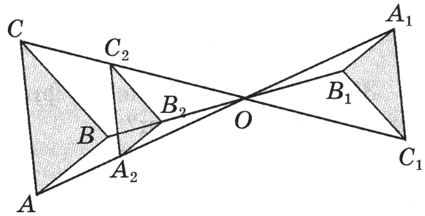
5°. *A нуқта OA нурда ётса, у ҳолда A нуқтани A_1 нуқтага ўтказадиган битта ва фақат битта гомотетия мавжуд бўлади.*

6°. Ҳар бир ўхшашлик алмаштиришни ҳаракат билан гомотетияни кетма-кет қўллаш билан олишга бўлади. Бунда ўхшашлик алмаштириши билан гомотетиянинг ўхшашлик коэффициенти бир хил бўлади.



62-расм

Масалан, 62-расмда ABC учбурчакнинг $A_1B'C'$ учбурчакка ўхшашлик алмаштириши тасвирланган. Бу ўхшашлик алмаштиришини олиш учун, аввал ABC учбурчак гомотетик $A_1B_1C_1$ учбурчакни ясаб, сўнгра бу учбурчакни A_1 учи атрофида соат стрелкаси йўналишида α бурчакка бурамиз.



63-расм

Келтирилган хоссаларнинг дастлабки бештасини исботлаш осон (буни ўқувчиларнинг ўзлари исботлашлари керак), 6^0-хоссанинг исботи мактаб программасига киритилмагани учун исботланмайди.

Эслатма. Гомотетиянинг таърифига асосан, A ва A_1 нуқталар OA нурда ётади дейилган. Энди A_1 нуқта OA нурни тўлдирувчи нурини олиб, $\dfrac{OA_1}{OA} = k$ шарт бажарилсин (63-расм). Бундай алмаштириш **тескари** ёки **тескари гомотетия** дейилади.Биз бу алмаштиришни гомотетияга қўшмай, оддий ўхшашлик алмаштириш деб кўриб чиқамиз. Сабаби ABC учбурчакни (63-расмдаги) унга гомотетик $A_2B_2C_2$ учбурчакка ўтказиб, шундан сўнг марказий симметриядан фойдаланиб, $A_1B_1C_1$ учбурчакни ҳосил қиламиз.

?

1. Қандай фигуралар ўхшаш фигуралар деб аталади?
2. Ўхшашлик коэффициенти деб нимага айтилади?
3. Ўхшашлик алмаштириши деб нимага айтилади?
4. Ўхшашлик алмаштиришининг қандай хоссалари бор? Уларни таърифланг, исботланг.
5. Гомотетия нима? Қандай нуқталар ўзаро гомотетик нуқталар дейилади?
6. Гомотетия маркази, гомотетия коэффициенти нима?
7. Гомотетия ўхшашлик алмаштириши бўлишини исботланг.
8. Гомотетия хоссаларини таърифланг, исботланг.

ПТ 1. Ихтиёрий бир учбурчак олиб, берилган гомотетия марказига нисбатан унга гомотетик учбурчак ясанг. Топшириқни: а) $k = 2$; б) $k = \frac{1}{2}$ деб олиб бажаринг.

2. Аввалги топшириқдаги учбурчакнинг ўрнига квадрат билан айлана олиб, бажаринг.

МАСАЛАЛАР

А

319. Ўхшаш фигуралар тенг бўлиши мумкинми? Мисоллар келтиринг.

320. Агар Φ_1 ва Φ_2 фигуралар учун $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$ ва бўлса, k нимага тенг бўлади?

321. Коэффициенти 2 га тенг бўлган гомотетия A нуқтани A_1 нуқтага ўтказади.Гомотетия марказини топинг.

322. Берилган: 1) айланага; 2) кесмага; 3) учбурчакка; 4) тўртбурчакка гомотетик фигура ясанг (гомотетия маркази билан коэффициентини ўзингиз танланг).

323. Агар мос нуқталарнинг: 1) фақат бир жуфти; 2) бир тўғри чизиқда ётмайдиган нуқталарнинг икки жуфти маълум бўлса, унинг гомотетия марказини топиш мумкинми?

324. 1) Кесишадиган икки тўғри чизиқ; 2) кесишадиган тўғри чизиқларда ётадиган икки нур ўзаро гомотетик бўлиши мумкинми?

325. Берилган учбурчакнинг бир учини гомотетия маркази деб, гомотетия коэффициентини 2 га тенг деб олиб, берилган учбурчакка гомотетик учбурчак ясанг.

В

326. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган A, B ва C нуқталар берилган. Ўхшашлик коэффициенти: а) 3 га; б) 0,5 га тенг деб олиб, берилган фигурага ўхшаш фигура ясанг.

327. Радиуслари 2 ва 4 га тенг бўлган концентрли айланаларнинг ўхшаш бўлишини исботланг ва ўхшашлик коэффициентини аниқланг.

328. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар ўхшаш. Агар $\angle A=30°$ $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м бўлса, $\angle A_1$ билан A_1B_1 ни топинг.

329. Асослари қаршисидаги учларидаги бурчаклари тенг бўлган тенг ёнли учбурчакларнинг ўхшашлигини исботланг.

330. Иккита тенг ёнли учбурчакларнинг ён томонлар орасидаги бурчаклари тенг. Бир учбурчакнинг ён томони ва асоси 17 см ва 10 см га тенг. Иккинчи учбурчакнинг асоси 8 см га тенг. Шу учбурчакнинг ён томонини топинг.

331. Ўткир бурчаклари тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакларининг ўхшашлигини исботланг.

332. Гомотетия тўлиқ аниқланиши учун қандай ва нечта маълумот берилиши керак?

333. Ўзаро гомотетик A ва A_1, B ва B_1 нуқталар жуфти берилган. Бу нуқталар ўзаро қандай жойлашган? Гомотетия маркази қандай аниқланади?

334. Гомотетияда ўз-ўзига ўтадиган фигураларни атанг. Гомотетия марказини жойлашишини аниқланг.

C

335. Бурчак ва унинг ичида A нуқта берилган. Бурчак томонларига уриниб, A нуқтадан ўтувчи айлана ясанг.

336. Учбурчак ичига квадрат чизинг. Квадратнинг иккита учи бир томонда, қолган иккита учи бошқа томонда ётсин.

337. Асоси a ва баландлиги h га тенг учбурчак ичига квадрат шундай чизилганки, унинг иккита учи учбурчак асосида,қолган иккита учи эса ён томонларида ётади.Квадрат томонини топинг.

338. ABC учбурчакнинг AB ва AC томонларида D ва E нуқталар $DE \| BC$ бўладиган қилиб олинган. ABC ва ADE учбурчакларга ташқи чизилган айланалар урунувчи бўлишини исботланг.

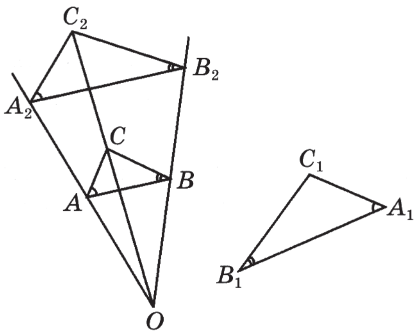
339. Икки айлана ички уринган. Уларнинг уриниш нуқтасидан ўтадиган кесувчи айланаларни A ва B нуқталар кесади. A ва B нуқталардан айланаларга ўтказилган уринмалар ўзаро параллел бўлишини исботланг.

340. Қуйидаги хулоса тўғрими: «Агар икки учбурчакнинг ҳар бири учинчи учбурчакка гомотетик бўлса, у ҳолда учбурчаклар ўзаро гомотетик бўлади»?

5-§. Учбурчакларнинг ўхшашлик аломатлари

I аломат. *Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига тенг бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.*

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ бўлсин. ABC ва $A_1B_1C_1$ эканини исботлаймиз.



64-расм

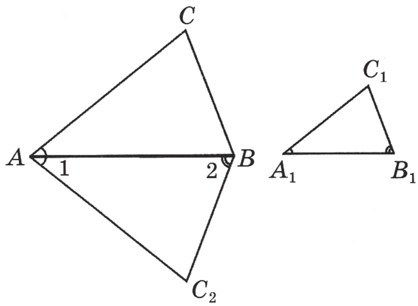
$k = \dfrac{A_1B_1}{AB}$ бўлсин. ABC учбурчакни ихтиёрий O нуқтага нисбатан ўхшашлик коэффициенти k га тенг бўлган гомотетик $A_2B_2C_2$ учбурчак ясаймиз (64-расм). $A_2B_2=k\cdot AB$ ва $A_1B_1=k\cdot AB$ бўлганидан $A_1B_1= A_2B_2$ бўлади. $\angle A_1=\angle A_2$ ва $\angle B_1=\angle B_2$ бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги бўйича $A_1B_1C_1$ ва $A_2B_2C_2$ учбурчаклар тенг бўлади. Демак, ABC ва $A_2B_2C_2$ учбурчакларнинг ўхшашлик коэффициенти 1 га тенг бўлади. $k = 1\cdot k$ коэффициентга асосан ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар ўхшаш бўлади. Теорема исботланди.

Натижа. *Агар бир тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги тенг бўлса, бундай иккита тўғри бурчакли учбурчак ўхшаш бўлади.*

Ҳақиқатан, икки тўғри бурчакли учбурчакнинг биттадан ўткир бурчаклари тенг бўлса, уларнинг иккинчи ўткир бурчаклари ҳам тенг бўлади. Демак, бу учбурчаклар I аломатга асосан ўхшаш бўлади.

II аломат. *Агар бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томонига пропорционал бўлса ва бу томонлар ҳосил қилган бурчаклар тенг бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.*

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$ ва $\angle A=\angle A_1$ бўлсин. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг ўхшашлиги учун $\angle B=\angle B_1$ эканлигини исботлаш етарли бўлади (I аломатга асосан). $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ бўладиган қилиб ABC_2 учбурчакни қарайлик (65-расм). ABC_2 ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар I аломатга асосан ўхшаш ва $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC_2}$ тенглик бажарилади. Теорема шартига асосан, $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$. Ушбу тенгсизликдан $AC = AC_2$ эканлиги келиб чиқади. Демак, икки томони билан улар орасидаги бурчак бўйича ABC ва ABC_2 учбурчаклар тенг, яъни $\angle 2=\angle B$. $\angle 2=\angle B_1$ эканлигидан, $\angle B=\angle B_1$ келиб чиқади. Теорема исботланди.



65-расм

Натижа. *Агар бир тўғри бурчакли учбурчакнинг икки катети иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг икки катетига пропорционал бўлса, бундай иккита тўғри бурчакли учбурчак ўхшаш бўлади.*

Ҳақиқатан, катетлар орасидаги бурчак тўғри бўлганлигидан, бу бурчаклар тенг. Демак, бу тўғри бурчакли учбурчаклар II аломатга асосан ўхшаш бўлади.

III аломат. *Агар бир учбурчакнинг томонлари иккинчи учбурчакнинг томонларига пропорционал бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.*

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг томонларига пропорционал бўлса,

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}=\frac{B_1C_1}{BC}. \qquad (1)$$

ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг ўхшашлигини исботлаш учун, II аломатга асосан $\angle A=\angle A_1$ бўлишини исботлаш етарли. Бунинг учун $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ бўладиган қилиб ABC_2 учбурчакни ясаймиз (65-расм). Учбурчакларнинг ўхшашлигидан I аломатга асосан $A_1B_1C_1$ ва ABC_2 учбурчаклар ўхшаш бўлади. Демак, $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC_2}=\frac{B_1C_1}{BC_2}$. нисбат ўринли бўлади. Буларни (1) формула билан солиштирсак, $AC=AC_2$ва $BC=BC_2$ оламиз. Учта томони бўйича ABC ва ABC_2 учбурчаклар тенг, яъни $\angle A=\angle 1$. $\angle 1=\angle A_1$ эканлигини эсга олсак, $\angle A=\angle A_1$ тенгликни оламиз. Теорема исботланди.

Натижа. *Агар бир тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси билан катети иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси билан мос катетига пропорционал бўлса, бундай иккита тўғри бурчакли учбурчак ўхшаш бўлади.*

Ҳақиқатан, ABC ва $A_1B_1C_1$ тўғри бурчакли учбурчаклар $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$ бўлсин. AB ва A_1B_1 учбурчакларнинг гипотенузалари бўлганидан,

$$B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C_1^2} = \sqrt{k^2 \cdot AB^2 - k^2 \cdot AC^2} = k \cdot \sqrt{AB^2 - AC^2} = k \cdot BC.$$

яъни учбурчакларнинг учинчи томонлари пропорционал. Демак, бу тўғри бурчакли учбурчаклар III аломатга асосан ўхшаш бўлади.

?

1. Учбурчаклар ўхшашлигининг I аломатини таърифланг ва исботланг.
2. Учбурчаклар ўхшашлигининг II аломатини таърифланг ва исботланг.
3. Учбурчаклар ўхшашлигининг III аломатини таърифланг ва исботланг.

ПТ Кўз билан чамалаб иккита ўхшаш учбурчак ясанг, уларнинг ўхшашлигини ўлчаш орқали: 1) I аломатга; 2) II аломатга; 3) III аломатга асосан текширинг.

МАСАЛАЛАР

А

341. Тенг томонли учбурчаклар ўзаро ўхшаш бўладими?

342. Берилган учбурчакларнинг ўрта чизиқлари ўтказилган. Ҳосил бўлган учбурчаклардан ўхшашларини топинг.

343. Икки учбурчакнинг томонлари: 1) 1,2 м, 1,6 м, 2,4 м ва 3 см, 4 см, 6 см; 2) 0,5 м, 0,6 м, 1 м ва 10 см, 12 см, 15 см; 3) 1 м, 1,5 м, 2 м ва 10 см, 15 см, 20 см; 4) 4 м, 40 м, 40 м ва 4 см, 40см, 40 см бўлса, улар ўхшаш бўладими?

344. Қуйидаги жумлалар тўғрими: 1) мос томонлари параллел бўлган учбурчаклар ўхшаш бўлади; 2) мос томонлари перпендикуляр бўлган учбурчаклар ўхшаш бўлади; 3) асослари қаршисидаги учларидаги бурчаклари тенг бўлган тенг ёнли учбурчаклар ўхшаш бўлади; 4) тенг бурчаклари бўлган тенг ёнли учбурчаклар ўхшаш бўлади; 5) асосларидаги бурчаклари тенг бўлган тенг ёнли учбурчаклар ўхшаш бўлади; 6) тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчаклар ўхшаш бўлади; 7) ўткир бурчаклари тенг тўғри бурчакли учбурчаклар ўхшаш бўлади; 8) ихтиёрий тўғри бурчакли учбурчаклар ўхшаш бўлади.

345. Агар иккита тўғри бурчакли учбурчакнинг бирида $40°$ ли бурчак бўлса: иккинчисида эса: 1) $50°$; 2) $60°$ ли бурчак бўлса, бу учбурчаклар ўхшаш бўладими?

346. ABC ва DEF учбурчакларда: 1) $\angle A=36°$, $\angle B=34°$, $\angle E=110°$, $\angle F=34°$; 2) $AC=44$ см, $AB=52$ см, $BC=76$ см, $DE=15,6$ см, $DF=22$ см, $EF=13,2$ см бўлса, учбурчаклар ўхшаш бўладими?

347. AB кесмани: 1) 2:5; 2) 3:7; 3) 4:3 нисбатда бўлинг.

B

348. Тенг ёнли бўлмаган учбурчакнинг икки томонини учинчи томонига параллел бўлмаган тўғри чизиқ билан кесишдан берилган учбурчакка ўхшаш учбурчак олиш мумкинми?

349. Ўхшаш учбурчакларининг периметрлари мос томонлари нисбати каби нисбатда бўлишини исботланг.

350. Учбурчакнинг томонлари 0,8 м, 1,6 м ва 2 м га тенг. Периметри 5,5 м га тенг бўлиб, берилган учбурчакка ўхшаш учбурчак томонларини топинг.

351. Бир учбурчакнинг периметри ўзига ўхшаш учбурчак периметрининг $\frac{11}{13}$ қисмини ташкил қилади. Иккита мос томоннинг айирмаси 1 м га тенг. Шу томонларни топинг.

352. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига туширилган баландлик гипотенузани 9 см ва 16 см ли кесмаларга бўлади. Учбурчакнинг томонларини топинг.

353. Томонлари 3,5 см, 4 см, 5 см бўлган учбурчакка ўхшаш учбурчакнинг катта томони 6 см га тенг. Иккинчи учбурчакнинг томонларини топинг.

354. Берилган учбурчакнинг томонлари 15 см, 20 см ва 30 см га тенг. Периметри 26 см ва берилган учбурчакка ўхшаш учбурчакнинг томонларини топинг.

355. Ўхшаш учбурчакларининг мос баландликлари нисбати мос томонлари нисбати каби бўлишини исботланг.

356. BD кесма – ABC учбурчакнинг биссектрисаси: 1) $AC=30$, $AD=20$, $BD=16$ ва $\angle BDC=\angle C$; 2) $BC=9$, $AD=7,5$, $DC=4,5$ бўлса, AB ни топинг.

357. AD кесма – ABC учбурчакнинг биссектрисаси. Агар $AB=14$ см, $BC=20$ см, $AC=21$ см бўлса, BD ва CD кесмаларни топинг.

358. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб: 1) уйнинг (мактабнинг); 2) байтерекнинг (миноранинг ёки устуннинг) баландлигини топинг.

359. Берилган гипотенузаси ва катетларининг нисбати бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

C

360. Учбурчакнинг ўхшашлик аломатларидан фойдаланиб, ихтиёрий учбурчакнинг медианалари кесишиш нуқтасида 2:1 нисбатда бўлинишини исботланг.

361. Учбурчак биссектрисаси шу бурчак қаршисида ётган томонни қолган томонларга пропорционал кесмаларга бўлишини исботланг.

362. Учбурчакнинг ўхшашлик аломатларидан фойдаланиб, дарёнинг энини аниқлаш мумкинми?

363. Икки тўғри чизиқ қоғоз бетидан сиртда жойлашган нуқтада кесишади. Қоғоз бетидаги тўғри чизиқларнинг бирида ётган нуқтадан берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

364. Икки бурчак ва учинчи бурчак биссектрисаси бўйича учбурчак ясанг.

365. Икки бурчак ва учинчи бурчак учидан ўтказилган баландлик бўйича учбурчак ясанг.

366. $AB{:}AC = 2{:}3$ бўлса, ABC учбурчакнинг A бурчак билан AH медианаси бўйича ясанг.

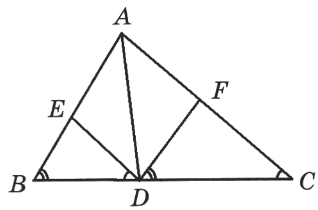
367. Учбурчакнинг томонлари 10 см ва 15 см бўлса, учбурчакнинг шу томонлари орасидаги бурчак биссектрисаси 12 см дан кичик бўлишини кўрсатинг.

6-§. Ўхшашликнинг қўлланилиши. Учбурчак биссектрисаларининг хоссаси

1-теорема. *Учбурчакнинг биссектрисаси қаршисидаги томонни қолган икки томонга пропорционал кеесмаларга ажратади.*

Исботи. (361-масалага қаранг). AD кесма ABC учбурчакнинг биссектрисаси бўлсин. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$ тенгликнинг бажарилишини исботлаш керак. D нуқтадан учбурчакнинг AB ва AC томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, $AEDF$

параллелограммни ҳосил қиламиз (66-расм). $AEDF$ ромб бўлади, чунки AD диагонали A ва D бурчакларининг биссектрисаси. Иккинчидан, томонлар параллел бўлганидан, ABC, BED ва DFC учбурчаклар ўзаро ўхшаш бўлади. Демак, $\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{DE}$



66-расм

ва $\frac{BC}{AB}=\frac{DC}{DF}$ ёки $BC \cdot DE=AC \cdot BD$ ва $BC \cdot DF=AB \cdot DC$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Булардан $DE = DF$ бўлишини эътиборга олсак, $AC \cdot BD=AB \cdot DC$ ни оламиз. Бундан $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$ келиб чиқади. Теорема исботланди.

1-масала. $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$,бўлса, ABC учбурчак биссектрисасини топинг.

Ечилиши. 1-теоремага асосан D нуқта BC томонни AB ва AC томонларга пропорционал кесмаларга бўлади:

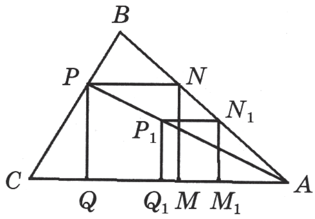
$\frac{BD}{c}=\frac{CD}{b}=\frac{BD+CD}{AB+AC}=\frac{a}{b+c}$ ёки $BD=\frac{ac}{b+c}$ ва $CD=\frac{ab}{b+c}$ тенгликларни оламиз. Стюарт теоремасидан: $AB^2 \cdot DC+AC^2 \cdot BD-$ $-AD^2 \cdot BC=BC \cdot DC \cdot BD$. Тенгликдаги кесмаларни қийматларини қўямиз,

$$c^2 \cdot \frac{ab}{b+c}+b^2 \cdot \frac{ac}{b+c}-AD^2 \cdot a=a \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} \text{ ёки}$$

$$AD^2=\frac{bc^2+b^2c}{b+c}-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=bc \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}$$ бўлади. Бу масалани косинуслар теоремасини қўллаб ечинг.

2-масала. Берилган ўткир бурчакли учбурчакка икки учи учбурчакнинг асосида, қолган иккитаси учбурчакнинг ён томонларида ётадиган ички квадрат чизинг.

Ечилиши. *Таҳлил қилиш.* Фараз қилайлик, $MNPQ$ квадрат берилсин. A нуқтани гомотетия маркази деб олиб, $MNPQ$ квадратга гомотетик $M_1N_1P_1Q_1$ квадратни ясаш қийин эмас. Бунинг учун AB томоннинг ихтиёрий нуқтасидан AC томонга M_1N_1 перпендикуляр ўтказамиз. AC томонда $M_1Q_1=M_1N_1$ бўлгадиндек қилиб Q_1 нуқтани M_1 ва C нуқталар орасида олайлик. $M_1N_1P_1Q_1$ квадрат ясаш учун P_1 нуқтани оламиз (67-расм). Ясалган квадратнинг икки учи ABC учбурчакнинг



67-расм

AC томонида, учинчи учи эса AB томонда ётади. $M_1 N_1P_1Q_1$ ва $MNPQ$ квадратлар A нуқтага нисбатан гомотетик бўлади. Шунинг учун, $MNPQ$ квадратни ясаш учун кўрсатилган усулда $M_1 N_1P_1Q_1$ квадратни ясаб, AP_1 тўғри чизиқ билан BC томонни кесишиш нуқтаси P ни топиш етарли бўлади. Берилган режа бўйича $MNPQ$ квадратни ясаш мумкин.

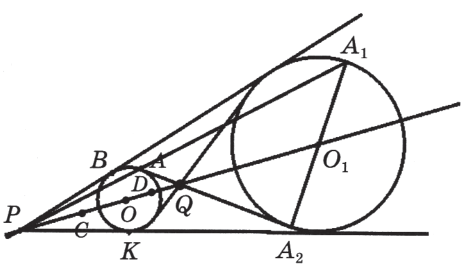
2. Ясаш. Таҳлил қилишда берилган усул бўйича $M_1N_1P_1Q_1$ квадратни ясаймиз: AP_1 тўғри чизиқ билан BC томонни кесишиш нуқтани P билан белгилаб, $PQ \perp AC$ бўладигандек қилиб $Q \in AC$ нуқтани оламиз. P нуқтадан ўтадиган ва PQ га перпендикуляр тўғри чизиқ билан AB кесмани кесишиш нуқтасини N билан белгилаб, $MN \perp AC$ бўладиган қилиб $M \in AC$ нуқтани оламиз. $MNPQ$ квадратни ясадик.

3. Исботи. Ясашга асосан $MNPQ$ тўғри тўртбурчак бўлади. сабаби унинг учта бурчаги тўғри бурчак. P ва P_1 нуқталар A нуқтага нисбатан гомотетик бўлади. У ҳолда, $P_1Q_1 = N_1P_1$ бўлганидан, $PQ = PN$, яъни $MNPQ$ квадрат бўлади.

4. Текшириш. Масалани фақат битта ечими бор.

3-масала. Иккита айланага умумий уринма ясанг.

Ечилиши. Тўлиқ таҳлил қилиш билан текширишнинг намунасини келтирамиз. Масаланинг ечилишини ўқувчилар бажаришади. Фараз қилайлик, радиуслари ҳар хил (68-расм) икки айлана берилсин. Бу айланалар гомотетик ва гомотетия маркази OO_1тўғри чизиқда ётади. Биринчи айлананинг радиуси OA бўлса, унга гомотетик O_1A_1 радиус $OA \| O_1A_1$ шартни қаноатлантиради. AA_1 тўғри чизиқни ўтказсак, у OO_1 тўғри чизиқ билан P гомотетия марказида кесишишади. Иккинчида, PB ва PK айланага умумий уринмалар бўлса, PBO ва PKO тўғри бурчакли учбурчаклар ва улар ўзаро тенг бўлади.



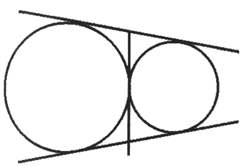
68-расм

P, B, O, K нуқталар бир айланада ётади ва бу айлананинг маркази PO гипотенузанинг ўртаси C нуқтада бўлади. Агар маркази C нуқтада ётадиган, радиуси эса CP бўлган айлана чизсак, бу айлана берилган айлананинг (маркази O бўлган айлана) B ва K

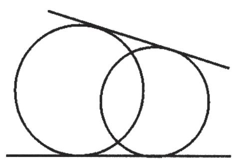
нуқталарда кесиб ўтади. Демак, PB ва PK тўғри чизиқлар айланаларнинг умумий уринмалари бўлади.

Шунга ўхшаш, O_1A_1 радиусни диаметрга тўлдирадиган A_2 нуқтани олсак, A ва A_2 нуқталар тескари гомотетик бўлади. Унинг маркази AA_2 кесма билан OO_1 тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси Q олайлик. Маркази OQ нинг маркази D нуқта деб олиб, радиуси DO га тенг айлана чизсак, у биринчи айланани икки нуқтада кесади. Бу кесишиш нуқталарини Q нуқта билан туташтирсак, берилган айланаларга умумий уринмалар ҳосил бўлади.

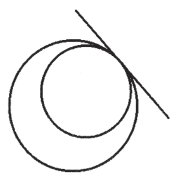
68-расмда кўрсатилган айланаларнинг 4 та умумий уринмалари бор. Агар айланалар ташқи уринса, 3 та умумий уринмалари бўлади (69-расм). Кесишадиган иккита айлананинг икки умумий уринмаси бўлади (70-расм). Ички уринадиган айланаларнинг фақат биттагина уринмаси бўлади (71-расм). Бир-бирининг ичида жойлашган кесишмайдиган айланаларнинг умумий уринмалари бўлмайди (72-расм).



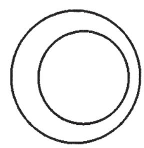
69-расм



70-расм



71-расм



72-расм

1. Учбурчак биссектрисаси хоссаларини таърифланг ва исботланг.
2. Ясаш масалалари нечта босқичдан иборат бўлади? Бу босқичларнинг мақсадини, аҳамиятини кўрсатинг.

МАСАЛАЛАР

368. BD кесма – ABC учбурчакнинг биссектрисаси: 1) AC=10 м, BC=15 м, AC=20 м бўлса, AD ва DC кесмаларни; 2) AD:DC=8:5 ва AB=16 м бўлса, BC томонни; 3) AB:BC =2:7 ва $DC - AD$=1 м бўлса, AC томонни топинг.

369. ABC учбурчакка $ADEF$ ромб ички чизилган. Ромбнинг D, E, F учлари учбурчакнинг AB, BC, AC томонларида ётади. AB=14 м, BC=12 м ва AC=10 м бўлса, BE ва EC кесмаларни топинг.

370. Учбурчакнинг томонлари 51 см, 85 см ва 104 см га тенг. Учбурчакнинг қисқа икки томонига уриниб чизилган айлананинг маркази катта томонида ётса, учбурчакнинг катта томонини қандай нисбатда бўлади?

371. AB=15 м, AC=21 м ва BC=24 кесмалар айлананинг ватарлари. D нуқта CB ёйни тенг иккига бўлса, AD тўғри чизиқ BC ватарни қандай бўлакларга бўлади?

372. Радиуслари ҳар хил бўлган айланаларга умумий уринмалар ўтказинг: 1) айланалар кесишмайди; 2) айланалар ташқи уринади; 3) айланалар икки нуқтада кесишади.

B

373. ABC учбурчакнинг CC_1биссектрисаси AB томонини $AC_1=m$, $BC_1=n$ кесмаларга бўлади. $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ деб олиб, $m = \dfrac{bc}{a+b}$, $n = \dfrac{ac}{a+b}$ тенгликларни исботланг.

374. Учбурчакнинг икки томони йиғиндиси 14 га тенг, биссектрисаси эса учинчи томонни 3 ва 4 га тенг бўлакларга бўлади. Учбурчакнинг томонларини топинг.

375. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 20 см, асосининг ён томонига нисбати 4:3 га тенг. Ички чизилган айлананинг радиусини топинг.

376. Тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази учбурчак баландлигини 12:5 нисбатда бўлади. Учбурчакнинг ён томоннинг узунлиги 60 см бўлса, асосини топинг.

377. E ва F нуқталар $ABCD$ тўғри тўртбурчакнин AD ва BC томонларнинг ўрталари, ABC ва AEF учбурчаклар ўхшаш бўлса, AB:AD нисбатни топинг.

C

378. ABC учбурчакнинг томонлари a,b ва c га тенг. Учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази AA_1 биссектрисани қандай нисбатда бўлади?

379. BB_1кесмани ABC учбурчакнинг биссектрисаси деб олиб, $b:2p=B_1O:B_1B$ тенгликни ўринли бўлишини исботланг. Бунда O нуқта ички чизилган айлананинг маркази, AC=b.

380. Диагоналлари нисбати билан томони бўйича ромб ясанг.

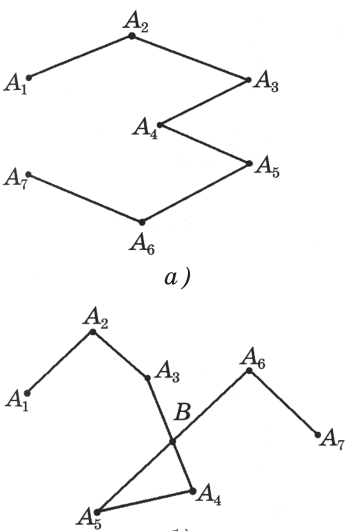
381. Учлари берилган ромбнинг томонлирида ётадиган квадрат ясанг.

382. Диагоналлари нисбати, диагоналлар орасидаги бурчак ва бир томони узунлиги бўйича параллелограмм ясанг.

III боб. КЎПБУРЧАКЛАР

1-§. Кўпбурчаклар

1.1. Синиқ чизиқлар. Қавариқ кўпбурчаклар Аввал 8-синфда ўтилган баъзи бир тушунчаларни қисқача такрорлайлик: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарни кетма-кет A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n\text{-}1}\,A_n$ кесмаларга туташтирганда ҳосил бўладиган $A_1A_2 \ldots A_n$ фигура ***синиқ чизиқ*** деб аталади, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталар синиқ чизиқнинг ***учлари*** деб, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n\text{-}1}\,A_n$ кесмалар эса синиқ чизиқнинг ***бўғинлари*** деб аталади (73-расм). Синиқ чизиқнинг ҳамма бўғинлари узунликлари йиғиндиси синиқ чизиқнинг ***узунлиги*** деб аталади. Агар синиқ чизиқ ўз-ўзи билан кесишмаса, бундай синиқ чизиқ ***содда синиқ чизиқ*** дейилади. 73,*а*-расмда содда синиқ чизиқ, 73,*б*-расмда эса ўз-ўзи билан кесишадиган (A_3A_4 ва A_5A_6 бўғинлар B нуқтада) синиқ чизиқ кўрсатилган.



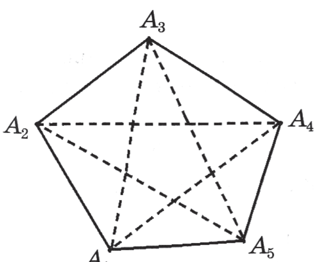
а)

б)

73-расм

Синиқ чизиқнинг узунлиги унинг охирларини туташтирувчи кесма узунлигидан кичик эмас. Бу жумлани учбурчаклар тенгсизлигидан фойдаланиб исботласа бўлади (исботини эсга олинг).

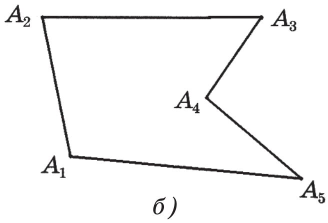
Синиқ чизиқнинг охирлари устма-уст тушса, бундай синиқ чизиқ ***ёпиқ синиқ чизиқ*** дейилади. Қўшни бўғинлари бир тўғри чизиқда ётмаган содда ёпиқ синиқ чизиқ ***кўпбурчак*** дейилади. Синиқ чизиқнинг учлари ***кўпбурчакнинг учлари*** деб аталади, синиқ чизиқнинг бўғинлари ***кўпбурчакнинг томонлари*** деб аталади. Кўпбурчак қўшни томонлари ҳосил қилган бурчак ***кўпбурчакнинг бурчаги*** деб аталади. Томонлари сони n бўлган кўпбурчакка ***n* бурчак** деб аталади. Агар кўпбурчак томонини ўз ичига олган ихтиёрий тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда ётса, у ***қавариқ кўпбурчак*** деб



а)

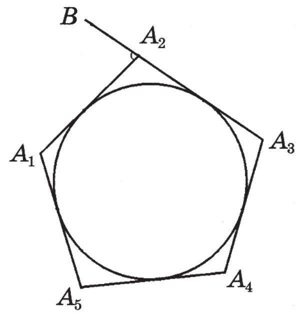
74-расм

аталади. Қавариқ кўпбурчакнинг қўшни бўлмаган учларини туташтирувчи кесмалар ***кўпбурчакнинг диагоналлари*** деб аталади. Масалан, 74, *а*-расмда қавариқ кўпбурчак, 74, *б*-расмда эса қавариқ бўлмаган кўпбурчак кўрсатилган.



74-расм

Ҳамма томонлари бирор айланага уринган кўпбурчак айланага ***ташқи чизилагн кўпбурчак*** деб аталади, айлана эса аксинча, ***кўпбурчакка ички чизилган айлана*** дейилади (75-расм).



75-расм

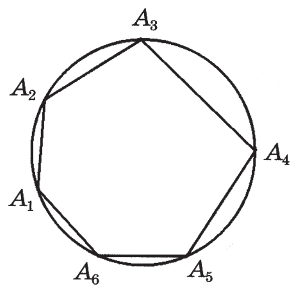
Ҳамма учлари бирор айланада ётган кўпбурчак айланага ***ички чизилган кўпбурчак*** деб аталади (76-расм).

Ихтиёрий қавариқ n бурчак бурчакларининг йиғиндиси $180°\cdot(n-2)$ *га, ташқи бурчаклари йиғиндиси эса 360° га тенг.*

Кўпбурчакнинг ***ташқи бурчаги*** деб ихтиёрий томоннинг давоми билан унга қўшни бўлган томон орасидаги бурчакка айтилади. Масалан, 75-расмдаги $\angle BA_2A_1$ – ташқи бурчак.

1.2. Мунтазам кўпбурчаклар

Ҳамма томонлари ва ҳамма бурчаклари тенг бўлган қавариқ кўпбурчак ***мунтазам кўпбурчак*** дейилади. Масалан, мунтазам учбурчак – тенг томонли учбурчак, мунтазам тўртбурчак – квадрат.

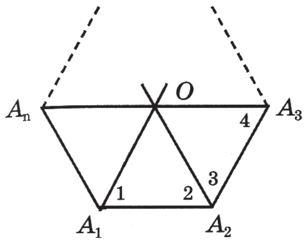


76-расм

Ихтиёрий, мунтазам учбурчак ва квадратга ички ва ташқи айлана чизишга ва бу айланаларнинг марказлари устма-уст тушишини биламиз. Шу хоссалар ихтиёрий қавариқ кўпбурчак учун тўғри бўлишини кўрсатамиз. Қавариқ кўпбурчакнинг ҳамма учларидан бир хил масофада жойлашган нуқтани кўпбурчакнинг маркази дейилади.

1-теорема. *Мунтазам кўпбурчакка ички ва ташқи айланалар чизиш мумкин ва бу айланаларнинг маркази кўпбурчак маркази билан устма-уст тушади.*

Исботи. Теоремани исботлаш учун ихтиёрий мунтазам кўпбурчак маркази бўладиган ва бу марказ кўпбурчак томонлардан бир хил масофада бўлишини аниқлашга бўлади.



77-расм

Фараз қилайлик, $A_1A_2...A_n$ мунтазам n бурчак берилсин. A_1 ва A_2 бурчакларнинг биссектрисаларини ўтказиб, уларнинг кесишиш нуқтасини O билан белгилаймиз. Кўпбурчакнинг қолган учларини O нуқта билан туташтирамиз (77-расм).

Аввал O нуқта кўпбурчакнинг барча учларидан бир хил масофада эканлигини исботлаймиз:

$OA_1= OA_2= OA_3=...= OA_n$. $\angle 1=\angle 2$ тенг бурчакларнинг ярми. Шунинг учун $OA_1= OA_2$. OA_2 умумий томон. $A_1A_2= A_2A_3$ ва $\angle 2=\angle 3$ бўлганидан, учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига асосан $\Delta A_1OA_2=\Delta A_2OA_3$. Бундан $OA_2= OA_3$ ва $\angle 3=\angle 4$ келиб чиқади.

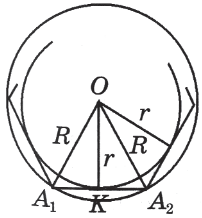
$\angle 4=\angle 3=\frac{1}{2}\angle A_2=\frac{1}{2}\angle A_3$ дан $\angle 4=\angle 5$ тенгликни оламиз. Демак, OA_3–A_3 бурчакнинииг биссектрисаси бўлади.

Бу процессни давом этказиб, $OA_1= OA_2= OA_3=...= OA_n$ тенгликни оламиз. Яъни, O нуқта кўпбурчакнинг маркази ва ташқи чизилган айлананинг маркази бўлади.

Энди O нуқта кўпбурчакнинг томонларидан бир хил масофада бўлишини кўрсатайлик.

Исботланганга асосан $\Delta OA_1A_2=\Delta OA_2A_3=...=\Delta OA_{n-1}A_n= =\Delta OA_nA_1$ тенглик бажарилади. Бу учбурчакларга умумий O учидан туширилган баландликлар ҳам тенг бўлади. O нуқта кўпбурчакнинг томонларидан бир хил масофада ётади. Демак, мунтазам кўпбурчакка ички айлана чизиш мумкин.

2-теорема. *Томони a га тенг бўлган мунтазам n бурчак учун ташқи чизилган айлананининг радиуси R ва ички чизилган айлананининг радиуси r га тенг бўлса, у ҳолда*



78-расм

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},\quad a_n = 2rtg\,\frac{180^\circ}{n} \qquad (1)$$

формулалар ўринли бўлади.

Исботи. $A_1A_2= a_n$– мунтазам n бурчакнинг томони, O нуқта унинг маркази бўлсин (78-расм).

$OA_1=OA_1=R,\quad OK=r,\quad A_1K=KA_2=\frac{a_n}{2}$ ва

$\angle A_1OK=\frac{1}{2}\angle A_1OA_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n}$. A_1OK тўғри бурчакли учбурчакнинг (1) формуласи келиб чиқади.

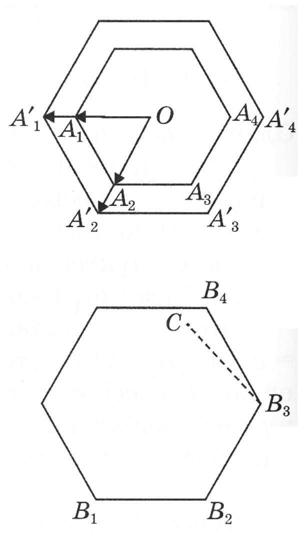
1.3. Мунтазам кўпбурчакларнинг ўхшашлиги

3-теорема. Ихтиёрий мунтазам иккита *n* бурчак ўхшаш бўлади.

Исботи. Бизга иккита мунтазам n бурчак берилсин. P_1: $A_1A_2 \ldots A_n$ ва P_2: $B_1B_2 \ldots B_n$. Коэффициенти $k=\frac{B_1B_2}{A_1A_2}$ бўлган гомотетияни қўллаб, P_1 кўпбурчакнинг P'_1: $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ кўпбурчакка алмаштирамиз. P'_1 ва P_2 кўпбурчаклар тенг бўладиган, яъни қандайдир ҳаракатда P'_1 ва P_2 кўпбурчаклар устма-уст тушишини кўрсатиш етарли. Гомотетия билан ҳаракат алмаштиришлари кетма-кет қўлланганда ўхшашлик алмаштириш бўлишини биламиз, яъни P_1 ва P_2 кўпбурчаклар ўхшаш бўлади (79, а-расм).

$\angle A_1A_2A_3=\angle A'_1A'_2A'_3$ ва $\angle A_1A_2A_3= =\angle B_1B_2B_3$ бўлганидан $\angle A'_1A'_2A'_3= =\angle B_1B_2B_3$ бўлади. Шу билан бирга $A'_1A'_2=|k|\quad A_1A_2=\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\cdot A_1A_2=B_1B_2$ ва $A'_1A'_2 = A'_2A'_3$. $B_1B_2 = B_2B_3$ тенгликлардан $A'_2A'_3= B_2B_3$ бўлади.

Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатидан $\Delta A'_1A'_2A'_3=\Delta B_1B_2B_3$. Бу ҳаракатда A'_1 нуқта B_1 нуқтага, A'_2 нуқта B_2 нуқтага, A'_3 нуқта B_3 нуқтага ўтади. A'_4 нуқта B_4 нуқтага ўтишини кўрсатамиз.



79-расм

Ҳақиқатан, A'_4 нуқта C нуқтага ўтсин (79,*б*-расм). Юқорида кўрсатганимиз каби, $\angle A'_2A'_3A'_4=\angle B_2B_3B_4$, $A'_3A'_4= B_3B_4$. Ҳаракатда нуқталар орасидаги масофа билан бурчак ўзгармаганлиги учун $\angle A'_2A'_3A'_4=\angle B_2B_3C$ ва $A'_3A'_4= B_3C$ бўлиши керак. Бунда B_4 ва C нуқталар устма-уст тушади. Шундай қилиб, қаралаётган ҳаракатда P'_1 ва P_2 кўпбурчаклар ўзаро тенг, демак улар тенг. Теорема исботланди.

Ўхшаш фигураларда ўхшашлик коэффициенти мос чизиқли ўлчамлар нисбатига тенг. Мунтазам n бурчакларда томонлар узунликлари, ички ва ташқи чизилган айланалар радиуслари бундай чизиқли ўлчамлар бўлади. Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Мунтазам P_1 ва P_2 n бурчакларнинг p ва p 'периметрлари, ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари r, R ва r', R' бўлса, $\frac{p'}{p} = \frac{r'}{r} = \frac{R'}{R}$ бўлади.

?

1. Синиқ чизиқ деб нимага айтилади? Унинг узунлиги қандай аниқланади?
2. Кўпбурчак нима? Унинг элементларини айтинг. Қаварик кўпбурчак нима?
3. Ташқи ва ички чизилган айланалар деб нимага айтилади?
4. Мунтазам кўпбурчак нима? Унинг маркази қандай аниқланади?
5. Мунтазам кўпбурчак томонлари билан унга ички ва ташқи чизилган айланалар радиуслари орасида қандай боғланишлар бор?
5. Ихтиёрий мунтазам икки n бурчаклар ўзаро ўхшаш бўлишини исботланг.

ПТ Мунтазам: 1) учбурчак; 2) тўртбурчак; 3) олтибурчак чизинг. Уларга ички ва ташқи айланалар чизинг. Кўпбурчак томонларини унга ички ва ташқи чизилган айланалар радиуслари билан ифодаланг.

МАСАЛАЛАР

А

383. Ёпиқ синиқ чизиқ 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м узунликдаги бўғинларга эга бўлиши мумкинми?

384. Ички бурчакларининг ҳар бири: 1) 135°; 2) 150° га тенг бўлган мунтазам кўпбурчакнинг нечта томони бор?

385. Мунтазам кўпбурчакнинг ташқи бурчаклари йиғиндиси қандай бўлади?

386. Мунтазам кўпбурчакнинг ташқи бурчагининг ҳар бири: 1) 36°; 2) 24° га тенг бўлса, унинг нечта учи бор?

387. Қуйидаги жумлалар тўғрими:

1) Қаварик кўпбурчакнинг ҳамма томонлари тенг бўлса, у мунтазам кўпбурчак бўлади;

2) Қавариқ кўпбурчакнинг ҳамма бурчаклари тенг бўлса, у мунтазам кўпбурчак бўлади? Тўғри бўладиган қилиб жумлаларни тўлдиринг.

388. Ихтиёрий мунтазам тўғри тўртбурчак квадрат бўлишини исботланг.

389. Мунтазам n бурчакнинг томони n нинг қандай қийматида:

1) ташқи чизилган айланалар радиусидан катта;
2) ташқи чизилган айланалар радиусига тенг;
3) ташқи чизилган айланалар радиусидан кичик бўлади?

390. 1) n=3; 2) n=4; 3) n=5; 4) n=6; 5) n=10; 6) n=18 бўлса, мунтазам n бурчакнинг бурчагини топинг.

B

391. Радиусга перпендикуляр бўлиб, унинг ўртасидан ўтувчи ватар ички чизилган мунтазам учбурчакнинг томонига тенг эканини исботланг.

392. Мунтазам учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси ташқи чизилган айлананинг радиусидан икки марта кичик эканини исботланг.

393. Тахтада берилган марказдан ва бир-биридан бир хил масофада бурғулаб беш тешикни олиш керак. Буни қандай амалга оширса бўлади?

394. Айланага ташқи квадрат ва мунтазам олтибурчак чизилган. Олтибурчакнинг периметри 48 см бўлса, квадратнинг периметрини топинг.

395. Айланага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг томони a га тенг. Шу айланага ички чизилган квадратнинг томонини топинг.

396. Ташқи ички чизилган айлана радиуси R бўлса, унга ички ички чизилган мунтазам: 1) саккизбурчакнинг томони $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) ўн икки бурчакнинг томони $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ формула бўйича ҳисобланишини аниқланг.

397. Айланага ташқи ва ички ички чизилган n бурчакларнинг периметрлари нисбатини топинг. n = 3, 4, 6 деб олинг.

398. Радиуси R га тенг айланага ички чизилган мунтазам бешбурчак ва мунтазам 10 бурчак томонларини топинг.

399. Периметри P бўлган мунтазам n бурчакка ташқи ва ички чизилган айланаларнинг радиуслари R ва r га, томони эса a_n га тенг. Агар: 1) n=4, $R=3\sqrt{2}$ см; 2) n=3, P =24 см; 3) n=6, r=9 см 4) n=3, $r=5\sqrt{3}$ см бўлса, номаълум элементларини топинг.

400. Мунтазам n бурчакнинг энг кичик диагоналини унинг a_n томони билан ифодаланг:

1) a_n =1 см, n=5; 2) a_n =5 см, n=6.

401. Радиуси R га тенг айланага ички чизилган квадратнинг қарама-қарши томонлари ўртасидан ватар ўтказиланг. 1) R=2 см; 2) R=3 см бўлса, ватарнинг узунлигини топинг.

C

402. Кўндаланг кесимининг диаметри 40 см бўладиган ходадан кўндаланг кесими квадрат бўладиган бир ҳил 4 балка олинди. Шу балкалар кўндаланг кесимлари томонларининг энг катта қийматини топинг.

403. Мунтазам бешбурчакнинг: 1) ихтиёрий икки диагонали тенг; 2) диагонали бир томонига параллел бўлишини исботланг.

404. Бешбурчакнинг икки симметрия ўқи бўлса, у мунтазам бешбурчак бўлишини исботланг.

405. Радиуси r га тенг айланага $A_1A_2...A_n$ мунтазам ўн икки бурчак ички чизилган. $A_1A_2+A_1A_2=2r$ тенглик ўринли бўлишини исботланг.

406. Радиуси R га тенг айланага $A_1A_2...A_n$ мунтазам ўн икки бурчак ички чизилган. $A_1A_2\ A_3$ учбурчакнинг юзини топинг.

407. 406-масала шарти бўйича: 1) $A_1A_2A_3A_4$ тўртбурчакнинг; 2) $A_1A_2A_3A_4\ A_5$ бешбурчакнинг юзини топинг.

408. Мунтазам n бурчак томонларининг ўрталари бошқа мунтазам n бурчакнинг учлари бўлишини исботланг.

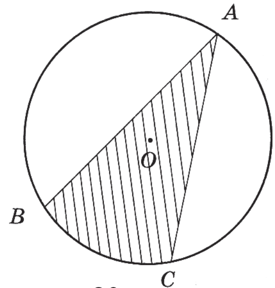
2-§. Ички ва ташқи чизилган тўртбурчаклар

2.1. Айланага ички чизилган бурчаклар

Таъриф. *1) Агар кўпбурчакнинг барча учлари бир айланада ётса, бу кўпбурчакни* ***ички чизилган кўпбурчак*** *деб аталади.*

2) Агар кўпбурчакнинг барча томонлари айланага уринса, бу кўпбурчакни ***ташқи чизилган кўпбурчак*** *деб аталади.*

3) *Айлананинг бир нуқтасидан чиқадиган икки ватар орасидаги бурчак айланага* ***ички чизилган бурчак*** *дейилади* (80-расм). Ватарларнинг умумий A нуқтаси бурчакнинг ***учи*** деб аталади. BC ёй эса ***бурчакка ёпишган ёй*** дейилади. Аввал ички чизилган бурчакнинг битта хоссасини қарайлик (қолган хоссаларини кейинги бўлимларда қараймиз).

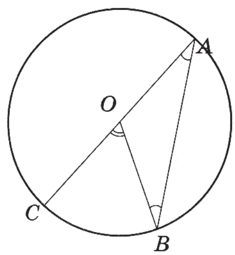


80-расм

1-теорема. *Ички чизилган бурчакнинг қиймати унга ёпишган ёйнинг градус ўлчамининг ярмига тенг.*

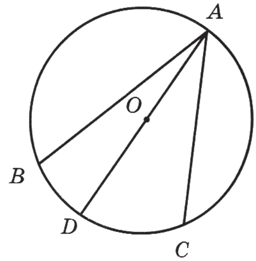
Исботи. Ички чизилган бурчак айлана марказига нисбатан уч хил усулда бўлиши мумкин:

1) Айлана маркази ички чизилган бурчак томонида ётсин (81-расм). $OA=OB$ бўлганидан, AOB – тенг ёнли учбурчак. Бундан $\angle OAB=\angle OBA$ ва $\angle AOB=180°-$ $-(\angle OAB+\angle OBA)=180°-2\cdot\angle OAB$. Шунинг учун $\angle COB=2\cdot\angle OAB$. $\angle COB=\cup CB$ бўлганидан $\angle OAB=\frac{1}{2}\cup CB$.



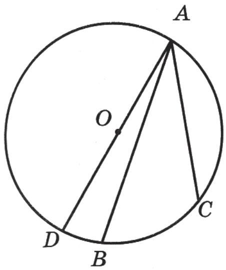
81-расм

2) Айлана маркази ички чизилган бурчак ичида ётсин (82-расм). Унда исботланганга асосан, $\angle BAD=\frac{1}{2}\cup BD$ ва $\angle DAC=$ $=\frac{1}{2}\cup DC$, яъни $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=$ $=\frac{1}{2}(\cup BD+\cup DC)=\frac{1}{2}\cup BC$.



82-расм

3) Айлана маркази ички чизилган бурчак ташқарисида ётсин (83-расм). Унда

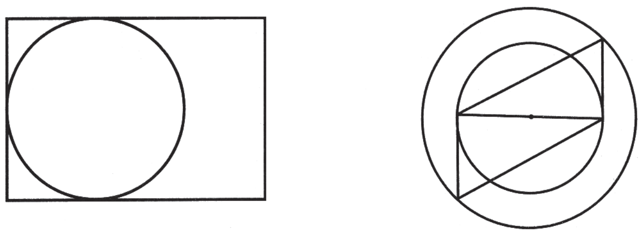


83-расм

$\angle DAC=\frac{1}{2}\cup DC$ ва $\angle DAB=\frac{1}{2}\cup DB$ бўлганидан $\angle BAC=\angle DAC-\angle DAB=\frac{1}{2}\cup DC-$ $-\frac{1}{2}\cup DB=\frac{1}{2}\cup BC$. Теорема исботланди.

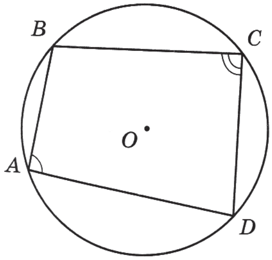
Натижа. *Диаметрга ёпишган ички чизилган бурчак 90° га тенг.*

Учбурчакка ўхшаб, ҳар қандай тўртбурчакка ички ёки ташқи айлана чизишга бўлмайди. Масалан, квад-


84-расм

рат бўлмаган тўғри тўртбурчакка ички, тўғри тўртбурчак бўлмаган параллелограммга ташқи айлана чизиш мумкин эмас (84-расм). Шу билан бирга ички ва ташқи чизилган тўртбурчаклар мавжуд бўлади. Шуларнинг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.

2-теорема. *Ички чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг.*

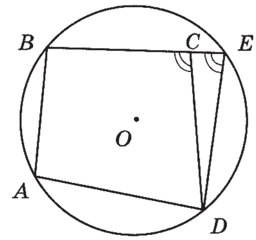


85-расм

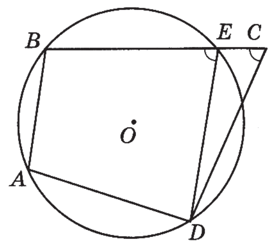
Исботи. Фараз қилайлик, $ABCD$ тўртбурчак ички чизилган бўлсин (85-расм). Ички чизилган бурчакларининг хоссасига асосан $\angle A=\frac{1}{2}\cup BCD$, $\angle C=\frac{1}{2}\cup BAD$. У ҳолда $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\cup BCD+\frac{1}{2}\cup BAD=$ $=\frac{1}{2}(\cup BCD+\cup BAD)$. $\cup BCD$ ва $\cup BAD$ ёйларни бириктирсак тўлиқ айлана ҳосил бўлади. Демак, $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(360°)=180°$. Теорема исботланди.

3-теорема. *Агар тўртбурчак қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, бу тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин.*

Исботи. Фараз қилайлик, $ABCD$ тўртбурчак учун $\angle A+\angle C=180°$ бўлсин. ABD учбурчакка ташқи айлана чизамиз. Тўртбурчакнинг C учи шу айланада ётишини исботлайлик. Агар бундай бўлмаса, C нуқта айлананинг ичида ёки сиртида ётиши керак. Фараз қилайлик, C нуқта айлана ичида ётсин ва BC тўғри чизиқ билан E нуқтада кесишсин (86-расм). $\angle A+\angle C=180°$ ва $\angle A+\angle E=180°$ тенгликлардан $\angle C=\angle E$ келиб чиқади. Бироқ бу тенглик ўринли бўлиши мумкин эмас. Бу зиддият C нуқта айлана ичида ётмаслигини кўрсатади. Шунга ўхшаш, C нуқта айлана ташқарисида ётмаслигини (87-расм) кўрсатиш мумкин. Демак, C нуқта айланада ётади, яъни $ABCD$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин. Теорема исботланди.



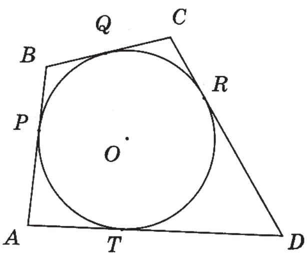
86-расм



87-расм

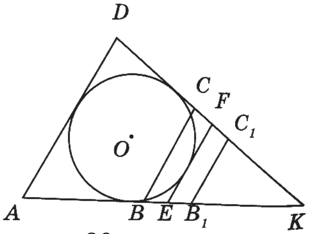
4-теорема. *Айланага ташқи чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси тенг.*

Исботи. $ABCD$ тўртбурчак айланага ташқи чизилган бўлсин (88-расм) ва P, Q, R, T нуқталар унга мос томонлари билан айлананинг уриниш нуқталари бўлсин. Бир нуқтадан ўтказилган уринма хоссасига асосан: $AP=AT$, $BP=BQ$, $CR=CQ$, $DR=DT$. Бу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшсак, $(AP+BP)+(CR+DR)=$ $=(AT+DT)+(BQ+CQ)$ ёки $AB+CD=$ $=AD+BC$ тенгликни ҳосил бўлади. Теорема исботланди.



88-расм

5-теорема. *Агар қавариқ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси тенг бўлса, бу тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкин.*



89-расм

Исботи. $ABCD$ тўртбурчак учун

$AB+CD=AD+BC$ тенглик ўринли бўлсин. AB ва CD томонларнинг давомлари K нуқтада кесишади (89-расм). (Агар бу икки томон кесишмаса, AD ва BC томонларнинг давомлари K нуқтада кесишади, деб оламиз. Агар булар ҳам кесишмаса, $ABCD$ квадрат бўлиб, унга ички айлана чизиш мумкин бўлар эди). 3-теоремадаги усулдан фойдаланиб, ABK учбурчакка ички чизилган айлана $ABCD$ тўртбурчакнинг BC томонига ҳам уринишини аниқлашни ўзингиз бажаринг.

?
1. Ички ва ташқи чизилган кўпбурчак деб нимага айтилади?
2. Айланага ички чизилган бурчак деб нимага айтилади?
3. Айланага ички чизилган бурчак билан унга ёпишган ёй (мос марказий бурчак) орасида қандай боғланиш бор? Мос хоссани таърифлаб, исботланг.
4. Айланага ички чизилган тўртбурчак бурчаклари йиғиндиси тўғрисидаги теоремани айтинг, исботланг.
5. Айланага ташқи чизилган тўртбурчак бурчаклари йиғиндиси тўғрисидаги теоремаларни айтинг, исботланг.
6. Параллелограммнинг қандай турларига 1) ташқи; 2) ички айлана чизиш мумкин?
7. Айланага: 1) ички; 2) ташқи чизилган трапециянинг тури қандай бўлади?

ПТ
1. 1) Тенг томонли учбурчакка; 2) квадратга ички ва ташқи чизилган айлана чизинг.
2. Берилган айланага ички ва ташқи трапеция чизинг.

МАСАЛАЛАР

А

409. 1) Берилган айланага ички чизилган; 2) берилган айланага ташқи чизилган; 3) ташқи чизилган айлана радиусига асосан; 4) ички чизилган айлана радиусига асосан квадрат ясанг.

410. Бурчаклари навбати: 1) 90°, 90°, 60°, 120°; 2) 70°,130°, 110°, 50°; 3) 45°, 75°, 135°, 105° бўлган тўртбурчакка ташқи айлана чизишга бўладими?

411. Бурчаклари нисбати : 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5 сонларнинг нисбати каби бўладиган тўртбурчакка ташқи айлана чизишга бўладими?

412. 1) Айланага ички чизилган ҳар бир трапеция тенг ёнли; 2) айланага ички чизилган ҳар бир параллелограмм тўғри тўртбурчак; 3) айланага ички чизилган ҳар бир ромб квадрат бўлишини исботланг.

413. Тўртбурчакнинг кетма-кет олинган томонлари нисбати: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1 сонларнинг нисбати каби бўлса, тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкинми?

414. Айланага ташқи чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси 15 см га тенг. Тўртбурчакнинг периметрини топинг.

B

415. Ташқи чизилган айлана радиуси билан диагонали орасидаги бурчак бўйича тўғри тўртбурчак ясанг.

416. Ички чизилган айлана радиуси билан томони бўйича ромб ясанг.

417. Параллелограммга ички айлана чизиш мумкин бўлса, унинг ромб бўлишини исботланг.

418. Агар ромбга ташқи айлана чизиш мумкин бўлса, унинг квадрат бўлишини исботланг.

419. Тўғри тўртбурчак диагонали билан томони орасидаги бурчаги 30°, унга ташқи чизилган айлананинг радиуси R га тенг бўлса,тўғри тўртбурчакнинг кичик томонини топинг.

420. Ихтиёрий тўғри тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

421. Айланага ташқи чизилган тенг ёнли трапециянинг ён томони 14 см. Трапециянинг периметрини топинг.

422. AOB бурчакнинг томонларига A ва B нуқталардан ўтказилган перпендикулярлар C нуқтада кесишади. $ACBO$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

423. Параллелограммга ички ва ташқи айлана чизиш мумкин бўлса, унинг квадрат бўлишини исботланг.

C

424. Ҳар қандай қавариқ тўртбурчакнинг биссектрисалари кесишиш нуқталаридан ҳосил бўладиган тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

425. Ҳар қандай қавариқ тўртбурчак ташқи бурчакларининг биссектрисаларидан тузилган тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

426. Қавариқ тўртбурчакнинг барча томонларидан ўзаро тенг ватарлар кесиб ўтадиган айлана ўтказилган. Шу тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси тенг бўлишини исботланг.

427. Асослари 24 см ва 16 см бўлган тенг ёнли трапецияга ички чизилган айлана радиуси 8 см бўлиши мумкинми?

428. Ташқи чизилган тенг ёнли трапециянинг қарама-қарши томонларининг уриниш нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқлар унинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтишини исботланг.

429. 428-масаланинг натижаси ҳар қандай ташқи чизилган тўртбурчак учун ўринли бўлишини кўрсатинг.

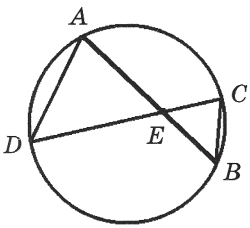
3-§. Айланадаги пропорционал кесмалар

3.1. Айланадаги пропорционал кесмалар

1-теорема. *Агар айлананинг AB ва CD ватарлари E нуқтада кесишса, у ҳолда*

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

бўлади.



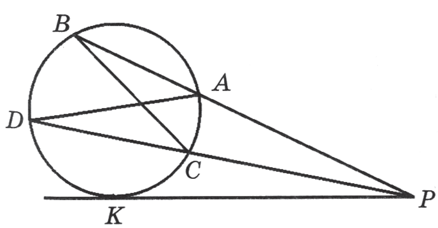
90-расм

Исботи. AED ва CEB учбурчаклар ўхшаш эканини исботлаймиз (90-расм). $\dfrac{DE}{BE} = \dfrac{AE}{CE}$ ёки $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ тенглик бажарилади. Теорема исботланди.

2-теорема. *Агар P нуқтада айланани мос равишда A, B ва C, D нуқталарда кесиб ўтувчи иккита кесувчи ўтказилган бўлса, у ҳолда*

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

бўлади (91-расм).



91-расм

Исботи. DAP ва BCP учбурчаклар ўхшашлигидан $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$ ёки $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ тенгликлар келиб чиқади. Теорема исботланди.

Натижа. *Агар P нуқтадан айлананинг K нуқтасидан уринма ва A, B* *нуқталарида кесувчи ўтказилса, у ҳолда* $PK^2{=}PB\cdot PA$ *бўлади* (91-расм).

Исботи. PAK ва PKB учбурчаклар ўхшаш бўлганлигидан, $PK^2{=}PB\cdot PA$ тенгликни ҳосил қиламиз.

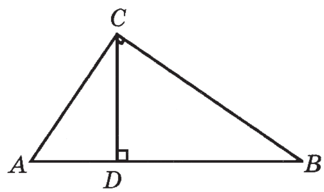
3.2. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг метрик муносабатлари

Масофаларининг (кесмаларининг узунликларини) ўзаро боғланишларини ифодалайдиган формулаларни ***метрик муносабатлар*** деб аталади. Тўғри бурчакли учбурчакларда Пифагор теоремаси асосий метрик муносабат бўлади: катетлари a ва b, гипотенузаси эса c бўлган тўғри бурчакли учбурчак учун $c^2 = a^2 + b^2$ тенглик ўринли бўлади. Энди шунга тўхталайлик.

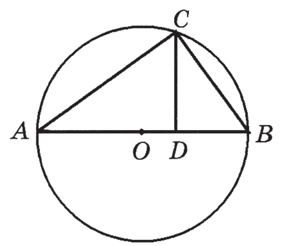
3-теорема. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза билан шу катетнинг гипотенузага туширилган проекциясининг ўрта геометригига тенг, яъни*

$$AC^2{=}AB\cdot AD.$$

Исботи. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг C тўғри бурчагидан туширилган баландлиги CD бўлсин (92-расм). $AC^2{=}AB\cdot AD$. тенгликни тўғрилигини исботлаш керак. Ҳақиқтан, ACD ва ABC тўғри бурчакли учбурчакларнинг бир ўткир бурчак умумий бўлганидан улар ўхшаш бўлади. Бундан $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$ ёки $AC^2{=}AB\cdot AD$ тенглик келиб чиқади.



92-расм



93-расм

Натижа. *Айлана ватари шу айлана диаметри билан ўзининг бир учидан диаметрга туширилган проекциясининг ўрта геометригига тенг* (93-расм). *Яъни* $AC^2 = AB\cdot AD$ ёки $BC^2 = AB\cdot BD$.

4-теорема. *Тўғри бурчакли учбурчак катетлари кўпайтмаси унинг гипотенузаси билан гипотенузага туширилган баландликнинг кўпайтмасига тенг.*

Исботи. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг C тўғри бурчагидан туширилган баландлиги CD бўлсин (92-расм). $AC \cdot BC = AB \cdot CD$ тенгликни исботлайлик.

Ҳақиқтан, ABC учбурчакнинг S юзасини $S=\frac{1}{2}AC \cdot BC$ ёки $S=\frac{1}{2}AB \cdot CD$ формулалар билан ҳисоблашга бўлади. Бундан $\frac{1}{2}AC \cdot BC=\frac{1}{2}AB \cdot CD$ ёки $AC \cdot BC=AB \cdot CD$ тенгликлар ҳосил бўлади. Теорема исботланди.

5-теорема. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан туширилган баландлик гипотенуза бўлинган кесмаларнинг ўрта геометригига тенг.*

Исботи. (92-расмдан) $CD^2=AD \cdot BD$ тенгликни исботлайлик.

Ҳақиқатан, ACD ва BCD тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$ ёки $CD^2=AD \cdot BD$ тенглик келиб чиқади. Теорема исботланди.

6-теорема. *Учбурчакнинг томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан:а) кичик; б) тенг; в) катта бўлса, учбурчакнинг шу томон қаршисида ётган бурчаги мос равишда: а) ўткир; б) тўғри; в) ўтмас бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, ABC учбурчакнинг $\angle A=\alpha$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ бўлсин. Косинуслар теоремасига асосан

$$a^2=b^2+c^2-2bc \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

а) Фараз қилайлик, $a^2<b^2+c^2$ бўлсин. (1) тенгликдан $2bc \cdot \cos\alpha>0$ ёки $\cos\alpha>0$ бўлиши керак. Демак, $\alpha<90°$ – бурчак ўткир бўлади.

б) Агар, $a^2=b^2+c^2$ бўлсин. (1) тенгликдан $2bc \cdot \cos\alpha=0$ ёки $\cos\alpha=0$ бўлиши керак. Демак, $\alpha=90°$ – тўғри бурчак бўлади.

в) Агар, $a^2>b^2+c^2$ бўлсин. (1) тенгликдан $2bc \cdot \cos\alpha<0$ ёки $\cos\alpha<0$ бўлиши керак. Демак, $\alpha>90°$–ўтмас бурчак бўлади. Теорема исботланди.

?

1. Кесишадиган икки ватарнинг ўзаро қандай боғланиши бор?
2. Айланага бир нуқтадан ўтказилган икки кесувчи орасида қандай боғланиш бор?
3. Айланага бир нуқтадан ўтказилган уринма билан кесувчи орасида қандай боғланиш бор?
4. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг метрик муносабатларини айтинг ва уларни исботланг.

5. Учбурчак бурчакларининг ўткир, тўғри ёки ўтмас бўлиши қандай аниқланади?

ПТ 1. Ихтиёрий айлана чизиб, кесишадиган икки ватарини ўтказинг. Ўлчаш ишларини бажариб,1-теоремани ўринли бўлишини текширинг.
2. Ихтиёрий айлана чизиб, ундан ташқарида ётган нуқтадан айланага икки кесувчи ўтказинг. Ўлчаш ишларини бажариб,2-теоремани ўринли бўлишини текширинг.

МАСАЛАЛАР

А

430. Айлана диаметрига перпендикуляр ватар уни 24 см ва 6 см ли кесмаларга бўлади. Ватарнинг узунлигини топинг.

431. Айланадан ташқарида ётган нуқтадан айланага уринма ва айлана билан тенг иккига бўлинадиган кесувчи ўтказилаган. Кесувчининг айлана билан чегараланган қисми 4 см бўлса, уринманинг узунлиги қандай бўлади?

432. Айлана радиуси 7 см. Марказдан 9 см масофадаги нуқтадан ўтказилган кесувчи айлана билан кесишиб тенг икки қисмга бўлинади. Кесувчининг узунлигини топинг.

433. Кесишадиган икки ватарнинг бири кесишиш нуқтасида тенг иккига, иккинчиси эса 4 см ва 16 см ли кесмаларга бўлинади. Биринчи ватарнинг узунлигини топинг.

434. Диаметри 10 см бўлган айланага асосига туширилган баландлиги 2 см бўлган тенг ёнли учбурчак ички чизилган. Учбурчакнинг асосини топинг.

435. Асоси 12 см, баландлиги 3 см бўлган тенг ёнли учбурчакка ташқи чизилган айлана диаметрини топинг.

436. ABC учбурчакнинг медианалари кесишиш нуқтасидан AB томонига параллел ўтказилган тўғри чизиқ унинг AC ва BC томонларини мос равишда A_1 ва B_1 нуқталарда кесади. 1) $A_1B_1{:}AB$; 2) $S_{A_1B_1C} : S_{ABB_1A_1}$ муносабатларни топинг.

437. E нуқтадан айланага EA ва EB кесувчи ўтказилган. Кесувчи айлана билан B ва C нуқталарда кесишади. Агар BC=5 см, EB=4 см ва B нуқта C билан E нуқталар орасида ётса, EA нинг узунлигини топинг.

438. Айлана ватари билан ватарнинг бир учидан ўтказилган уринма орасидаги бурчак шу ватарга ёпишган марказий бурчакнинг ярмига тенг бўлишини исботланг.

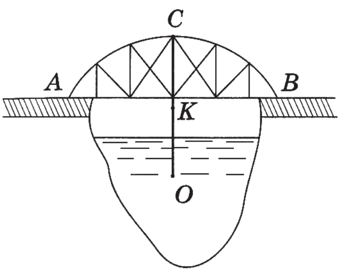
439. Икки ватар айлана ичида кесишади. Бир ватар 24 см ва 14 см ли кесмаларга бўлинади. Иккинчи ватарнинг бир қисми 28 см бўлса, иккинчи қисмининг узунлиги нечага тенг?

B

440. AB ва CD кесмалар F нуқтада кесишади. Агар AF=7 см, BF=21 см, CF=3 см ва DF =16 см бўлса, A,B,C ва D нуқталар айланада ётадими?

441. Ер радиуси 6370 км. Ер сиртидан 4 км баландликдаги самолётни қанча масофадан кўриш мумкин?

442. Айланадан ташқарида ётган нуқтадан шу айланага уринма ва айланани тенг икки қисмга бўладиган кесувчи ўтказилган. Агар уринманинг уриниш нуқтасигача масофа 4 см бўлса, кесувчининг айлана билан чегараланган қисми қандай бўлади?



94-расм

443. Кўприк айлана ёйига ўхшаш қилиб қурилган (94-расм): 1) $CK=h$=3 м, $CO=R$=8,5 м бўлса, AB нинг узунлигини; 2) AB=6 м, h=1,2 м бўлса, кўприк ёйининг радиусини топинг.

444. Нуқтадан айланага ўтказилган уринманинг узунлиги 20 см, шу нуқтадан айланага ўтказилган энг катта кесувчининг узунлиги 50 см. Айлананинг радиусини топинг.

445. Кесишувчи айланаларнинг умумий ватарининг давомида ётган нуқтадан айланага ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасигача бўлган масофалар тенг бўлишини исботланг.

446. Кесувчи ўзининг ташқи кесмасидан $2\frac{1}{4}$ марта узун. Шу нуқтадан ўтказилган уринмадан у неча марта узун бўлади?

447. Бир нуқтадан айланага уринма ва кесувчи ўтказилган. Уринманинг уриниш нуқтасигача бўлган қисми кесувчининг ташқи кесмасидан 5 см узун, ички кесмаси эса шунча кичик. Уринманинг уриниш нуқтасигача бўлган қисмини топинг.

448. Узунлиги a бўлган ватарнинг ўртасидан b узунликдаги ватар ўтказилган. b узунликдаги ватар қандай кесмаларга бўлинади?

449. Айлана бурчакнинг бир томонини учидан узунлиги a ва b бўлган кесмалар билан кесади, иккинчи томонига эса уринади. Бурчак учидан уриниш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

450. R радиусли айлана ичидаги нуқтадан унинг марказигача бўлган масофа d га тенг. Шу нуқтадан ўтадиган ватар билан диаметр перпендикуляр бўлса, ватарнинг узунлигини топинг.

451. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари нисбати 3:4 га, гипотенузаси 50 см га тенг. Тўғри бурчак учидан ўтказилган баландлик гипотенузани қандай кесмаларга бўлади?

452. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан ўтказилган баландлик гипотенузани кичиги 11 см бўлган икки кесмага бўлади. Учбурчакнинг катетлари нисбати 6:5 га тенг. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасини топинг.

453. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчак ичида, ташқарисида ёки бир томонида ётиши учун қандай шартлар бажарилаши керак?

454. ABC учбурчакнинг AD ва BK биссектрисалари O нуқтада кесишади. Агар $AB=5$ см, $BC=3$ см, $AC=7$ см бўлса, $OK:OB$ нисбат нимага тенг бўлади?

C

455. Берилган икки тўғри чизиққа уриниб, берилган нуқтадан ўтувчи айлана чизинг.

456. Агар учбурчак биссектрисаси унинг периметрини тенг иккига бўлса, учбурчакнинг тенг ёнли бўлишини исботланг.

457. ABC учбурчакка ички чизилган $ADEF$ ромбнинг D, E, F учлари учбурчакнинг мос AB, BC, AC томоналарида ётади. Агар $AB=14$ см, $BC=12$ см ва $AC=10$ см бўлса, BE ва EC кесмаларин топинг.

458. Икки медианаси тенг бўлган учбурчакнинг тенг ёнли бўлишини исботланг.

459. Бир нуқтадан айланага уринма ва кесувчи ўтказилган. Уларнинг йиғиндиси 30 см, кесувчининг ташқи кесмаси уринмадан 2 см га қисқа. Уринма билан кесувчини топинг.

460. Маркази O нуқтада ва радиуси 16 см бўлган ярим айланага диаметри 12 см бўлган айлана ички чизилган. Кичик айлана диаметри билан уриниш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

461. Айлана кесувчисини ташқи кесмаси ички кесмасидан $\frac{5}{4}$ марта катта. Шу айланага ўтказилган уринмадан кесувчи қанча марта узун?

462. Учбурчакка ички чизилган айлана маркази учбурчакнинг ўрта чизиқларидан ҳосил бўлган учбурчак ичида ётишини исботланг.

463. AB кесма C ва D нуқталардан ҳар хил бурчак остида кўринади. Қандай ҳолда A, B, C ва D нуқталар битта айланада ётади?

464. Трапеция асослари ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқ ён томонлари давомларининг кесишиш нуқтасидан ўтишини исботланг.

465. Бир томони ярим айлана диамертида ётадиган ички квадрат чизинг.

466. Агар қавариқ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқ унинг бошқа икки томон давомлари кесишиш нуқтасидан ўтса, тўртбурчакнинг трапеция бўлишини исботланг.

467. ABC учбурчакнинг AB томони диаметр бўладиган қилиб айлана ўтказилган. Агар: 1) C нуқта айлана сиртида ётса, $\angle C$ ўткир; 2) C нуқта айланада ётса, $\angle C$ тўғри; 3) C нуқта айлана ичида ётса, $\angle C$ ўтмас бўлишини исботланг.

IV БОБ. УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

3-§. Косинуслар ва синусларо теоремаси

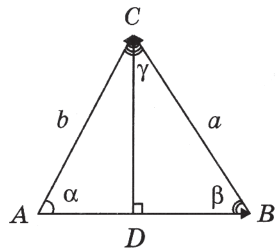
1.1. Косинуслар теоремаси

1-теорема (*косинуслар теоремаси*). *Агар a, b, c сонлари ABC учбурчакнинг A, B, C учларига мос равишда қарама-қарши ётган томонларининг узунликлари бўлса, у ҳолда*

$$\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos A,\\ b^2&=a^2+c^2-2a\cdot c\cdot\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos C \end{aligned} \qquad (1)$$

формулалар ўринли бўлади, яъни учбурчак исталган томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан шу икки томон билан улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг.

Исботи. (1) формулалардан бирини исботласак,етарли.



95-расм

ABC учбурчакда $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ бўлсин. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ бўлганидан (95-расм),

$$a^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-$$
$$-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\,2bc\cos A.$$

Теорема исботланди.

1-масала. ABC учбурчакнинг a, b, c томонлари бўйича CD баландлигини топинг.

Ечилиши. Пифагор теоремасига асосан $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}$.

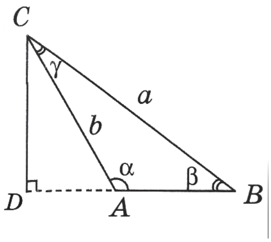
Фараз қилайлик, A ўткир бурчак бўлсин (95-расм). ADC тўғри бурчакли учбурчак ($\angle ADC=90°$) $AD=AC\cdot\cos A=b\cdot\cos A$ тенглик келиб чиқади. (1) формулаларнинг биринчисидан

$$b\cdot\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

тенглик, яъни

$$AD=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

Агар A ўтмас бурчак бўлса (96-расм), ADC



96-расм

тўғри бурчакли учбурчакда $AD=AC\cdot\cos(\angle CAD)=AC\cdot\cos(180°-$ $-\angle A)=-b\cdot\cos A$. (1) формулаларнинг биринчисидан

$$AD=-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, A ўткир ёки ўтмас бурчак бўлишига боғлиқ

$$AD=\pm\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

тенглик бажарилишини кўрсатдик. Агар A ўткир бурчак бўлса, «+» ишораси; A ўтмас бурчак бўлса, «–» ишораси қўйилади. Демак,

$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2}. \qquad (2)$$

1.2. Синуслар теоремаси

2-теорема. (синуслар теоремаси). *Учбурчакнинг томонлари қаршисидаги бурчакларнинг синусларига пропорционал, яъни агар ABC учбурчакнинг a, b, c томонларига қарама-қарши ётган бурчаклари* α, β, γ *бўлса,*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \qquad (3)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи. ABC учбурчакнинг C учидан CD баландлик туширамиз. $\alpha>\beta$ бўлсин. Агар α ўткир бурчак бўлса, $CD=b\sin\alpha$ (95-расм), α ўтмас бурчак бўлса, $CD=b\sin(180°-\alpha)=b\sin\alpha$ бўлади (96-расм). Шунга ўхшаш, β ўткир бурчак бўлганидан (учбурчакда икки ўтмас бурчак бўлиши мумкин эмас) $CD=a\sin\beta$ тенглик бўлади. Демак, $b\sin\alpha=a\sin\beta$ ёки

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \qquad (4)$$

тенглик келиб чиқади.

Шунга ўхшаш, учбурчакнинг B учидан туширилган баландлик бўйича

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \qquad (5)$$

тенглик келиб чиқади. (4), (5) тенгликлардан (3) келиб чиқади. Теорема исботланди.

2-масала. *ABC* учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси *R* бўлса,

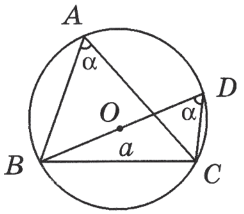
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \qquad (6)$$

тенгликни исботланг.

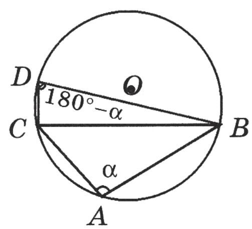
Ечилиши. *ABC* учбурчакка ташқи чизилган айлананинг *BD* диаметрини ўтказамиз. Икки хил ҳол бўлади.

1. *A* ва *D* нуқталар *BC* ватарнинг бир томонида ётсин. Айланага ички чизилган бурчакларининг хоссасига биноан $\angle D=\angle A=\alpha$ (97-расм), $a=BC=BD\sin\alpha=2R\sin\alpha$ ёки $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$ бўлади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

2. *A* ва *D* нуқталар *BC* ватарнинг икки томонида ётсин. $\angle D=180°-\angle A=180°-\alpha$ (98-расм). Шунинг учун, $a=BC=BD\sin(180°-\alpha)=2R\sin\alpha$ ёки $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$ бўлади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.



97-расм



98-расм

ABC учбурчакда $\angle C=\gamma$, $BC=a$, $AC=b$ ва $AB=c$ бўлса, косинуслар теоремасига асосан

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

тенглик ўринли бўлади. Агар $\gamma=90°$ бўлса, у ҳолда $\cos\gamma=\cos90°=0$ бўлиб, $c^2=a^2+b^2$ келиб чиқади, яъни Пифагор теоремасининг яна бир исботини келтирдик. Исботланганга биноан, Пифагор теоремаси косинуслар теоремасининг алоҳида кўриниши бўлар экан. Шунинг учун баъзида косинуслар теоремаси Пифагор теоремасининг умумий кўриниши деб қаралади.

?

1. Косинуслар теоремасини исботланг. Нима учун уни Пифагор теоремасининг умумий кўриниши деб аталади?
2. Уч томони бўйича учбурчак баландлигини қандай аниқлашга бўлади?

3. Синуслар теоремасини исботланг.
4. Агар учбурчакнинг бир томони билан унга қарши ётган бурчак берилган бўлса, шу учбурчакка ташқи чизилган айлана диаметрини аниқлаш мумкинми?

МАСАЛАЛАР

А

468. Учбурчакнинг томонлари 3 м, 4 м, 5 м. Учбурчак бурчакларининг косинусларини топинг.

469. ABC учбурчакда $\angle A=30°$, $AC=2$ см, $BC=\sqrt{2}$ см бўлса, B бурчакни топинг.

470. Учбурчакнинг a, b томонлари ва улар орасидаги γ бурчак берилган. Учбурчакнинг учинчи с томонини топинг 1) $a=2$ м, $b=5$ м, $\gamma=30°$; 2) $a=2\sqrt{2}$ м, $b=3$ м, $\gamma=45°$; 3) $a=8$ см, $b=3\sqrt{3}$ м, $\gamma=120°$; 4) $a=4$ см, $b=7$ см, $\gamma=60°$.

471. Учбурчакнинг томонлари 5 см, 7 см, унинг учинчи томони қаршисидаги бурчаги 45° бўлса, учбурчакнинг учинчи томонини топинг.

472. Учбурчакнинг узунлиги $5\sqrt{3}$ м бўлган томонига ёпишган бурчаклар 45° ва 75°. Шу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

473. Учбурчакнинг юзи 44 см^2. Узунликлари 8 см, 11 см бўлган томонлари орасидаги бурчагини топинг.

474. Параллелограмм томонлари 4 см ва $2\sqrt{3}$ см. Агар унинг юзи 12 см^2 бўлса, параллелограммнинг ўткир бурчагини топинг.

475. Учбурчакнинг a ва b томонлари билан a томони қаршисидаги бурчаги α берилган. b томони қаршисидаги β бурчак синусини топинг: 1) $a=3$ м, $b=5$ м, $\alpha=30°$; 2) $a=8$ м, $b=7$ м, $\alpha=60°$; 3) $a=2\sqrt{2}$ см, $b=3$ см, $\alpha=45°$; 4) $a=6$ м, $b=2\sqrt{3}$ см, $\alpha=120°$.

476. Учбурчакнинг CD баландлиги билан юзини топинг: 1) $AB=2$ см, $AC=7$ см, $BC=6$ см; 2) $AB=4$ см, $AC=6$ см, $BC=5$ см; 3) $AB=0{,}3$ м, $AC=0{,}4$ м, $BC=0{,}6$ м; 4) $AB=13$ дм, $AC=12$ дм, $BC=5$ дм.

477. Учбурчакнинг a томони билан унинг қаршисидаги α

бурчаги бўйича ташқи чизилган айлана радиусини топинг: 1) a=5 м, α=30°; 2) $a=3\sqrt{2}$ см, α=45°; 3) a=0,6 дм, α=150°; 4)) a=21 см, α=60°.

B

478. ABC учбурчакнинг номаълум элементларини топинг: 1) a=3, c=2, $\angle B$=60°; 2) b=3, c=4, $\angle A$=135°; 3) a=2, b=1,3, $\angle C$=30°; 4) a=0,15, b=0,62, $\angle B$=150°; 5) a=4, b=5, c=6; 6) a=12, b=5, c=13; 7) a=24,6, $\angle B$=45°, $\angle C$=70°; 8) a=16, b=10, $\angle A$=80°; 9) c=14, $\angle A$=60°, $\angle B$=40°; 10) b=4,5, $\angle A$=30°, $\angle C$=75°.

479. ABC учбурчакнинг юзи S, $AC=b$, $BC=a$ бўлса, $\angle C$ ни топинг. 1) S=14, a=7, b=8; 2) a=12, $b=5\sqrt{3}$, S=45.

480. Диагоналлари d_1 ва d_2, кичик томони a га тенг бўлган параллелограммнинг диагоналлари орасидаги бурчакни топинг: 1) d_1 =10 см, d_2 =12 см, $a=\sqrt{31}$ см; 2) d_1 =4 м, d_2 $=2\sqrt{3}$ м, a=1 м.

481. Учбурчакнинг икки томони 6 см ва 8 см га, улар орасидаги бурчакнинг синуси 0,6 га тенг. Учбурчакнинг қолган бурчаклари билан учинчи томонини топинг.

482. ABC учбурчакнинг $\angle A$=45°, $\angle C$=30° ва AD баландлиги 3 м бўлса, унинг томонларини топинг.

483. Тенг ёнли трапециянинг кичик асоси ён томонига тенг, катта асоси 10 см, асосидаги бурчак 70° бўлса, трапециянинг периметрини топинг.

484. Циркулнинг 10 см га керилган таянчлари орасидаги бурчак 30° га тенг. Агар шу циркулнинг таянчлари 20 см га керилса, циркуль таянчлари орасидаги бурчакни топинг.

485. Агар томонлари: 1) 5, 4 ва 4; 2) 17, 8 ва 15; 3) 9, 5 ва 6 бўлса, учбурчакнинг бурчаклар орасидаги муносабатларини топинг.

486. Учбурчак томонлари a, b ва c га тенг. Агар:
1) $a^2 + b^2 > c^2$ бўлса, c томони қаршисидаги ўткир бурчак;
2) $a^2 + b^2 = c^2$ бўлса, c томони қаршисидаги тўғри бурчак;
3) $a^2 + b^2 < c^2$ бўлса, c томони қаршисидаги ўтмас бурчак бўлишини исботланг.

487. Томонлари 5 м, 6 м ва 7 м бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

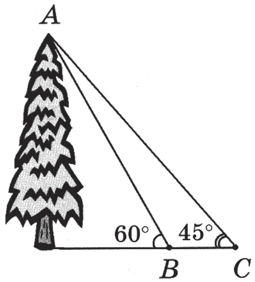
488. Параллелограммнинг диагоналлари билан улар орасидаги бурчак берилган. Параллелограмм томонларини топишга бўладими?

C

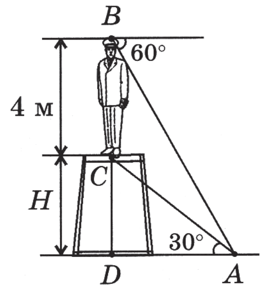
489. Агар учбурчакнинг ўтмас бурчаги бўлса, унинг қаршисидаги томон энг катта бўлишини исботланг.

490. $BC=a$ бўлса, 99-расмда кўрсатилган маълумотлар бўйича дарахтнинг баландлигини қандай топиш мумкин?

491. 100-расмда кўрсатилган маълумотлар бўйича H ни аниқланг.



99-расм



100-расм

492. a томонига ёпишган бурчаклар α ва β га тенг бўлса, учбурчакнинг биссектрисаларини топинг.

493. $A_1A_2=d_1$, $A_2A_3=d_2$ ва A_1, A_2, A_3 нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Агар K нуқтадан A_1A_2 ва A_2A_3 кесмалар φ бурчак остида кўринса, A_1K, A_2K, A_3K нинг узунликларини топинг.

494. Томонлари a, b ва c га тенг бўлган учбурчакнинг c томонига туширилган баландликни (2) формуладан фойдаланиб,

$$h_c = \frac{2S}{c}$$

формула бўйича топиш мумкинлигини исботланг. Бу формулани бошқа усул билан олишга бўладими?

495. Томонлари a, b ва c га тенг бўлган учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси

$$r = \frac{S}{p}$$

формула билан аниқланишини кўрстинг. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

496. *CD–ABC* учбурчакнинг *AB* томонига ўтказилган медианаси. Агар *AC*>*BC* бўлса, *ACD* бурчак *BCD* бурчакдан кичик бўлишини исботланг.

497. Дарёнинг икки қирғоғидага *A* ва *B* пунктлар орасидаги масофани синуслар теоремасидан фойдаланиб топинг.

498. *ABC* ўткир бурчакли учбурчакнинг баландликлари *O* нуқтада кесишади. *ABC, AOB, AOC, BOC* учбурчакларга ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари ўзаро тенг бўлишини исботланг.

3-§. Учбурчакларни ечиш

Учбурчакларни ечиш учбурчакнинг маълум бурчаклари ва томонлари бўйича унинг номаълум томонлари ва бурчакларини топишдан иборатдир. Энди шунга бир нечта масалалар ечайлик. Учбурчакнинг томонларини a, b, c билан, бурчакларини $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ билан белгилаймиз.

1-масала. c, $\angle A$ ва $\angle B$ берилган. Учбурчакнинг қолган икки томони ва учинчи бурчагини топинг.

Ечилиши. $\angle C=180°-\angle A-\angle B$. Синуслар теоремасига асосан,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \text{ ва } \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \text{ Бундан } a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C},\ b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}.$$

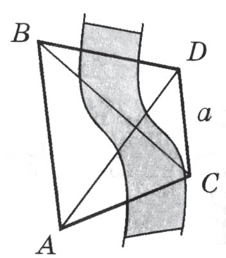
2-масала. Учбурчакнинг a, b ва c томонлари берилган. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

Ечилиши. Косинуслар теоремасига асосан

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Демак, A, B, C бурчакларнинг тахминий қийматларини тўрт хонали каср билан аниқланади.

3-масала. Бориб ўлчаш ишларини бажариш мумкин бўлмаган жойдаги икки нуқта орасидаги масофани топинг.



101-расм

Ечилиши. 101-расмда кўрсатилгандек, дарёнинг иккинчи қирғоғида ўлчаш ишларини бажариш мумкин эмас. Дарёнинг бир қирғоғида туриб $CD=a$ масофани ва $\angle ACD=\alpha$, $\angle ADC=\beta$, $\angle BCD=\gamma$ ва $\angle BDC=\varphi$ бурчакларни топиш мумкин.

$\angle CAD=180°-\alpha-\beta$, $\angle CBD=180°-\gamma-\varphi$ ва синуслар теоремасига асосан

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\left(180°-\alpha-\beta\right)}=\frac{a}{\sin\left(\alpha+\beta\right)} \text{ ёки } AC=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}.$$

Шунга ўхшаш, BCD учбурчакдан

$$\frac{BC}{\sin\varphi}=\frac{a}{\sin\left(180°-\gamma-\varphi\right)}=\frac{a}{\sin\left(\gamma+\varphi\right)}, \text{яъни } BC=\frac{a\cdot\sin\varphi}{\sin\left(\gamma+\varphi\right)}$$

тенгликни оламиз.

Энди ABC учбурчакдан $\angle ACB=\alpha-\gamma$ эканини эътиборга олиб, косинуслар теоремасига асосан

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos(\alpha-\gamma)$ тенгликни ёзиб, A ва B нуқталар орасидаги масофани аниқлаймиз:

$$BC=\sqrt{\frac{a^2\sin^2\beta}{\sin^2\left(\alpha+\beta\right)}+\frac{a^2\sin^2\varphi}{\sin^2\left(\gamma+\varphi\right)}-2\cdot\frac{a^2\sin\beta\sin\varphi\left(\alpha-\gamma\right)}{\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\gamma+\varphi\right)}}.$$

? 1. Учбурчакларни ечиш деганда нимани тушунасиз?
2. Учбурчакларни ечишда қандай теоремалар кўп қўлланилади?

ПТ 46-расмда кўрсатилган усулдан фойдаланиб: *а*) мактабнинг; *б*) устуннинг баландлигини аниқланг.

МАСАЛАЛАР

А

499. ABC учбурчакда $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ деб олиб, қуйидаги маълумотлар бўйича учбурчакнинг номаълум томонларини ва бурчакларини топинг:[1)]

1) $a=5$, $\alpha=60°$, $\beta=40°$;
2) $b=4{,}56$, $\alpha=30°$, $\gamma=75°$;
3) $c=14$, $\beta=45°$, $\gamma=70°$;
4) $a=12$, $b=8$, $\gamma=60°$;
5) $b=9$, $c=17$, $\alpha=80°$;
6) $a=7$, $c=10$, $\beta=120°$;
7) $a=2$, $b=3$, $c=4$;
8) $a=4$, $b=10$, $c=7$.

500. Томонлари 5 м, 4 м ва 3 м бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

501. Томонлари a ва b га тенг бўлган параллелограммнинг ўткир бурчаги α га тенг. Унинг диагоналларини топинг. 1) $a=3$ м, $b=2$ м, $\alpha=30°$; 2) $a=0{,}8$ м, $b=0{,}5$ м, $\alpha=45°$; 3) $a=\frac{3}{4}$ м, $b=\frac{5}{4}$ см, $\alpha=60°$.

[1)] Бунда ва кейинги масалаларда алоҳида айтилмаса, бурчакларни аниқлаш деб унинг синус ёки косинусини топишни тушунинг.

502. Параллелограммнинг c ва d диагоналлари ҳамда улар орасидаги α бурчак берилган. Агар: 1) $c=5$ м, $d=6$ м, $\alpha=60°$; 2) $c=22$ м, $d=14$ м, $\alpha=30°$; 3) $c=0,5$ м, $d=1,5$ м, $\alpha=120°$; 4) $c=\frac{4}{3}$ м, $d=\frac{3}{4}$ м, $\alpha=45°$бўлса, параллелограммнинг томонларини топинг.

503. ABC учбурчакнинг $AB=12$ см бўлган томонига ёпишган бурчаклари $\angle A=75°$, $\angle B=60°$ бўлса, AC томони билан учбурчакнинг юзини топинг.

504. Агар $S_{ABC}=120$ см^2, $\angle A=30°$, $AB=75$ см бўлса, AC билан BC ни топинг.

505. Учбурчакнинг бир томони билан иккита бурчаги берилган. Агар: 1) $BC=8$ см, $\angle B=30°$, $\angle C=45°$; 2) $AB=5$ см, $\angle A=75°$, $\angle C=45°$; 3) $AC=12$ см, $\angle B=40°$, $\angle C=120°$; 4) $BC=20$ см, $\angle B=30°$, $\angle C=120°$ бўлса, унинг учинчи бурчагини ва қолган иккита томонини топинг.

506. Учбурчакнинг учта томони берилган. Агар: 1) $a=2$ см, $b=4$ см, $c=5$ см; 2) $a=3$ см, $b=4$ см, $c=5$ см; 3) $a=7$ см, $b=3$ см, $c=8$ см; 4) $a=15$ см, $b=24$ см, $c=18$ см бўлса, унинг бурчаклари билан юзини топинг.

507. Учбурчакнинг икки томони ва бу томонлардан бирининг қаршисидаги бурчаги берилган. Агар: 1) $a=4$ см, $b=5$ см, $\alpha=60°$; 2) $b=7$ см, $c=3\sqrt{2}$ см, $\gamma=45°$; 3) $a=4\sqrt{3}$ м, $c=4$ м, $\alpha=120°$; 4) $a=8$ дм, $b=5$ дм, $\beta=30°$ бўлса, қолган бурчакларини ва томонини топинг.

508. Параллелограммнинг томонлари 4 см ва 6 см, ўткир бурчаги 45° бўлса, унинг кичик диагоналини топинг.

B

509. Учбурчакнинг томонлари 4 м, 5 м, 6 м га тенг. Учбурчакнинг катта томонига туширилган бошқа икки томони проекцияларини аниқланг.

510. Учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги берилган. Агар: 1) $a=3$ см, $b=8$ см, $\gamma=30°$; 2) $a=6$ см, $c=4$ см, $\beta=60°$; 3) $b=\frac{4}{3}$ м, $c=\frac{3}{4}$ м, $\alpha=45°$; 4) $a=0,6$ см, $b=0,8$ см, $\gamma=120°$ бўлса, унинг қолган бурчакларини ва учинчи томонини топинг.

511. Томонлари 5 м, 6 м ва 7 м бўлган учбурчакниинг баландликларини топинг.

512. Тенг бўлган икки куч бир-бири билан 72^0 бурчак остида бир нуқтага таъсир этади. Агар уларнинг тенг таъсир этувчи кучи 120 кг бўлса, шу кучларни топинг.

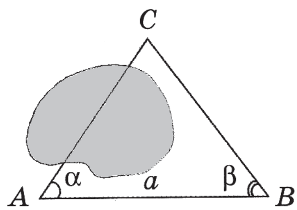
513. 100 Н ва 200 Н кучлар бир-бири билан 50° бурчак остида бир нуқтага таъсир этади. Тенг таъсир этувчи кучни ва унинг берилган кучлар йўналиши билан ҳосил қиладиган бурчакларини топинг.

514. Учбурчакнинг икки томони $\sqrt{13}$ ва $\sqrt{10}$, учинчи томони эса унга туширилган баландлигига тенг. Учбурчакнинг учинчи томонини топинг.

515. Томони билан 20° бурчак ҳосил қиладиган ромбнинг диагонали 20 см га тенг. Ромбнинг иккинчи диагонали билан томонини топинг.

516. Агар $AB=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BAC=\beta$ бўлса (102-расм), A ва C нуқталар орасидаги масофани топинг.

517. Томони a га, ўткир бурчаги α га тенг бўлган ромбга ички чизилган айлана радиусини топинг.



102-расм

518. Трапециянинг томонлари 14 м ва 19 м, ён томонлари 6м ва 8 м бўлса, трапециянинг бурчакларини топинг.

519. Томонлари билан 20° ва 40° бурчак ҳосил қиладиган параллелограммнинг диагонали 18 см га тенг бўлса, унинг томонларини топинг.

C

520. Учбурчакнинг иккита томони 5 м ва 6 м га, улар орасидаги бурчакнинг косинуси эса 0,6 га тенг. Учбурчакнинг медианаларини топинг.

521. ABC учбурчакнинг AD биссектрисаси ўтказилган. $AB:AC=BD:CD$ тенгликни ўринли бўлишини исботланг.

522. Томонлари a, b, c бўлган учбурчакнинг биссектрисаларини топинг.

523. Ўткир бурчакли учбурчакнинг a ва b томонларига туширилган медианалар ўзаро перпендикуляр бўлса, унинг учинчи томонини топинг.

524. Тўғри бурчакли учбурчакнинг $2p$ периметри билан гипотенузасига туширилган h_c баландлиги бўйича унинг томонларини топинг.

525. ABC учбурчакнинг A бурчаги B бурчагидан 2 марта катта ва $AB=c$, $AC=b$. BC томонини топинг.

526. ABC учбурчакнинг $\angle A=120°$, $AC=20$ см, $AD=12,5$ см – биссектриса. Учбурчакнинг қолган икки томонини топинг.

527. Тенг ёнли трапециянинг асослари 12 см ва 16 см, унга ташқи чизилган айлана маркази катта асосида ётса, трапециянинг ён томони билан диагоналини топинг.

528. ABC учбурчакнинг AH баландлиги, AD биссектрисаси ва AE медианалари ўтказилган. $AH \leqslant AD \leqslant AE$ ўринли бўлишини исботланг.

529. ABC учбурчакнинг A бурчаги B бурчаклари айирмаси φ га, C учидан туширилган баландлиги $BC-AC$ га тенг. Учбурчак бурчакларини топинг.

3-§. Учбурчакларни ечишда тригонометриядан фойдаланиш

Аввалги параграфларда, асосан, косинуслар ва синуслар теоремасини қўллаб учбурчакларни ечишда тригонометрия элементлари аҳамияти катта эканлигини кўрдик. Энди планиметрияда тригонометрия элементларини бошқа мураккаб масалаларни ечишда қўллаш мумкин эканлигига мисоллар келтириш билан ўрганамиз. Бу мавзу математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфлар билан математика билан мустақил шуғулланувчи қобилиятли ўқувчиларга мўлжалланган, асосан мураккаб масалалар йиғилган. Бундай масалаларни ечишнинг баъзи бир бошқача хусусиятлари бор ва ҳар бир масала тайёр формула билан бирдан, қандайдир бир алгоритм билан ечилмайди. Шунинг учун геометрик масалаларда (умуман мураккаб масалаларда) ечиш йўли билан усулларини аниқлашни масала шартини таҳлил қилишдан бошлаган мақсадга мувофиқ бўлади. Таҳлилда масала шартини берилган объектлар тўғрисидаги далиллар билан маълумотларни аниқлашни, топишни, исботлашни талаб этадиган объектнинг хоссалари орасидаги боғланиш механизмини аниқлаб, керак бўлса, масалани ечишга ёрдам берадиган чизмани чизиб, шу чизма бўйича масала шартини қисқача ёзиш керак. Навбатдаги босқичда таҳлилда режаланган иш-ҳаракатларни тизимли (системали) бажариб, масала жавобини ёзиш керак. Албатта, бу масала ечишнинг умумий режасидир. Энди масалалар кўриб чиқамиз.

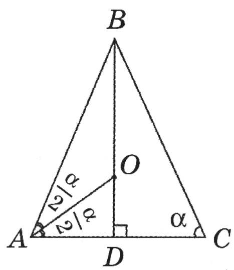
1-масала. Асосидаги бурчаги α га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги унга ички чизилган айлана радиусидан a га катта. Учбурчакнинг асоси билан унга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

Аввал, масала шартини таҳлил қилайлик. Одатда таҳлил қилиш оғзаки бажарилади.

Масала шартига асосан, тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги α бурчак ва асосига туширилган баландлиги билан шу учбурчакка ички чизилган айлана радиуси айирмаси a билан белгиланади. Бу маълумотлардан бизга қуйидаги далилларни олишга бўлади:

1) Асосидаги α бурчак билан учбурчакнинг ҳамма бурчакларини аниқлашга бўлади;

2) Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги унга ички чизилган айлана маркази унинг асосига туширилган баландликда ётиши ва айлана учбурчак асосига баландлик туширилган нуқтада уринади.



103-расм

Шу далиллар бўйича учбурчак чизиб, таҳлилни чизилган чизма бўйича давом эттириш керак (103-расм). Чизилган чизмада BD – баландлик, O – ички чизилган айлана маркази (учбурчак биссектрисалари кесишиш нуқтаси) бўлса, OD ички чизилган айлана радиуси бўлади. Демак, $BD-OD=BO=a$.

Энди масалани ечиш режасини тузамиз: AC асосини топиш учун $AD = DC$ бўлганидан, AD аниқланса, етарли бўлади. AD ни α ва $a = BO$ билан аниқлайдиган формула йўқ. AD ни BD нинг ёки AB нинг узунликлари берилса, ABD тўғри бурчакли учбурчакдан аниқлашга бўлар эди. BD билан AB берилмаган. BD ёки AB ни берилган далиллар бўйича аниқлаш керак:

1) BD ни BO билан α орқали боғлайдиган механизм осонликча (агар бундай механизм бор бўлса) топилмайди ва бу боғланишни излаш масалани мураккаблаштириб юбориши мумкин. Бундай ҳолда масалани ечишнинг иккинчи йўлини кўриб чиқиш керак;

2) AB билан BO кесмалар AOB учбурчак билан бир-бирига боғланади ва бу учбурчакнинг ҳамма бурчакларини α билан ифодалаш мумкин, яъни AOB учбурчак масала шартида берилган далиллар билан тўлиқ аниқланади.

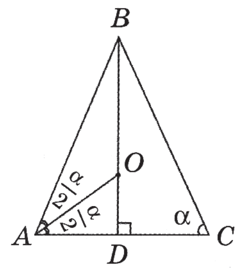
AOB учбурчакка синуслар теоремасини қўллаб AB ни, сўнгра AD ни (яъни AC ни) аниқлаймиз. $2R = \dfrac{AB}{\sin\alpha}$ формуладан, ABC учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топамиз.

Мана , тахминан шундай стандартда ҳар бир масала шартини оғзаки таҳлил қила билиш керак. Мураккаб масалаларни ечиш қобилияти унинг шартини таҳлил қила билиш ва керакли чизмани тўғри чизиш билан боғлиқ.

Таҳлилдан сўнг масала чизмасини чизиб, шу чизмага асосан масаланинг берилганларини қисқача ёзиш керак.

Берилган: ΔABC, $AB=BC$, $\angle A=\angle C=\alpha$, $BD\perp AC$, $\angle OAD=\frac{\alpha}{2}$, $OB=a$

Топиш керак: *AC ва ташқи чизилган айлананинг R радиусини*



104-расм

Ечилиши. 104-расмга асосан

$\angle BAO=\angle OAD=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\angle AOD=90^\circ-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\angle OAB=180^\circ-(90^\circ-\frac{\alpha}{2})=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.

ΔAOB: синуслар теоремасига асосан

$$\frac{AB}{\sin(\angle AOB)}=\frac{BO}{\sin\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\frac{AB}{\sin\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow AB=\frac{a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=a\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

ABD тўғри бурчакли учбурчакдан:

$AD=AB\cdot\cos\alpha=a\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\Rightarrow AC=2\cdot AD=2a\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha,$

$$2R=\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow R=\frac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Жавоби. $AC=2a\cdot c\,tg\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha, R=\frac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

? 1. Масала шартини таҳлил қилиш деганни тушунтиринг.
2. Масалани ечиш режаси қандай тузилади.

ПТ Синфда ечилган масалаларнинг берилганларини ёзма таҳлил қилинг (530–531 масалалар).

МАСАЛАЛАР

A

530. Параллелограммнинг баландликлари h_1 ва h_2, периметри $2p$ га тенг бўлса, параллелограммнинг ўткир бурчагини топинг.

531. Параллелограммнинг ўткир бурчаги α, диагоналларининг кесишиш нуқтасидан тенг бўлмаган томонларигача бўлган масофа m ва n га тенг. Параллелограммнинг диагоналлари билан юзини топинг.

532. Ромбнинг ўткир бурчаги α, баландлиги h га тенг бўлса, ромбнинг юзини топинг.

533. Диагоналлари орасидаги бурчак 45° ва диагонали $10\sqrt{2}$ см бўлган тўғри тўртбурчак юзини топинг.

534. ABC учбурчакда $\angle A=60°$, унинг баландлиги $BD=4$ см, $CE=6$ см. Учбурчакнинг юзини топинг.

535. ABC учбурчакда $\angle A=45°$, $\angle B=30°$, баландлиги $CD=5$ м. Учбурчакнинг томонларини топинг.

536. Тенг ёнли трапециянинг кичик асоси a га тенг бўлган ён томони билан бир хил, ўткир бурчаги α га тенг. Трапециянинг катта асоси билан юзини топинг.

537. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 10 см, асосдаги бурчаги 30°. Учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиусларини топинг.

B

538. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаги α га тенг. Учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар радиусларининг нисбатларини топинг.

539. Агар учбурчакнинг иккита томони m ва n га тенг, юзи $0{,}3\ mn$ га тенг бўлса, учбурчакнинг учинчи томонини топинг.

540. Айланага ташқи чизилган трапециянинг асосларидаги бурчаклари α ва β га тенг. Трапециянинг юзи S га тенг бўлса, айлана радиусини топинг.

541. Тенг ёнли трапециянинг баландлиги h, ён томони қаршисида ётган диагоналлари орасидаги бурчак α га тенг. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

542. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали d га тенг ва у тўғри тўртбурчак бурчагини $p{:}q$ нисбатда бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг периметрини топинг.

543. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонига туширилган баландлиги уни $m{:}n$ нисбатда бўлади. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

544. Тенг ёнли учбурчакнинг a томони билан асосидаги α бурчаги берилган. Унинг ён томонига ўтказилган медианасини топинг.

545. Учбурчакнинг a ва b томонлари билан асосидаги α бурчаги берилган. Учбурчакнинг учинчи томонига туширилган баландлигини топинг.

546. Юзи S бўлган ромбга ички чизилган айлана радиуси r га тенг. Ромбнинг ўткир бурчаги топинг.

547. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги α га, унга ички чизилган айлана радиуси r га тенг. Учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

C

548. ABC учбурчакда $\angle A=\alpha$, унинг баландлиги $AB=c$, $AC=b$ ($b>c$). A бурчакнинг ташқи бурчаги биссектрисасининг BC тўғри чизиқ билан чегараланган кесмасини топинг.

549. Учи O нуқтада бўлган бурчакнинг ички A нуқтасидан унинг томонлариги AB ва AC перпендикулярлар ўтказилган. Агар $\angle BOC=\alpha$, $OB=m$, $OC=n$ бўлса, AB билан AC ни топинг.

550. Учбурчакнинг a ва b томони ва улар орасидаги бурчакнинг биссектрисаси l берилган. Учбурчакнинг юзини топинг.

551. Учбурчакнинг бурчаклари берилган бўлса, унинг бир учидан ўтказилган медианаси билан баландлиги орасидаги бурчакни топинг.

552. Ўткир бурчакли ABC учбурчакнинг A ва B учларидан ўтказилган баландликлари m ва n га, шу баландликлар орасидаги ўткир бурчак α га тенг. Учбурчакнинг AB томонини топинг.

553. Учбурчакнинг a ва b томони ва улар орасидаги бурчакнинг биссектрисаси l берилган. Учбурчакнинг шу бурчагини топинг.

554. Тенг ёнли учбурчакнинг учидан чиқадиган нур шу бурчак қаршисидаги томонни $p:q$ нисбатда бўлади. Нур билан учбурчак асоси орасидаги ўткир бурчакни топинг.

555. ABC учбурчакнинг ички O нуқтаси $\angle ABO=\angle BCO=\angle CAO=\varphi$ тенгликни қаноатлантиради. $tg\varphi$ ни учбурчак юзи билан томонлари орқали ифодаланг.

556. Агар ABC учбурчакка ички чизилган айлананинг O маркази $OA^2 = OB \cdot OC$ тенгликни қаноатлантирса, учбурчакнинг A, B, C учларидаги α, β, γ бурчаклари $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2}$ тенгликни қаноатлантиришини исботланг.

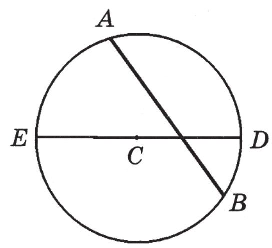
V боб. АЙЛАНА УЗУНЛИГИ ВА ДОИРА ЮЗИ

1-§. Айлана

1.1 Диаметрлар билан ватарлар

Бу мавзуда айлана билан унинг баъзи элементларининг хоссаларини ўрганамиз. Энди биз аввалдан маълум бўлган қоидаларни эсга туширамиз.

Текисликнинг берилган C нуқтадан бир хил R масофадаги ҳамма нуқталардан иборат фигура ***айлана*** деб аталади. C нуқта айлана ***маркази*** деб, R айлана ***радиуси*** деб аталади. R айлананинг иккита нуқтасини туташтирувчи кесма ***ватар*** деб аталади, айлана маркази орқали ўтувчи ватар ***диаметр*** деб аталади. Ҳар бир ватар учлари айланани икки қисмга бўлади. Бу бўлаклар ватарга тиралган ***ёйлар*** дейилади (105-расм). Алоҳида кўрсатилмаган ҳолларда ватарга тиралган ёй деб икки ёйнинг кичиги олинади.



105-расм

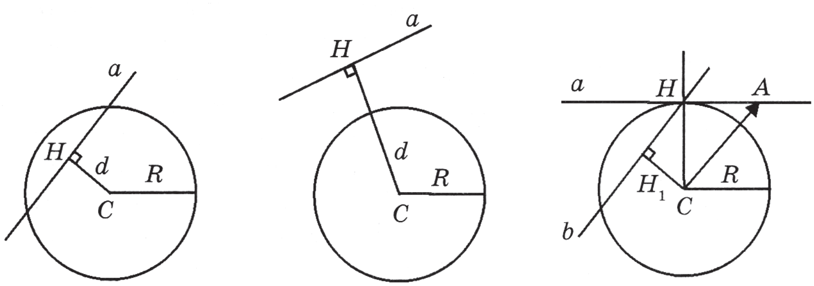
Айлананинг баъзи бир хоссаларини эсга туширамиз:

1°. (Тўғри чизиқ билан айлананинг кесишиши тўғрисида). *Айлана билан тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталари иккитадан ортмайди.*

а) Агар марказдан тўғри чизиққача бўлган масофа радиусдан кичик бўлса, айлана билан тўғри чизиқ иккита нуқтада кесишади (106, *а*-расм).

б) Агар марказдан тўғри чизиққача бўлган масофа радиусдан катта бўлса, айлана билан тўғри чизиқ кесишади (106,*б*-расм).

в) Агар марказдан тўғри чизиққача бўлган масофа радиусга тенг бўлса, айлана билан тўғри чизиқнинг битта умумий нуқтаси бўлади. Тўғри чизиқ айланага ўтказилган уринма деб аталади (106, *в*-расм).



а) $d<R$ *б*) $d>R$ *в*) $d=R$

106-расм

Айлана билан тўғри чизиқнинг бу хоссалари 8-синф геометриясида координаталар усули билан исботланган эди.

2°. *Айлананинг ҳар бир нуқтасидан шу айланага фақат битта уринма ўтказиш мумкин бўлади ва бу уринма уриниш нуқтасига туширилган радиусга перпендикуляр бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, маркази C нуқтада, радиуси R га тенг бўлган айлананинг H нуқтасидан CH радиусга перпендикуляр a ($a \perp CH$) тўғри чизиқ ўтказайлик (106,*б*-расм). Бу тўғри чизиқнинг H нуқтасидан бошқа ҳар қандай A нуқтасидан C марказгача масофа R радиусдан катта бўлади, яъни айланада ётмайди. Демак, айлана билан a тўғри чизиқ фақат битта умумий (H) нуқтага эга бўлади. Таърифга асосан, a тўғри чизиқ – айланага уринма. Энди бу уринма битта бўлишини кўрсатайлик.

Ҳақиқатан ҳам, аксинча, H нуқтадан айланага a дан бошқа b уринма ўтказайлик. C нуқтадан b тўғри чизиққа CH_1 перпендикулярни ўтказамиз: $CH_1 \perp b$. CH кесма b тўғри чизиққа оғма бўлганидан (106, *б*-расм), $CH_1 < CH = R$. Бундан 1° а) хоссага асосан b тўғри чизиқ айланани иккита нуқтада кесиб ўтади. b тўғри чизиқ айланага уринма эмас, балки кесувчи бўлади.Ҳосил бўлган зиддият H нуқтадан айланага иккита уринма ўтказиш мумкин бўлмаслигини кўрсатади. Уринма билан уриниш нуқтасидан ўтказилган радиус перпендикуляр бўлиши келиб чиқади. Демак, нуқтадан тўғри чизиққа фақат битта уринма ўтказиш мумкин.

3°. *Айлананинг диаметри унинг симметрия ўқи бўлади. Айлананинг маркази унинг симметрия маркази бўлади.*

Исботи. AB кесма маркази C нуқтада, радиуси R бўлган айлананинг диаметри бўлсин. Айлананнинг ихтиёрий X нуқтасида AB тўғри чизиққа тегишли симметрик X' нуқтани айланада ётишини исботлайлик.

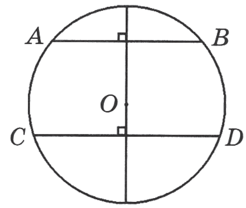
107-расм

Ҳақиқатан ҳам, симметрия ўқининг таърифиги асосан, $XX' \perp AB$ ва $CX = CX'$ бўлади (107-расм). $CX = R$ бўлганидан, X' нуқта айланада ётади. Шунга ўхшаш агар Y нуқта айланада ётмаса, унга AB тўғри чизиққа тегишли симметрик Y' нуқтани айланада ётмаслигини исботлайлик: $CY' = CY > R$. Демак, AB тўғри чизиқ симметрия ўқи, C нуқта эса симметрия маркази бўлади.

Натижа. *Параллел ватарлар ўрталаридан ўтувчи ватар шу ватарларга перпендикуляр диаметр бўлади.*

4°. *Параллел ватарлар билан чегараланган ёйлар тенг.*

Ҳақиқатан, бу ёйлар берилган параллел ватарларга перпендикуляр диаметрга нисбатан симметрик бўлади (108-расм).



108-расм

5°. *Радиуслари тенг айланалар тенг Бўлади, ва аксинча тенг айланаларнинг радиуслари тенг бўлади.*

Ҳақиқатан, марказлари C ва C' нуқталарда бўлган айланалар радиуслари тенг бўлсин. C нуқтани C' нуқтага ўтказадиган ҳаракатда (параллел кўчириш) бу айланалар устма-уст тушади.

Аксинча, икки айлана тенг бўлса, уларни қандайдир бир ҳаракат билан устма-уст туширишга бўлади. У ҳолда айлана марказлари ҳам устма-уст тушади. Демак, айланалар тенг бўлади.

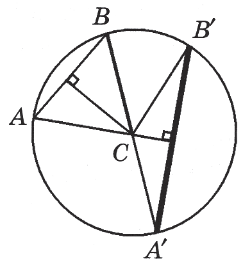
6°. *Ихтиёрий бир айланадаги ёки ўзаро тенг айланалардаги:*

а) тенг ватарларга тенг ёйлар тиралган ва аксинча.

б) ярим айлананинг кичик ёйларининг каттаси катта ватарга тиралади.

Ҳақиқатан, агар тенг ёйларни устма-уст туширсак, уларнинг учлари устма-уст тушади. Уларга тиралган ёйлар ҳам устма-уст тушади.

Аксинча, агар $\cup AB < \cup A'B'$ бўлса (109-расм), $\angle ACB < \angle A'C'B'$. Бундан $AB < A'B'$ тенгсизлик келиб чиқади, чунки ACB ва $A'C'B'$ бурчакларнинг мос томонлари тенг: $CA = CB = CA' = CB' = R$. Демак, катта бурчак қаршисида (тенг томонлар орасидаги бурчак учун) катта томон ётади.



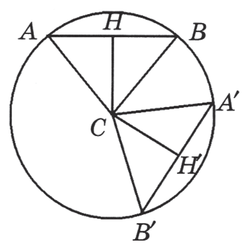
109-расм

7°. *Ихтиёрий айланадаги ёки ўзаро тенг айланалардаги:*

а) тенг ватарлар марказлардан бир хил масофада ётади ва аксинча;

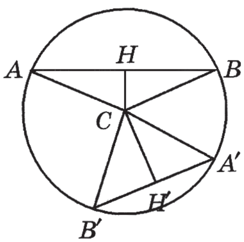
б) тенг бўлмаган ватарларнинг каттаси марказга яқин бўлади.

Исботи. AB ва $A'B'$ ватарлар тенг бўлсин (110-расм). ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар уч томонига асосан (учбурчаклар тенглигининг III аломати) тенг. Демак, CH ва CH' баландликлар тенг бўлади.



110-расм

Аксинча, агар $AB > A'B'$ бўлса (111-расм), $\angle ACB > \angle A'C'B'$ бўлади (катта ёйга ёпишган марказий бурчак бўлгани учун). $\angle BAC < \angle B'A'C$ бўлади. AHC ва $A'H'C$



111-расм

тўғри бурчакли учбурчакларнинг гипотенузалари тенг. Демак, катта ўткир бурчак қаршисидаги катет ҳам катта бўлади: $AH = A'H'$.

1.2. Икки айлананинг ўзаро жойлашуви

1-теорема. *Турли икки айлананинг умумий нуқталари сони иккитадан ортиқ эмас.*

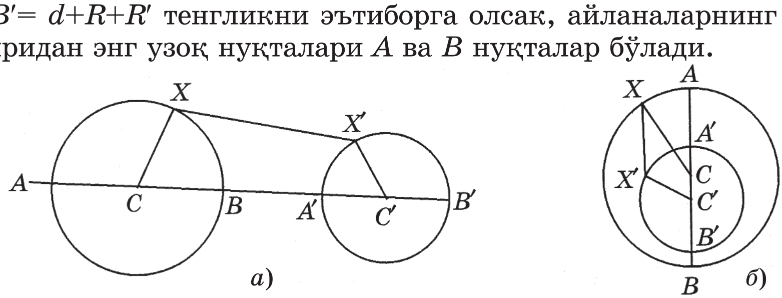
Исботи. Ҳақиқатан, икки айлананинг учта умумий нуқтаси бўлса, у ҳолда бу айланалар устма-уст тушиши керак. Чунки бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтадан фақат битта айлана ўтказишга бўлади (учбурчакка ташқи чизилган айлананинг ягоналигидан). Демак, икки айлана кўпи билан икки нуқтада кесишади.

2-теорема. *Кесишадигани иккита айлананинг бир-бирига энг яқин ва энг узоқ нуқталари айланаларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиқда ётади.*

Исботи. Икки хил ҳолат бўлиши мумкин. Кесишмайдиган икки айлананинг бири иккинчисининг ташқарисида ёки ичида бўлиши мумкин (112, *а, б*-расм).

Фараз қилайлик, марказлари C ва C' нуқталарда, радиуслари R ва R' бўлган, бири иккинчисининг ичида жойлашган иккита айлана берилган бўлсин (112, *а*-расм). CC' тўғри чизиқ билан айланаларнинг кесишиш нуқталарини A, B, A' ва B' деб белгилайлик. $CC'=d$ бўлсин. Икки айладан мос равишда X ва X' нуқталар олайлик. Учбурчалар тенгсизлигига асосан, $d=CC' \leqslant CX+XX'+C'X'=R+R'+XX'$ ёки $XX' \geqslant d-R-R$ бўлади. XX' кесма ками билан $d-R-R'$ га тенг бўлади. $A'B=d-R-R'$ бўлганидан, $X=B$ ва $X'=A'$ бўлгандагина $XX'=d-R-R'$ тенглик ўринли бўлади.

Шунга ўхшаш, $XX' \leqslant CX+CC'+C'X'=d+R+R'$ бўлганидан XX' кесманинг энг катта қиймати $d+R+R'$ га тенг бўлиши мумкин. $AB'= d+R+R'$ тенгликни эътиборга олсак, айланаларнинг бирбиридан энг узоқ нуқталари A ва B нуқталар бўлади.

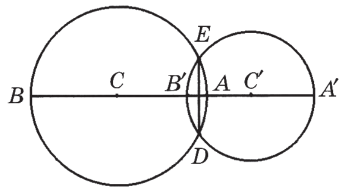


112-расм

Агар айланалар бири иккинчисининг ичида жойлашган бўлган ҳолда ҳам, теорема шунга ўхшаш исботланади (112, *б*-расм). Теорема исботланди.

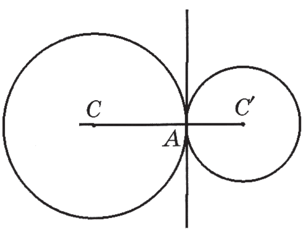
Шу теоремадан келиб чиқадиган натижа сифатида икки айлананинг ўзаро жойлашувининг қуйидаги хоссаларини айтиш мумкин:

1°. *Агар икки айлана кесишса, у ҳолда уларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиқ айланаларнинг умумий ватарига перпендикуляр ва уни тенг иккига бўлади* (113-расм).

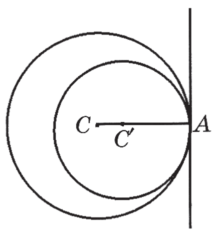


113-расм

2°. *Агар икки айлананинг фақат битта умумий нуқтаси бўлса, бу нуқта айланаларнинг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқда ётади ва аксинча, агар айланаларнинг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқ айланаларнинг умумий нуқтасидан ўтса, бу нуқта айланаларнинг фақат битта умумий нуқтаси бўлади* (114-115-расмлар).



114-расм



115-расм

Таъриф. *Агар икки айлананинг умумий нуқтасидан бу айланаларга умумий уринма ўтказиш мумкин бўлса, у ҳолда айланалар бир-бири билан* ***уринади*** *дейилади.*

Агар уринадиган айланалар бири иккинчисини ташқарисида бўлса, бу айланалар *ташқи уринади* деб (114-расм), бири иккинчисини ичида бўлса, бу айланалар *ички уринади* деб аталади(115-расм).

3°. *Агар радиуслари R ва R' га тенг айланалар ташқи уринадиган бўлса, уларнинг марказлари $R>R'$ орасидаги масофа $R+R'$ га тенг бўлади* (114-расм).

4°. *Агар радиуслари R ва R' га тенг $R>R'$ айланалар ички уринадиган бўлса, уларнинг марказлари орасидаги масофа $R-R'$ га тенг бўлади* (115-расм).

5°. *Агар икки айлана кесишмай, бири иккинчисини ташқарисида бўлса,у ҳолда уларнинг марказлари орасидаги масофа радиуслар йиғиндисидан катта бўлади* (112, а-расм).

6°. Агар икки айлана кесишмай, бири иккинчисини ичида бўлса, у ҳолда уларнинг марказлари орасидаги масофа радиуслар айирмасидан кичик бўлади (112, б-расм).

7°. Агар икки айлана кесишса, у ҳолда уларнинг марказлари орасидаги масофа радиуслар йиғиндисидан кичик, айирмасидан катта бўлади (113-расм).

Бу хоссаларни юқорида исботланган теоремалар ёрдамида исботлашга бўлади. Ўзингиз исботлаб кўринг. 8-синфда қуйидаги теорема исботланган эди.

3-теорема. *Айланага ички чизилган бурчак унинг томонларига тиралган ёйнинг ярмига тенг.*

Энди шу теоремадан келиб чиқадиган бир нечта натижаларни қарайлик.

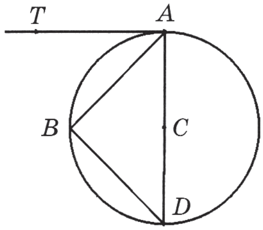
1-натижа. *Уринма билан ватарнинг орасидаги бурчак шу ватарга тиралган ёйнинг ярмига тенг.*

Ҳақиқатан, 116-расмда кўрсатилгандек, AD диаметр ўтказайлик. 3-теоремага асосан, $\angle ABD=90°$, $\angle ADB=\frac{1}{2}\smile{AB}$. $\angle BAD=90°-\angle ADB$ ёки $\angle BAD=90°-\frac{1}{2}\smile{AB}$ бўлади. Иккинчи томондан, $TA\perp AC$ бўлганидан

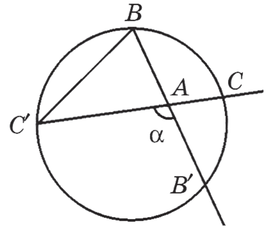
$$\angle TAB=90°-\angle BAD=90°-\left(90°-\frac{1}{2}\smile{AB}\right)=\frac{1}{2}\smile{AB}.$$

2-натижа. *Учи айлана ичида бўлган вертикал бурчакларнинг ҳар бири айлананинг бурчак томонлари билан чегараланган ёйлар йиғиндисининг ярмига тенг.*

Ҳақиқатан, айлана ичидаги A нуқтада кесишадиган кесишувчилар айланани B, B' ва C, C' нуқталарда кесиб ўтсин (117-расм). Агар $\angle BAC=\alpha$ деб олсак, α бурчак ABC' учбурчакнинг ташқи бурчаги бўлади. Демак, $\alpha=\angle B+\angle C'$. 3-теоремага асосан, $\angle B=\frac{1}{2}\smile{B'C'}$ ва $\angle C=\frac{1}{2}\smile{BC}$. Демак, $\alpha=\frac{\smile{BC}+\smile{B'C'}}{2}$.



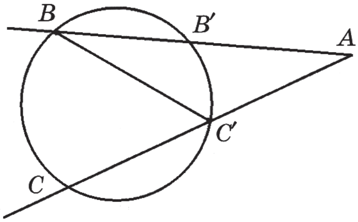
116-расм



117-расм

3-натижа. *Айланадан ташқарида кесишадиган икки кесувчи орасидаги бурчак шу бурчак томонлари орасидаги ёйларнинг айирмаси ярмининг абсолют қийматига тенг.*

Ҳақиқатан, айлана ташқарисидаги A нуқтада кесишадиган кесишувчилар айланани B, B' ва C, C' нуқталарда кесиб ўтсин (118-расм). BC' ватарни ўтказамиз. Агар $\angle BC'C$ бурчак ABC' учбурчакнинг ташқи бурчаги бўлади: $\angle BC'C=\angle A+\angle B$. 3-теоремага асосан, $\angle BC'C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$, $\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{B'C'}$, $BC>B'C'$, бўлганидан, $\angle A=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{B'C'})=\frac{1}{2}|\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{B'C'}|$ тенглик бажарилади.



118-расм

? 1. Айлана нима? Унинг элементларини атанг.
2. Айлана билан тўғри чизиқ ўзаро қандай жойлашади?
3. Айланага уринманинг хоссаларини айтинг.
4. Айлананинг нечта симметрия ўқи ва нечта симметрия маркази бор?
5. Айлана ватари ва унга ёпишган ёйларнинг хоссаларина айтинг.
6. Иккита айлананинг ўзаро жойлашувларини айтинг.Уларнинг марказлари орасидаги масофа қандай аниқланади?
7. Қандай айланалар ўзаро уринади? Улар ўзаро қандай жойлашади?
8. Кесишмайдиган айланалар ўзаро қандай жойлашади?
9. Уринма билан ватар орасидаги бурчак нимага тенг?
10. Кесувчилар: а) айлана ичидаги нуқтада; б) айланада ётса; в) айлана ташқарисидаги нуқтада кесишса, икки кесувчи орасидаги бурчак қандай аниқланади?

ПТ 1. Айлана чизиб, унга бир томони айлана диаметрига тенг бўладиган, ички бир нечта учбурчак чизинг. Бу учбурчакларнинг турлари қандай? Қандай хулоса чиқариш мумкин?
2. Айлана чизиб, унга бир нечта уринма ўтказинг. Уриниш нуқталарини айлана маркази билан туташтиринг. Қандай хулоса чиқариш мумкин?
3. R ва r радиусли айланаларнинг ўзаро жойлашиши мумкин бўлган барча ҳолларни чизинг. Уларнинг марказлари орасидаги масофани ўлчаб, $R+r$ йиғиндини таққосланг.

МАСАЛАЛАР

А

558. 3 см ва 5 см радиусли икки айлана: 1) ташқи уринса; 2) ички уринса, уларнинг марказлари орасидаги масофа қандай аниқланади?

559. Айлананинг 8 см ли параллел иккита ватари орасидаги масофа 6 см га тенг. Айлана радиусини топинг.

560. Айланадан ташқарисидаги нуқтадан 32° бурчак остида кесишадиган иккита тўғри чизиқ ўтказилган. Айлананинг кесувчилари орасидаги катта ёй 100° бўлса, шу кесувчилар орасидаги кичик ёйни топинг.

561. Ташқи нуқтада кесишадиган икки кесувчи орасидаги ёйлар 140° ва 52° га тенг бўлса, кесувчилар орасидаги бурчакни топинг.

562. AC – айлана диаметри, AB – ватари, AN – уринма. Агар $\angle NAB$ ўткир бурчак бўлса, $\angle NAB=\angle ACB$ бўлишини исботланг. NB айланани C нуқтада кесади.

563. Кесишмайдиган икки айлана нуқталарини туташтирадиган энг кичик ва энг катта кесмаларни ясанг. Жавобингизни асосланг.

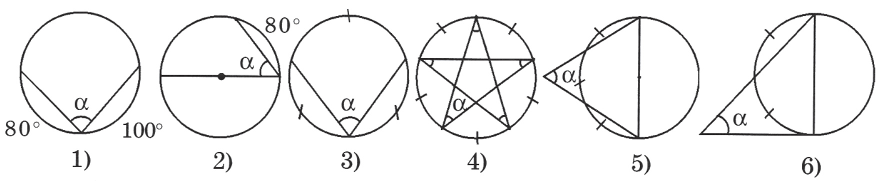
564. Икки айланага умумий уринма ўтказилган. Уриниш нуқталари билан айланаларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиқлар параллел бўлишини исботланг. Қандай ҳолда бу икки тўғри чизиқ устма-уст тушади?

565. Берилган айланага ташқи уринадиган радиуслари бир хил бўлган айланалар марказларининг геометрик ўрнини аниқланг.

566. AOB марказий бурчак AB ватарга тиралган ички чизилган бурчакдан 30° га ортиқ. Шу бурчакни аниқланг.

567. Агар айлананинг AB ва CD ватарлари ички N нуқтада кесишиб, AD=40°, DC=30° бўлса, BNC бурчакни топинг.

568. 119-расмдан фойдаланиб, α бурчакни топинг.



119-расм

B

569. Айлана радиусини R, ватарни d, ватардан айлана марказигача масофани h ва ватарга тиралган марказий бурчакни φ билан белгилайлик:

1) Агар R билан h берилган бўлса, d ва φ ни топинг;

2) Агар катталикнинг иккитаси берилса, қолган иккитасини шулар орқали ифодаланг.

570. Радиуси R бўлган айланада параллел икки ватар ўтказилган: 1) агар бу ватарлар айлана марказидан φ_1 ва φ_2 бурчаклар остида кўринса, ватарлар орасидаги масофани топинг; 2) узунлиги d бўлган ватардан иккинчи ватар h масофада бўлса, иккинчи ватарнинг узунлигини топинг.

571. Иккита айлана ички уринади. Икки айлананинг радиуслари бир хил қийматга ортганда ҳосил бўлган айланалар ҳам ички уринишларини исботланг.

572. Иккита айлана ташқи уринади. Биринчи айлана радиусини маълум қийматга орттириб, иккинчи айлана радиусини шунчага камайтирганда ҳосил бўлган айланалар ташқи уринишларини исботланг.

573. Уриниш нуқтасидан ўтказилган кесувчи айланаларни бошқа иккита нуқтада кесиб ўтади. Шу нуқталарни мос айланалар марказлари билан туташтирувчи радиуслар ўзаро параллел бўлишини исботланг. Айланалар ички ва ташқи уринадиган ҳолларни кўриб чиқинг.

574. Айланада ётадиган C нуқтадан AB диаметрга CD перпендикуляр ўтказилган. $CD^2 = AD \cdot BD$ бўлишини исботланг.

575. A ва B нуқталар айланани иккита ёйга бўлади.Уларнинг кичиги $140°$ га тенг, каттасини эса C нуқта A нуқтадан ҳисоблаганда 6:5 нисбатда бўлади. BAC бурчакни топинг.

576. Айланадан ташқи нуқтадан $40°$ бурчак остида иккита кесувчи ўтказилган. Айлананинг шу кесувчилар орасидаги катта ёйи $120°$ га тенг. Кичик ёй нимага тенг?

577. Айланадан ташқи нуқтадан ўтказилган кесувчилар орасидаги катта ёйлар мос равишда $200°$ ва $20°$ га тенг бўлса, кесувчилар ўзаро перпендикуляр бўлишини исботланг.

578. AB – ватар, AN – уринма. NAB бурчак AB ватарга тиралган ёйнинг ярмига тенглигини исботланг.

579. C нуқтада кесишадиган AA_1 диаметр билан BB_1 ватар перпендикуляр. AC=4 см, CA_1 =8 см бўлса, BB_1 ни топинг.

C

580. Айланадаги тенг ватарларнинг кесишиш нуқтасидан (ёки уларнинг давомларининг кесишиш нуқтасидан) ватарларнинг мос учларигача бўлган масофа тенг бўлишини исботланг.

581. Ватарни тенг учта бўлакка бўлиб, уларни айлана маркази билан туташтирганда ҳосил бўладиган учта марказий бурчаклар тенг бўлмаслигини исботланг. Бурчакларнинг қайси бири энг катта бўлади ва тенг бурчаклар борми?

582. Айлана ичидаги нуқтадан ўтувчи ватарларнинг энг кичигини аниқланг. Жавобингизни асосланг.

583. Айланага ташқи нуқтадан уринма ўтказинг.

584. Агар кесувчилар орасидаги ёйлар тенг бўлса, бу кесувчилар параллел бўлишини исботланг.

585. Учбурчак тўғри бурчаги учидан туширилган баландлик гипотенузани 2 см ва 3 см га тенг кесмаларга бўлади. Учбурчакни ясанг.

586. Агар ватар айланани 5:4 нисбатда ёйларга бўлса, бу ватар айлана нуқталаридан қандай бурчак остида кўринади?

587. Бир нуқтадан айланага ўтказилган икки уринма орасидаги бурчак уриниш нуқталари билан икки ёй айирмасининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

588. Фақат чизғич ёрдамида: а) ўзаро параллел; б) ўзаро перпендикуляр ватарларни ўтказиш мумкинми?

589. A ва B нуқталардан ўтадиган ва орасидаги масофа d га тенг бўлган параллел тўғри чизиқлар ўтказинг.

2-§. Айлана узунлиги

2.1. Эгри чизиқ узунлиги тушунчаси

Унча олис бўлмаган нотекис йўл узунлигини қадам билан ўлчаш мумкин. Икки бекат орасидаги темир йўл узунлигини телеграф устунлари оралиқлари сони билан ўлчаш мумкин. Чизма ёки харитадаги эгри чизиқ узунлигини оёқлари ўзгармайдиган циркуль билан ўлчаш мумкин. Шу қаралаётган мисолларнинг ҳаммасида биз эгри чизиқ узунлигини унга ички чизилган синиқ чизиқ узунлиги билан алмаштирдик. Ваҳоланки, амалиётда биз эгри чизиқ узунлигини ҳақиқий қийматини эмас, балки маълум даражада яқинлашган қийматини аниқлаймиз. Бу яқинлашиш даражаси эгри чизиққа ички чизилган синиқ чизиқ бўғинлари узунликлари қанча кичик бўлса, яқинлашган қийматнинг аниқлик даражаси шунча катта бўлади (120-расм). Мазкур

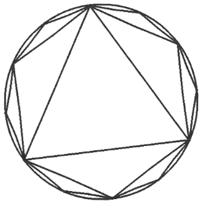
120-расм

мисолларга суянган ҳолда эгри чизиқ узунлиги тушунчасига бундай таъриф бериш мумкин: l эгри чизиққа ички чизилган синиқ чизиқ бўғинларининг сони n ва унинг узунлиги P_n бўлсин. Соддалик учун ушбу эгри чизиққа ички чизилган синиқ чизиқнинг барча бўғинлари узунликларини бир хил деб ҳисоблаймиз. У ҳолда l эгри чизиқнинг узунлиги деб, $n \to \infty$ шу эгри чизиққа ички чизилган синиқ чизиқ узунликлари P_n нинг «лимити» га айтилади.

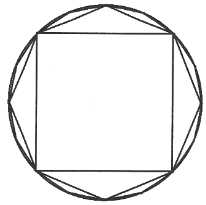
2.2. Айлана узунлиги

Айлана узунлиги 2.1. бандда кўрсатилган усул бўйича аниқланади, яъни *айлана узунлиги деб, унга ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонлари сони чексиз ортганда кўпбурчаклар периметрларининг лимитига (чексиз яқинлашиш қийматига) айтилади.*

Умуман, айлана ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонлари сонини кўпайтириш мумкин. Одатда қулай бўлиш учун иккилантириш усули қўлланилади. Масалан, 121-расмда айлана ички чизилган мунтазам 3, 6, 12 бурчаклар тасвирланган. Шу каби айлана ички чизилган мунтазам 4, 8, 16 бурчакли кўпбурчаклар ясаш мумкин (122-расм). Аввал қуйидаги теоремани исботлаймиз.



121-расм



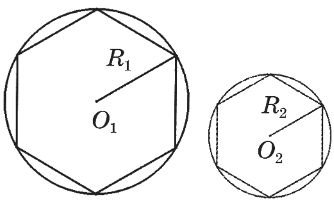
120-расм

Теорема. *Ихтиёрий икки айлана узунликларининг нисбати уларнинг мос радиуслари нисбатига тенг.*

Исботи. $\omega_1(O_1;\ R_1)$ ва $\omega_2(O_2;\ R_2)$ айланаларга берилган бўлсин. Бу айланаларнинг узунликлари мос равишда C_1 ва C_2 бўлсин. Бунда

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2} \qquad \textbf{(1)}$$

тенглик бажарилишини кўрсатамиз.



123-расм

Берилган айланаларга мунтазам n бурчакларни ички чизамиз ва уларнинг периметрларини мос равишда P_1 ва P_2 билан белгилаймиз (123-расм). Мунтазам n бурчакларнинг ўхшашлигидан ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Агар кўпбурчак томонларининг сони n жуда катта бўлса, таърифга кўра P_1, P_2 периметрлар узунликлари мос C_1 ва C_2 айланалар узунликларидан кам фарқ қилади ва n ортган сари у шунча кичик бўлади, яъни $\frac{P_1}{P_2}$ нисбат $\frac{C_1}{C_2}$ нисбатга чексиз яқинлашади. Жумладан,

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2}$$

тенглик бажарилади. Теорема исботланди.

Натижа. Айлана узунлигининг диаметрга нисбати айланага боғлиқ эмас, яъни ҳар қандай айланалар учун бир хил умумий сон.

Ҳақиқатан, исботланган теоремага асосан, ҳар қандай $\omega_1(O_1;\ R_1)$ ва $\omega_2(O_2;\ R_2)$ айланалар учун

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2}$$

тенглик бажарилади. Бу ерда C_1 ва C_2 – мос равишда ω_1 ва ω_2 айланаларнинг узунликлари. Бундан

$\frac{C_1}{R_1}=\frac{C_2}{R_2}$ ёки $\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$ тенглик келиб чиқади.Мана шуни исботлаш талаб этилган эди.

Хуллас, кўриниб турибдики, ихтиёрий айлана учун унинг C узунлигининг $2R$ диаметрига нисбати айланага боғлиқ бўлмаган ўзгармас сон экан. Бу сон грек ҳарфи π («пи» деб ўқилади) билан белгиланади:

$$\frac{C}{2R}=\pi.$$

Бундан

$$C=2\pi R \qquad (2)$$

Айлана узунлиги формуласига эга бўламиз. Умуман, $\pi=3,14149...$ – иррационал сон. Фан соҳасида асосан унинг 0,01 гача аниқликда олинган тақрибий қиймати қўлланилади: $\pi\approx3,14$.

Айлана ёйининг узунлиги унга мос марказий бурчак катталигиги пропорционалдир (шуни тушунтиринг). Шунинг учун $1°$ ли марказий бурчакка мос келувчи айлана ёйининг узунлиги айлана узунлигининг $\frac{1}{360}$ қисмига тенг бўлади. Бинобарин, бу ёйнинг узунлиги $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$ га тенг. Демак, $\alpha°$ га тенг марказий бурчакка мос келувчи айлана ёйининг узунлиги

$$l=\pi R\frac{\alpha}{180} \qquad (3)$$

формула бўйича ҳисобланади.

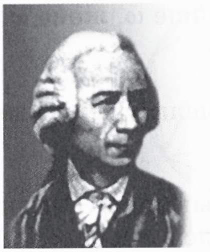
Энди марказий бурчак катталиги радиан орқали берилган ҳолни қараб чиқамиз. Катталиги 1 радианга тенг марказий бурчакка тиралган ёйнинг узунлиги айлана узунлигининг $\frac{1}{2\pi}$ қисмига тенг, яъни $\frac{2\pi R}{2\pi}=R$. У ҳолда катталиги $\alpha°$ радианга тенг марказий бурчакка мос келувчи айлана ёйининг узунлиги

$$l=R\cdot\alpha$$

формула билан ҳисобланади.


Архимед

Т Энди π сони ҳақида бироз тарихий маълумотларни келтирамиз. Умуман, π сони иррационал сон. Амалиётда унинг 0,01 гача аниқликда олинган тақрибий қиймати кўпроқ қўлланилади:



Л. Эйлер

$\pi \approx 3{,}14$. π сонини ана шундай аниқликда дастлаб улуғ юнон олими Архимед топган (эр. Ав. III аср). π сонининг тақрибий қийматини ички чизилган мунтазам кўпбурчаклар периметрларини қўллаб, $\pi \approx \dfrac{P_n}{2 \cdot R}$ формула билан аниқлаш мумкин. Ўрта Осиё астрономи Улуғбек ва шарқ математиги ал-Коший (XV аср) шу усулдан фойдаланиб ва мунтазам 800335168 бурчакни ўрганиб, π сонининг 16-хонагача аниқликдаги қийматини топган.Айлана узунлигининг диаметрга нисбатини π ҳарфи билан белгилашни дастлаб Леонард Эйлер (1707–1783) киритган. π – юнон тилидаги «айлана» сўзининг биринчи ҳарфи. Шунингдек, Эйлер олий математика усулларидан фойдаланган ҳолда π сонини 153-хонагача аниқликда топган. Ҳозирги кунда ҳисоблаш машиналари ёрдамида π сонини бир неча минглардаги хоналаргача аниқликда топиш мумкин. Аммо амалиётда бундай аниқликлардаги деярли эҳтиёж йўқ.

?

1. Эгри чизиқ узунлигининг тақрибий қийматини қандай ҳисоблаш мумкин? Эгри чизиқ узунлиги нима?
2. Айлана узунлигига таъриф беринг. Уни қандай тушунасиз?
3. Айлана узунлиги тўғрисидаги теоремани исботланг.
4. Айлана узунлиги қандай формула билан ҳисобланади?
5. Айлана ёйи узунлиги қандай формула билан ҳисобланади?
6. π сони ҳақида нима биласиз?
7. а) Айлана узунлиги ва радиуси орасидаги боғланишни қандай аташ мумкин?

   б) Айлана радиуси икки марта орттирилса, айлана узунлиги қандай ўзгаради?

   в) Айлана узунлиги l катталикка узайтирилса, айлана радиуси қандай ўзгаради?

   г) Айлана радиуси r катталикка узайтирилса, айлана узунлиги қандай ўзгаради?

ПТ Қандайдир цилиндрсимон (кўндаланг кесими доира бўлган) жисм олинг.

Уни ип билан ўраб, шу ипнинг тўла бир ўрамининг узунлигини ўлчанг.

Шу узунликдан фойдаланиб, олинган жисм кўндаланг кесимининг радиусини аниқланг.

2. Олинган жисмнинг кўндаланг кесими диаметрини ўлчанг ва (2) формуладан фойдаланиб, шу кесимни ўраб олган айлананинг узунлигини топинг.

3. 1- ва 2- топшириқлардан олинган кўндаланг кесим айланаси узунлигининг натижаларини ҳамда π ва $\dfrac{C}{2R}$ сонларни таққосланг.

МАСАЛАЛАР

590. Агар радиуси R га тенг айлана узунлиги C бўлса, қуйидаги жадвални тўлдиринг:

C			4π		27		6,25
R	2	5		$\frac{2}{7\pi}$		$\sqrt{3}$	

591. Танасининг кўндаланг кесими узунлиги: 1) 2 м; 2) 1,5 м бўлган дарахтнинг диаметрини топинг.

592. Тенг томонли учбурчакка: 1) ташқи; 2) ички чизилган айлананинг узунлигини топинг. Учбурчакнинг томони 3 см.

593. Томони 4 см бўлган квадратга: 1) ташқи; 2) ички чизилган айлананинг узунлигини топинг.

594. Соатнинг 5 см узунликдаги минут милининнинг учи: 1) 5 минутда; 2) 20 минутда; 3) 1 соатда ўтадиган ёйининг узунлиги қандай бўлади?

595. Марказий бурчакка мос равишда: 1) 30°; 2) 40°; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$ бўлган, радиуси 15 см га тенг айлана ёйининг узунлигини топинг.

596. Айлана узунлигининг: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ қисмига мос марказий бурчакни топинг.

B

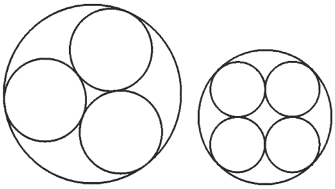
597. Арава 942 м юрганда унинг ғилдираги 300 марта айлангани маълум. Ғилдиракнинг диаметрини топинг.

598. Экваторнинг узунлиги тахминан 40 000 000 м. Ерни шарсимон деб ҳисоблаб, унинг радиусини метр ҳисобида топинг.

599. Девор соати маятнигининг тебраниш бурчаги 38°, маятник учи чизадиган ёй узунлиги 24 см бўлса, маятник узунлигини топинг.

600. Агар Ер шарининг радиуси 1 см га орттирилса,экватор қандай ўзгаради.

601. 124-расмда тасвирланган кичик айланалар радиус-



124-расм

лари r ни (улар ўзаро тенг) катта айлана R орқали ифодаланг.

602. Темир йўл бурилишининг радиуси 5 км, бурилиш ёйининг узунлиги эса 400 м. Темир йўл бошланғич йўналишидан неча градусга оғган?

603. Иккита концентрик айлана билан чегараланган фигура халқа, улар радиусларининг айирмаси эса халқанинг эни деб аталади.

1) Халқанинг энини айланалар узунликлари орқали ифодаланг.

2) Халқанинг катта ва кичик радиуслари мос равишда 26 см ва 10 см бўлса, шу халқага жойлаштириш мумкин бўлган (яъни тўла шу халқада ётувчи) энг узун кесма узунлигини топинг.

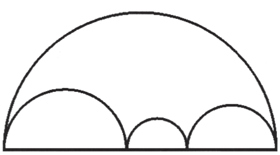
604. 1) Катети a ва унинг қаршисидаги бурчаги φ бўлган тўғри бурчакли учбурчакка; 2) гипотенузаси c бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакка; 3) диоганаллари a ва b га тенг ромбга ички чизилган айлана узунлигини топинг.

C

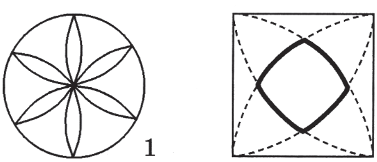
605. Соатнинг 15.00 ни кўрсатаётган минут милининг учи соат милининг учи билан устма-уст тушгунига қадар чизадиган ёйининг узунлигини қандай топиш мумкин?

606. 125-расмда кўрсатилган катта ярим айлана узунлиги билан кичик учта ярим айланалар узунликларининг йиғиндисини таққосланг.

607. 126-расмда қалинроқ чизиқ билан чизилган эгри чизиқларнинг узунлигини топинг.



125-расм



1 2

126-расм

608. A, B ва C нуқталар радиуси R га тенг айланада ётибди ва ABC ёйининг узунлиги $0{,}5\pi R$ га тенг. D нуқта айланада ётиши учун шу нуқтадан AC кесма қандай бурчак остида кўриниши керак?

609. Ер шари атрофида айлана бўйлаб учаётган Ернинг йўлдоши бир марта айланиб чиққанда 42076 км масофани учиб ўтади. Агар Ернинг радиуси 6370 км бўлса, йўлдош Ер юзидан қандай масофада учади?

610. Берилган томони бўйича мунтазам саккизбурчакни қандай ясаш мумкин?

3-§. Доира ва унинг қисмлари юзи

3.1. Доиранинг юзи

Текисликнинг айлана билан чегараланган қисми ***доира*** дейилади. Агар бу айлана маркази O нуқтада, радиуси R га тенг бўлса, доиранинг ҳар қандай нуқтасидан унинг марказигача бўлган масофа R радиусдан катта бўлмайди.

Энди доира юзини ҳисоблайдиган формулани келтириб чиқаришдан аввал унинг юзини ҳисоблаш усулига тўхталамиз. Айлана узунлигини аниқлаганимиз каби (2-§) доира юзини шу доирани чегараловчи айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчакларнинг юзлари орқали аниқлаш мумкин.

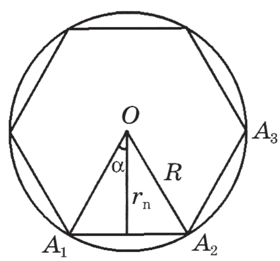
$S_3, S_4, \dots, S_n, \dots$ орқали доирани чегараловчи айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчаклар юзларининг кетма-кетлигини ва S билан шу доиранинг юзини белгилаймиз. Бу юқоридан чегараланган сонли кетма-кетлик бир текис (монотон) ўсувчи кетма-кетлик бўлишини текшириш қийин эмас. Чунки бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади доирага ташқи чизилган ихтиёрий кўпбурчакнинг (мисол учун, квадратнинг) юзидан кичик бўлади. У ҳолда монотон кетма-кетликлар ҳақидаги теоремага асосан, $S_3, S_4, \dots, S_n, \dots$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва у доиранинг юзи деб аталади:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Энди доира юзини ҳисоблайдиган формулани келтириб чиқариш мумкин.

Теорема. *Радиуси R га тенг доиранинг юзи $S=\pi R^2$ формула бўйича ҳисобланади.*

Исботи. Фараз қилайлик, $A_1A_2 \dots A_n$ мунтазам кўпбурчак радиуси R га тенг доирани чегараловчи айланага ички чизилган бўлсин (127-расм). Агар шу кўпбурчакнинг ҳар бир учини айлана маркази билан туташтирсак, кўпбурчак ўзаро тенг ёнли n учбурчакларга бўли-



127-расм

нади. Учбурчакларнинг O учидан туташтирилган баландликларни (***апофема*** деб аталади) r_n орқали белгилаймиз. Бунда OA_1A_2 учбурчакнинг юзи $S_\Delta=\frac{1}{2}r_n\cdot A_1A_2$ формула бўйича ҳисоблангани учун n бурчакнинг юзи

$$S_n=\frac{1}{2}r_n\cdot A_1A_2\cdot n$$

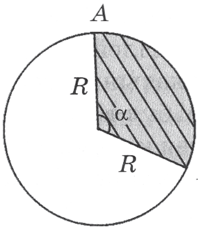
формула бўйича ҳисобланади. n бурчакнинг P_n периметри $A_1A_2\cdot n$ га тенг бўлгани учун $S_n=\frac{1}{2}r_n\cdot P_n$ формулани ҳосил қиламиз. Бунда $P_n=R\cdot\cos\alpha=R\cdot\cos\frac{180^\circ}{n}$ ва $n\to\infty$ бўлганда $r_n\to R$ га, $P_n\to C=2\pi R$ га интилади. Бинобарин,

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot R\cdot 2\pi R=\pi R^2$$

Теорема исботланди.

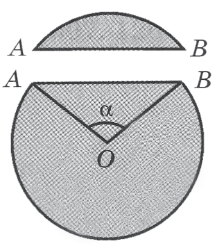
3.2. Сектор ва сегмент юзи

Доиравий сектор *деб доиранинг мос марказий бурчаги ичидаги қисмига айтилади* (128-расм).



128-расм

1° ли марказий бурчакка мос сектор юзи доира юзининг $\frac{1}{360}$ қисмига тенг: $\frac{2\pi R^2}{360}$. Бунда марказий бурчаги α бўлган сектор юзи $S_{сек}=\frac{\pi R^2\cdot\alpha}{360}$ формула бўйича ҳисобланади. Агар α радиан ҳисобида берилса, у ҳолда мос сектор юзи $S_{сек}=\frac{\alpha}{2}\cdot R^2$ формула бўйича ҳисобланишини кўрсатиш қийин эмас.



129-расм

Ҳар қандай ватар доирани икки қисмга ажратади. Шу қисмларнинг ҳар бири ***доиравий сегмент*** дейилади. 129-расмда кўрсатилганидек, α бурчак катталигига боғлиқ ҳолда сегмент юзи мос сектор юзидан AOB учбурчак юзини айириш ($\alpha<180^\circ$) ёки қўшиш ($\alpha>180^\circ$) орқали аниқланади.

$$S_{сег}=S_{сек}\pm S_\Delta.$$

Бунда $S_\Delta\cdot=S_{AOB}$, $\alpha<180^\circ$ бўлганда бу формулани «$-$» ишора билан, $\alpha>180^\circ$ бўлганда эса «$+$» ишора билан олиш керак.

T Қадимги Юнонистонда π сони аниқлангунча кадар аксарият математик олимлар циркуль ва чизғичдан фойдаланиб юзи берилган доира юзига тенг бўлган квадратни ясашга ҳаракат қилганлар. Бу масала доиранинг квадратураси деб аталади. Фақат XIX асрнинг охиридагина бу масаланинг ечими мавжуд эмаслиги исботлади.

?
1. Доира нима?
2. Доиранинг юзи қандай аниқланади?
3. Мунтазам кўпбурчак юзининг формуласини ёзинг.
4. Доиранинг юзининг формуласини ёзинг.
5. Доиравий сектор юзи қандай аниқланади?
6. Сегмент юзи қандай аниқлади?

ПТ Туби доира шаклида бўлган идиш олиб, шу доиранинг юзини топинг.

МАСАЛАЛАР

А

611. Радиуси R га тенг айлана билан чегараланган доира юзи S ни ифодаловчи формула ёрдамида қуйидаги жадвални тўлдиринг:

R			$\frac{3}{\sqrt{\pi}}$	2	5		
S	4π	25π				9	11

612. Агар доиранинг радиуси: 1) 2 марта камайтирилса; 2) 3 марта орттирилса, унинг юзи қандай ўзгаради?

613. Томони a га тенг бўлган: 1) учбурчакка; 2) квадратга; 3) олтибурчакка ташқи ва ички чизилган доираларнинг юзларини топинг.

614. Агар икки доиранинг юзи 2:3 нисбатда бўлса, уларнинг диаметрлари нисбати қандай бўлади?

615. Марказий бурчаги 45° га тенг бўлган секторнинг юзи 1 м^2. Шу секторга мос доиранинг радиусини топинг.

616. Марказий бурчаги: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 180°; 6) 300° бўлган секторнинг юзи доира юзининг қандай қисмини ташкил этади?

В

617. 613-масаладаги фигураларга ички ва ташқи чизилган айланалар билан чегараланган халқанинг юзини ҳисобланг.

618. Радиуси R га тенг айлана марказидан h масофада ўтказилган ватар доирани икки қисмга ажратади. Шу қисмлар юзини топинг (бу қисмлар сегментлар деб аталади) ($h<R$).

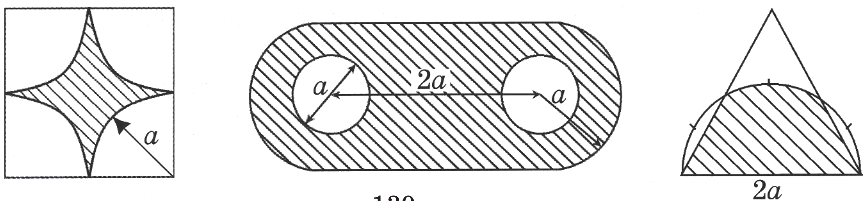
619. 618-масалани ватар α градусли марказий бурчакка мос келган ва айлана радиуси R га тенг бўлган ҳоллар учун ечинг.

620. Доира томонлари 16 см ва 12 см бўлган тўғри тўртбурчакка ички чизилган. Доиранинг юзини топинг.

621. Газ қувурининг ички диаметри 1376 мм, ташқи диаметри эса 1420 мм. Қувурнинг кўндаланг кесим юзини топинг. Олис масофаларга газ ташиш учун катта диаметрли қувурлардан фойдаланишнинг қандай афзалликлари бор?

C

622. 130-расмда тасвирланган фигураларнинг юзларини аниқланг.



130-расм

623. 60° ли сектор юзининг унга ички чизилган доира юзига нисбатини аниқланг.

624. Томони a га тенг бўлган мунтазам n бурчакка ички ва ташқи айланалар чизилган. Шу айланалар билан чегараланган халқанинг юзи n га боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

625. Икки концентрик айлана ва доира шундай берилганки, диаметри бўлувчи катта айлана ватари кичик айланага уринади. Шу доиранинг юзи берилган концентрик айланалар билан чегараланган халқанинг юзига тенг бўлишини исботланг.

626. Берилган айланага ташқи мунтазам: 1) учбурчак; 2) тўртбурчак; 3) олтибурчак; 4) саккизбурчак чизинг.

627. Бассейнга радиуслари R ва r бўлган иккита қувурда сув қуйилади. Бу қувурлар сув ўтказиш унумдорлиги уларга тенг бўлган битта қувур билан алмаштирилди. Янги қувурнинг диаметри қандай?

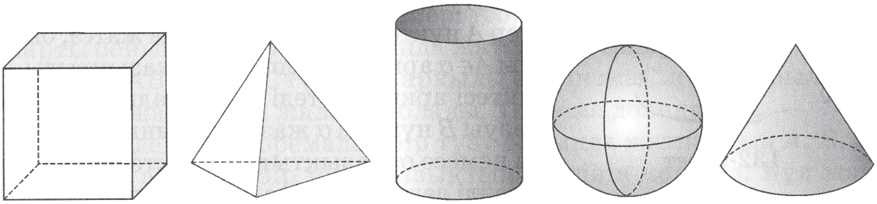
628. Икки доиранинг умумий ватарлари мос равишда 60° ва 120° ли ёйларга тиралган. Шу доиралар юзлари нисбатини топинг.

V боб. СТЕРЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Стереометрия аксиомалари

1.1. Кириш

Биз шу кунга қадар битта текисликда жойлашаган фигураларнинг хоссаларини ўргандик. Маълумки, геометриянинг бу соҳаси ***планиметрия*** деб аталади. Кундалик ҳаётда, амалиётда учрайдиган фигуралар (жисмлар) нинг ҳамма нуқталари ҳар доим битта текисликда жойлашавермайди. Масалан, 131-расмда тасвирланган куб, пирамида, цилиндр, шар, конус ва бошқа жисмларнинг барча нуқталари битта текисликда ётмайди.



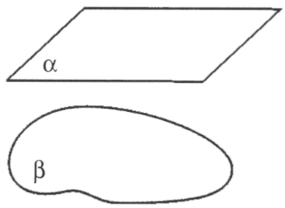
131-расм

Бу фигуралар – фазовий жисмлар. Фазовий жисмларни ўрганиш инсониятнинг кундалик ҳаётида муҳим ўрин эгаллайди. Чунончи, қурувчилар, меъморлар, конструкторлар, токарлар ва бошқа касб эгалари бундай жисмларни кундалик иш-тажрибаларида кўп татбиқ этиб, уларнинг хоссаларидан кенг фойдалана олишади. Фазовий жисмларнинг хоссаларини билмасдан уй қуриш, машина ясаш, самолёт ва космик кемаларни тўғри учириш ва қўндириш, моддаларнинг тузилишини текшириш мумкин эмас. Шунингдек, бу маълумотлар олий техник ўқув юртларида ўрганиладиган чизмачилик ва чизма геометрия фанларининг асосини ташкил этади.

Фазодаги жисмлар ўрганиладиган геометрия бўлими ***стереометрия*** деб аталади. «Стереометрия» грекча «стерео» – фазо ва «метрео» – ўлчаш сўзларидан келиб чиққан. Стереометрияда шу кунга қадар планиметрия курсида ўқиб ўрганилган ҳамма аксиомалар, теоремалар ва қонуниятлар ўринлидир. Шу боис планиметрия курсини яхши ўзлаштирган ўқувчига ўқиш борасида стереометрия курси деярли қийинчилик туғдирмайди.

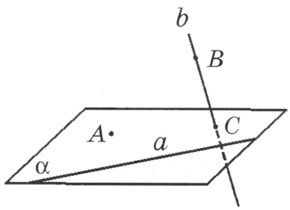
1.1. Стереометрия аксиомалари

Планиметрия курси каби стереометрия ҳам аксиомалар системаси ёрдамида тузилади. Ҳар бир математик аксиомалар системасида аниқланмайдиган асосий тушунчалар тизими бўлиши зарур. Масалан, планиметрия курсида бундай тушунчалар сифатида нуқта билан тўғри чизиқ қаралади. Энди стереометриядаги асосий тушунчалар сифатида нуқта билан тўғри чизиқ қаторига текислик қўшилади. Шундай қилиб, стереометрия аксиомалар системасида таърифсиз қабул қилинадиган асосий тушунчалар – нуқта, тўғри чизиқ ва текислик. Нуқталар аввалгидек лотин ҳарфлари билан тўғри чизиқлар эса шу алфавитнинг кичик ҳарфлари ёки унда ётувчи жуфт нуқта орқали белгиланади. A, B, C, ... нуқталар, a, b, c, ... ёки AB, CD, AC, ... тўғри чизиқлар. Текисликлар эса α, β, γ, ... грек ҳарфлари билан белгиланади.



132-расм

Текисликлар чизмада параллелограмм ёки унинг чекланган қисми кўринишида тасвирланади (132-расм). Агар A нуқта α текисликда ётса, уни $A \in \alpha$ билан белгиланади ва α текислик A нуқта орқали ўтади деб аталади. $B \notin \alpha$ ёзув эса B нуқта α текисликда ётмайди ёки α текислик B нуқта орқали ўтмайди деганини билдиради (133-расм).



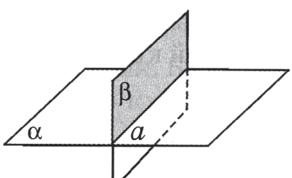
133-расм

Агар a тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси α текисликда ётса, a тўғри чизиқ α текисликда ётади ёки α текислик a тўғри чизиқ орқали ўтади деб айтилади ва бундай ёзилади: $a \subset \alpha$. Масалан, 133-расмда a тўғри чизиқ α текисликда ётади, b тўғри чизиқнинг α текислик билан ягона умумий нуқтаси мавжуд. Бунда α текислик b тўғри чизиқ билан C нуқтада кесишади дейилади ва қуйидаги кўринишда ёзилади: $b \cap \alpha = C$.

Агар α ва β текисликларнинг иккаласи ҳам a тўғри чизиқни ўз ичига олса, у ҳолда α ва β текисликлар a тўғри чизиқ бўйича (ёки a тўғри чизиқ орқали) кесишади дейилади ва $\alpha \cap \beta = a$ кўринишида ёзилади (134-расм).

Стереометрия аксиомалари системаси планиметрия аксиомалари билан (7-8-синф геометриясига қаранг) бирга қуйидаги уч аксиомадан ташкил топган:

CI. *Текислик қандай бўлмасин, шу текисликка тегишли ва тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.*



134-расм

CII. *Агар иккита турли текислик умумий нуқтага эга бўлса, бу икки текислик шу умумий нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича кесишади.*

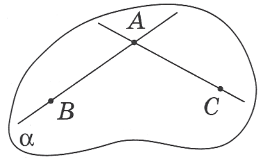
CIII. *Агар иккита турли тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлса,бу икки тўғри чизиқ орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

1.3. Аксиомаларнинг баъзи содда натижалари

Энди $CI, CII, CIII$ аксиомалардан келиб чиқадиган баъзи натижаларга тўхталамиз.

1-теорема. *Битта тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан битта ва фақат битта текислик ўтади.*

Исботи. Бир тўғри чизиқда ётмаган A, B, C нуқталар берилган (135-расм). Планиметриянинг I аксиомасига кўра (7-синф, I боб, 1-§) ҳар қандай икки нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказиш мумкин, бинобарин, AB ва AC тўғри чизиқларни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар устма-уст тушмайди, негаки A, B, C нуқталар теорема шартига кўра тўғри чизиқда ётмайди. У ҳолда $CIII$ аксиомага мувофиқ AB ва AC тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текислик мавжуд ва бу текислик ягонадир. Теорема исботланди.

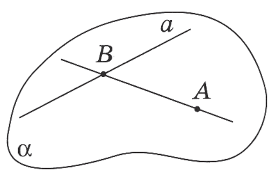


135-расм

Исботланган теоремадан кўриниб турибдики, бир тўғри чизиқда ётмаган A, B, C нуқталардан фақат битта текислик ўтар экан. Бундай текислик баъзан ABC орқали ҳам белгиланади.

2-теорема. *Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтади.*

Исботи. a тўғри чизиқ билан A ($A \notin \alpha$) нуқта берилган бўлсин (136-расм). Аввалги теорема исботида айтилган I аксиома бўйича a тўғри чизиқда ётувчи B нуқтани олиб, AB тўғри чизиқни ўтказамиз. Бунда a ва AB – умумий A нуқтага эга бўлган ҳар хил тўғри чизиқлар. Шунинг учун 1-теоремага асосан, бу икки тўғри чизиқ орқали, яъни a тўғри чизиқ ва A нуқта орқали ягона текислик ўтади. Теорема исботланди.

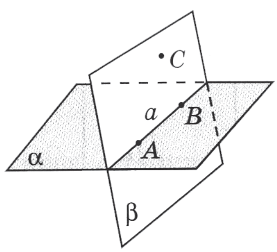


136-расм

3-теорема. *Агар тўғри чизиқнинг иккита нуқтаси берилган текисликка тегишли бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг ўзи ҳам шу текисликка тегишли бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, a тўғри чизиқда ётувчи A ва B нуқталар α текисликка ҳам тегишли бўлсин (137-расм). У ҳолда $a \subset \alpha$ бажарилишини кўрсатиш керак.

Текисликда ётмайдиган C нуқтани олайлик (бундай нуқта мавжуд, CI аксиома). 1-теоремага асосан, A, B, C нуқталар орқали β текисликни



137-расм

ўтказамиз. α ва β текисликлар A ва B нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўйича кесишади (CI аксиома). Шунинг учун AB, яъни a тўғри чизиқ β текисликда ётади. Теорема исботланди.

Шундай қилиб, аксиомалар ва исботланган теоремалар асосида бундай хулоса чиқариш мумкин. Текисликни: 1) кесишувчи иккита тўғри чизиқ; 2) бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқта; 3) тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган нуқта орқали аниқлаш мумкин.

?

1. Фазовий жисмлар деганда нимани тушунасиз?
2. Стереометрия курсида қандай фигураларнинг хоссалари ўрганилади?
3. Стереометрия курсида қандай тушунчалар асосий тушунчалар бўлиб ҳисобланади?
4. Нуқта, тўғри чизиқ ва текислик қандай белгиланади? Улар орасидаги муносабатлар қандай ифодаланади?
5. Икки тўғри чизиқ (икки текислик) бир нуқтада (тўғри чизиқ бўйлаб) кесишса, улар қандай ёзилади?
6. Стереометриянинг аксиомаларини айтиб, уларнинг маъносини чизмада кўрсатинг.
7. 1-, 2-, 3-теоремаларни айтиб, уларни исботланг.

ПТ

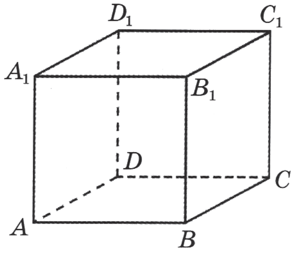
Қаттиқ қоғоздан ўзаро кесишувчи текисликлар ясанг: 1) кесишиш нуқтасини; 2) иккита текисликка умумий нуқтани; 3) текисликнинг бирига тегишли, иккинчисига эса тегишли бўлмаган нуқтани кўрсатинг.

МАСАЛАЛАР

А

629. Бир тўғри чизиқда ётувчи: 1) уч нуқта; 2) тўртта нуқта орқали текислик ўтказиш мумкинми? Бу текислик ягонами?

630. A нуқта – α ва β текисликларнинг умумий нуқтаси. Бу текисликларнинг бошқа умумий нуқтаси борми? Бор бўлса, улар қандай жойлашади?



138-расм

631. 138-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб тасвирланган. A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталарнинг қайсилари AA_1C_1C текисликда ётади ва қайсилари ётмайди?

632. Аввалги масала шарти бўйича AA_1C_1C текислик билан: 1) $ABCD$; 2) $A_1B_1C_1D_1$; 3) AA_1D_1D; 4) BB_1C_1C текисликларнинг кесишувчи тўғри чизиқларини айтинг.

633. Бир тайёрагоҳдан соат 12 да турли йўналишда 10 минутли интервал билан учта самолёт учди. Қандай вақтда учала самолёт бир текисликда жойлашади?

634. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган A, B, C нуқталар ва α текислик берилган. Агар $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ бўлса, ABC ва α текисликлар устма-уст тушишини исботланг.

B

635. Бир нуқтадан ўтувчи учта тўғри чизиқнинг битта текисликда ётиши шартми?

636. Жуфт-жуфти билан кесишадиган ва учаласи ҳам бир нуқта орқали ўтмайдиган учта тўғри чизиқ битта текисликда ётишини исботланг.

637. Нуқта билан кесишувчи икки тўғри чизиқнинг бири орқали фазода нечта текислик ўтказиш мумкин? Барча мумкин бўлган ҳолларни қараб чиқинг.

638. A ва B нуқталар α текисликда ётади. AB кесма ҳам шу текисликда ётишини исботланг.

639. A, B нуқталар ҳамда α текислик берилган. Бунда $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. 1) AB кесманинг ўртаси; 2) AB кесма; 3) AB тўғри чизиқ α текисликда ётадими? Жавобингизни асосланг.

640. A, B, C ва D нуқталар бир текисликда ётмайди. Уларнинг ихтиёрий учтаси бир тўғри чизиқда ётмаслигини исботланг.

641. Турли α, β, γ текисликлар билан A, B, C нуқталар берилган. Агар $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in \beta$, $A \in \gamma$, $B \in \gamma$, $C \in \gamma$ бўлса, шу текисликлар билан нуқталарни чизмада ясаб кўрсатинг.

C

642. Фазода ихтиёрий нуқта орқали текислик ўтказиш мумкин эканини кўрсатинг.

643. Ихтиёрий икки нуқта орқали битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

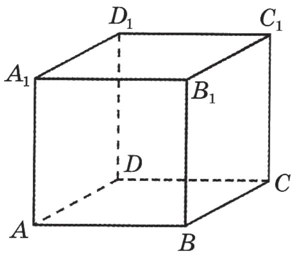
644. A нуқта билан шу нуқтадан ўтмайдиган a тўғри чизиқ берилган. A нуқта орқали ўтиб, a тўғри чизиқни кесиб ўтувчи тўғри чизиқларнинг ҳаммаси бир текисликда ётишини исботланг.

645. Агар $a \cap b = A$, $b \cap c = B$ бўлса, a ва c тўғри чизиқларнинг кесишиши шартми?

646. a ва b тўғри чизиқлар умумий нуқтага эга эмас. Бу тўғри чизиқлар бир текисликда ётиши зарурми?

2-§. Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллеллиги

2.1. Тўғри чизиқларнинг параллеллиги



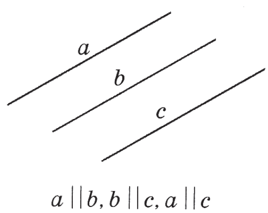
138-расм

Бир текисликда ётувчи ва кесишмайдиган тўғри чизиқлар ***параллел тўғри чизиқлар*** дейилади. Кесишмайдиган ва бир текисликда ётмайдиган тўғри чизиқлар ***айқаш тўғри чизиқлар*** дейилади. Масалан, 139-расмда тасвирланган кубнинг AB ва A_1B_1 кесмалари (қирралари) орқали ўтувчи тўғри чизиқлар ўзаро параллел, AB ва A_1C тўғри чизиқлар эса айқаш тўғри чизиқлардир.

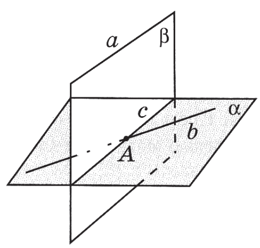
Биз бунда ва бундан буён учрайдиган теоремалар ва хоссаларни исботсиз келтирамиз. Уларни иқтидорли ўқувчилар мустақил исботлашлари мумкин. Бу маълумотлар асосан стереометриянинг содда масалаларини ечиш учун керак.

1-теорема. *Тўғри чизиқда ётмайдиган нуқтадан шу тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.*

2-теорема. *Учинчи тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади* (140-расм).



140-расм



141-расм

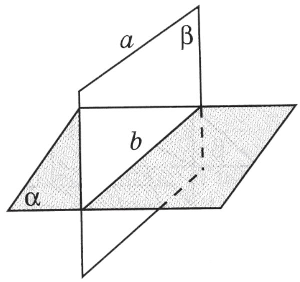
Хуллас, фазода икки тўғри чизиқ уч хил вазиятда жойлашиши мумкин (141-расм):

1. Кесишади ($b \cap c = A$);
2. Параллел бўлади ($a \parallel c$);
3. Тўғри чизиқлар айқаш жойлашади (a ва b айқаш тўғри чизиқлар).

2.2. Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллиги

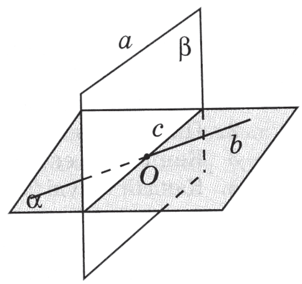
Фазодаги кесишмайдиган тўғри чизиқ билан текислик ўзаро ***параллел*** дейилади. Агар a тўғри чизиқ α текисликка параллел бўлса, у бундай ёзилади: $a \| \alpha$.

3-теорема. *Агар берилган текисликда ётмайган тўғри чизиқ шу текисликдаги бирор тўғри чизиққа параллел бўлса, бу тўғри чизиқ берилган текисликнинг ўзига ҳам параллел бўлади* (142-расм).



142-расм

4-теорема. *Айқаш тўғри чизиқларнинг бири орқали иккинчисига параллел фақат битта текислик ўтади* (143-расм).



143-расм

Шундай қилиб, фазода тўғри чизиқ билан текислик икки хил вазиятда жойлашади:

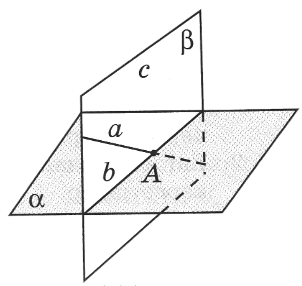
1) Тўғри чизиқ текисликни кесиб ўтади ($a \cap \alpha = A$, 144-расм);

2) Тўғри чизиқ текисликка параллел бўлади ($a \parallel \alpha$, 142-расм).

2.3. Текисликларнинг параллеллиги

Фазодаги кесишмайдиган текисликлар ***параллел текисликлар*** дейилади: $\alpha \parallel \beta$ (145-расм).

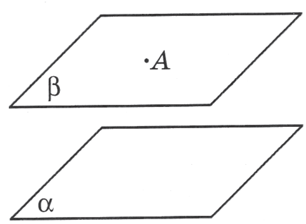
5-теорема. *Икки параллел текислик учинчи текисликни кесиб ўтганда уларнинг кесишувчи тўғри чизиқлари параллел бўлади* (146-расм, $\alpha \parallel \beta$, $a = \alpha \cap \gamma$, $b = \beta \cap \gamma \Rightarrow a \parallel b$).



144-расм

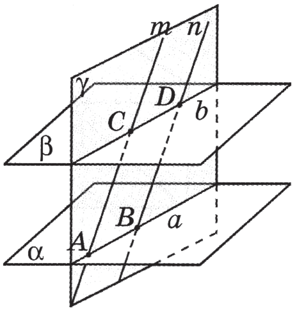
6-теорема. *Текисликда ётмайдиган нуқта орқали шу текисликка параллел битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин* (145-расм).

7-теорема. *Агар бир текисликнинг ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиғи иккинчи текисликдаги икки тўғри чизиққа мос ҳолда параллел бўлса, у ҳолда бу текисликлар ўзаро параллел бўлади:* (*147-расм*, $a \cap b = O$, $a' \cap b' = O'$, $a \parallel a'$, $b \parallel b' \Rightarrow \alpha \parallel \beta$).

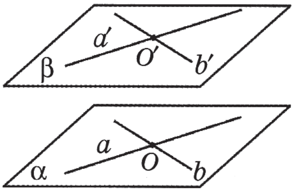


145-расм

8-теорема. *Иккита параллел текислик орасига жойлашагн параллел тўғри чизиқларнинг кесмалари ўзаро тенг*: (146-расм, $\alpha \parallel \beta$, $m \parallel n \Rightarrow AC = BD$).



146-расм



147-расм

?

1. Фазода қандай тўғри чизиқлар параллел дейилади? Кесишмайдиган тўғри чизиқлар ҳар доим ҳам параллел бўлаверадими? Қандай тўғри чизиқлар айқаш деб аталади?
2. Параллел тўғри чизиқларнинг қандай хоссаларини биласиз?
3. Фазода икки тўғри чизиқ қандай жойлашиши мумкин?
4. Қандай тўғри чизиқ берилган текисликка параллел дейилади? Уларнинг қандай хоссаларини биласиз?
5. Қандай текисликлар параллел текисликлар дейилади? Уларнинг қандай хоссаларини биласиз?
6. Фазода: 1) тўғри чизиқ билан текислик; 2) икки текислик ўзаро қандай жойлашиши мумкин?

ПТ

1. Синф хонасининг деворларини, полини ва шифтини текислик моделлари сифатида қабул қилиб: 1) параллел тўғри чизиқларни; 2) кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтини; 3) параллел текисликларни; 4) кесишувчи текисликларни ва уларнинг кесишиш тўғри чизиқларни айтинг.
2. Иккита қаламдан фойдаланиб, айқаш тўғри чизиқлар моделини ясаб кўрсатинг.
3. Иккита китобдан фойдаланиб, параллел текисликлар моделини ясанг

МАСАЛАЛАР

А

647. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган. 1) AA_1 ва BB_1, AD ва B_1C_1 тўғри чизиқлар жуфти кесишадими? Улар қандай жойлашган? 2) AC_1 ва CB_1 тўғри чизиқлар параллел бўладими? Жавобингизни асосланг.

648. Агар a тўғри чизиқ α текисликни кесиб ўтса, у ҳолда α текисликка параллел ҳамда a тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик ўтказиш мумкинми? Нима учун?

649. A, B, C ва D нуқталар бир текисликда ётмайди. AB,

AC, AD, BD, BC,CD тўғри чизиқлар орасида айқаш тўғри чизиқлар жуфти нечта?

650. Агар AB ва CD тўғри чизиқлар айқаш тўғри чизиқлар бўлса, AD ва BC тўғри чизиқлар параллел бўлиши мумкинми? Нима учун?

651. α текислик OP ваOQ кесмаларнинг мос A ва B ўрта нуқталари орқали ўтади. Агар PQ=8 см бўлса, AB ни топинг.

652. C нуқта – AB кесманинг ўртаси. Шу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқлар α текисликни мос равишда A_1, B_1 ва C_1 нуқталарда кесиб ўтади. Агар: 1) AA_1=3 см, BB_1=5 см; 2) AA_1=2,3 м, BB_1=3,7 м; 3) $AA_1=a$, BB_1=b бўлса, CC_1 ни топинг.

653. Агар: 1) $a \| \alpha$, $b \| \alpha$ бўлса, $a \| b$ бўлиши шартми? 2) $a \| b$, $b \| \alpha$ *бўлса, a* тўғри чизиқ билан α текислик ўзаро қандай жойлашиши мумкин? 3) $a \| \alpha$, $a \| \beta$ бўлса, α ва β текисликлар кесишиши мумкинми? Бу ерда a ва b – тўғри чизиқлар, α ва β – текисликлар.

654. Агар α текисликда ётувчи икки тўғри чизиқ β текислигига параллел бўлса, α ва β текисликлар ўзаро параллел бўлиши зарурми? Нима учун?

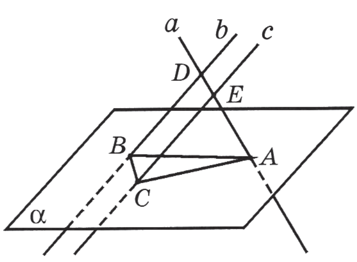
655. Параллел текисликлар AOB бурчакнинг AO томонини C ва C_1 нуқталарда, BO томонини эса мос равишда D ва D_1 нуқталарда кесиб ўтади. Бунда OC=6 см, OC_1 =10 см. Агар: 1) CD_1 =15 см бўлса, CD ни; 2) OD =9 см бўлса, OD_1 ни топинг.

656. $ABCD$ квадрат билан O нуқта битта текисликда ётмайди. Агар A_1, B_1, C_1 ва D_1 мос равишда OA, OB, OC, OD кесмаларнинг ўрталари бўлса, $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакнинг периметрини топинг. Бунда AB=10 см.

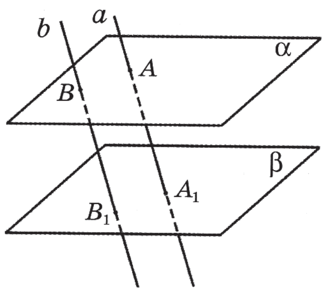
B

657. Фазода A, B, C ва D нуқталар берилган. Агар $AB \| CD$ бўлса, AD ва BC тўғри чизиқлар қандай жойлашади? Улар айқаш бўлиши мумкинми?

658. 148-расмда a, b ва c тўғри чизиқлар α текисликни мос A, B ва C нуқталарда кесиб ўтади. Агар $D=a\cap b$, $E=a\cap c$ *бўлса,* $b \| c$ бўладими? Нима учун?



148-расм



149-расм

659. 149-расмда тасвирланган α ва β текисликлар ўзаро параллел. *a* ва *b* тўғри чизиқлар бу текисликларни мос равишда A, A_1 ва B, B_1 нуқталарда кесиб ўтади. Агар $AA_1 > BB_1$ бўлса, *a* ва *b* тўғри чизиқлар параллел бўлиши мумкинми? Нима учун?

660. $ABCD$ ва $ABPQ$ параллелограммлар турли текисликларда ётибди. $CDQP$ тўртбурчак параллелограмм бўлишини исботланг.

661. A, B, C ва D нуқталар берилган ва $AB \parallel CD$. B ва C нуқталар орқали ўтувчи α текислик AD кесмани E нуқтада кесиб ўтади. AB=8 см, CD =6 см, DE =3 см ва BE =6 см бўлса, BC ва AD ни топинг.

662. Агар текислик трапецияни ўрта чизиғи бўйича кесиб ўтса, трапециянинг асослари шу текисликка параллел бўлишини исботланг.

663. $ABCD$ параллелограммнинг AD томони орқали α текислик ўтказилган. Агар $C \notin \alpha$ бўлса, $BC \parallel \alpha$ бўлишини исботланг.

664. ABC учбурчакнинг BC томонига параллел текислик унинг AB томонини P нуқтада, AC томонини эса Q нуқтада кесиб ўтади. Агар AB = 16 см, BC = 10 см бўлса, у ҳолда: 1) $AP:PB=3:2$ бўлганда PQ ни топинг; 2) $PQ:BC=1:4$ бўлганда AP ни топинг.

665. α ва β текисликлар *b* тўғри чизиқ бўйича кесишади. β текислик α текисликда ётувчи *a* тўғри чизиққа параллел. $a \parallel b$ эканини кўрсатинг.

666. A, B, C ва D нуқталар бир текисликда ётмайди. AD, AC, BC кесмаларнинг ўрталари орқали ўтувчи текислик BD кесманинг ҳам ўртасидан ўтишини кўрсатинг.

667. Агар текислик параллел икки тўғри чизиқнинг бири билан кесишса, бу текислик иккинчи тўғри чизиқ билан ҳам кесишишини исботланг.

668. Агар тўғри чизиқ параллел икки текисликдан бирини кесиб ўтса, бу тўғри чизиқ иккинчи текисликни ҳам кесиб ўтишини кўрсатинг.

669. Агар $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$ бўлса, $\alpha \parallel \gamma$ эканини кўрсатинг. Бу ерда α, β, γ – текисликлар.

670. AA_1, BB_1, CC_1 кесмаларнинг ўрталари умумий. ABC ва $A_1B_1C_1$ текисликлар параллел эканини исботланг.

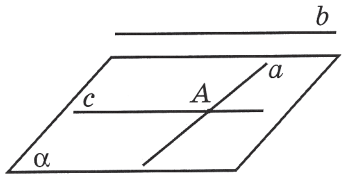
C

671. 1-8- теоремаларни исботланг.

Намуна.

4-теорема. *Айқаш тўғри чизиқларнинг бири орқали иккинчисига параллел фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

Исботи. Фараз қилайлик, a ва b тўғри чизиқлар айқаш тўғри чизиқлар бўлсин. $a\subset\alpha$, $\alpha\|b$ шартларни қаноатлантирувчи ягона α текислик мавжуд эканини исботлаш керак (150-расм). $A\in\alpha$ нуқтани оламиз ва шу нуқта орқали b тўғри чизиққа параллел c тўғри чизиқни ўтказамиз. Бундай тўғри чизиқ фақат битта. *CIII* аксиомага асосан кесишувчи a ва c тўғри чизиқлар орқали ягона α текисликни ўтказиш мумкин. Бундан $b\|c$, $c\subset\alpha$ бўлгани учун, $b\|a$ бўлади. Теорема исботланди.



150-расм

672. Ҳар бири a ва b айқаш тўғри чизиқларнинг бири орқали ўтувчи ва ўзаро параллел бўлган фақат битта α ва β текисликлар жуфти мавжуд эканини исботланг.

673. ABC ва BCD учбурчаклар турли текисликларда ётади. P, Q, R ва T нуқталар мос AB, AC, CD ва BD кесмаларнинг ўрталари. $PQRT$ тўртбурчак параллелограмм эканини исботланг.

674. Агар O нуқтадан ўтувчи a, b, c ва d тўғри чизиқлар α текисликни параллелограмм учларида кесиб ўтса, бу тўғри чизиқлар α текисликка параллел ихтиёрий текисликни параллелограмм учларида кесиб ўтишини исботланг.

675. A, B, C ва D нуқталар бир текисликда ётмайди. D нуқта орқали ўтувчи ва AB кесмага параллел текислик BC кесмани K нуқтада $BK:KC=2:3$ нисбатда бўлади. Шу текисликнинг AC кесма билан кесишиш нуқтасини топинг.

676. Аввалги масала шартида $AB=AC=BC=AD=BD=CD=9$ см. BD ва CD кесмаларга параллел текислик AD ни E нуқтада кесиб ўтади. Бу текисликнинг AB ва AC кесмалар билан кесишувчи мос F ва K нуқталарини қандай топиш мумкин? Агар $AE:ED=1:2$ бўлса, EFK учбурчакнинг периметрини топинг.

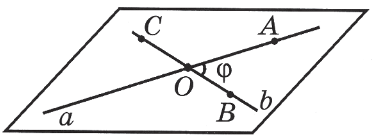
677. a тўғри чизиқ ўзаро параллел α, β ва γ текисликларни мос A, B, C нуқталарда кесиб ўтади. $AB{:}BC$ нисбат a тўғри чизиқнинг танлаб олинишига боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

678. Агар текислик иккита параллел текисликлардан бирини кесиб ўтса, у иккинчи текисликни ҳам кесиб ўтишини кўрсатинг.

3-§. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг перпендикулярлиги

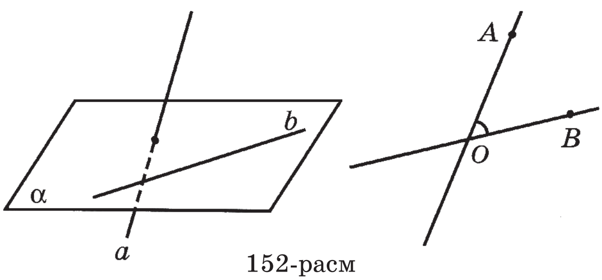
3.1. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги

Маълумки, бир текисликда жойлашган кесишувчи a ва b тўғри чизиқлар вертикал бурчакларнинг иккита жуфтини ҳосил қилади. Шу бурчаклардан ўтмас бўлмагани a ва b тўғри чизиқлар ***орасидаги бурчак*** дейилади. 151-расмда $\varphi=\angle AOB<\angle AOC$, у ҳолда таъриф бўйича $\angle(a,b) = \varphi$. Шундай қилиб, икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак ҳар доим $0°<\varphi\leqslant 90°$ тенгсизликни қаноатлантиради.



151-расм

Энди айқаш a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқлаймиз. Бунинг учун фазода ихтиёрий O нуқтани олиб, берилган тўғри чизиқларга параллел OA ва OB тўғри чизиқларни ўтказамиз. Агар AOB ўтмас бўлмаган бурчак бўлса, a ва b айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак сифатида AOB бурчак катталигини оламиз. 152-расмда a ва b тўғри чизиқлар айқаш ва $a \| OA$, $b \| OB$, $\angle AOB<90°$, у ҳолда таърифга кўра $\angle(a,b) = \angle AOB$.

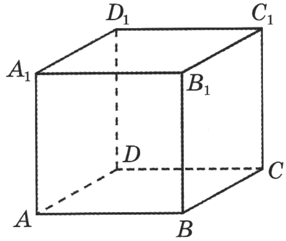


152-расм

Шундай қилиб, *айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб берилган айқаш тўғри чизиқларга параллел тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади.*

Агар a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак 90^0 га тенг бўлса, бу тўғри чизиқлар ***перпендикуляр тўғри чизиқлар*** дейилади. Агар a ва b тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, уни $a\perp b$ орқали белгиланади.

Юқорида айтилгандек, перпендикуляр тўғри чизиқлар кесишиши ҳам, кесишмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD, BC, A_1D_1, B_1C_1, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 кесмаларнинг ҳар бири AB кесмага перпендикулярдир (153-расм).



153-расм

Бунда перпендикуляр тўғри чизиқларда ётувчи кесмалар (нурлар) ўзаро перпендикуляр дейилади.

1-теорема. *Параллел тўғри чизиқларнинг бирига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ иккинчисига ҳам перпендикуляр бўлади.*

3.2. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлиги

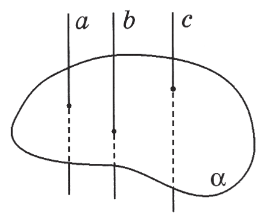
Агар a тўғри чизиқ α текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда a тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр дейилади. У қуйидагича белгиланади: $a\perp\alpha$. Текисликка перпендикуляр кесма билан нур ҳам шундай аниқланади. Бинобарин, агар кесма (нур) текисликка перпендикуляр тўғри чизиқда ётса, кесма (нур) шу текисликка ***перпендикуляр*** дейилади.

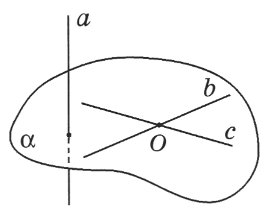
2-теорема. *Битта текисликка перпендикуляр тўғри чизиқлар ўзаро параллелдир:* (154-расм, $a\perp\alpha, b\perp\alpha, c\perp\alpha \Rightarrow a\|b\|c$).

3-теорема. *Агар тўғри чизиқ текисликдаги кесишувчи иккита тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқ шу текисликка перпендикуляр бўлади* (155-расм, $a\perp b, a\perp c, b\subset\alpha, c\subset\alpha\Rightarrow a\perp\alpha$).

3-теорема тўғри чизиқ билан текисликнинг ***перпендикулярлик аломати*** *деб ҳам аталади.*

4-теорема. *Фазонинг ихтиёрий нуқтасидан берилган текисликка битта ва фақат битта перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

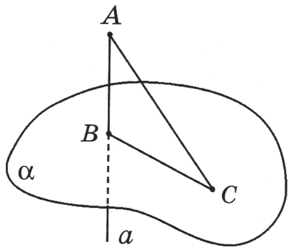




154-расм

3.3. Уч перпендикуляр ҳақида теорема

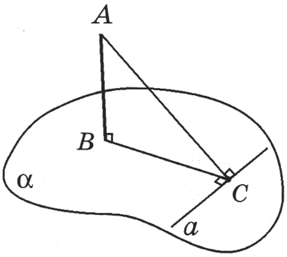
A нуқта билан шу нуқта орқали ўтмайдиган α текислик берилган бўлсин. *A* нуқтадан α текисликка перпендикуляр бўлган *a* тўғри чизиқни ўтказамиз. $a\cap\alpha=B$ бўлсин. *AB* кесма α текисликка туширилган ***перпендикуляр*** дейилади (156-расм). Бунда *B* нуқта *AB* перпендикулярнинг α текисликдаги ***асоси*** дейилади.



156-расм

A нуқтадан α текисликкача бўлган ***масофа*** деб шу нуқтадан α текисликка туширилган перпендикуляр узунлигига айтилади. 156-расмда *A* нуқтадан α текисликкача бўлган масофа *AB* га тенг.

Агар *AB* – α текисликка туширилган перпендикуляр бўлса (*B* – унинг асоси), текисликдаги ихтиёрий *C* нуқтани *A* нуқта билан туташтирувчи кесма *A* нуқтадан α текисликка ўтказилган ***оғма*** дейилади. *C* нуқта *AC* ***оғманинг асоси*** дейилади. Бунда *BC* кесма *AC* оғманинг α текисликдаги ***проекцияси*** дейилади. 156-расмда *AB* кесма – перпендикуляр, *AC* – оғма, *BC* унинг проекцияси.

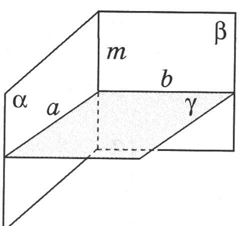


157-расм

5-теорема. *Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.*

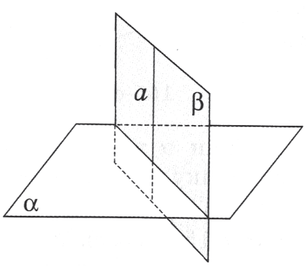
Аксинча, *текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқ оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади* (157-расм).

3.4. Текисликларнинг перпендикулярлиги



158-расм

Фараз қилайлик, α ва β текисликлар *m* тўғри чизиқ бўйича кесишсин. Агар *m* тўғри чизиққа перпендикуляр γ текислик α билан β текисликни мос *a* ва *b* тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтса ва $a \perp b$ бўлса, α ва β текисликлар ўзаро ***перпендикуляр текисликлар*** дейилади. У бундай ёзилади: $\alpha \perp \beta$ (158-расм).



159-расм

6-теорема. *Агар a тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр, β текислик a тўғри чизиқ орқали ўтса, α ва β текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади* (159-расм, $a \perp \alpha$, $a \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$).

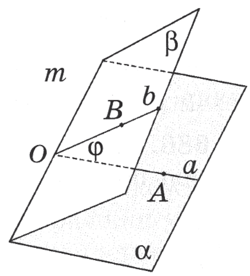
?

1. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб нимага айтилади? Кесишувчи ва айқаш тўғри чизиқларни қараб чиқинг.
2. Қандай тўғри чизиқларни перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади?

3. Қандай тўғри чизиқ берилган текисликка перпендикуляр дейилади?
4. Берилган нуқтадан текисликка нечта перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?
5. Фазода битта текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар ўзаро қандай жойлашади?
6. Берилган нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр, оғма деганда нимани тушунасиз?
7. Нуқта билан текислик орасидаги масофа қандай аниқланади? а) иккита параллел текислик; б) айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофани қандай аниқлаш мумкин?
8. Уч перпендикуляр ҳақида теоремага таъриф беринг (чизма орқали тушунтиринг).
9. Қандай текисликлар перпендикуляр текисликлар дейилади?
10. Мана бу мулоҳаза тўғрими: «Текислик ўзига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ орқали ўтувчи ихтиёрий текисликка перпендикулярдир»?

ПТ

1. Ихтиёрий учта таёқча олиб, уч перпендикуляр ҳақидаги теореманинг моделини ясанг (157-расм).
2. α ва β текисликлар m тўғри чизиқ бўйича кесишсин. $O \in m$ нуқта орқали a ва b тўғри чизиқларни шундай ўтказамизки, бунда $a \perp m$, $b \perp m$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ бўлсин (160-расм). У ҳолда фазода шу m тўғри чизиқ билан чекланган ҳамда α ва β ярим текисликлардан ташкил топган фигура ***икки ёқли бурчак*** дейилади. AOB бурчак эса ўша икки ёқли бурчакнинг **чизиқли *бурчаги*** дейилади. m тўғри чизиқ икки ёқли бурчакнинг ***қирраси,*** α ва β ярим текисликлар эса унинг ***ёқлари*** дейилади.



160-расм

Қаттиқ қоғоздан катталиги: 1) 30°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 90° бўлган икки ёқли бурчаклар моделларини ясанг ва унинг бирор бир чизиқли бурчагини ясаб кўрсатинг.

МАСАЛАЛАР

679. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган. 1) AB тўғри чизиққа перпендикуляр ва кубнинг қирраси орқали ўтувчи тўғри чизиқларни кўрсатинг; 2) AB_1 ва AD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг; 3) ABC текислигига перпендикуляр кесмаларни кўрсатинг; 4) ABC текислигига перпендикуляр кубнинг ёқларини кўрсатинг; 5) AB=8 см бўлса, AC ва B_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг; 6) A_1C ва A_1B оғмаларнинг узунлигини топинг.

680. Охирларидан бири α текисликда, иккинчи учи эса текисликдан 4 см масофада жойлашган кесманинг ўртасидан α текисликкача бўлган масофани топинг.

681. Кесманинг охирлари α текислигидан 2 см ва 3 см масофада жойлашган. Шу кесманинг ўртасидан α текисликкача бўлган масофани топинг. Кесма билан α текислик кесишмайди.

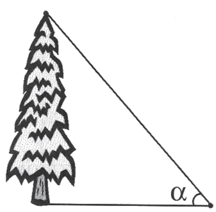
682. a тўғри чизиқ α текисликка параллел. α текисликдаги нуқтадан a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган ва α текисликда ётадиган нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

683. AB кесманинг охирларидан α текисликкача бўлган масофалар мос равишда: 1) 3 см ва 7 см; 2) 3,1 мм ва 6,9 мм; 3) 3,2 м ва 7,4 м; 4) a га ва b га тенг. Агар AB кесма α текислик билан кесишмаса, шу кесманинг ўртасидан α текисликкача бўлган масофани топинг.

684. A нуқтадан α текисликка AB перпендикуляр ҳамда AC оғма ўтказилган. Агар: 1) $AB=4$ см, $AC=6$ см бўлса, BC проекцияни; 2) $AB=2{,}5$ см, $\angle ACB=30°$ бўлса, AC ва BC ни; 3) $AC=13$ см, $BC=12$ см бўлса, AB ни топинг.

685. AO, BO ва CO кесмалар жуфт-жуфтдан ўзаро перпендикуляр. $AO=BO=CO$ бўлса, ABC ни топинг.

686. «Бир текисликка перпендикуляр бўлган икки текислик ўзаро параллел» деган тасдиқ тўғрими?



161-расм

687. $\alpha\|\beta$, $A\in\alpha$ нуқтадан β текисликка AB перпендикуляр ва AC оғма туширилган. Агар $AC=10$ см, $BC=6$ см бўлса, α ва β текисликлар орасидаги масофани топинг.

688. 161-расмда: 1) $a=3$ м, $\alpha=60°$; 2) $a=5{,}7$ м, $\alpha=45°$; 3) $a=8$ м, $\alpha=30°$ бўлса, дарахтнинг баландлигини топинг.

B

689. Агар $a\perp b$ ва $\angle(a,b)=60°$ бўлса, a ва b ва c тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

690. Агар α, β, γ текисликлар учун $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$ ва $\alpha\perp\beta$ бўлса, $a=\alpha\cap\beta$ тўғри чизиқ γ текисликка перпендикуляр эканини кўрсатинг.

691. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $AB_1\perp CD_1$ бўлишини кўрсатинг.

692. OA, OB ва OC нурлар жуфт-жуфтдан ўзаро перпендикуляр. Агар: 1) $OA=OB=OC=a$; 2) $OA=OB=6$ см, $OC=8$ см бўлса, ABC учбурчакнинг бурчакларини топинг.

693. E нуқта томони a га тенг бўлган квадратнинг маркази O нуқтадан b масофада жойлашган. Агар OE кесма квадрат текислигига перпендикуляр бўлса, E нуқтадан квадрат учларигача бўлган масофани топинг.

694. ABC тенг томонли учбурчакнинг учларидан D нуқтагача бўлган масофа 5 см. Агар $AC=8$см бўлса, D нуқтадан ABC учбурчак ётган текисликкача бўлган масофани топинг.

695. «Агар c тўғри чизиқ α текисликдаги a ва b тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлса, $c\perp\alpha$ бўлади» деган тасдиқ тўғрими? Бу тасдиқ доимо тўғри бўладиган ҳолда уни тўлдиринг.

696. α текислик ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг AC катетига перпендикуляр ва уни $m:n$ нисбатда бўлади. α текислик AB гипотенузани қандай нисбатда бўлади?

697. Фазода AB кесманинг охирларидан бир хил узоқлашган нуқталар қандай фигурани ташкил қилади?

698. Бир тўғри чизиққа перпендикуляр иккита текислик ўзаро параллел бўлишини кўрсатинг.

699. $ABCD$ ромбнинг диагоналлари O нуқтада кесишади, OK кесма эса унинг диагоналларига перпендикуляр. K нуқтадан ромб томонлари орқали ўтувчи тўғри чизиқларгача бўлган масофалар ўзаро тенг эканини исботланг.

700. Агар $OK=4$ см, $AB=5$ см, $AC=6$ см бўлса, аввалги масалада кўрсатилган масофани аниқланг.

701. AD кесма ABC тенг томонли учбурчак ётган текисликка перпендикуляр. 1) $AB=3$ см, $AD=4$ см; 2) $AB=AD=a$ бўлса, BCD учбурчакнинг периметрини топинг.

702. AK кесма $ABCD$ квадрат ётган текисликка перпендикуляр. $AB=3$ м, $BK=5$ м бўлса, K нуқтадан BD тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

703. A нуқтадан α текисликка AB оғма ўтказилган ва $AB=6$ см. Агар AB тўғри чизиқ билан α текислик орасидаги бурчак: 1) $30°$ га; 2) $45°$ га; 3) $60°$ га тенг бўлса, AB нинг α текислигидаги проекцияси узунлигини топинг.

C

704. Агар икки тўғри чизиқ битта текисликка перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлишини исботланг.

705. α текислигидан m масофада жойлашган P нуқтадан шу текислик билан $30°$ ли бурчак ҳосил қилувчи PQ ва PR оғмалар ўтказилган. Агар O нуқтадан α текисликка туширилган перпендикулярнинг асоси ва $\angle QOR = 120°$ бўлса, QR ни топинг.

706. Фазодаги тенг томонли учбурчакнинг ҳамма учларидан бир хил масофада жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни қандай фигура бўлади?

707. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC кесма B, B_1 ва D_1 нуқталар орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр бўлишини кўрсатинг.

708. ABC тенг томонли учбурчакнинг периметри $2p$ га тенг. AA_1 ва BB_1 кесмалар эса шу учбурчак текислигига перпендикуляр. ABB_1A_1 квадрат бўлса, A_1B_1C учбурчакнинг периметрини аниқланг.

709. Фазода берилган уч нуқтадан бир хил масофада жойлашган нуқталар тўпламини аниқланг.

710. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари $AC=3$ см, $BC=4$ см, учбурчак текислигига туширилган CD перпендикуляр узунлиги 5 см. D нуқтадан AB гипотенузагача бўлган масофани топинг.

711. Нуқтадан текисликка узунликлари 17 см ва 10 см бўлган иккита оғма ўтказилган. Уларнинг проекциялари айирмаси 9 см. Шу нуқтадан берилган текисликкача бўлган масофани топинг.

712. D нуқтадан ABC учбурчакнинг ҳар бир учигача бўлган масофа 5 см, $AC=BC=6$ см, $AB=4$ см. D нуқтадан учбурчак текислигигача бўлган масофани топинг.

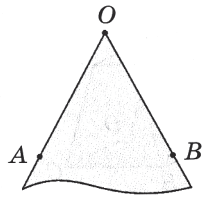
713. Бир нуқтадан чиқувчи учта ўзаро φ, ψ ва φ га тенг учта ўткир бурчакни ҳосил қилади. Агар φ ва ψ бурчаклар ётган текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлса, $\cos\varphi \cdot \cos\psi = \cos\omega$ тенглик бажарилишини кўрсатинг.

4-§. Кўпёқлар

4.1. Кўп ёқли бурчаклар

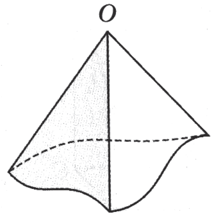
Аввалги параграф сўнгида икки ёқли бурчак тушунчасини аниқлаб олдик. Шу сингари стереометрияда кўп ёқли бурчаклар ҳам қаралади.

Текисликнинг O нуқта ва OA, OB нурлар билан чегараланган қисми фазодаги ***ясси бурчак*** (ёки ***бурчак***) дейилади. Бу ерда O – унинг ***учи***, OA ва OB нурлар эса ***томонлари*** дейилади (162-расм).



162-расм

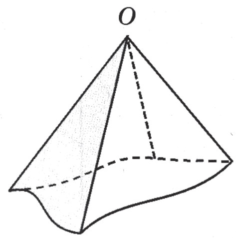
Фазода учи умумий бир нечта ясси бурчаклардан ташкил топган фигура ***кўп ёқли бурчак*** деб аталади. Бунда қараладиган ясси бурчаклар кўп ёқли бурчакнинг ***ёқлари***, томонлари кўп ёқли бурчакнинг ***қирралари***, ясси бурчакларнинг умумий учи эса кўп ёқли бурчакнинг учи дейилади. Масалан, 163-, 167-расмларда мос равишда уч ёқли ва тўрт ёқли бурчаклар тасвирланган. 165-расмда тасвирланган фигура эса кўп ёқли бурчак эмас. Кўп ёқли бурчакнинг ҳар бир қирраси мажбурий равишда фақат иккита ёғининг умумий томони бўлиши лозим.



163-расм

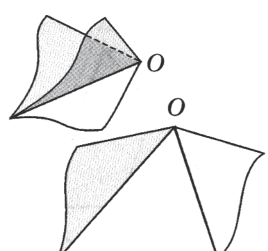
4.2.Кўпёқлар

Стереометрияда бир нечта ясси кўпбурчаклар билан чегараланган фигура ***кўп ёқли фигура*** (***кўпёқ***) дейилади. Бунда кўп ёқли бурчак учлари кўпёқнинг ***учлари***, томонлари эса кўпёқнинг ***қирралари*** дейилади. Масалан, қуйи синфларда қаралган куб кўпёқнинг содда мисолидир. Куб ўзаро тенг олтита квадратлар билан чегараланган, яъни унинг олтита ёғи, ўн иккита қирраси ва саккизта учи бор (166-расм). Стереометрияда кўриладиган кўпёқларнинг бир неча турлари мавжуд. Энди ана шу турларни аниқлаймиз.



164-расм

Ҳар бир ёғи, параллелограмм бўлувчи кўпёқ ***параллелепипед*** дейилади. 167-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед тасвирланган. Бу ерда

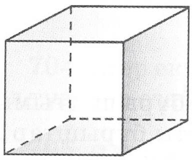


165-расм

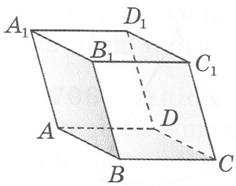
$ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммлар унинг ***асослари***, қолган ёқлари унинг ***ён ёқлари*** дейилади. Агар параллелепипеднинг ҳамма ёқлари тўғри тўртбурчакдан иборат бўлса, бундай параллелепипед ***тўғри бурчакли параллелепипед*** дейилади (168-расм).

Асослари ўзаро тенг ва параллел текисликларда жойлашган, ён ёқлари эса тўғри тўртбурчак бўлган фигура ***тўғри призма*** дейилади. Ён ёқлари параллелограмм бўлган призма эса ***оғма призма*** дейилади. Масалан, 169- ва 170-расмларда мос равишда тўғри ва оғма призма тасвирланган. 166- ва 168-расмларда тасвирланган куб ва тўғри параллелепипедлар тўғри призма, 167-расмдаги фигура оғма призмадир. Агар тўғри призма асослари мунтазам кўпбурчак бўлса, у ***мунтазам призма*** дейилади. Масалан, куб мунтазам призма, 171-расмда эса мунтазам олтибурчакли призма тасвирланган.

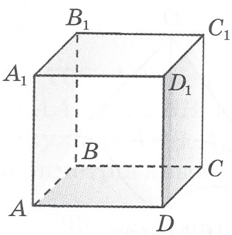
Фазода кўп ёқли бурчакнинг унинг учи орқали ўтмайдиган текислик билан чегараланган қисми ***пирамида*** дейилади (172-расм). Кўп ёқли бурчакнинг учи ***пирамиданинг учи***, кўп ёқли бурчакни текислик билан кесганда ҳосил бўлувчи кўпбурчак эса унинг ***асоси*** дейилади. Масалан, 172-расмда бешбурчакли $SABCDE$ пирамида тасвирланган. A, B, C, D ва E – асосидаги учлари, SAB, SAE, SBC, SCD, SDE – ён ёқлари, SA, SB, SC, SD, SE – ён қирралари, $ABCDE$ бешбурчакнинг томонлари эса пирамиданинг ***асосидаги қирралари*** дейилади.



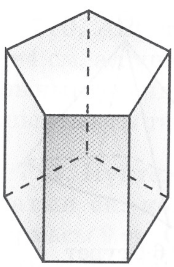
166-расм



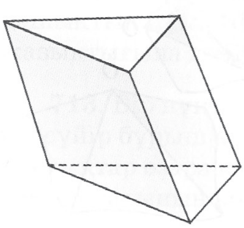
167-расм



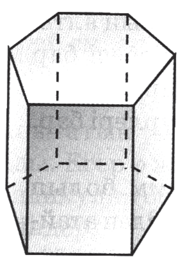
168-расм



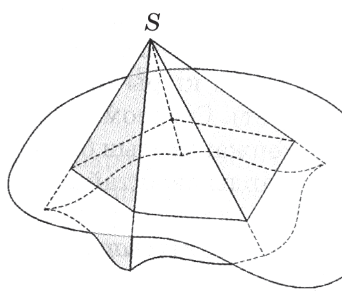
169-расм



170-расм



171-расм

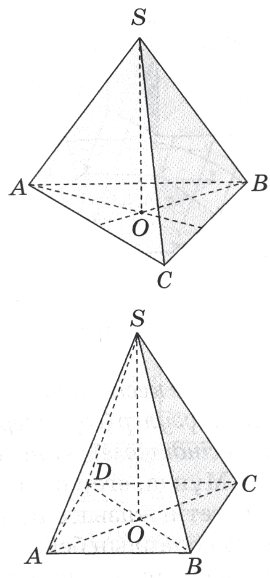


172-расм

Пирамиданинг учидан асос текислигига туширилган перпендикуляр унинг ***баландлиги*** дейилади. 173-расмдаги SO кесма – учбурчакли ва тўртбурчакли пирамидаларнинг баландлиги. Пирамиданинг асоси мунтазам кўпбурчакдан иборат бўлиб, шу мунтазам кўпбурчакнинг маркази пирамида баландлигининг асоси бўлса, бундай пирамида ***мунтазам пирамида*** дейилади.

173-расмда мунтазам учбурчакли ва тўртбурчакли пирамидалар тасвирланган. Бу ерда ABC – тенг томонли учбурчак, $ABCD$ – квадрат.

Ҳамма қирралари ўзаро тенг бўлган учбурчакли пирамида ***тетраэдр*** дейилади. Баъзи дарсликларда ҳамма учбурчакли пирамида тетраэдр деб аталган. Пирамидани асос текислигига параллел текислик билан кесиб ўтганда ҳосил бўлувчи фигура ***кесик пирамида*** дейилади.

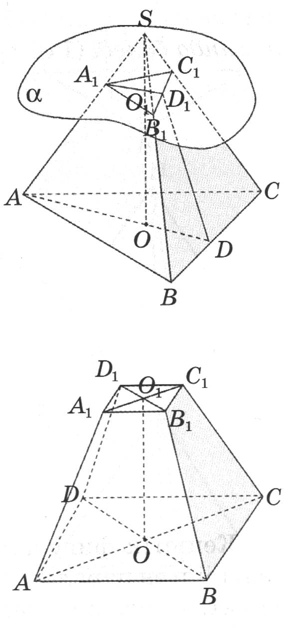


173-расм

Масалан, 174-расмда учбурчакли ва тўртбурчакли кесик пирамидалар тасвирланган. Кесик пирамида асослари орасидаги масофа, яъни унинг бир асосидаги нуқтадан иккинчи асосига туширилган перпендикуляр кесик пирамиданинг ***баландлиги*** дейилади.

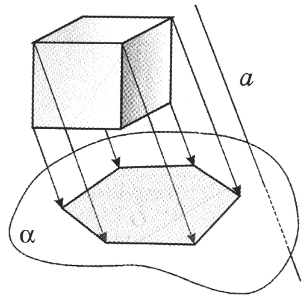
4.3. Параллел проекциялаш ва кўпёқларни тасвирлаш

Стереометрия курсида фазовий жисмларнинг тасвирини қоғоз сиртида ясай олиш жуда катта аҳамиятга эга. Фазовий жисмларнинг тўғри ясалган тасвири масала ечишнинг асосий воситаси бўлиб ҳисобланади. Одатда кўпёқларни, умуман, фазовий жисмларни қоғоз сиртида тасвирлашда чизмачилик фанида ўрганиладиган параллел проекциялаш усули қўлланилади.



174-расм

Фараз қилайлик, α текислик, уни кесиб ўтувчи a тўғри чизиқ ва F фигура берилган бўлсин. У ҳолда F фигуранинг ҳар бир нуқтасидан a тўғри чизиққа параллел ўтказилган тўғри



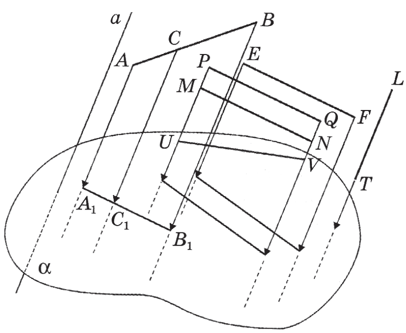
175-расм

чизиқлар билан α текисликнинг кесишиш нуқталари тўплами – F_1 фигура F фигуранинг α текисликдаги *a* тўғри чизиққа ***параллел проекцияси*** дейилади. Масалан, 175-расмда кубнинг α текисликдаги *a* тўғри чизиққа параллел проекцияси тасвирланган. Бу ерда *a* тўғри чизиқ ***проекциялаш йўналиши***, α текислик эса ***проекциялаш текислиги*** дейилади.

Энди параллел проекциялашнинг баъзи содда хоссаларини атаб ўтамиз.

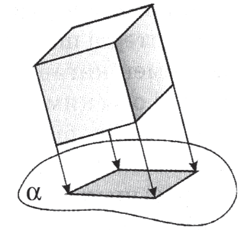
Параллел проекциясилашда проекциялаш йўналишига параллел бўлмаган: 1) тўғри чизиқ (нур ёки кесма) тўғри чизиқ (нур ёки кесма) билан тасвирланади; 2) параллел тўғри чизиқлар (нур ёки кесмалар) параллел тўғри чизиқлар (нур ёки кесмалар) билан тасвирланади.

Бунда, агар параллел тўғри чизиқлар (нур ёки кесмалар) орқали ўтувчи текислик проекциялаш йўналишига параллел бўлса, бу тўғри чизиқлар (нур ёки кесмалар) нинг тасвирлари устма-уст тушади. Хусусан, проекциялаш йўналишига параллел жойлашган текисликдаги ҳамма тўғри чизиқларнинг тасвирлари устма-уст тушади. Проекциялаш йўналишига параллел тўғри чизиқлар (нур ёки кесмалар) нинг тасвири нуқта бўлади; 3) *агар AB кесманинг тасвири A_1B_1 кесма бўлса ва C нуқта AB кесмани $m:n$ каби нисбатда бўлса, у ҳолда C нуқтанинг тасвири C_1 нуқта ҳам A_1B_1 кесмани $m:n$ каби нисбатда бўлади* (176-расм).

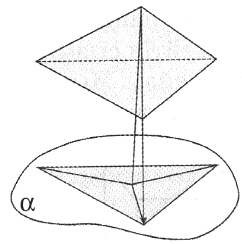


176-расм

Фазовий фигуралар тасвирини қоғозда тасвирлашда шу келтирилган параллел проекциялаш хоссаларини кенг қўллаш зарур. Бунда проекциялаш йўналишини тўғри танлаб олиш катта аҳамиятга эга бўлади. Масалан, агар куб унинг бир ён ёғига перпендикуляр йўналишда проекцияланса, у ҳолда параллелограмм ҳосил бўлади (177-расм). Тетраэдр асосига перпендикуляр йўналишда проекцияланганда 178-расмда тасвирланган учбурчак олинади. Албатта, бу тасвирларни амалиётда кубнинг ёки мос тетраэдрнинг тасвири сифатида қабул қилиш мумкин эмас.



177-расм



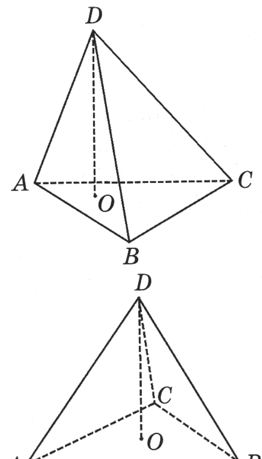
178-расм

Хуллас, амалиётда фазовий фигураларни тасвирлашда қуйидаги қоидаларга амал қилмоқ жоиздир.

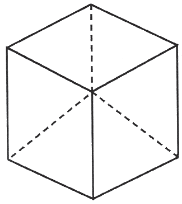
1. *Проекциялашда кўпёқнинг баъзи қирралари бошқа ёқларининг соясида қолади. Кўринмайдиган қирралари узук чизиқлар билан тасвирланади. Бунда кўпёқларни тасвирлашни шундай амалга ошириш керакки, тасвирдаги кўринмайдиган чизиқлар сони мумкин қадар кам бўлиши лозим.* Чунончи,179-расмдаги битта тетраэдрнинг икки хил тасвирини таққосланг.

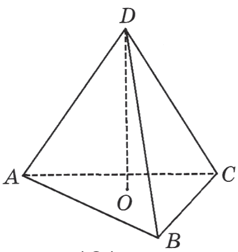
2. *Фигуранинг турли кесмаларининг тасвирлари бир тўғри чизиқда жойлашмаслиги керак.* Масалан, 176-расмда PQ, MN ва UV кесмаларнинг α текисликдаги тасвирлари устма-уст тушади, яъни бу тасвирдан алоҳида кесмаларнинг тасвирларини ажратиб олиш мумкин эмас. Шу каби 177- ва 180-расмлардаги куб тасвирлари тўғри бажарилмаган.

3. *Пирамидани тасвирлашда унинг учидан асос текислигига туширилган перпендикулярнинг асоси аниқ белгиланиши зарур.* Масалан, 181-расмда тетраэдр тасвирланган бўлса, 182-расмдаги пирамиданинг барча қирралари ўзаро тенг деб қабул қилинмайди, яъни мазкур пирамида тетраэдр эмас. Бу ерда пирамиданинг ACD ва ABC ёқлари ўзаро перпендикуляр.

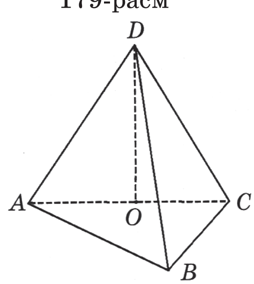


179-расм


180-расм



181-расм

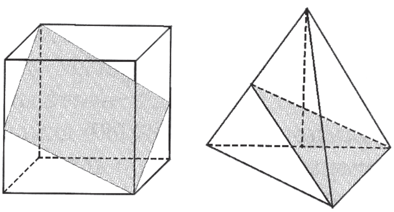


182-расм

4.4. Кўпёқ кесимларини ясаш

Масалаларни ечиш борасида фазовий жисмларни турли текисликлар билан кесганда ҳосил бўлувчи кесимларини ясаш зарурати туғилади. Энди кесим тушунчасини аниқлаб кўрамиз.

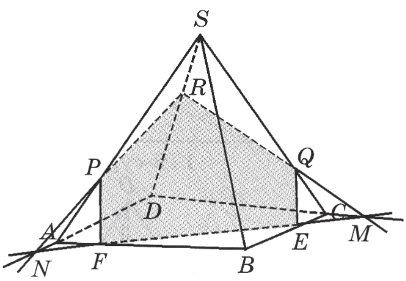
Фараз қилайлик, бизга α текислик билан F фигура берилган бўлсин. Равшанки, α текислик фазони иккита ярим фазоларга ажратади. Агар F фигуранинг α текислик билан чегараланган иккала ярим фазога ҳам тегишли нуқталари мавжуд бўлса, α текислик F фигурани ***кесувчи текислик*** дейилади. F фигура билан α текисликнинг кесишувидан ҳосил бўлган фигура эса ***кесим*** дейилади. Бунда кесимни чекловчи чизиқ F фигуранинг α кесувчи текисликдаги ***изи*** дейилади. Масалан, 183-расмда кубнинг ва пирамиданинг баъзи учлари орқали ўтувчи кесимлари тасвирланган. Шу билан кесимни батафсил аниқлаш учун чизмада α кесувчи текислигини аниқлаш имкони бўлиши зарур, яъни кесувчи текисликнинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтасининг (ё тўғри чизиқ билан шу иккита тўғри чизиқдан ташқари битта нуқтасининг ёки иккита тўғри чизиқнинг) аниқ ўринлари маълум бўлиши керак.



183-расм

1-мисол. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг SA, SC ва SD қирраларидан мос P, Q ва R нуқталар олинган. Агар $AP:PS=1:2$, $CQ:QS=1:2$ ва $DR:RS=3:1$ бўлса,пирамиданинг PQR текислик билан ҳосил қилган кесимини ясаш керак.

Ечилиши. PQR кесувчи текисликни α орқали белгилаймиз. У ҳолда α кесувчи текислик билан пирамиданинг ADS ва CDS ёқлари мос PR ва QR тўғри чизиқлар бўйича кесишади. Жумладан, $N=AD\cap PR$ ва $M=CD\cap QR$ нуқталар ҳам α кесувчи текисликда, ҳам $ABCD$ текисликда ётганлиги учун, α текислик билан асос текислик MN тўғри чизиқ бўйича кесишади. Агар $F=AB\cap MN$, $E=BC\cap MN$ бўлса, $PRQEF$ биз излаётган кесим (184-расм).



184-расм

? 1. Икки ёқли бурчак, унинг чизиқли бурчаги деганда нимани тушунасиз?

2. Ясси бурчак деб нимага айтилади?

3. Кўп ёқли бурчак нима? Унинг қандай элементларини биласиз?
4. Кўпёқ нима?
5. Қандай фигуралар призма, параллелепипед, пирамида дейилади? Уларнинг қандай элементларини биласиз?
6. Кесик пирамида нима?
7. Параллел проекциялаш нима? Проекциялаш йўналиши нима?
8. Чизмада кўпёқлар қандай тасвирланади (призма билан пирамида мисолида келтиринг)?
9. Қандай текислик кесувчи текислик дейилади? Фигуранинг кесими нима?
10. Чизмада кесувчи текислик қандай берилади?

ПТ
1. Қаттиқ қоғоздан унинг умумий ёқлари қирраларини елимлаш орқали: а) уч ёқли; б) тўрт ёқли; в) беш ёқли; г) олти ёқли бурчак моделини ясанг.
2. Аввалги топшириқда олинган кўпёқли бурчакни стол устига шундай қўйингки, натижада пирамида ҳосил бўлсин.
3. Меҳнат дарсида ёғочдан тўғри параллелепипеднинг моделини ясанг ва уни ихтиёрий кесувчи текислик бўйича арра билан арраланг.

МАСАЛАЛАР

А

714. Икки ёқли бурчак чизиқли бурчагининг катталиги: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. Унинг бир ёғида жойлашган A нуқтадан икки ёқли бурчак қиррасигача 10 см бўлса, A нуқтадан иккинчи ёғигача бўлган масофани топинг.

715. $SABC$ тетраэдр (ҳамма қирралари тенг) берилган. D нуқта – AB қирранинг ўртаси. CDS бурчак $SABC$ икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлишини кўрсатинг.

716. Ясси бурчаклари: 1) 122°, 98°, 35°; 2) 121°, 122°, 119°; 3) 105°, 95°, 160°; 4) 18°, 200°, 100° бўлган уч ёқли бурчак мавжудми?

717. Икки ёқли бурчак қиррасига перпендикуляр текислик унинг ёқларига ҳам перпендикуляр бўлишини кўрсатинг.

718. Кубнинг ҳамма икки ёқли бурчаклари тўғри бурчак бўлишини исботланг.

719. Ўлчамлари a, b ва c (бўйи, эни ва баландлиги) бўлган тўғри параллелепипед d диагоналининг узунлиги

$$d^2=a^2+b^2+c^2$$

формула билан аниқланишини кўрсатинг.

720. Аввалги масаладаги диагоналнинг узунлигини: 1) a=4 м, b=3 м, c=12 м; 2) a=1 см, b=1 см, $c=\sqrt{2}$ см; 3) a=9 см, b=8 см, c=5 см; 4) a=9 дм, b=7 дм, $c=\sqrt{39}$ дм бўлган ҳоллар учун топинг.

721. Ҳамма қирралари тенг бўлган учбурчакли пирамиданинг иккиёқли бурчакларини топинг.

722. A нуқта тўғри бурчакли икки ёқли бурчак ёқларидан 3 см ва 4 см масофада жойлашган. A нуқтадан икки ёқли бурчак қирраларигача бўлган масофани топинг.

723. Қирраси 10 см бўлган $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубниг A_1 ва C учи орқали ҳамда BB_1 ва DD_1 қиррасининг ўрталардан ўтувчи кесимини ясанг.

724. $SABC$ тетраэдр AB қиррасининг ўртаси орқали унинг: 1) SA ва SC; 2) SB ва SC қирраларига параллел кесимини ясанг.

B

725. Уч ёқли бурчак ясси бурчагининг ҳар иккитаси $45°$ га тенг, улар орасидаги икки ёқли бурчак эса $90°$ га тенг. Учинчи ясси бурчакни топинг.

726. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг ҳамма қирралари йиғиндиси 72 см. Бунда $AB:BC=2:3$, $BC:B_1B=3:4$ бўлса, унинг ҳар бир қиррасини топинг.

727. Мунтазам тўртбурчакли призманинг диагонали 9 см, ён қирраси эса 7 см. Унинг асосидаги томонини топинг.

728. Кубнинг қирраси a га тенг. Унинг икки айқаш қирралари ўрталарини туташтирувчи кесма узунлигини топинг.

729. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг: 1) A, A_1, C_1 учлари орқали; 2) A, B, C_1 учлари орқали ўтувчи кесимини ясанг ва бу кесимнинг параллелограмм бўлишини кўрсатинг.

730. Асос томони 14 см, диагонал кесимининг юзи 14 см^2 бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қиррасини топинг.

731. Параллелепипед ясанг. Унинг ихтиёрий учта қиррасидан биттадан нуқта белгиланг ва шу уч нуқта орқали ўтувчи параллелепипеднинг кесимини ясанг.

732. $SABC$ тетраэдр SB, SC ва BC қирраларида мос равишда P, Q, R нуқталарини белгилаб: 1) PQ тўғри чизиқ билан ABC текисликнинг; 2) QR тўғри чизиқ билан ABS текисликнинг кесишиш нуқтасини кўрсатинг.

733. Асос томони a га, ён қирраси b га тенг мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлигини топинг.

734. Ён қирраси b га, учидаги ясси бурчаги φ га тенг мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлигини топинг.

735. Пирамида асосидаги ромбнинг диагоналлари 12 см ва 16 см. Пирамиданинг баландлиги 10 см ва у ромб диагоналларининг кесишиш нуқтасидан ўтади. Пирамида ён ёғининг юзини топинг.

C

736. Куб кесимида мунтазам олтибурчак ҳосил бўладиган қилиб уни қандай кесиш мумкин?

737. $SABC$ учбурчакли пирамидада: $AB=BC=AC= AS=a$, $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Унинг AS ва BC қирраларидаги икки ёқли бурчакларини топинг.

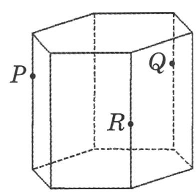
738. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг қўшни иккита ён қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи ва асос текислигига перпендикуляр бўлувчи кесимини ясанг.

739. Аввалги масаладаги пирамиданинг асос томонини a га, баландлигини h га тенг деб олиб, унинг кўрсатилган кесимининг юзини топинг.

740. Чизиқли бурчаги φ га тенг икки ёқли бурчак қиррасидан A ва B нуқталар белгиланган ва уларга турли ёқларда ётувчи AC ва AD перпендикулярлар ўтказилган. Агар $AB=a$, $AC= b$ ва $BD=c$ бўлса, CD кесманинг узунлигини топинг.

741. AB кесманинг охирлари икки ёқли бурчакнинг турли ёқларида жойлашган ва унинг қиррасига AC ва BD перпендикулярлар туширилган. Агар $AC=BD$ бўлса, $\angle ABC=\angle BAD$ эканини исботланг.

742. 185-расмда кўрсатилган олтибурчак тўғри призманинг белгиланган P, Q, R нуқталари орқали ўтувчи кесимини ясанг.

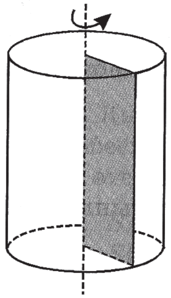


185-расм

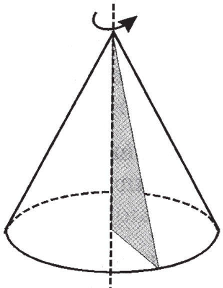
743. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг BC қиррасидан E нуқта олинган. Унинг: 1) BCD_1 ва BB_1D кесимларининг кесишиш кесмасини; 2) E нуқта орқали ўтувчи ва BDC_1 кесимга параллел бўлган кесимини ясанг.

744. Мунтазам: 1) бешбурчакли призманинг; 2) тўртбурчакли пирамиданинг ихтиёрий учта қиррасидан биттадан нуқта олиб, унинг шу уч нуқтадан ўтувчи кесимини ясанг.

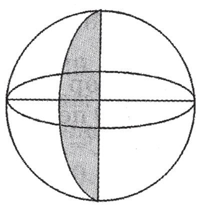
5-§*. Айланиш жисмлари. Стереометриянинг асосий формулалари



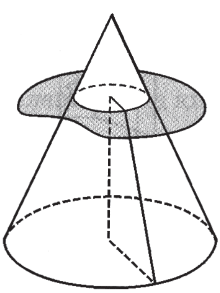
186-расм



187-расм



188-расм



189-расм

5.1. Айланиш жисмлари

Айланиш жисмлари деб ясси фигуранинг бирор бир ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган фигурага айтилади. Масалан, тўғри тўртбурчак унинг томони орқали ўтувчи ўқ атрофида айлантирилса, ***цилиндр*** ҳосил бўлади (186-расм), тўғри бурчакли учбурчак унинг катети орқали ўтувчи тўғри чизиқ атрофида айлантирилса, ***конус*** олинади (187-расм). Ярим доира унинг диаметри атрофида айлантирилганда ҳосил бўладиган фигура ***шар***, шарни чегараловчи сирт ***сфера*** дейилади (188-расм).

Цилиндрни чегараловчи ўзаро тенг иккита доира унинг ***асоси***, ён сиртидаги ўққа параллел кесмалар ***цилиндрнинг ясовчилари*** дейилади. Цилиндрнинг ясовчилари ўзаро параллел ва цилиндрнинг баландлигига тенг.

Конуснинг учини унинг асосини чегараловчи айлана нуқтаси билан туташтирувчи кесма унинг ***ясовчиси*** дейилади, конус учи билан асосининг марказини туташтирувчи кесма эса унинг баландлиги бўлади. Конусни асос текислигига параллел текислик билан кесамиз. У ҳолда конуснинг кесиб ўтувчи текислик ва асос текислиги билан чегараланган қисми ***кесик конус*** дейилади (189-расм).

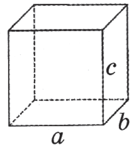
5.2. Стереометриянинг асосий формулалари

Стереометриянинг кўплаб масалаларини ечиш борасида фақат стереометрия курсига тегишли бир қатор формулалар қўлланилади.Энди шу формулаларни исботсиз келтирамиз.

Одатда, кўпёқларни чегараловчи кўпбурчаклар икки гуруҳга: ён ёқлар ва асос (асослар) га бўлинади. Ён ёқлар билан асосларнинг йиғиндиси ***тўла сирт*** дейилади. Стереометрия курсида кўпёқлар сиртларининг юзлари билан бир қаторда уларнинг ҳажмлари тушунчаси ҳам қаралади. Чунончи, тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми унинг учта ўлчамининг кўпайтмасига тенг экани қуйи синфлардан маълум.

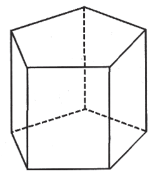
Энди баъзи кўп учрайдиган фигуралар сиртларининг юзларини ва ҳажмларини ҳисоблайдиган формулаларни келтирамиз.

Тўғри бурчакли параллелепипед



Бунда ва бундан буён жисм ён сиртининг юзини $S_{\text{ён.с}}$, унинг тўла сиртининг юзини $S_{\text{т.с}}$, асосининг юзини $S_{\text{ас.}}$, ҳажмини эса V ҳарфи билан белгилаймиз:

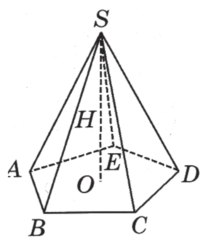
$$S_{\text{т.с.}}=S_{\text{ё.с.}}+2\cdot S_{\text{асос}},$$
$$V=a\cdot b\cdot c.$$



Призма

$$S_{\text{т.с.}}=S_{\text{ё.с.}}+2\cdot S_{\text{асос}},$$
$$V=H\cdot S.$$

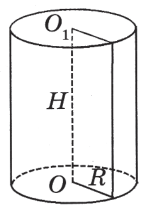
Бу ерда H – призманинг баландлиги, яъни унинг асос текисликлари орасидаги масофа.



Пирамида

$$S_{\text{т.с.}}=S_{\text{ё.с.}}+S_{\text{асос}},$$
$$V=\frac{1}{3}H\cdot S.$$

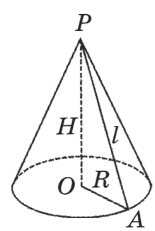
$H=SO$ – пирамиданинг баландлиги.



Цилиндр

$$S_{\text{ё.с.}}=2\pi RH,$$
$$S_{\text{т.с.}}=2\pi RH+2\pi R^2=2\pi R(H+R)$$
$$V=\pi R^2H.$$

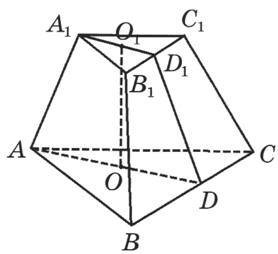
Бу ерда H – цилиндрнинг баландлиги, R – асосининг радиуси.



Конус

$$S_{\text{ё.с.}}=2\pi Rl,$$
$$S_{\text{т.с.}}=2\pi Rl+\pi R^2$$
$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Бу ерда $PO = H$ – баландлиги, $OA = R$ – асоснинг радиуси, $AP=l$ конуснинг ясовчиси.

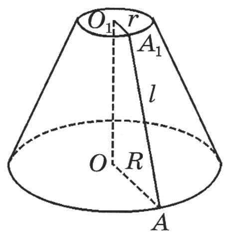


Кесик пирамида

$$S_{\text{т.с.}}=S_{\text{ё.с.}}+S_1+S_2$$

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\ )$$

Бу ерда $PO=H$ – баландлиги, R ва r – асосларнинг радиуслари, $H=O_1O_2$ – баландлик.



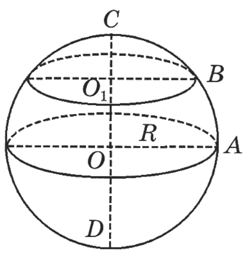
Кесик конус.

$$S_{\text{ё.с.}}=\pi l(R+r)$$

$$S_{\text{ё.с.}}=\pi l(R+r)+\pi(R^2+r^2)$$

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2).$$

Бу ерда R ва r – асосларининг радиуслари,



Шар ва шар сегменти

Сферанинг юзи: $S=4\pi R^2$.

Сферик сегментнинг юзи: $S_{\text{сег}}=2\pi RH$.

Шар ҳажми: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Шар сегментининг ҳажми: $V=\frac{2}{3}\pi R^2H$.

Бу ерда $H=CO_1$–шар сегментининг баландлиги.

?

1. Қандай жисмлар айланиш жисмлари дейилади?
2. а) Цилиндр; б) конус; в) шар қандай фигуранинг айланишидан ҳосил бўлади? Уни чизмада кўрсатинг.
3. Кўпёқнинг: а) ён сирти; б) асоси; в) тўла сирти деганда нимани тушунасиз? Уни чизмада кўрсатинг.
4. Призманинг, пирамиданинг, цилиндрнинг, конуснинг, кесик пирамиданинг, кесик конуснинг: а) ён сиртининг юзи; б) тўла сиртининг юзи; в) ҳажми қандай формулалар билан аниқланади?
5. Шар сегменти нима?
6. Сфера ва шар сегменти сиртининг юзи қандай формулалар билан аниқланади?
7. Шар ҳажми ва шар секторининг ҳажми қандай формулалар билан аниқланади?

МАСАЛАЛАР

А

745. Тўғри тўртбурчакли параллелепипед асосининг томонлари a ва b га, баландлиги эса h га тенг бўлса, параллелепипеднинг ён сирти билан тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг. Бунда: 1) a=3 см, b=5 см, h=6 см; 2) a=2,5 м b=0,4 м, h=7 м; 3) $a=\frac{2}{3}$ см, $b=\frac{3}{4}$ см, h=8 см; 4) a=5 дм, b=7 дм, h=2 см.

746. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томони a, баландлиги h, ён қирраси l бўлса, унинг ён сирти билан тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг. Бунда: 1) a=2 см, h=4 см; 2) a=2,5 м, h=3,2 м; 3) a=6 дм l=5 дм; 4) h=12 см, l=13 см.

747. Мунтазам учбурчакли пирамида асосининг томони a, баландлиги h, ён қирраси l бўлса, унинг ён сирти билан тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг. Бунда: 1) a=5 см, h=7 см; 2) $a=2\sqrt{3}$ см, h=4 см; 3) a=8 дм, l=5 дм; 4) h=5 см, l=13 см.

748. Кубнинг диагонали: 1) 4 см; 2) 3 м; 3) 6 дм; 4) $2\sqrt{3}$ мм бўлса, унинг диагонал кесимининг юзини, тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг.

749. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамида асосларининг томонлари a ва b га, баландлиги h га, ён қирраси l га тенг бўлса, унинг ён сирти билан тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг. Бунда: 1) a=4 см, b=2 см, h=5 см; 2) $a=5\sqrt{2}$ м, $b=2\sqrt{2}$ м, l=5 м.

750. Цилиндр асосининг радиуси R, баландлиги h бўлса, унинг ўқ кесимининг, ён сиртининг ва тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг. Бунда: 1) R=4 см, h=4 см; 2) R=3 м, h=10 м; 3) R=2 дм, h=5 дм; 4) R=2,3 мм, h=7,4 м.

751. Конус асосининг радиуси R га, баландлиги h га, ясовчиси l га тенг бўлса, унинг ўқ кесимининг, ён сиртининг ва тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг. Бунда: 1) R=3 см, h=4 см; 2) R=5 м, l=13 м; 3) h=6 дм, l=10 дм.

752. Кесик конус асосларининг радиуслари мос равишда R ва r га, баландлиги h га, ясовчиси l га тенг бўлса, унинг ўқ кесимининг, ён сиртининг ва тўла сиртининг юзини ва ҳажмини топинг. Бунда: 1) R=4 см, r=2 см, h=5 см; 2) R=5 м, r=2 м, l=5 м.

753. Шарнинг радиуси R, мос сферанинг юзи S, ҳажми V бўлса, қуйидаги жадвални тўлдиринг:

R	3 см			4 м	
S		400π			S
V			V		

754. Радиуси R га тенг шар сегментининг баландлиги H га тенг. Агар: 1) R=5 м, H=3 м; 2) R=4 см, H=2 см; 3) R=2 дм, H=3 дм бўлса, шар сегменти сиртининг юзини, асосидаги доиранинг юзини ва ҳажмини топинг.

B

755. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали 13 см, ён ёқлариниг диагоналлари 12 см ва 8 см. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

756. Мунтазам тўртбурчакли призманинг диагонали 10 см ва у ён ёқи билан 30° ли бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажмини топинг.

757. Ҳамма қирралари ўзаро тенг бўлган тетраэдрнинг ҳажми V га тенг. Унинг баландлигини топинг.

758. Мунтазам олтибурчакли призманинг энг катта диагонали 16 см ва у ён қирраси билан 60° ли бурчак ҳосил қилади. Призманинг ҳажмини топинг.

759. Мунтазам тўртбурчакли призма шаклидаги сув бассейнининг ҳажми 32 м^3. Бассейннинг таги билан ён ёқларини 20 см×20 см ўлчамдаги плиткалар билан қоплаш керак. Берилган ҳажмдаги сув бассейнини қоплаб чиқишга энг кам миқдорда плиткалар ишлатилиши учун унинг ўлчамлари қандай бўлиши керак ва неча дона плитка керак? Бассейн чуқурлиги 2 м бўлиши лозим.

760. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг узунлиги 6 см бўлган ён қирраси асос текислиги билан 45° ли бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

761. Ўлчами 80 см×20 см×5 см бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги мисдан қалинлиги 1 мм, эни 80 см бўлган тунука ясалди. Олинган тунука узунлигини ва сиртининг юзини топинг.

762. Цилиндрнинг ўқ кесими диагонали 16 см ва у ясовчиси билан 30° ли бурчак ҳосил қилади. Цилиндрнинг тўла сирти юзини топинг.

763. Учбурчакли пирамиданинг a, b ва c га тенг қирралари ўзаро перпендикуляр. Унинг ҳажми $V=\frac{1}{6}a\cdot b\cdot c$ формуладан ҳисобланишини исботланг.

764. Конуснинг ясовчиси l га тенг, асосидаги айлана узунлиги эса c га тенг. Конуснинг ҳажмини топинг.

765. 1 м^3 ҳажмдаги идишга тўлдирилган буғдойнинг массаси 750 кг. Хирмонда ғалланинг конуссимон уюми бор. Агар уюмнинг баландлиги 2,4 м, асосидаги айлана узунлиги 20 м бўлса, бу уюмда тахминан неча тонна ғалла йиғилган?

766. Узунлиги 18 см бўлган конус ясовчиси асос текислиги билан 60° ли бурчак ҳосил қилади. Шу конусга ички чизилган шарнинг ҳажмини топинг.

C

767. Агар тўғри бурчакли параллелепипед ёқларининг юзлари S_1, S_2 ва S_3 га тенг бўлса, унинг ҳажми $V=\sqrt{S_1S_2S_3}$ формула билан аниқланишини исботланг.

768. Агар баландлиги H га тенг кесик конус асосларининг юзлари S_1, S_2 га тенг бўлса, унинг ҳажми $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$ бўлишини исботланг.

769. Агар баландлиги H га тенг кесик конус асосларининг радиуслари R ва r га тенг бўлса, унинг ҳажми $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$ формула бўйича аниқланишини исботланг.

770. Томони a га тенг квадратни унинг учидан ўтувчи ва диагоналига параллел бўлувчи тўғри чизиқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

771. Учидаги бурчаги φ га ва ён томони a га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакни бир ён томони атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

772. Метро қурилишида ташқи радиуси 5,5 м ва ички радиуси 5,1 м бўлган темирбетондан ясалган цилиндрик халқалар қўлланилади. 100 м ли шундай халқанинг ҳажми нимага тенг? Агар иккала радиус ҳам 0,4 м га камайтирилса, бу халқанинг массаси неча фоизга камаяди?

773. Диаметри 10 см ва баландлиги 5 см бўлган 1 млн. консерва банкаларини ясаш учун неча квадрат метр тунука ишлатилади (консерва банкаларининг букик ва кесиш жойларига 10% материал сарфланади).

774. Ясовчиси l бўлган конусга ўқ кесимининг диагоналлари конус ясовчиларига параллел бўлган цилиндр ички чизилган. Конус ясовчиси унинг асос текислиги билан φ га тенг бурчак ҳосил қилса, цилиндрнинг ҳажмини топинг.

VI боб. ТАРИХИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1-§. Геометриянинг ривожланиш даврлари

Геометрия – энг қадимги фанлардан бири. У бир неча минг йиллар мобайнида ривожланиб келмоқда. Вавилон ва грек папирусларида (эр. ав. III мингинчи йиллар) геометрия тўғрисидага дастлабки маълумотларни учратиш мумкин. Умуман « геометрия» сўзи қадимги юнон тилида «geo» – «ер» ва «metreo» – «ўлчайман» деган маънони билдиради. Хуллас, геометрия илми бошқа илмлар каби инсониятнинг кундалик амалий эҳтиёжларидан пайдо бўлган. Масалан, дастлабки геометрик тушунчалар ерга ишлов бериб, ўтроқ ҳаёт кечирган жамиятларда (қадимги Миср, Вавилон (Бобил), Ҳиндистон, Хитой ва ҳ.к.) бўла бошлаган. Бу юртларда йил сайин сув тошқинлари натижасида яроқли ер майдонларини жамоат аъзолари орасида қайта тақсимлаб беришга тўғри келган. Бу дастлабки геометрик тушунчалар қоида тарзида, исботсиз қабул қилинган. Масалан, қадимги мисрликларга Пифагор теоремаси маълум бўлган (Миср учбурчаги, томонлари 3, 4, 5 сонлари билан ифодаланади) ва улар кўпгина фигураларнинг юзларини, баъзи жисмларнинг ҳажмларини ҳисоблай олишган. Геометрия тараққиётининг бу даври ***амалий геометрия даври*** дейилади. Шу билан бу даврда геометрия илми қатъий математик назария сифатида эмас, исботсиз қабул қилинган қоидалар йиғиндиси сифатида шаклланган.

Геометриянинг фан сифатида шаклланиши қадимги Юнонистонда бошланган. Бу даврда аввал тажрибага асосланиб олинган геометрик қонуниятлар ва боғланишлар изчиллаштирилиб, исботлана бошланган. Геометрия илмининг шундай изчил равишда шаклланишига дастлабки ҳисса қўшганлардан бири қадимги юнон математиги Фалес (эр. ав.VI аср) бўлган. У вертикал бурчакларнинг тенглигини, тенг ёнли учбурчак асосидаги бурчакларнинг тенглигини, шунингдек, диаметр айланани тенг иккига бўлинишини, томонлари диаметрга тиралган ички чизилган бурчак тўғри бурчак бўлишини ва бошқа маълумотларни исботлаган. Фалес учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатини ва ўткир бурчаги 45^0 бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг хоссасини яхши билган. Ушбу далилга асосланиб, Миср пирамидасининг баландлигини ҳисоблаган. Шунингдек, назарий геометриянинг шаклланишида Пифагор (эр. ав. VII аср) ва Гиппократнинг (эр. ав. V аср) хизматлари *беқиёс*. Масалан, Гиппократ «Бошланғичлар» деб номланган асарида геометрик далилларни изчиллаштиришга ҳаракат қилган (бу асар бизгача сақланмаган).

Геометрия шаклланишининг ушбу жараёнини, яъни ер ўлчаш геометриясидан қатъий мантиқий йўл билан исботланган геометрик теоремалар системасига қадар ривошланиш даврини қадимги грек олими Евдема (эр. ав. IVаср) бундай тавсифлаган: «Геометрияни мисрликлар ўйлаб топган ва у ер ўлчаш жараёнида пайдо бўлган. Бу ўлчаш ишларини юритиш Нил дарёси тошиб, ер майдонларининг чегараларини ювиб кетиши оқибатида зарур бўлган. Бу илмнинг ҳам бошқа илмлар каби инсониятнинг амалий эҳтиёжидан пайдо бўлганлаги ажабланарли ҳол эмас. Ҳар бир пайдо бўлган илм ўзининг содда етилмаган шаклидан такомиллашган шаклига кўчади. Дастлаб сезги идроки натижасида пайдо бўлиб, аста-секин муҳокамага солинадиган фанга (мавзуга) айланади ва ниҳоят, заковат маҳсулига айланади».

Шу даврнинг (эр. ав. IVаср) энг ажойиб ютуқларидан бири – у ўзаро ноўлчовдош кесмаларнинг очилиши эди. Масалан, квадрат диагоналлари ва томонлари ўлчовдош эмас, яъни квадратнинг диагоналлари ва томонларини бутун сонлар билан ифодалаш мумкин бўлган бирлик кесма сифатида қабул қилинадиган кесма топилмайди. Бундан узунликларни ифодалаш учун рационал сонларнинг етарли эмаслиги келиб чиқади. Аммо қадимги юнон математиклари иррационал сон тушунчасини кирита олмадилар. Умуман, қадимги математиклар, биз ҳозирги кунда формулалар ёрдамида ёзаётган ифодаларни геометрик йўл билан гаплар орқали ифодалаганлар. Чунончи, $x^2+ax=b$ тенгламани бундай ёзишган: «*Шундай кесмани ясаш керакки, ундан ясалган квадрат билан бирга ундан ва берилган кесмадан ясалган тўғри тўртбурчак берилган юзага тенг бўлиши керак*». Улар ҳақиқий сонлар ўрнига кесмалар нисбатида қараганлар. Эр. ав. IV асрда грек олими Евдокс изчил равишда нисбатлар назариясини яратган.


Евклид

Эр. ав. III асрда қадимги юнон олими Евклид «Негизлар» деб аталувчи улуғ асарини ёзган. Бу асарларида Евклид ўзига қадар маълум бўлган маълумотларни тўплаб, геометрияни аксиоматик асосда баён қилган. Мазкур китоб шу қадар яхши ёзилган эдики, ундан кейинги 2000 йил мобайнида барча математиклар геометрияни ушбу китобни ўқиб ўрганганлар ва шунга қадар маълум асарлар унутилган (масалан, Гиппократнинг «Бошланғичлар»и).

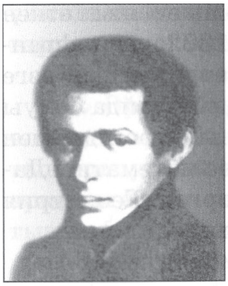
Евклиддан сўнг грек олимлари юза ва ҳажмни топиш усулларини такомиллаштирдилар (Архимед, эр. ав. 287-212), конус кесимларини текширдилар (Аполлоний, эр. ав. 260-170), тригонометрия асосини (Гиппарх, эр. ав. 180-125), сферик тригонометрияни (Менелий, I-II аср) ва бошқаларни шакллантирдилар. Лекин ундан кейинги асрларда Уйғониш даврига қадар Европада геометрия ривожланмади. Черков хизматчиларининг тазйиқи остида қадимги таълимот ютуқлари қатъий таъқиқланиб, кўп ҳолларда ёқиб юборилди. Шундай қилиб, геометрия тараққиёти тўхталиб, сонлар назарияси (алгебра) ривожлана бошлади. Бу назария дастлаб юнон олими Диофант (III аср) асарларидан бошланиб, кейинроқ Ҳиндистонда ривожланди. Ҳинд олимлари бутун дунёга *О* сонини, ўнлик саноқ системаси, манфий ва иррационал сон тушунчасини тарқатишди. Сўнгра алгебра Ўрта Осиё мамлакатларида жадал суръатда ривожлана бошлади. Хусусан, алгебранинг асосчиси Муҳаммад ал-Хоразмий (787-850) бўлган. Унинг машҳур «Китоб ал-жабр вал-муқобала» асари номидан «алгебра» атамаси пайдо бўлган. Алгебра (ал-жабр) сўзи араб тилида тенгламанинг бир томонидаги ҳадни унинг иккинчи томонига ишорасини ўзгартириб ўтказиш деганини билдиради. Ал-Хоразмий исмидан эса замонавий «алгоритм» атамаси пайдо бўлган.

Р. Декарт

Кейинроқ, форс ва тожик шоири ҳам олими Умар Хайём (1048-1131) сонларга ихтиёрий катталикларнинг нисбати сифатида умумий таъриф берган. Умар Хаём ўз асарларида учинчи даражали тенгламаларни ечишнинг умумий қоидаларини келтирган. Умуман, Ўрта Осиё мамлакатларида алгебранинг ривожланишига: ал-Фаробий (870-950), ал-Беруний (973-1050), Насриддин ат-Тусий (1201-1274), Жамшид ал Коший (1436 йиллар чамасида вафот этган) каби буюк алломалар катта ҳисса қўшганлар. Бу олимларнинг асарларида 4-даражали тенгламаларни ечиш, тригонометрик функциялар жадваллари, 17-хонагача аниқликда ҳисобланган $\pi \approx 3,1415926535897932 5$ сони ва Евклиднинг V постулатини исботлашга бағишланган маълумотлар учрайди. Албатта, бу асарлар математиканинг ривожланишига зўр таъсир кўрсатган. Мўғил-татар босқинчилигидан кейин бу мамлакатлардаги фан тараққиёти мутлақо тўхтаб, Европага қайта алмашади. Геометриянинг кейинги ривожига машҳур француз олими Рене Декартнинг (1596–1650) тўғри бурчакли координаталар системаси зўр таъсир кўрсатди. Декарт ўз асарларида илк бор белгилашлар киритиш орқали алгебра ва геометрияни чамбарчас боғланган ҳолда

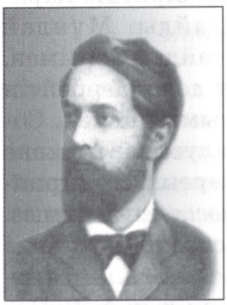
И. Ньютон

Г. Лейбниц



Н.И. Лобачевский

К. Гаусс



Ф. Клейн

Д. Гильберт

тенгламалар билан берилган ихтиёрий эгри чизиқларни қараб чиқди. XVII асрда эса инглиз олими Исаак Ньютон (1643–1727) ва немис математиги Готфрид Лейбниц (1646–1716) дифференциал ва интеграл ҳисоблашлар назариясининг пойдеворини қурдилар. Шунинг билан бирга математика ривожининг янги даври бошланди. Бу очилган «анализ» (таҳлил) усуллари геометрияни четлаб ўтгани йўқ. XVIII аср ўрталарида Леонард Эйлер дастлаб ўша анализ ва координаталар усулини татбиқ қилган ҳолда аналитик геометрияни изчиллаштирди ва ёзиб чиқди. Кейинроқ ирланд математиги Уилям Гамильтон (1805–1865) геометрияга вектор тушунчасини киритди.

Математика гуркираб ривожлангани билан геометриянинг 2000 йил мобайнида ўз ечимини топмай келаётган муаммоси бор эди. Айнан мана шу муаммони ҳал қилиш борасида XIX асрда янги ноевклид геометриянинг асосини яратувчилар: рус математиги Н. И. Лобачевский (1792–1856), венгр математиги Янош Больяй (1802–1860) ва улуғ немис математиги Карл Гаусс (1777–1855) катта иш олиб бордилар. Бошқалар каби улар ҳам тескари фараз қилиш усули билан Евклиднинг параллеллик ҳақидаги V постулатини исботлашга ҳаракат қилдилар. Улар берилган тўғри чизиқдан ташқарида жойлашагн нуқтадан шу тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида иккита тўғри чизиқ ўтади деб мулоҳаза юритиб, бир-бирига зид, иккита қарама-қарши тасдиқларни олишга ҳаракат қилдилар. Бу тасдиқлар исботланганда эди, Евклиднинг параллеллик аксиомаси исботли эканини билдирар эди. Бироқ Н. И. Лобачевский қарама-қарши тасдиқни ололмади. Хусусан, улар ўша пайтдаги ривожланиш даражаси билан таққослаганда жуда далил хулоса чиқардилар: ноевклид геометрия мавжуд. Бу геометрия (Лобачевский геометрияси) тўғрисидаги маълумотлар билан кейинги параграфда батафсил танишамиз. Янги геометриянинг очилиши фан тараққиётига зўр таъсир кўрсатди. Лобачевский геометрияси ўринли бўлган сирт очилгандан сўнг, жамият уни Лобачевский геометриясининг «далили» сифатида қабул қилди. Бу сирт «псевдосфера» деб аталди ва уни 1862 йили итальян математиги Э. Бельтрами таклиф этди. Шундан икки йил ўтгандан сўнг немис математиги Ф. Клейн (1849-1925) ва 1882 йили француз математиги А. Пуанкаре Лобачевский геометриясининг бошқа моделларини таклиф этдилар. Ноевклид геометриянинг пайдо бўлиши евклид геометриясининг ўзини қатъийроқ мантиқий усуллар билан асослаш заруратини туғдирди. Бу соҳада немис математиги Давид Гильберт (1862-1943) 1899 йили дунё кўрган «Геометрия асоси» номли асари билан салмоқли ҳисса қўшди.

2-§. Евклид планиметриясининг аксиомалари системаси

Геометрик тушунчалар ва тасдиқлар мазкур фаннинг аҳамиятли ташкил этувчиларидир. Тушунчалар аниқланади, тасдиқлар (теоремалар) эса исботланади. Лекин ихтиёрий тушунчани аниқлаш мумкин бўлавермайди ва шу каби ихтиёрий тасдиқни ҳам исботлаш имкони бўлмайди. Сабаби, берилган теоремани исботлаш борасида унинг бошқа, ҳақиқатлиги маълум тасдиқлардан келиб чиқишига ишонч ҳосил қиламиз. Геометрияни дастлаб ўргана бошлаганимизда эса ихтиёримизда «ҳақиқат тасдиқлар» заҳираси бўлмайди. Шунинг учун баъзи дастлабки тасдиқларни исботсиз, ҳақиқат тасдиқлар сифатида қабул қиламиз. Бундай тасдиқлар аксиомалар деб аталади. Шунга ўхшаш дастлабки бир неча содда тушунчалар ҳам таърифсиз қабул қилинади. Бундай тушунчалар назариянинг асосий тушунчалари деб аталади. Шундай қилиб, аввал аниқланмайдиган асосий тушунчалар билан исботланмайдиган асосий тасдиқлар (аксиомалар) рўйхатини тузиб олишимиз керак. Бундан қолган барча тушунчалар аниқланиши, шунингдек, қолган тасдиқларнинг ҳаммаси исботланиши керак. Геометриянинг шу усулдаги тузилиши аксиоматик усул дейилади.

Мактаб геометриясига оид бир неча аксиомалар системаси мавжуд. Бу аксиомалар системасини А. Н. Колмогоров, А. Д. Александров, А. В. Погорелов ва б. тузишган. Мазкур дарслик А. В. Погорелов тузган аксиомалар системасига асосланган.

Бу ерда аниқланмайдиган тушунчалар сифатида – нуқта, тўғри чизиқ, текислик, устида ётиш, орасида ётиш кесма узунлиги ва бурчак ўлчамлари олинган. Навбатдаги тасдиқлар аксиомалар сифатида қабул қилинади.

I. Тўғри чизиқ қандай бўлишидан қатъий назар шу тўғри чизиққа тегишли ва тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд. Ҳар қандай икки нуқта орқали битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

II. Тўғри чизиқдаги учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитасининг орасида ётади.

III. Ҳар бир кесма нолдан катта бўлган маълум узунликка эга. Кесманинг узунлиги унинг исталган нуқтаси билан бўлинган қисмларининг узунликлари йиғиндисига тенг.

IV. Тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади.

V. Ҳар бир бурчакнинг нолдан катта маълум бир градус ўлчови мавжуд. Ёйиқ бурчак катталиги 180^0 га тенг. Бурчакнинг градус ўлчови шу бурчак томонлари орасидан ўтувчи ихтиёрий нур билан бўлинган қисмларининг градус ўлчовлари йиғиндисига тенг.

VI. Ихтиёрий нурда унинг бошланғич нуқтасидан бошлаб берилган узунликдаги кесмани ўлчаб қўйиш мумкин ва бу кесма ягонадир.

VII. Ихтиёрий нурдан берилган ярим текисликка берилган (180^0 дан кичик) градус ўлчовидаги бурчакни ўлчаб қўйиш мумкин ва бу бурчак ягонадир.

VIII. Берилган нурга нисбатан кўрсатилган тартибда жойлашган ихтиёрий учбурчакка тенг учбурчак мавжуд.

IX. Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали текисликда шу тўғри чизиққа параллел битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Ушбу кўрсатилган асосий тушунчалар ва аксиомаларни қабул қилган ҳолда Евклид планиметриясини тамомила тиклаш мумкин.

3-§. Евклиднинг V постулати ва Лобачевский геометрияси

Қадим даврлардаёқ олимлар геометрияни (математикани) юқорида кўрсатилгандек, қатъий аксиоматик асосда баён этишга ҳаракат қилганлар. Фақат Евклиднинг «Негизлари» гина ана шундай асосда ёзилган бўлиб, шу кунга қадар сақлангандир. Бу асар 13 китобдан ташкил топган. Улардан I–IV ва VI китоблар планиметрияга, XI–XIII китоблар стереометрияга бағишланса,қолган китобнинг ҳар бир китоби дастлаб кўрилаётган тушунчаларга таъриф беришдан бошланади. Масалан, I китобда 23 та таъриф берилган.

Мисол тариқасида қуйидагиларни келтирамиз:

1-таъриф. *Ҳеч қандай қисмга эга бўлмаганни нуқта деймиз.*

2-таъриф. *Чизиқ – бу эни бўлмаган узунлик.*

3-таъриф. *Ўзининг ҳамма нуқталарига нисбатан бир хил жойлашган чизиқни тўғри чизиқ деб атаймиз ва ҳ.к.*

«Негизлар» нинг ушбу китобида таърифлардан сўнг постулатлар ва аксиомалар рўйхати берилган. Масалан,

I постулат. *Ҳар бир нуқтадан ихтиёрий иккинчи нуқтага қадар тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлиги.*

V постулат. *Агар тўғри чизиқ бошқа икки тўғри чизиқ билан кесишганда ҳосил бўладиган ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси иккита тўғри бурчакдан кичик бўлса, у ҳолда бу чексиз икки тўғри чизиқ йиғиндиси иккита тўғри бурчакдан кичик бўлган бурчаклар томонида кесишиши зарур.*

1-аксиома. *Якка-якка учинчига тенг бўладиганлар ўзаро тенг бўлади ва ҳ. к.*

Евклид ўз китобларида исботсиз қабул қилинган тасдиқлар (аксиомалар) ни қандай принципларга суянган ҳолда постулатлар ва аксиомаларга бўлганини тушунтирмаган. «Негизлар»да постулатлар ва аксиомалардан сўнг қатъий мантиқий тартибда жойлаштирилган тасдиқлар (теоремалар, масалалар) келтирилган.

Евклиднинг «Негизлар»и шу қадар яхши ёзилган эдики, ундан олдинроқ босилиб чиққан шу каби асарлар эътиборсиз қолди ва унутилди. XX асрд мобайнида бутун жаҳон математиклари геометрияни шу асар орқали ўқиб ўргандилар. Евклид «Негизлар»и минг йиллар давомида беқиёс, намунали асар бўлиб келгани билан, шу кунги математик нуқтаи назардан қатъий мантиқий тузилиши жиҳатидан анча камчиликларга эга. Масалан, 3-таърифда айтилган чизиқни айлана деб ҳам тушуниш мумкин. 2-таърифдаги эн ва узунлик тушунчалари қўшимча таърифга муҳтож. Аммо Евклид таърифларининг ҳаммаси ҳам ана шундай шубҳали деб қараш мумкин эмас. Айниқса, унинг аксиомалари ва постулатлари жуда тўғри ва қатъий мантиқий принципларга суянган ҳолда тузилган.

Кейинги олимлар «Негизлар» камчиликларини тузатиб, уни такомиллаштиришга ҳаракат қилдилар. Евклид постулатлари ва аксиомалари сонини мумкин қадар камайтириб, унинг мантиқий тузилишини мукаммаллаштириш борасида кўп ишлар олиб борилди ва бу йўналишда бир қатор асарлар пайдо бўлди. Чунончи, тўғри бурчакларнинг тенглиги тўғрисидаги IV постулат қолган постулат ва аксиомаларнинг натижаси сифатида исботланди. Кейинчалик математикларнинг назари V постулатга ўтди, ваҳоланки бу постулат тузилиши бўйича аксиомадан кўра теоремага яқин эди. Шундай қилиб, математиклар «Негизлар» ни V постулатдан ажратишга (яъни уни теорема каби исботлашга) кўп асрлар мобайнида натижасиз ҳаракат қилдилар. Улар

V постулатни исботлаш жараёнида аксарият ҳолларда унинг ўзига эквивалент тасдиқларни қўлландилар. Масалан, қуйидаги тасдиқлар Евклиднинг V постулатига эквивалент.

1. Ўткир бурчакнинг бир томонига перпендикуляр бўлган ҳар бир тўғри чизиқ унинг иккинчи томонини кесиб ўтади.

2. Ички бурчакларнинг йиғиндиси иккита тўғри бурчакка тенг бўлган учбурчаклар мавжуд.

3. Тўғри чизиқдан ташқарида жойлашган нуқта орқали берилган тўғри чизиққа параллел фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва ҳ. к.

Мазкур усулда V постулатни «исботланганлар» қаторига Умар Ҳайём, Прокл, Насриддин ат-Тусий ва бошқа олимларни қўшиш мумкин. Масалан, тадқиқот мобайнида Умар Ҳайём V постулатни «учбурчакларнинг ички бурчаклари йиғиндиси иккита тўғри бурчакка тенг бўлади» деган тасдиққа суянган ҳолда исботлаш мумкин эканини кўрсатган.

XVIII-XIX асрларда математикларнинг V постулатни исботлашга қўллаган усулларининг асосий моҳияти қуйидагича эди: V постулат унга тескари ёки ўша тескари тасдиққа эквивалент аксиома билан алмаштирилган. Сўнгра, бу аксиома Евклиднинг қолган аксиомалари билан бирлаштирилиб, қатъий мантиқий усулда турли натижалар исботлаб чиқарила бошланган. Агар шу исботлаш борасида бир-бирини инкор этувччи иккита тасдиқ олиш мумкин бўлса, V постулат қолган постулат ва аксиомаларнинг натижаси бўлур эди. Саккери, Ламберт Лежандр V постулатни бевосита шу усул билан исботлашга уринишганлар.

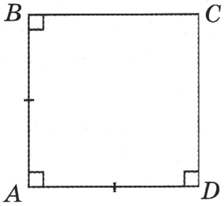
Масалан, Лежандр ўз «исбот» ларида учбурчаклар ички бурчаклари йиғиндиси хусусида қуйидаги уч гипотезани кўриб чиққан:

1. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси иккита тўғри бурчакка тенг.

2. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси иккита тўғри бурчакдан катта.

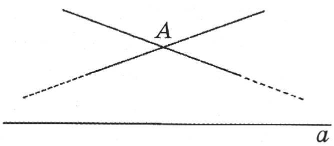
3. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси иккита тўғри бурчакдан кичик.

Лежандр биринчи гипотезанинг V постулатга эквивалент эканлигини, иккинчи гипотезанинг асоссиз кўрсатган ва ҳисоблашларда хатоликка йўл қўйиб, учинчи гипотезадаги зиддиятни кўрсатган. XVIII аср математиклари орасида ноевклид геометрияни очишга энг яқини Ламберт бўлди. У ўз асарларида 190-расмдаги каби учта бурчаги тўғри бўлган тўртбурчакни қаради. Унда Лежандр сингари тўртбурчакнинг тўртинчи бурчагига нисбатан тўғри, ўтмас ва ўткир бўлган бурчаклар гипотезаларини қараб чиқди. Бунда ҳам тўғри бурчак гипотезаси V постулатга эквивалент, ўтмас бурчак гипотезаси асоссиз экани кўрсатилди. Ламберт ўткир бурчак гипотезасини ривожлантира бориб, Евклид геометрияси нуқтаи назаридан «мантиқсиз» бўлган турли тасдиқларни олган. Бу «мантиқсиз» тасдиқларни V постулатни ечими сифатида қабул қилиш мумкин эмас эди.



190-расм

Бу муаммони дастлаб улуғ рус олими Николай Иванович Лобачевский (1792-1856) ҳал этди. У ҳам аввалги олимлар каби V постулатни унга тескари тасдиқ билан алмаштирди. Бу тасдиққа кўра: «*Берилган тўғри чизиқдан ташқарида жойлашган нуқтадан шу тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида иккита тўғри чизиқ ўтказиш мумкин*» (191-расм). Мазкур аксиома ёрдамида Лобачевский ўзидан бурунги олимлар каби бир-бирига зид келувчи тасдиқлар олишга ҳаракат қилди. Лекин у ўзининг ўзгартирилган аксиомалар системасини «Негизлар» ҳажмигача ривожлантиргани билан ҳеч қандай зидликни топа олмади. Унинг эвазига Лобачевский анализнинг баъзи ечилмаган масалаларини ўша назария ёрдамида ҳал этди. Шунинг учун у 1826 йили Евклиднинг V постулати бажарилмайдиган, бошқа янги геометриянинг бор эканлигини айтди. Албатта, дастлаб Лобачевскийнинг бу хулосаси асоссиз бўлиб кўриниши мумкин. Негаки унинг аксиомалар системасини ривожлантира бориб, охирида бирор зидликка учрамаслигимизга ҳеч ким кафиллик бера олмайди. Иккинчи томондан, айнан шу фикрни Евклиднинг «Негизлар»и ҳақида ҳам айтиш мумкин. Яъни Евклиднинг аксиомалар системасини ривожлантириб, ҳеч қандай зидликка дуч келмаслигимизга ҳам ҳеч ким кафолат бермайди. Шунинг учун мантиқий зиддият бўйича Евклид ва Лобачевский геометриялари бир хил ҳолатда. Шунингдек, бу геометриялар орасида чамбарчас боғланиш мавжуд ва бирининг мантиқий зиддиятсизлиги иккинчисининг зид эмаслигига боғлиқдир, бу кейинроқ кўрсатилди. Лобачевский ўзининг ушбу янги геометриясини «*фаразий геометрия*» («воображаемая геометрия») деб атаган. Н. И. Лобачевский ноевклид геометрияни биринчи бўлиб очгани билан у ягона бўлгани йўқ. Уч йилдан кейин венгр математиги Янош Больяй (1822-1860) Лобачевскийдан мустақил ҳолда кичикроқ ҳажмда шу назария ҳақидаги асарини эълон қилди. Кундаликларида ноевклид геометриянинг мавжудлиги ҳақида қўлёзмалар қолдирган, ўз даврида математика қироли аталган улуғ немис математиги Карл Гаусс ҳам шундай фикрга келган. Лекин у тушунмовчиликдан қўрқиб, кўзи тириклигида ноевклид геометрия ҳақида биронта мақола эълон қилмаган.



191-расм

Дарҳақиқат, Лобачевскийнинг аксарият замондошлари унинг очган янгилигини тан олмасдан ноевклид геометрияга «оддий валдираш» деб қарашган. Шунинг учун Лобачевский геометрияси қатъий мантиқий усулда асосланишга муҳтож эди. Бу муаммони бундай тушунмоқ лозим: ҳар бир аксиоматик назария ўз асосида қуйидаги уч шартни қаноатлантириши керак.

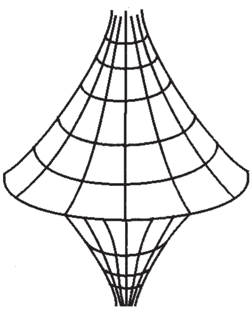
1. Қурилаётган аксиомалар системаси ***қарама-қаршиликсиз***

бўлиши керак. Бошқача айтганда, берилган аксиомалар системаси бажариладигаан камида битта аниқ объект (модель) мавжуд бўлиши керак. Агар T назариянинг аксиомалари бажариладиган P модель мавжуд бўлганда эди, бу ўз навбатида T назариядан бир-бирини инкор этувчи иккита тасдиқ олиш мумкин эмаслигини билдирар эди. Чунки бу ишонч P модель элементлари табиатидан келиб чиқади. Масалан, Евклид аксиомаларининг аниқ модели сифатида декарт текислигини олиш мумкин. Бу текисликнинг асосий элементи – ҳақиқий сонлар, аниқроқ айтганда, нуқтанинг координаталари (ҳақиқий сонлар) бўлади. Бундан ушбу тасдиқ келиб чиқади:

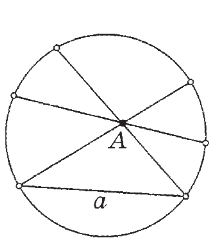
Агар ҳақиқий сонлар арифметикаси зиддиятсиз бўлса, Евклиднинг аксиомалар системаси ҳам зиддиятсиз бўлади.

2. Иккинчида, аксиомалар системаси *тўлиқ* бўлиши керак. Бошқача айтганда, берилган аксиомалар қўрилаётган назарияни батафсил тузиш учун етарли бўлиши керак, яъни бу аксиомалар системасини уларга зид бўлмаган ёки уларнинг натижалари бўлмайдиган янги аксиомалар билан тўлиқтириш мумкин бўлмаслиги керак. Масалан, Евклиднинг аксиомалар системасининг тўлалиги исботланган.

3. Учинчидан, аксиомалар системаси *мустақил* бўлиши керак. Яъни системанинг ҳар бир аксиомаси бошқа аксиомаларнинг натижаси сифатида исботланмаслиги керак. Одатда, T назариядаги α аксиоманинг мустақил эканини исботлаш учун T назариянинг α аксиомаси бажарилмайдиган модели ясалади. Агар бундай модель ясаш мумкин бўлса, α аксиома мустақил бўлади. Ваҳоланки, Евклид геометриясининг ҳамма аксиомалари мустақилдир.



192-расм



193-расм

Шу нуқтаи назардан Лобачевский геометриясининг зиддиясизлигини исботлаш зарурати туғилади. 1862 йили итальян математиги Э. Бельтрами эгрилиги ўзгармас манфий сонга тенг бўлган сиртда Лобачевский геометрияси ўринли эканини кўрсатди (192-расм). Бу сирт *псевдосфера* деб аталади ва шу кашфиёт Лобачевский геометрияси зиддиясизлигининг исботи сифатида қабул қилинган. Аммо бу сирт Лобачевский геометриясининг чекланган қисмигина бажариларди, негаки эгрилиги манфий чексиз сиртнинг мавжуд эмаслиги исботланган эди. Кўп ўтмасдан немис математиги Ф. Клейн (1849-1925) ва француз математиги А. Пуанкаре (1854-1912) Лобачевский геометриясига ўз моделларини таклиф этишди. Масалан, Лобачевский текислигининг модели сифатида Ф. Клейн чегарасидаги нуқталари тегишли бўлмаган очиқ доирани олиб кўрди. Бу моделда доира нуқталари Лобачевский геометриясининг нуқталари, ватарлари эса тўғри чизиқлар сифатида қаралиб, Лобачевский геометриясининг бажарилиши кўрсатилди 193-расм).

4-§*. Фақат циркуль ва чизғич ёрдамида ечиб бўлмайдиган ясашга доир масалалар

Умуман, геометрик ясашга доир масалалар ўз ҳолича қийин масалалардир. Шунинигдек, фақат циркуль ва чизғич ёрдамида ечиб бўлмайдиган масалалар ҳам учрайди. Уларга Евклиднинг V постулати каби қадим замонларданоқ кўплаб мутафаккир олимлар диққатини жалб қилган қуйидаги масалалар тааллуқли.

1. Кубни иккилантириш масаласи: *ҳажми берилган ҳажмидан икки марта катта кубнинг қирраларини ясаш.*

2. Бурчакни тенг учта бўлакка бўлиш масаласи: *ихтиёрий бурчакни ўзаро тенг учта бўлакка бўлиш.*

3. Доиранинг квадратураси: *радиуси r бўлган доирага тенг катталикда квадрат ясаш.*

4. Мунтазам *n* бурчакни ясашга доир масала.

Шу масалаларнинг умумий ҳолда ечиб бўлмаслигини қуйидаги умумий теоремадан олиш мумкин.

Теорема. *Агар ясашга доир масаланинг аналитик ечими рационал амаллар билан квадрат илдизлар орқали ифодаланса, бу ясашга доир масалани циркуль ва чизғич ёрдамида ечиб бўлмайди. Ва аксинча, ясашга доир масаланинг аналитик ечими рационал амаллар билан квадрат илдизлар орқали ифодаланса, бу масала циркуль ва чизғич ёрдамида ечилади.*

Бу теорема олий алгебра курсида мактаб курсига киритилмаган маълумотлар асосида исботланади. Масалан, кубни иккилантириш масаласининг аналитик ечими $x^3=2$ тенгламадан иборат. Унинг илдизи $\sqrt[3]{2}$ квадрат илдиз орқали ифодаланмайди. Жумладан, кубни иккилантириш масаласи циркуль ва чизғичдан фойдаланиб ечилмайди. Шу каби 2- ва 3-масалаларнинг ҳам циркуль ва чизғич ёрдамида ечилмаслигини кўрсатиш мумкин. Аниқроқ айтганда, айнан 2-масала $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ формула билан учинчи даражали иррационал илдизли тенгламага келтирилади. 3-масаладаги $x=\sqrt{\pi}$ сони ҳеч қандай рационал коэффициентли тенгламанинг илдизи бўлмайди.

1796 йили К. Гаусс 4-масаланинг ечимини қуйидаги теорема ёрдамида батафсил берган.

Гаусс теоремаси. *Мунтазам n бурчакни циркуль ва чизғич ёрдамида ясаш учун n сони* $n=2^m p_1 p_2 \ldots p_s$ кўринишида берилиши зарур ва етарлидир. Бунда p_1, p_2,...,p_n сонлар $2^{2^k}+1$ бериладиган туб сонлар.

Ушбу теоремани ҳам исботсиз келтирамиз.

Агар $k=0$, $m=0$, $s=1$бўлса, у ҳолда $n=3$.

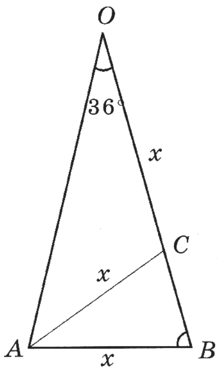
Агар $k=1$, $m=0$, $s=1$бўлса, у ҳолда $n=5$.

Агар $k=2$, $m=0$, $s=1$бўлса, у ҳолда $n=17$ бўлади.

Бунда мунтазам 3, 5, 17 бурчакларни циркуль ва чизғич ёрдамида ясаш мумкин. 7, 9, 11, 13, 14 сонларни эса теоремада кўрсатилган кўринишда ёзиш мумкин эмас. Демак, мунтазам

7, 9, 11, 13, 14 бурчакли кўпбурчакларни циркуль ва чизғич ёрдамида ясаш мумкин эмас.

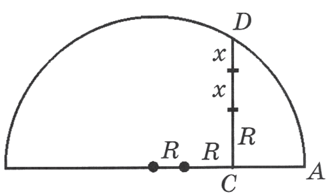
1-мисол. Радиуси R га тенг айланага ички чизилган мунтазам ўнбурчакни ясаш керак.



194-расм

Ечилиши. Мунтазам ўнбурчакнинг томони учидаги бурчаги 36°, ён томонлари эса R бўлган тенг ёнли учбурчакнинг асосидир. Асосдаги бурчакнинг биссектрисаси бу учбурчакни иккита тенг ёнли учбурчакларга бўлади (194-расм): *ΔABC ва ΔAOC*.

Шунинг учун $AB=AC=OC$. Биссектрисанинг хоссасига кўра $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{OC}{OA}$. Бундан $AB=x$, $OA=OB=R$ белгилашни киритиб, $\dfrac{R-x}{x}=\dfrac{x}{R}$ ёки $x^2+R\cdot x-R^2=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг мусбат илдизи ушбу кўринишга эга:



195-расм

$\dfrac{-R+\sqrt{5R^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ у квадрат илдиз ва рационал сонлар орқали ифодаланади. Демак, циркуль ва чизғич ёрдамида ясалади. Бу кесмани ясаш қийин эмас. Уни 195-расмда кўрсатилган усулда ясаш мумкин (уни мустақил исботланг).

Такрорлашга доир масалалар

775. Томонлари умумий $\angle AOB=\alpha$ ва $\angle BOC=\beta$ бурчаклар берилган. Шу бурчаклар биссектрисалари орасидаги бурчакни аниқланг. Бу бурчаклар қўшни бўлган ҳолни қараб чиқинг.

776. $\angle AOB=\alpha$, $\angle BOC=\beta$ ва $\angle COD=\gamma$ бурчаклар кетма-кет жойлашган. AOB ва COD бурчаклар биссектрисалари орасидаги бурчакни топинг.

777. Учбурчакнинг учи ва унинг қаршисидаги томони билан чегараланган кесма учбурчакнинг энг катта томонидан кичик бўлишини исботланг.

778. Учбурчакнинг икки томони билан чегараланган кесма унинг энг катта томонидан кичик бўлишини исботланг.

779. Тенг ёнли учбурчакнинг учидан асосига ўтказилган параллел тўғри чизиқ учбурчакнинг шу учидаги ташқи бурчак биссектрисаси бўлишини исботланг.

780. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бурчаклари бўйича унинг тўғри бурчагидан туширилган баландлиги билан медианаси орасидаги бурчакни топинг.

781. Учлари ихтиёрий тўртбурчак томонларининг ўрталарида жойлашган тўртбурчак параллелограмм эканини исботланг.

782. Трапеция диагоналларининг ўрталари билан ён томонларининг ўрталари бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

783. Асосларининг узунлиги бўйича трапеция диагоналлари ўрталари орасидаги масофани топинг.

784. Айланага ички чизилган учбурчакнинг бурчаклари бўйича шу учбурчак учларидан айланага ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакларни топинг.

785. Қандай шартлар бажарилганда учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази унинг ичида, томонида, ташқарисида ётади?

786. Ҳар қандай иккита квадратнинг ўхшаш эканини исботланг.

787. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг BC асоси a га тенг. D, E нуқталар мос AB ва BC томонларни $m:n$ нисбатда бўлади. DE нинг узунлигини топинг.

788. Параллелограммни икки қисмга шундай ажратингки, улардан тўғри тўртбурчак тузиш мумкин бўлсин.

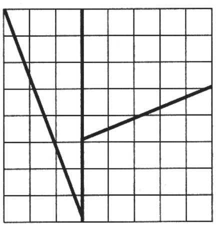
789. Учбурчакни тўғри тўртбурчак тузиш мумкин бўлган учта қисмга ажратинг.

790. Трапеция ўзининг диагоналлари билан тўртта учбурчакка бўлинади. Унинг ён томонлари асослари бўлувчи учбурчаклар тенг катталикда бўлишини исботланг.

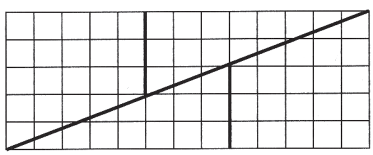
791. Радиуслари R ва r бўлган ва ўзаро ташқи уринувчи айланаларнинг умумий уринмасини топинг.

792. Юзи берилган учбурчак билан бир хил бўлган квадрат ясанг.

793. Томонлари 8 см бўлган квадрат 196-расмда кўрсатилгандай кесиб олинган ва ундан 197-расмдагидек тўғри тўртбурчак тузилган. Нима учун ҳосил бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи квадратнинг юзига тенг эмас?



196-расм



197-расм

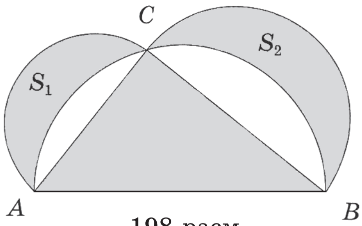
794. Агар a, b, c – учбурчак томонлари, R – унга ташқи чизилган айлананинг радиуси бўлса, $S = \dfrac{abc}{4R}$ эканини исботланг.

795. Агар h_1, h_2, h_3 – учбурчак баландликлари, r – унга ички чизилган айлананинг радиуси бўлса, $\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} = \dfrac{1}{r}$ эканини исботланг.

796. a, b, c учбурчак томонлари бўйича h_a баландликни ва учбурчакнинг юзини топинг.

797. Тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиши учун унинг қарама-қарши томонлари квадратларининг йиғиндиси тенг бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

798. Учбурчакка ярим доиралар шундай чизилганки, бунда тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари унинг диаметрлари бўлади. Ушбу ярим доиралардан каттасининг юзи қолган иккита ярим доира юзларининг йиғиндисига тенг эканини кўрсатинг.



198-расм

799. 198-расмдаги диаметрлари ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари бўлувчи ярим айланалар билан чегараланган ярим ойларнинг юзлари мос равишда S_1 ва S_2 га тенг бўлса,

$S_{ABC}= S_1 +S_2$ тенглик бажарилишини исботланг.

800. Периметри $2p$, диагоналларининг йиғиндиси m га тенг бўлган ромбнинг юзини топинг.

801. Агар учбурчакнинг иккита томони a ва b га, юзи эса $S=\frac{3}{5}ab$ тенг бўлса, унинг учинчи томонини топинг.

802. Учбурчакнинг 4 см га тенг баландлиги унинг асосини 1:8 нисбатда бўлади. Учбурчакни иккита тенг катталикдаги қисмларга ажратувчи ва шу баландликка параллел кесманинг узунлигини топинг.

803. R радиусли айланага кичик томони $1,5R$ га тенг трапеция ташқи чизилган. Шу трапециянинг юзини топинг.

804. Периметри $2p$, баландликлари h_1 ва h_2бўлган параллелограммнинг бурчакларини топинг.

Планиметрияни такрорлашга доир саволлар

Биз бу ерда планиметрия курсини такрорлашга доир назарий саволлар тизимини келтирамиз. Берилган саволлар орасида * белгиси билан белгиланган саволлар ҳам учрайди. Бу саволлар математика чуқурлаштирилиб ўқитиладиган синф ўқувчилари учун мўлжалланган ва уларни умумтаълим мактабларининг ўқувчилари билишлари шарт эмас.

7-синф

1. Геометрия нима? Планиметрия нима?
2. «*B* нуқта *A* ва *C* нуқталар орасида ётибди» деганда нимани тушунасиз?
3. Нур, тўлдирувчи нур нима?
4. Кесма, кесманинг охирлари, кесманинг ички нуқталари нима?
5. Кесма узунлиги қандай асбоблар ёрдамида ўлчанади? Қандай ўлчов бирликларини биласиз?
6. Қандай фигура бурчак дейилади? Бурчакнинг қандай элементлари бор ва у қандай белгиланади?
7. Ёйиқ, тўғри, ўткир ва ўтмас бурчак нима?
8. Бурчак катталиги қандай асбоб билан ва қандай бирликларда ўлчанади?
9. Қўшни бурчаклар нима ва қўшни бурчакларнинг йиғиндиси нимага тенг?
10. Вертикал бурчаклар нима ва уларнинг қандай хоссаларини биласиз?
11. Қандай тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади?
12. Ички алмашинувчи, мос ва ички бир томонли бурчаклар нима?
13. Қандай тўғри чизиқлар параллел дейилади?
14. Тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатларини айтинг ва исботланг.
15. Параллел тўғри чизиқларнинг қандай хоссаларини биласиз (учинчи тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ ҳақида)?
16. Учбурчак нима? Учбурчакнинг қандай турларини биласиз? Уларнинг қандай элементлари мавжуд?
17. Учбурчакнинг медианаси, биссектрисаси, баландлиги нима?
18. Учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси ҳақидаги теоремани исботланг.
19. Учбурчаклар тенглигининг аломатларини айтинг ва исботланг.

20. Тўғри бурчакли учбурчак нима? Унинг қандай хоссаларини биласиз?

21. Тўғри бурчакли учбурчаклар тенглигининг аломатларини исботланг.

22. Перпендикуляр, оғма, проекция нима ва уларнинг қандай хоссаларини биласиз?

23. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа сифатида қандай кесманинг узунлиги олинади?

24. Учбурчак уч томони бўйича, икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича, бир томони ва унга ёпишган иккита бурчаги бўйича қандай ясалади?

25. Берилган бурчакка тенг бурчак қандай ясалади?

26. Бурчакнинг биссектрисаси қандай ясалади?

27. Кесма ўртаси қандай топилади?

28. Берилган нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр қандай ясалади?

29. Кесманинг ўрта перпендикуляри нима? У қандай ясалади?

30. Айлана нима? Унинг қандай элементларини биласиз?

8-синф

1. Қандай фигура кўпбурчак дейилади? Қавариқ кўпбурчак нима?

2. Қавариқ кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси нимага тенг? Ташқи бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?

3. Қандай фигура тўртбурчак дейилади? Унинг ички бурчаклари йиғиндиси нимага тенг?

4. Параллелограмм нима?

5. Параллелограммнинг хоссаларини исботланг.

6. Параллелограммнинг аломатларини исботланг.

7. Тўғри тўртбурчак нима? Унинг хоссаларини айтинг.

8. Ромб, квадрат нима? Уларнинг қандай хоссалари бор?

9. Фалес теоремасини айтинг.

10. Учбурчакнинг ўрта чизиғи нима? Унинг хоссаларини исботланг.

11. Трапеция, тенг ёнли трапеция, тўғри бурчакли трапеция нима?

12. Трапециянинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремани исботланг.

13. Учбурчакнинг ажойиб нуқталари нима?

14. Учбурчакка ташқи ва ички айланалар чизиш мумкинлигини исботланг.

15. Ички ва ташқи чизилган тўртбурчакларнинг қандай хоссаларини биласиз?

16. Ўткир бурчакнинг косинуси қандай аниқланади?

17. Пифагор теоремасини айтинг.

18. Ўткир бурчакнинг косинуси, синуси ва тангенси нима?

19. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тригонометрик функциялари орасидаги боғланишни аниқланг.

20. Баъзи бурчаклар учун синус, косинус ва тангенснинг қийматлари жадвали ёрдамида қандай аниқланади?

21*. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза билан шу катетнинг гипотенузадаги проекциясининг ўрта геометриги бўлишини исботланг.

22*. Тўғри бурчак учидан гипотенузага туширилган баландликнинг қандай хоссаларини биласиз? Уни исботланг.

23*. Стюарт теоремасини исботланг.

24. Қандай фигуралар тенг катталикли, тенг таркибли дейилади?

25. Тўғри тўртбурчакнинг юзи қандай аниқланади?

26. Параллелограмм, учбурчак ва трапециянинг юзлари қандай формулалар билан ҳисобланади? Уларни келтириб чиқаринг.

27*. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси нима?

28*. Икки нуқта орасидаги масофа қандай аниқланади?

29*. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласини келтириб ёзинг. Кесманинг ўртаси қандай аниқланади?

30*. Тўғри чизиқ билан айлананинг тенгламаларини ёзинг.

31*. Тўғри чизиқнинг, айлананинг координата ўқларига нисбатан жойлашиш хусусиятлари қандай?

32*. Эллипс, гипербола ва парабола тенгламаларини ёзинг.

33*. $0°$ дан $180°$ гача бурчакларнинг синуси, косинуси ва тангенси қандай аниқланади?

34*. Келтириш формулаларини ёзинг.

9-синф

1. Скаляр ва вектор катталиклар нима? Коллинеар векторлар нима? Вектор билан параллел кўчириш орасида қандай боғланиш бор?

2. Векторнинг модули нима? Қандай векторлар тенг векторлар дейилади?

3. Векторларнинг йиғиндиси нима? Векторларни қўшишнинг учбурчак ва параллелограмм қоидаларини айтинг.

4. Векторларнинг айирмаси нима? Векторларни сонга кўпайтириш амалини аниқланг. Бу амалларнинг қандай хоссалари бор?

5. Векторлар орасидаги бурчак, векторнинг ўқдаги проекцияси нима? Уларнинг қандай хоссаларини биласиз?

6. Векторнинг базис бўйича ёйилишининг ягоналигини исботланг.

7*. Вектор координаталари нима? Координаталари билан берилган векторларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари қандай бажарилади? Унинг модули қандай аниқланади?

8*. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси нима? $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\times\times\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ формулани исботланг. Скаляр кўпайтмани координаталари бўйича аниқланг.

9*. Векторлар алгебраси элементларидан фойдаланиб, учбурчакнинг оғирлик маркази координаталарини аниқланг.

10. Учбурчакларни ечиш нима?

11. Косинуслар теоремасини исботланг.

12. Синуслар теоремасини исботланг.

13. Учбурчакни икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича, бир томони ва иккита бурчаги бўйича қандай ечиш мумкин?

14. Синиқ чизиқ нима? Унинг қандай хоссалари мавжуд?

15. Қавариқ кўпбурчак нима? Мунтазам кўпбурчак нима?

16*. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи ва нормал вектори деб нимага айтилади? Тўғри чизиқнинг мос тенгламаларини ёзинг.

17. Текисликни алмаштириш деганда нимани тушунасиз?

18. Ўққа нисбатан ва марказий симметрия нима?

19. Буриш ва параллел кўчириш нима?

20*. Ҳаракат нима? Унинг устма-уст туширишлар билан қандай боғланиши бор?

21. Ўхшашлик алмаштириш нима? Ўхшашлик коэффициенти нима?

22. Гомотетия нима? Унинг қандай хоссалари бор? Гомотетия маркази, ўхшашлик коэффициенти нима?

23. Учбурчакларнинг ўхшашлик аломатларини исботланг.

24. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўхшашлик аломатларини айтинг.

25. Учбурчак биссектрисасининг қандай хоссаларини биласиз?

26*. Айланадаги пропорционал кесмалар нима? Уларнинг қандай хоссалари бор?

27. Айлана нима? Айлананинг асосий элементларини айтинг.

28*. Уринманинг қандай хоссаларини биласиз?

29. Тўғри чизиқ айланага нисбатан неча турли ҳолатда жойлашиши мумкин?

30. Айлана ватарлари ва уларга тиралган ёйларнинг қандай хоссаларини биласиз?

31. Айлананинг нечта симметрия ўқи ва симметрия маркази бор?

32. Айланага ички чизилган бурчак, марказий бурчак нима? Уларнинг қандай хоссаларини биласиз?

33*. Иккита айлана ўзаро қандай жойлашиши мумкин? Айлана марказлари орасидаги масофа қандай топилади?

34*. Уринма билан ватар орасидаги бурчак нимага тенг?

35*. Айлананинг иккита кесувчиси орасидаги бурчак қандай аниқланади?

36. Қавариқ кўпбурчаклар ички бурчакларининг йиғиндиси, ташқи бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?

37. Мунтазам кўпбурчакнинг маркази, апофемаси нима? Мунтазам кўпбурчак нечта симметрия ўқига эга?

38. Айлана узунлигининг диаметрга нисбати ҳақидаги теоремани исботланг. Айлана узунлиги қандай формула билан ҳисобланади?

39. Ўхшаш учбурчаклар юзларининг нисбати нимага тенг? Ўхшаш кўпбурчакларнинг-чи?

40. Доира нима? Унинг қандай элементларини биласиз?

41. Доира юзи қандай ҳисобланади? Унинг формуласини ёзинг.

42. Сектор, сегмент юзлари қандай аниқланади?

43. Мунтазам кўпбурчакнинг юзи қандай топилади?

44*. Доирадаги пропорционал кесмалар нима? Уларнинг қандай хоссалари бор?

45*. Тўғри бурчакли учбурчакдаги қандай метрик муносабатларни биласиз?

46*. Учбурчакнинг ўткир, ўтмас, тўғри бурчакли эканини қандай аниқлаш мумкин?

47*. Учбурчак биссектрисаларининг қандай хоссаларини биласиз?

48*. Ички чизилган тўртбурчакнинг томонлари ва диагоналлари орасида қандай боғланиши бор?

49. Геометриянинг асосий ривожланиш даврларини айтинг.

50. Евклид «Негизлар»ининг асосий ютуқлари ва камчиликларини айтинг.

51. Лобачевский геометриясининг асосини қандай тушунасиз?

52. Математикадаги аксиоматик назариянинг шаклланиш ва ривожланиш даврларини айтинг.

53. Геометриянинг мантиқий тузилиши ва планиметриянинг аксиомалар системасини айтинг.

54. Аксиомалар системасининг зиддиятсизлиги, тўлалиги ва мустақиллиги дегани нима?

МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

8-синф материалларини такрорлаш

2. 2 см. **4.** 60°, 120°. **6.** 5 см, 6 см, 7,5 см. **7.** 120°, 100°. **9.** 1) $c = 5$ см, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; 6) a=8 дм, $\sin\alpha$=0,8. **10.** 2) 4 м^2. **11.** 1) а) 3 см^2; б) 1,5 см^2; 4) а) 0,5 м^2; б) 0,25 м^2. **12.** 2) а) 0,6 м^2; б) 0,3 м^2. **13.** $8\sqrt{3}$ см^2. **14.** 2) 25 см^2; 3) 2,59 м^2. **16.** 6 см, 8 см. **17.** Ташқи чизилган айлана радиусига тенг. **18.** 30°, 150°. **20.** Ҳамма ўрта чизиқларни ўтказиш керак. **21.** 64 см. **22.** BE ва CD кесишиш нуқтасини A учи билан туташтириш керак. **24.** $5\sqrt{2}$ кг. **25.** 60°, 120°. **27.** h_a=1 см, h_b=1,75 см, $\sin\alpha$=0,25. **28.** $S=\frac{a^2\cos\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **29.** a=30 м, b=24 м. **30.** 120°. **31.** n=5. **32.** $ABCD$ параллелограммда A ва B бурчакларнинг биссектрисалари B бурчакнинг биссектрисасига перпендикуляр бўлишини кўрсатинг. **34.** $a, b, 2m$ кесмалар бўйича учбурчак ясаш керак. **35.** 60°, 120°. **38.** Пифагор теоремасини қўлланиш керак. **40.** $\frac{ha^2}{4\sqrt{a^2-h^2}}$.

I боб. 1-§. 44. 1) A ва B нуқталар устма-уст тушади. **46.** $|\overrightarrow{BC}|$=8 см, $\overrightarrow{CD}$=6 см, $\overrightarrow{AC}$=10 см, $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{DO}|$=5 см. **48.** $|\overrightarrow{NC}|=\sqrt{18,25}$ см. **49.** $|\overrightarrow{BD}|$=13 см, $|\overrightarrow{CD}|=5\sqrt{2}$ см, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{74}$ см. **50.** X нуқта – AB кесма ўртаси. **51.** 1) Ромб; 2) параллелограмм. **54.** 1)Ромб; 2) квадрат. **55.** Параллелограмм хоссасидан чиқади. **56.** 1000 км. **57.** $3\frac{3}{7}$ соат.

2-§. 61. 1) $\overrightarrow{OC}$; 3) $\vec{0}$. **65.** 2) $\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{DB}$. **66.** 3) $\vec{0}$. **68.** 2) 14 ва 10; 2) −2 ва 10. **69.** $100\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ км. **70.** $a\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$. **71.** 2) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AN}$. **72.** 3) $-\vec{b}$. **76.** 1) a; 3) $\sqrt{3}\ a$; 5) a. **80.** 1) бўлмайди; 2) бўлади. **83.** 1) бўлади; 2) бўлади. **87.** A.

3-§. 89. $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AC}$, k–ҳақиқий сон. **91.** 1) $4\vec{n}$; 2) $2,5\vec{m}+1,5\vec{n}$; 3) $-\frac{4}{3}\vec{m}-\frac{2}{3}\vec{n}$. **92.** 2) $\overrightarrow{AD}+0,5\overrightarrow{AB}$. **93.** 1) $2\cdot\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AE}$; 6) $\overrightarrow{AK}+2\cdot\overrightarrow{AE}$. **94.** $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{ND}=\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}$. **96.** 2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$. **97.** 1) $XA : AB = 1 : 2$; 2) $AX : XB = 1 : 1$; 3) $A=X$. **98.** $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **100.** $\overrightarrow{TK}=\vec{n}+\frac{1}{6}\vec{m}$, $\overrightarrow{KE}=\frac{5}{6}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}$. **101.** $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{PO}=0,5\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)$. **102.** 101-масалага қаранг. **104.** Тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограмм учлари бўлади.

4-§. 108. 1) 6; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 0; 4) −6. **111.** 1) 0; 3) 1; 5) −1; 8) 0. **112.** 2) −0,5. **114.** 2) $|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2$; 3) $(\vec{a}-\vec{b})^2$. **115.** Қавсларни очиб, гуруҳлаш керак. **116.** 1) $\varphi=\dfrac{\alpha}{2}$; 5) $\varphi=90°$. **117.** 90°. **118.** $\sqrt{3}$, 30°. **121.** $\cos\varphi=\dfrac{4}{5}$. **123.** 1) $\dfrac{a^2}{2}$; 4) $-\dfrac{1}{4}a^2$; 5) 0. **126.** $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ бўлсин. Агар A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётса, $\vec{x}-\overrightarrow{AB}$ перпендикуляр ихтиёрий вектор. Агар A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмаса, $\vec{x}=\vec{0}$. **135.** $AN:AC=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$.

5-§*. **136.** 3) (−2; 0). **138.**(−2; 1). **139.** 1) (1; 1), (−1; 1); 2) (2;−2), (−6; 4). **140.** 3) (2; −1); 4) $(4\sqrt{3};\ -2\sqrt{3})$. **142.** 1) $D(0;\ -4)$; 2) $D(8;\ 0)$. **143.** Тенг. **144.** $m=\pm12$, $n=\pm7$. **145.** 2) (−1; 0,5). **146.** 4) (−8;0), 8. **150.** 4) $\left(-\dfrac{11}{6};\dfrac{23}{2}\right)$. **153.** 1) $\vec{e}=(0{,}6;\ 0{,}8)$; 2) $\vec{e}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{26}};-\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$. **154.** $D(-3;\ 12)$. **155.** $3\pm2\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{13}-1$; $\dfrac{13}{8}$. **157.** 1) (17;−10), $\sqrt{389}$; 2) (11; −8), $\sqrt{185}$. **160.** 1) $x=-1$, $y=3$; 2) $x=4$, $y=-5$; 3) $x=0$, $y=3$. **162.** $A_2(-1;\ 5)$. **163.** 1) $\vec{a}=-\vec{p}+4\vec{q}$; 3) $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$. **165.** 2) $A(0;\ 0)$; $B(3;\ 0)$; 4) $A(-1;\ -2)$; $B(2;-3)$.

6-§. **168.** $-\dfrac{8}{3}$. **169.** 1) 5; 2) 8; 3) 3. **171.** 2) 0; 4) $-a^2-b^2$. **175.** 1) 45°; 3) 30°. **177.** 1) −4; 2) 2. **178.** 1) 2; 2) 0,5; 3) $k\in\varnothing$; 4) $k\in\varnothing$; 8) $k=4$; 10) $k\in\varnothing$. **180.** 1) 3; 2) $-3\sqrt{2}$; 3) 0; 4) 6; 5) −6. **181.** 1) 8; 2) −12; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) 17; 5) 26; 6) 10; 7) −8. **182.** $\vec{e}=\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. **183.** 4) −7. **184.** 2) $-a^2$; 3) 0; 8) a^2. **185.** 1) 2; 4) 2; 5) 0; 7) 0. **187.** $AC=\sqrt{115}$; $BD=7$. **188.** $\angle B=90°$, $\cos A=\dfrac{3}{5}$, $\cos C=\dfrac{4}{5}$. **189.** 30°, 60°, 90°. **192.** $a=-1$. **193.** $\varphi=30°$. **195.** $AD=\dfrac{\sqrt{bc}\sqrt{(b+c)^2-a^2}}{b+c}$; $BE=\dfrac{\sqrt{ac}\sqrt{(a+c)^2-b^2}}{a+c}$; $CF=\dfrac{\sqrt{ab}\sqrt{(a+b)^2-c^2}}{a+b}$. **198.** $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\pm\dfrac{3}{2}\right)$.

7-§. **201.** 2) $4x+3y-27=0$. **202.** 3) $x-y-3=0$. **203.** 4) $y=-1{,}5$. **204.** 1) $\vec{n}=(1;1)$, $\vec{p}=(1;\ -1)$, $k=-1$; 3) $\vec{n}=(3;4)$, $\vec{p}=(-4;3)$, $k=-\dfrac{3}{4}$. **205.** 2) 90°; 4) $\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{65}}$. **206.** 1) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$. **207.** (23;9), (−1; 2), (11;−7). **208.** 2) $2x-3y-1=0$; $x-4y+13=0$; $x-y-5=0$. **209.** 1) $x-y+1=0$; 3) $x-2y-1=0$; 4) $2x+6y-3=0$. **210.** 39, б-расм бўйича: $\vec{p}=(\sqrt{3};\ -1)$, $\vec{n}=(1;\ \sqrt{3})$, $k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **211.** $\vec{p}=(a;0)$, $y=y_0$. **212.** 1) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$; 2) $a_1a_2+b_1b_2=0$; 3) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$. **213.** 4) $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. **214.** 1) $x+y+1=0$; 2) $x-y+3=0$. **215.** 5)

Перпендикуляр; 6) параллел. **216.** -7. **217.** 2. **220.** 5) $\angle AOB=\angle COD$. **221.** $AC=\sqrt{108}$, $BD=\sqrt{208}$. **224.** $20\sqrt{3}$ кг, $10\sqrt{3}$ кг. **225.** 120 кг, $60\sqrt{3}$ кг. **226.** 4) $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **227.** Параллелограмм томонлари квадратларининг йиғиндиси унинг диагоналлари квадратларининг йиғиндисига тенг эканлигини қўлланинг. **229.** $29x-2y+33=0$. **230.** 1) $a=-4$, $b=2$ ёки $a=4$, $b=-2$; 2) $a=4$, $b\neq-2$ ёки $a=-4$, $b\neq2$; 3) $a=0$. **231.** 0; 6. **232.** Тенг қисмларга ажратади. **235.** $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1$ ёки $\frac{x}{8}-\frac{y}{3}=-1$. **239.** 1) $4x-2y+1=0$, $x+2y+9=0$. **240.** 1) $12x-41y=0$; 3) $6x+7y-75=0$; $24x-7y-150=0$. **244.** 1) $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant1$; 2) $0\leqslant\alpha\leqslant1$, $0\leqslant\beta\leqslant1$.

II боб. 1-§. 248. B нуқта $-AA'$ кесманинг ўртаси. **249.** 1) 1; 2) йўқ; 3) ҳар бир нуқта симметрия маркази бўлади; 4) йўқ. **253.** 1) (−2; 3); 2) (2; 3) 3) (−2;−3). **254.** Чексиз кўп. Симметрия марказларининг тўплами уларга параллел ва ўртаси орқали ўтадиган тўғри чизиқ. **259.** Биссектриса нуқталари бурчак томонларидан бир хил масофада жойлашган. **261.** 3) $A'(0;\ 1)$, $B'(-2;1)$, $C'(2;\ 3)$. **264.** Агар $\angle(a,\ b)$ бурчак билан A нуқта берилса, маркази A бўлувчи марказий симметрияни кўриш ккерак. **265.** b тўғри чизиққа нисбатан симметрия ўқини топиш керак. **266.** 1) (6,5; −0,5); 2) $x+y-6=0$, $x-y-7=0$. **268.** m тўғри чизиқни симметрия ўқи деб олинг. **271.** Ички чизилган тўғри бурчакли учбурчак хоссаларини қўлланинг.

2-§. 272. $4\sqrt{2}$ см. **276.** $(0;\ 0)\to(1;\ -1)$, $(2;\ 1)\to(3;\ 0)$, $(-1;\ 2)\to(0;\ 1)$. **277.** 1) $a=2$, $b=2$; 2) $a=-3$, $b=3$; 3) $a=1$, $b=-1$. **278.** (−2; 2). **279.** 1) Мавжуд эмас; 2) мавжуд: $x'=x-1$, $y'=y+1$. **281.** $CD_1=a\sqrt{5}$, $CC_1=2a$. **282.** $\angle ABC=\alpha+60°$, $\angle CBA=|60°-\alpha|$. **285.** Диаметрга тенг масофага. **286.** Мос учларини туташтирувчи ўрта перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси. **287.** 4) Тенг айланаларни. **291.** $\frac{360°}{n}$.

3-§. 302. Дельтоид хоссаларини қўлланг. **304.** Шарт эмас. **305.** Диаметр симметрия ўқи бўлишини қўлланинг. **308.** 90° га буриш керак (айлана марказидан). **313.** Берилган тўғри чизиққа нисбатан ўққа нисбатан симметрияни қараш керак. **314.** C нуқтага нисбатан симметрияни қараш керак. **315.** Кесишиш нуқтасига нисбатан марказий симметриядаги битта айлана тасвирини ясаш керак. **318.** $\overrightarrow{AB}$ векторни параллел кўчиришни қаранг.

4-§. 319. Мумкин, $k=1$. **325.** Томонларини икки марта чўзиш керак. **327.** $k=0{,}5$. **328.** $A_1B_1=1{,}5$ м, $\angle A_1=30°$. **330.** 13,6 см. **337.** $\frac{ah}{a+h}$.

5-§. 343. 1) Ўхшаш, $R=1$; 2) ўхшаш эмас, сабаби 1 м = 100см; 3) ўхшаш, $k=10$; 4) ўхшаш, $k=1$. **344.** 5) Ўхшаш; 8) ўхшаш эмас. **345.** 1) Ўхшаш; 2) ўхшаш эмас. **350.** $a=1$ м, $b=2$ м, $c=2{,}5$ м. **351.** 5,5 м;6,5 м. **352.** 15 см, 20 см, 25 см. **353.** 4,2 м, 4,8 м, 6 м. **354.** 6 см, 8 см, 12 см. **356.** 1) 32; 2) 15. **357.** 8 см, 12 см.

6-§. 368. 1) 8 см, 12 см; 3) AC=1,8 м. **369.** BE= 7 см, CE= 5 см. **370.** 39 см, 65 см. **371.** 10 м, 14 м. **374.** 6 ва 8. **375.** r=8. **376.** 50 см. **377.** $1:\sqrt{2}$. **378.** $\frac{b+c}{a}$.

III боб. 1-§. 383. Мумкин эмас. **384.** 1) 8; 2) 12. **385.** 360°. **386.** 1) 10; 2) 15. **389.** 1) $n<6$; 2)$n=6$; 3) $n>6$. **390.** 1) 60°; 3) 108°; 5) 144°. **394.** $32\sqrt{3}$ см. **395.** $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. **397.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **398.** $a_5=2R\sin 36°$; $a_{10}=2R\sin 36°$. **399.** 4) $R=10\sqrt{3}$ см, a_3=30 см, P_3=90 см. **400.** 2) $D=5\sqrt{3}$ см. **401.** 1) $2\sqrt{3}$ см, 2) $3\sqrt{3}$ см. **402.** $10\sqrt{2}$ см. **406.** $\frac{2-\sqrt{3}}{4}R^2$. **407.** 1) $0{,}5R^2$; 2) $\frac{4-\sqrt{3}}{4}R^2$. **408.** Учбурчаклар тенглигини қўлланг.

2-§. 410. 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. **411.** 1) ҳа; 2) йўқ. **413.** 1) ҳа; 2) йўқ; 3) ҳа. **414.** 30 см.**415.** R радиус билан α бурчаги бўйича учбурчак ясаш керак. **419.** R. **421.** 56 см. **424.** Тўғри тўртбурчак. **426.** Тенг ватарлар марказдан бир хил масофада жойлашади, шунинг учун унга ички айлана чизишга бўлади. **427.** Мумкин эмас. **428.** Аввал икки ватар орасидаги бурчак уларнинг (вертикаль бурчакларга) икки ёйнинг ярим йиғиндиси билан ўлчанишини кўрсатинг. Агар O − диагоналларнинг кесишиш нуқтаси. P,Q − ён томонларини жойлашиш нуқтаси бўлса, у ҳолда $\angle ABC$=180° бўлишини кўрсатиш етарли. **429.** 428-масалага қаранг.

3-§. 430. 24 см. **431.** $4\sqrt{2}$ см. **432.** 8 см.**433.** 16 см.**434.** 8 см. **435.** 15 см. **436.** 1) 2:3; 2) 4;9. **437. 6 см.** 439. **12 см. 441.** 225,8 км. **442.** $2\sqrt{2}$ см. **443.** 1) ≈13 м; 2) 4,35 м. **444.** 21 см. **446.** 1,5 марта. **447.** 10 см. **449.** $\sqrt{ab}$. **450.** $2\sqrt{R^2-d^2}$. **451.** 18 см, 32 см. **452.** $\frac{671}{25}$ см.**454.** 7:8. **457.** BE=7 см; EC=5 см. **459.** 12 см, 18 см. **460.** 8 см. **461.** $\frac{9}{4}$ марта. **464.** Ён томонлари давомларининг кесишиш нуқтасини гомотетия маркази деб олиш керак.

IV боб. 1-§. 468. $\alpha=90°$, $\cos\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\gamma=\frac{4}{5}$. **469.** $\angle B$=45°. **470.** 1) $\sqrt{34-15\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{37}$. **471.** $\sqrt{74-35\sqrt{2}}$. **472.** 5 м. **473.** 90°. **474.** 60°. **475.** 2) $\sin\beta=\frac{7\sqrt{3}}{16}$; 3) $\sin\beta=\frac{3}{4}$. **476.** $CD=\frac{3\sqrt{55}}{4}$ см; $S=\frac{3\sqrt{55}}{4}$ см²; 4) $CD=4\frac{8}{13}$ дм; S=30 дм². **477.** 2) 3 см; 3) 0,6 дм. **479.** 1) $\angle C$=30°; 2) $\angle C$=60°. **480.** 1) 60°; 2) 30°. **481.** $\sqrt{23{,}2}$ см; $\sin\beta=\frac{9}{\sqrt{145}}$; $\sin\gamma=\frac{12}{\sqrt{145}}$. **482.** 6 м, $3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ м, $6(\sqrt{3}-1)$ м. **484.** $\cos\alpha=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. **485.** 1) Тенг ёнли, ўткир бурчакли; 2) тўғри бурчакли; 3) ўтмас бурчакли. **487.** $\frac{35\sqrt{6}}{24}$.

488. $a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\alpha}$, $b=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\alpha}$. **491.** H=2 м. **492.** $AD=\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$, $BE=\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(a+\frac{\beta}{2}\right)}$, $CF=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

493. $A_1K=\frac{d_2(d_1+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2-4d_1d_2\cos^2\varphi}}$, $A_2K=\frac{2d_1d_2\cdot\cos\varphi}{\sqrt{(d_1+d_2)^2-4d_1d_2\cos^2\varphi}}$,

$A_3K=\frac{d_1(d_2+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2-4d_1d_2\cos^2\varphi}}$.

2-§. 500. 2,5 м. **501.** 3) $D_1=\frac{\sqrt{19}}{4}$ см, $D_2=\frac{7}{4}$ см. **502.** 3) $a=\frac{\sqrt{13}}{4}$ м, $b=\frac{\sqrt{7}}{4}$ м. **503.** $AC=6\sqrt{6}$ см, $S=18(3+\sqrt{3})$ см^2. **505.** $\angle A=30°$, AC=20 см, $AB=20\sqrt{3}$ см, $S=100\sqrt{3}$ см^2. **506.** 3) α=60°, $\cos\beta=\frac{13}{14}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{7}$, S $=6\sqrt{3}$ дм^2. **507.** 4) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\cos\gamma=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$; $c=\sqrt{57-24\sqrt{3}}$ см. **508.** $2\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ см. **509.** $\frac{15}{4}$ см, $\frac{9}{4}$ см. **510.** 2) $b=2\sqrt{7}$ см, $\sin\gamma=\frac{\sqrt{21}}{7}$; $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{21}}{14}$. **511.** $2,4\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ см. **512.** ≈74,2 кг. **513.** F ≈275 Н, α≈16°, β≈34°. **514.** 3. **515.** $\frac{10}{\cos 20°}$ см, 20tg20° см. **516.** $AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **517.** $\frac{a}{2}\sin\alpha$. **518.** $\cos A=-\frac{1}{20}$, $\cos B=\frac{1}{20}$, $\cos C=-\frac{53}{80}$, $\cos D=\frac{53}{80}$. **519.** $12\sqrt{3}$ sin40°, $12\sqrt{3}$ sin20°. **520.** $\frac{\sqrt{97}}{3}$ м, 4 м, $\frac{\sqrt{97}}{3}$ м. **522.** $BD=\frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$, ва ҳ.к. **523.** $\frac{\sqrt{5(a^2+b^2)}}{5}$. **524.** $\frac{2p^2}{h+2p}$. **525.** $\sqrt{b^2+bc}$. **526.** $\frac{100}{3}$ см, $\frac{140}{3}$ см. **527.** $AB=4\sqrt{2}$ см, $BD=AC=4\sqrt{14}$ см.

3-§. 530. $\sin\alpha=\frac{h_1+h_2}{p}$. **531.** $\frac{2}{\sin\alpha}=\sqrt{m^2+n^2\pm mn\cos\alpha}$, $S=\frac{4mn}{\sin\alpha}$. **532.** $\frac{h^2}{\sin\alpha}$. **533.** $50\sqrt{2}$ см^2. **534.** $8\sqrt{3}$ см^2. **535.** $5\sqrt{2}$ м, 10 м, $5(\sqrt{3}+1)$ м. **536.** $a+2a\cos\alpha$, $S=a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$. **537.** $5(2-\sqrt{3})$ см, $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. **538.** $\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **539.** $\sqrt{m^2+n^2-1,6mn}$. **540.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S\cdot\sin\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}}$. **541.** $h\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **542.** $2\sqrt{2}\,d\cos\frac{(p-q)45°}{p+q}$. **543.** $\cos\gamma\beta=\frac{m}{m+n}$, cosα=cosγ=

$=\sqrt{\dfrac{n}{2(m+n)}}$. **544.** $\dfrac{a}{4}\sqrt{9+tg^2\alpha}$. **545.** $\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. **546.** $\sin\alpha=\dfrac{4r^2}{S}$. **547.** $\dfrac{r\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}$. **548.** $\dfrac{2bc\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b-c}$. **549.** $AC=\dfrac{m-n\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $AB=\dfrac{n-m\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
550. $\dfrac{l(a+b)}{ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. **551.** $\text{tg}\varphi=\dfrac{1}{2}(\text{ctg}\beta-\text{ctg}\gamma)$. **552.** $\sqrt{\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin\alpha}}$. **553.** $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{(a+b)l}{2ab}$. **554.** $\text{ctg}\varphi=\dfrac{\sqrt{3}(p-q)}{3(p+q)}$.
555. $\text{tg}\varphi=\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}$.

V боб. 1-§*. **558.** 1) 8 см; 2) 2 см. **559.** 5 см. **560.** 36^0. **561.** 44°. **566.** 60°. **567.** 35°. **568.** 4) 36°; 5) 60°. **569.** 1) $d=\sqrt{R^2-h^2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{h}{R}$. **571.** Марказлари орасидаги масофа ўзгармайди. **575.** $\angle BAC=50°$. **576.** 40°. **577.** 110°. **579.** $8\sqrt{2}$ см. **586.** 100°, 80°.

2-§. **591.** 1) 64 см; 2) 48 см. **592.** 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ см. **593.** 1) $2\sqrt{3}\pi$ см; 2) $\sqrt{3}\pi$ см. **594.** 1) $\dfrac{5\pi}{2}$ см; 2) 10πсм. **595.** 1) $\dfrac{5\pi}{2}$; 2) $\dfrac{10\pi}{3}$; 3) 3π; 4) 10π см. **596.** 5) $\dfrac{4\pi}{3}$; 6) $\dfrac{3\pi}{2}$. **597.** 1 м. **598.** 6 369 426,7 м. **5м.** **599.** 36,2 см. **600.** 6,28 см. **601.** 1) $(2\sqrt{3}-3)R$; 2) $(\sqrt{2}-1)R$. **602.** 4°36′. **603.** 2) 48 см. **604.** 2) $c\pi(\sqrt{2}-1)$. **605.** $\dfrac{6\pi R}{11}$. **606.** Тенг. **607.** 1) $10\pi R^2$; 2) $\dfrac{2\pi a}{3}$. **609.** 330 км.

3-§. **612.** 1) 4 марта камаяди; 2) 9 марта ортади. **613.** $S_c=\dfrac{\pi a^2}{3}$, $S_i=\dfrac{\pi a^2}{12}$. **614.** $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. **615.** $2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ м. **616.** 2) $\dfrac{1}{8}$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 6) $\dfrac{5}{6}$. **617.** 1) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 2) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 3) $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **618.** $S_1=\dfrac{\pi R^2\alpha}{360°}-h\sqrt{R^2-h^2}$, $S_2=\dfrac{\pi R^2(360°-\alpha)}{360°}+$ $+h\sqrt{R^2-h^2}$, бунда $\cos\alpha=\dfrac{2h^2-R^2}{R^2}$. **620.** 100π см². **621.** 30 756π мм². **622.** 1) $(4-\pi)a^2$; 2) $\dfrac{8+\pi}{2}a^2$; 3) $\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{6}a^2$. **623.** 3:2. **627.** $2\sqrt{R^2+r^2}$. **628.** 3:1.

VI боб. 1-§. **632.** 1) AC; 2) A_1C_1; 3) AA_1; 4) CC_1. **633.** Ҳар доим. **635.** Шарт эмас. **636.** CIII аксиомани қўлланг. **645.** Шарт эмас. **646.** Шарт эмас.

2-§. 647. 1), 2) кесишмайди. **648.** Бўлмайди. **650.** Параллел эмас.**651.** 4 см. **652.** 1) 4 см; 2) 3 м; 3) $\frac{a+b}{2}$. **653. 1)** Шарт эмас. 3) Мумкин. **654.** $\alpha \| \beta$. **655.** 1) 9 см; 2) 15 см. **656.** 20 см. **657.** Кесишади ёки параллел бўлади. **658.** Айқаш тўғри чизиқлар. **659.** Айқаш тўғри чизиқлар. **661.** $AD=7$ см, $BC=10{,}5$ см. **664.** $AP=4$ см. **676.** 9 см. **677.** Пропорционал кесмаларнинг хоссаларини қўлланг.

3-§. 679. 2) 60°; 5) $AC=8\sqrt{2}$ см, $B_1D_1=8\sqrt{2}$ см; 6) $A_1C=8\sqrt{3}$ см, $A_1B=8$ см. **680.** 2 см. **681.** 2,5 см. **682.** Битта тўғри чизиқ ўтади. **683.** 1) 5 см; 2) 5 мм; 3) 5,3 м; 4) $\frac{a+b}{2}$. **684.** 1) $2\sqrt{5}$, 2) $AC = 5$ см, $BC = 2{,}5\sqrt{3}$ см, 3) $AB = 5$ см. **685.** 60°. **686.** Нотўғри. **687.** 8 см. **689.** Мумкин. **692.** 1) 60°; 2) $\cos C=\frac{16}{25}$, $\cos A=\cos B=\frac{3\sqrt{2}}{5}$. **693.** $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}$. **694.** $\sqrt{\frac{11}{3}}$ см. **700.** $\frac{4}{5}\sqrt{34}$ см. **701.** 13 см. **702.** $\sqrt{20{,}5}$ см. **703.** 1) $3\sqrt{3}$ см; 2) $3\sqrt{2}$ см; 3) 3 см. **705.** $3m$. **708.** $\frac{2p}{3}(2\sqrt{2}+1)$. **710.** $\frac{\sqrt{769}}{5}$ см. **711.**8 см. **712.** $\sqrt{4{,}875}$ см.

4-§. 714. 1) 5 см; 2) $5\sqrt{2}$ см; 3) $5\sqrt{3}$ см. **720.** 1) 13 см; 2) 2 см; 3) $\sqrt{170}$ см; 4) 13 см. **721.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **722.** 5 см. **726.** 4 см, 6 см, 8 см. **727.** 4 см. **728.** $\frac{\sqrt{6}}{2}a$. **730.** $\sqrt{102}$ см. **733.** $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$. **735.** $2\sqrt{769}$ см^2. **737.** AS ва BC қирраларидаги иккита ярим бурчаклар мос φ ва ψ бўлса, унда $\varphi=60°$, $\cos\psi=\frac{7\sqrt{6}}{24}$. **739.** $\frac{3ah}{8}$. **740.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2bc\cos\varphi}$. **743.** BD_1 диагонали бўйича кесишади.

5-§. 745. 4) $S_{ён.с.}=48$ дм^2, $S_{т.с.}=118$ дм^2, $V=70$ дм^3. **746.** 3) $S_{ён.с.}=48$ дм^2, $S_{т.с.}=84$ дм^2, $V=12\sqrt{7}$ дм^3. **747.** $S_{ён.с.}=3\sqrt{51}$ м^2, $S_{т.с.}=3\sqrt{3}(\sqrt{7}+1)$ м^2, $V=4\sqrt{3}$ м^3. **748.** 1) $S_к=\frac{16\sqrt{2}}{3}$ см^2, $S_{т.с.}=32$ см^2, $V=\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см^3. **749.** 1) $S_к=15\sqrt{2}$ см^2, $S_{ён.с.}=12\sqrt{26}$ см^2, $S_{т.с.}=20+12\sqrt{26}$ см^2, $V=\frac{140}{3}$ см^3. **750.** 3) $S_к=20$ дм^2, $S_{ён.с.}=20\pi$ дм^2, $S_{т.с.}=28\pi$ дм^2, $V=20\pi$ дм^3. **751.** 2) $S_к=60$м^2, $S_{ён.с.}=65\pi$ м^2, $S_{т.с.}=90\pi$ м^2, $V=100\pi$ м^3. **752.** 1) $S_к=30$ см^2, $S_{ён.с.}=6\sqrt{26}\pi$ см^2, $S_{т.с.}=6\sqrt{26}\pi+20\pi$ см^2, $V=40\pi$ см^3. **754.** 3) $S=12\pi$ дм^2, $S_а=3\pi$ дм^2, $V=9\pi$ дм^3. **755.** $3\sqrt{455}$ см^3. **756.** $125\sqrt{2}$ см^3. **757.** $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{2V}}$. **758.** $576\sqrt{3}$ см^2. **759.** 4×4×2 1200 дона. **760.** $36\sqrt{2}$ см^3. **761.** 10 м, 8 м^3. **762.** $32\pi(1+2\sqrt{3})$ см^2. **764.** $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$. **765.** 19,11 т. **766.** $108\sqrt{3}\pi$ см^3. **770.** $\sqrt{2}\pi a^3$. **771.** $\frac{\pi a^2}{3}\sin^2\varphi$. **772.** 1331,36 м^3; 7,55%. **773.** Тахминан 25905 м^2. **774.** $\frac{2l^3}{27}\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi$.

МУНДАРИЖА

III боб. Кўпбурчаклар

IV боб. Учбурчакларни ечиш

V боб. Айлана узунлиги ва доира юзи

V боб. Стерометрия элементлари

VI боб. Тарихий маълумотлар

О қ у   б а с ы л ы м ы

Шыныбеков Абдухали

Г Е О М Е Т Р И Я

Жалпы білім беретін өзбек мектептерінің
9-сыныбына арналған оқулық

(өзбек тілінде)

Редакторы ***Сәндібек Жұбаниязов***
Техникалық редакторы ***Зайра Бошанова***
Көркемдеуші редакторы ***Нұрлан Тазабеков***
Компьютерде беттеген ***Нұргүл Сейдахметова***

Теруге 05.11.2015 ж. берілді. Басуға 19.07.2017 ж. қол қойылды.
Пішімі $70\times90^{1}/_{16}$. Офсетті қағаз. Әріп түрі мектептік.
Офсетті басылыс. Есептік баспа табағы 10,92.
Шартты баспа табағы 13,0.
Таралымы 1000 дана. Тапсырыс №

Қазақстан Республикасы, «Жазушы» баспасы, 050009.
Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143-үй.
E-mail: Zhazushi@mail.ru