А. Н. ШИНИБЕКОВ

ГЕОМЕТРИЯ

Умумтаълим мактабларининг 8-синфи учун дарслик

8

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги
тавсия этган

Такомиллаштирилиб қайта ишланган нашр

Алмати «Жазушы» 2016

Фойдаланилган шартли белгилар:

$\boxed{?}$ – мавзунинг асосий материаллари бўйича саволлар;

$\boxed{\text{пт}}$ – амалий топшириқлар;

$\boxed{\text{Т}}$ – тарихий маълумотлар;

A – I даражали мисоллар;
B – II даражали мисоллар;
C – III даражали мисоллар;
*– ижодий ёки юқори мураккаб мисолар.

Таржимон: Янишбаева Баргида

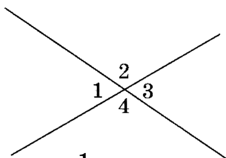
Шинибеков А. Н.
Геометрия: Умумтаълим мактабларининг 8-синфи учун дарслик. Такомиллаштирилиб қайта ишланган нашр. – Алмати: Жазушы, 2016. – 128 бет.

7-СИНФ МАТЕРИАЛЛАРИНИ ТАКРОРЛАШ

Аввал 7-синфда ўрганилган баъзи асосий деб ҳисобланган маълумотларга қисқача тўхталиб ўтайлик.

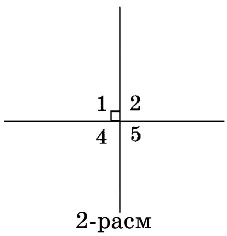
1. Бир томони умумий, қолган икки томонлари бир-бирининг тўлдирувчиси бўладиган икки бурчак ***қўшни бурчаклар*** дейилади. Қўшни бурчакларнинг йиғиндиси 180□ га тенг. Масалан, 1-расмда □1 ва □2, □2 ва □3, □3 ва □4, □4 ва □1– қўшни бурчаклар.

2. Бир бурчакнинг томонлари иккинчи бурчак томонларининг тўлдирувчиси бўладиган икки бурчак ***вертикаль бурчаклар*** деб атайди. Вертикаль бурчаклар тенг бўлади. Масалан, □1 ва □3, □2 ва □4 – вертикаль бурчаклар (1-расм).



1-расм

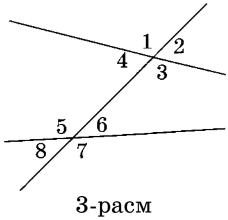
3. Иккита тўғри чизиқ ўзаро тўғри (90□ га тенг) бурчак остида кесишса, бу тўғри чизиқлар ***перпендикуляр тўғри чизиқлар*** (ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар) дейилади (2-расм).



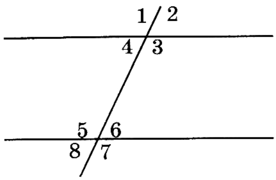
2-расм

4. Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб ўтганда (3-расм) саккизта бурчак ҳосил бўлади: ***ички алмашинувчи бурчаклар*** (□3 ва □5, □4 ва □6); ***ички бир томонли бурчаклар*** (∠4 ва ∠5, ∠3 ва ∠6); ***мос бурчаклар*** (□1 ва □5, □2 ва □6, □4 ва □8, □3 ва □7).

5. Текисликда кесишмайдиган иккита тўғри чизиқни ўзаро ***параллель тўғри чизиқлар*** деб аталади. Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллель биргина тўғри чизиқ ўтади (паралеллик аксиомаси).



3-расм



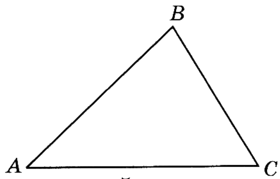
4-расм

Паралелликнинг аломатлари:

1-аломати. *Агар икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб ўтганда ҳосил бўлган ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ ўзаро параллель бўлади.*

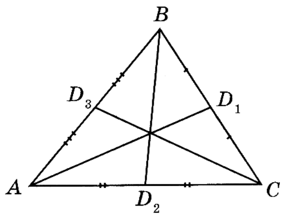
2-аломати. *Агар икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб ўтганда ҳосил бўлган мос бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ ўзаро параллель бўлади.*

3-аломати. *Агар икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб ўтганда ҳосил бўлган ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180□ га тенг бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ параллель бўлади* **(4-расм).**



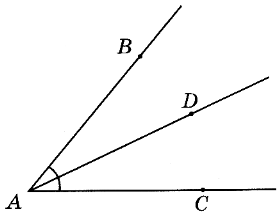
5-расм

6. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтани кесмалар билан бирлаштирганда ҳосил бўлган фигура ***учбурчак*** деб аталади (5-расм). A, B ва C нуқталар учбурчакнинг ***учлари***, AB, AC ва BC кесмалар учбурчакнинг ***томонлари***, BAC, ABC ва □ACB бурчаклар эса учбурчакнинг ***бурчаклари*** деб аталади. Бу учбурчакни қисқача қуйидагича белгилаймиз: □ABC



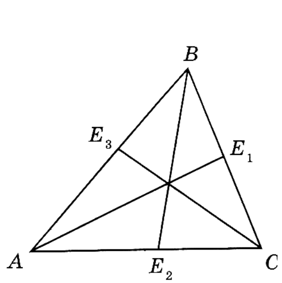
6-расм

7. Учбурчакнинг учини унга қарама-қарши томонининг ўртаси билан туташтирувчи кесмани ***учбурчакнинг медианаси*** деб аталади. 6-расмда AD_1, BD_2, CD_3 кесмалари – ABC учбурчакнинг медианалари.



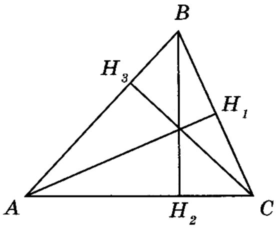
7-расм

8. Бурчакнинг ***биссектрисаси*** деб шу бурчакни тенг икки бурчакка бўлувчи нурга айтилади (7-расм). □BAC нинг биссектрисаси –AD нури. AB ва AC нурлари – бурчакнинг томонлари, □BAD=□CAD.



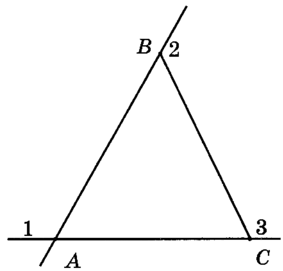
8-расм

9. Учбурчакнинг берилган учидан ўтказилган ***биссектрисаси*** деб учбурчак бурчаги биссектрисасининг шу учига қарши ётган томони билан чегараланган кесмага айтилади (8-расм). AE_1, BE_2, CE_3 кесмалари – ABC учбурчакнинг биссектрисалари.



9-расм

10. Учбурчак учидан унинг қаршисида ётган томони орқали ўтадиган тўғри чизиққа ўтказилган перпендикулярнинг учбурчак учи ва шу тўғри чизиқ билан чегараланган кесмаси учбурчакнинг ***баландлиги*** деб аталади. 9-расмда AH_1, BH_2, CH_3 кесмалари – ABC учбурчакнинг баландликлари.

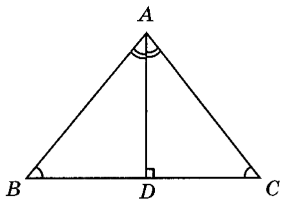


10-расм

11. Учбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси 180□ га тенг:

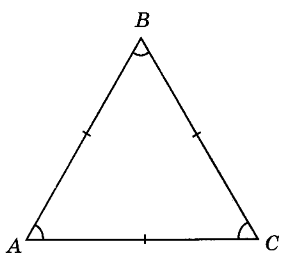
□A+□B+□C=180□.

Учбурчакнинг бурчагига қўшни бурчак унинг ***ташқи бурчаги*** деб аталади. 10-расмда □1, □2, □3 – ABC учбурчакнинг ташқи бурчаклари. Учбурчакнинг ташқи бурчаги шу учбурчакнинг унга қўшни бўлмаган қолган икки бурчакнинг йиғиндисига тенг. □1=□B+□C, □2=□A+□C, □3=□A+□B.

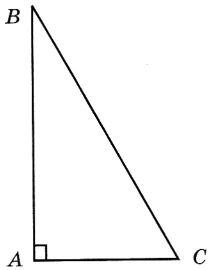


11-расм

12. Икки томони тенг бўладиган учбурчакни ***тенг ёнли учбурчак*** деб аталади, AB=AC (11-расм). AB, AC ***ён томонлари*** **деб,** BC учбурчакнинг ***асоси*** деб аталади. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг бўлади: □B=□C. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ўтказилган биссектрисаси унинг ҳам медианаси, ҳам баландлиги бўлади. Ҳамма томонлари тенг учбурчакни ***тенг томонли учбурчак*** деб аталади (12-расм).



12-расм

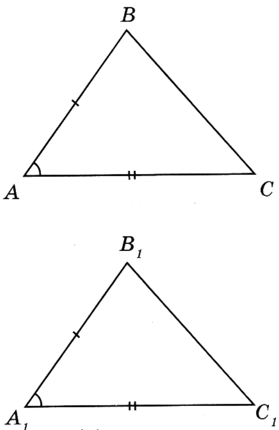


13-расм

13. Бир бурчаги тўғри (90□ га тенг) бўлган учбурчак ***тўгри бурчакли учбурчак*** деб аталади, □A=90□. Тўғри бурчак қаршисида ётган томони учбурчакнинг ***гипотенузаси*** деб, қолган икки томони эса унинг ***катетлари*** деб аталади. Масалан, 13-расмда *BC* – гипотенуза, *AB, AC* – катетлар.

14. Учбурчак тенгликларининг аломатлари:

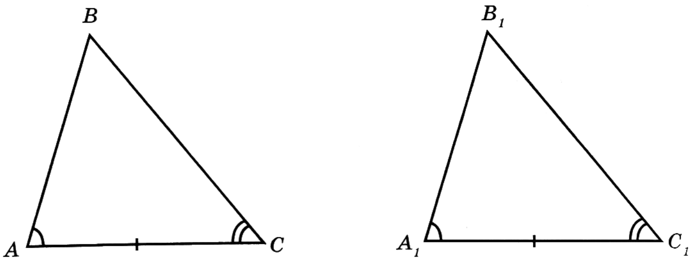
1-аломати. *Агар бир учбурчакнинг икки томони билан улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони билан улар орасидаги бурчагига тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар тенг бўлади* (14-расм).



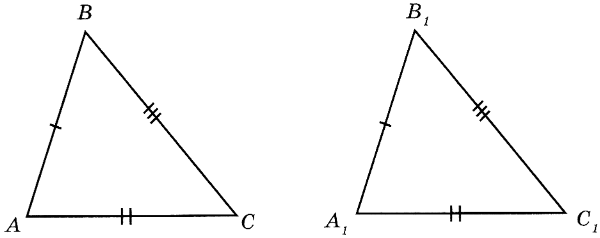
14-расм

2-аломати. *Агар бир учбурчакнинг бир томони билан унга ёпишган бурчаклари иккинчи учбурчакнинг мос томони билан унга ёпишган бурчакларига тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар тенг бўлади* (15-расм).

3-аломати. *Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар тенг бўлади* (16-расм).



15-расм



16-расм

?

1. Қандай бурчакларни қўшни бурчаклар деб ва қандай бурчакларни вертикаль бурчаклар деб аталади? 1-расмдан атаб кўрсатинг.
2. Қандай тўғри чизиқлар перпендикуляр тўғри чизиқлар деб аталади?
3. Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб ўтганда ҳосил бўладиган бурчакларни атаб кўрсатинг.
4. Қандай тўғри чизиқлар параллель тўғри чизиқлар деб аталади?
5. Параллеллик аломатларини таърифланг.
6. Қандай фигура учбурчак деб аталади? Унинг элементларини айтиб кўрсатинг.
7. Учбурчакнинг қандай турларини биласиз? Уларни чизиб, элементларини атаб кўрсатинг.
8. Учбурчаклар тенглигининг аломатларини таърифлаб, расмдан уларнинг мос элементларини кўрсатинг.

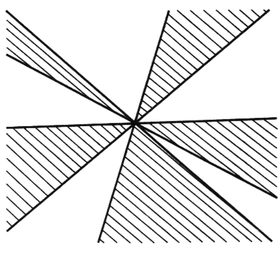
МИСОЛЛАР

А

1. Қўшни бурчакларнинг бири иккинчисидан икки марта катта. Шу бурчакларнинг градус ўлчовларини топинг.

2. Икки тўғри чизиқ кесишганда ҳосил бўлган икки бурчакнинг йиғиндиси 60□ га тенг. Шу бурчакларнинг градус ўлчовларини топинг.

3. 17-расмда бешта тўғри чизиқ бир нуқтада кесишган. Бўялган бурчакларнинг йиғиндисини топинг.



17-расм

4. Икки тўғри чизиқ кесишганда ҳосил бўладиган бурчакларнинг учтасининг йиғиндиси 270□ га тенг. Шу бурчакларнинг градус ўлчовларини топинг.

5. Қўшни бурчакларнинг биссектрисаларининг орасидаги бурчакни топинг.

6. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 10 см, ён томонлари эса 7 см. Шу учбурчакнинг периметрини топинг.

7. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 32 см, ён томони эса 10 см. Унинг асосини аниқланг.

8. Агар учбурчакнинг икки бурчаги 60□ га тенг бўлса, унда бу учбурчак тенг ёнли бўлишини исботланг.

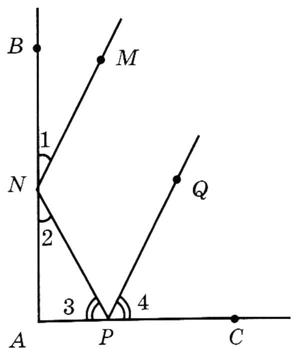
9. MN ва PQ кесмалари ҳар қайсисининг ўртаси бўлган O нуқтасида кесишади. □MPO = □NOQ тенглигини исботланг.

10. Агар икки параллель тўғри чизиқ кесувчи билан кесилганда ҳосил бўлган ички бир томонли бурчакларнинг айирмаси 20□ бўлса, унда шу тўғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлган барча 8 та бурчакнинг қийматини аниқланг.

B

11. Вертикаль бурчакларнинг биссектрисалари бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

12. 18-расмдаги MN ва PQ тўғри чизиқлар параллель бўлишини исботланг. Бунда □BAC=90□, □1=□2, □3=□4.



18-расм

13. Ҳар бир ABC учбурчаги учун қуйидаги хулосалар бажарилишини исботланг:

1) A бурчакнинг биссектрисаси шу учидан туширилган баландлик билан $\frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$ га тенг бурчак ҳосил қилади.

2) B бурчакнинг ташқи бурчакнинг биссектрисаси билан C бурчакнинг биссектрисаси $\frac{1}{2}(\angle A)$ га тенг бурчак ҳосил қилади.

3) B ва C бурчакларнинг биссектрисалари $\frac{1}{2}(\angle A)+90\square$ га тенг бурчак ҳосил қилади.

14. Агар $\square$ ва $\square$ учбурчакнинг иккита бурчаги бўлса, у ҳолда уларнинг биссектрисалари қандай бурчак остида кесишади?

15. Учбурчакнинг икки бурчагининг биссектрисалари ўзаро перпендикуляр бўлиши мумкинми?

16. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги $30\square$ га тенг, гипотенузаси эса 32 см. Тўғри бурчакнинг учидан туширилган баландлиги гипотенузани икки кесмага бўлади. Шу кесмаларнинг узунликларини топинг.

17. A нуқтасидан бир айланага AB ва AC уринмалари ўтказилган. Бунда B ва C уриниш нуқталари. $AB=AC$ тенглигини исботланг.

18. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси ён томонидан икки марта кичик, периметри эса 50 см. Учбурчакнинг томонларини топинг.

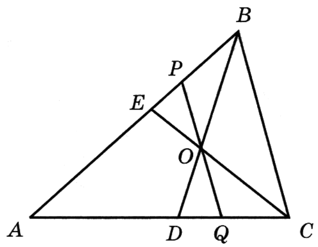
19. a тўғри чизиғи MN кесмасининг ўртаси орқали ўтади, M ва N нуқталари a тўғри чизиқдан бир хил узоқликда ётишини исботланг.

C

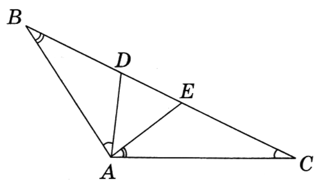
20. 19-расмда BD ва CE – учбурчакнинг биссектрисалари, $PQ \parallel BC$. $PQ=BP+CQ$ тенглиги бажарилишини исботланг.

21. Тенг ёнли учбурчакнинг учидан ўтиб унинг асосига параллель бўлган тўғри чизиқ шу учидаги ташқи бурчагининг биссектрисаси эканини исботланг.

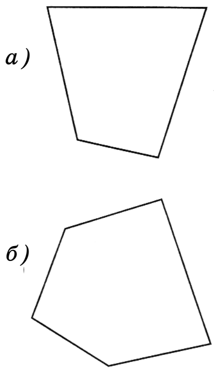
22. ABC учбурчакнинг (20-расм) A учидан BC томонига AD ва AE кесмалари ўтказилган. Уларнинг бири AB томони билан C бурчагига тенг бурчак, иккинчиси AC томо-



19-расм



20-расм



21-расм

ни билан B бурчагига тенг бурчак ҳосил қилади. ADE учбурчак тенг ёнли эканини исботланг.

23. 21-расмдаги фигураларнинг ички бурчаклари йиғиндисини топинг.

24. Узунлиги радиусга тенг бўлган ваталар учларидан ўтказилган уринмалар қандай бурчак остида кесишади?

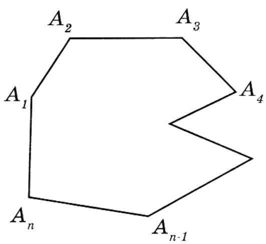
25. Бурчаги ва шу бурчак учидан туширилган баландлиги билан биссектрисасига кўра учбурчак ясанг.

I боб

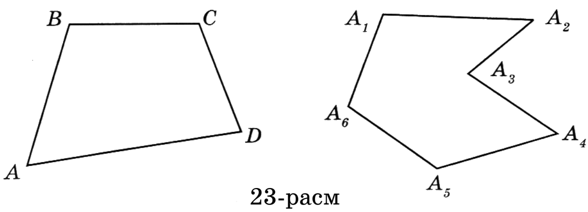
ТЎРТБУРЧАКЛАР

1-§. Кўпбурчаклар

1.1. Кўпбурчак тушунчаси. Текисликда жойлашган A_1, A_2, A_3, ..., A_n нуқталари берилган бўлсин. Бу нуқталарни A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесмалар билан бирлаштирайлик. Бу кесмаларнинг умумий учларга эга ҳар иккитаси бир тўғри чизиқда ётмайди ҳамда умумий учларга эга бўлмаган кесмалар ўзаро кесишмайдиган бўлсин. Шундай ҳосил қилинган фигура ***кўпбурчак*** **(n бурчак)** деб аталади (22-расм). A_1, A_2, A_3, ..., A_n нуқталарни кўпбурчакнинг ***учлари*** деб, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 кесмалар эса кўпбурчакнинг

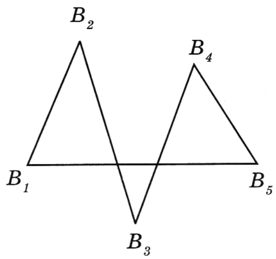


22-расм



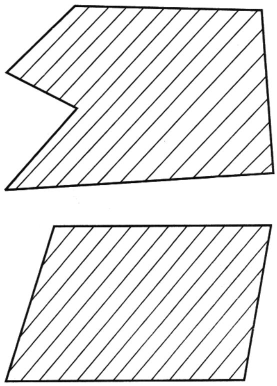
23-расм

томонлари деб аталади. Барча томонларининг узунликларининг йиғиндисини кўпбурчакнинг ***периметри*** деб аталади. Биз қараётган кўпбурчакнинг n та учи бор, шунинг учун уни n бурчак деб ҳам аталади. Масалан, 23-расмда $ABCD$ тўртбурчак билан $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ олтибурчак кўрсатилган. 24-расмда кўрсатилган фигура эса кўпбурчак бўлмайди, чунки B_1B_5 ва B_2B_3, B_1B_5 ва B_3B_4 кесмалар ўзаро кесишади.

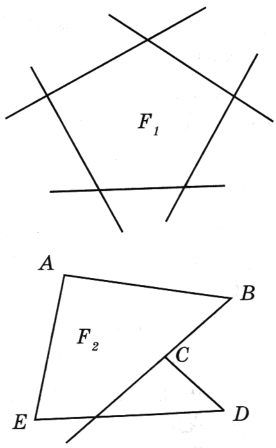


24-расм

Кўпбурчакнинг ҳар бир томонининг икки учи унинг қўшни учлари деб аталади. Кўпбурчакнинг ҳар бир қўшни бўлмаган икки учини туташтирувчи кесмаларни кўпбурчакнинг ***диагоналлари*** дейилади. Ҳар қандай кўпбурчак текисликни икки соҳага: ички ва ташқи соҳага бўлади. 25-расмда тасвирланган кўпбурчакнинг ички соҳаси штрихланган.

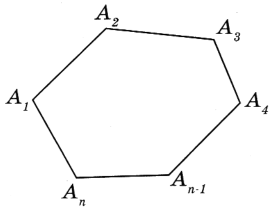

25-расм

1.2. Қавариқ кўпбурчаклар. Тўртбурчаклар. Агар кўпбурчак унинг исталган томони орқали ўтадиган тўғри чизиқларнинг битта ярим текисликда ётса, унда бундай кўпбурчакни ***қавариқ кўпбурчак*** деб атаймиз. Масалан, 26-расмда F_1 кўпбурчак қавариқ, F_2 кўпбурчак эса қавариқ эмас. Қавариқ n бурчакни кўрсатайлик: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ (27-расм). Бунда □$A_nA_1A_2$, □$A_1A_2A_3$, ..., □$A_{n-1}A_nA_1$ бурчаклар шу кўпбурчакнинг *бурчаклари* деб аталади.

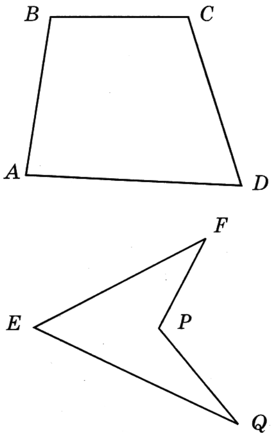


26-расм

Теорема 1. *Қавариқ n бурчак бурчакларининг йиғиндиси* $(n - 2) \cdot 180$□ *га тенг.*



27-расм



28-расм

Исботи. Бунинг учун n бурчакнинг A_1 учидан ўтадиган ҳамма диагоналларни ўтказамиз. Натижада кўпбучак $n-2$ та учбурчакка бўлинади. Бу учбурчакларнинг ички бурчакларининг йиғиндиси кўпбурчакнинг бурчакларининг йиғиндисига тенг бўлиши тушунарли. Ҳар бир учбурчакнинг бурчакларининг йиғиндиси эса 180□ га тенг бўлгани учун, кўпбучакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси $(n$-$2)\cdot 180$□ га тенг. Теорема исботланди.

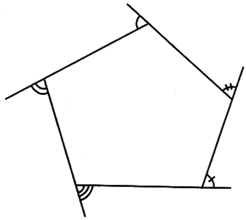
Кўпбурчакнинг тўртта учи бўлса, у ҳолда у ***тўртбурчак*** деб аталади. Ҳар бир тўртбурчакнинг тўртта учи, тўрт томони ва икки диагонали бор. Тўртбурчакнинг умумий учга эга бўлмаган икки томони ***қарама-қарши томонлари*** деб аталади, қўшни бўлмаган учлари эса ***қарама-қарши учлари*** деб аталади. Қаварик ва қаварик бўлмаган тўртбурчаклар мавжуд. Масалан, 28-расмда $ABCD$ – қаварик, $EFPQ$ – қаварик бўлмаган тўртбурчак.

Қаварик тўртбурчакнинг бурчакларининг йиғиндиси $(4-2)\cdot 180$□$=360$□ га тенг.

Кўпбурчакнинг бурчагига қўшни бурчак унинг ***ташқи бурчаги*** деб аталади.

Теорема 2. *Қаварик кўпбучакнинг ҳар бир учидан биттадан олинган ташқи бурчакларининг йиғиндиси 360□ га тенг.*

Исботи. Кўпбурчакнинг ҳар бир учига биттадан ташқи бурчак ясайлик (29-расм). Кўпбурчакнинг ҳар бир бурчаги билан унга қўшни бурчагининг йиғиндиси 180□ га тенг. Кўпбурчакда эса n та учи бўлганлиги учун, кўпбурчакнинг барча бурчаклари билан биттадан олинган барча ташқи бурчакларининг йиғиндиси $(n-2)\cdot 180$□ га тенг. Кўпбурчакнинг ички бурчакларнинг йиғиндиси эса $(n-2)\cdot 180\square$-га тенг бўлганлиги учун, унинг ташқи бурчакларнинг йиғиндиси $n\cdot 180\square-(n-2)\cdot 180\square=360\square$ га тенг бўлади. Теорема исботланди.



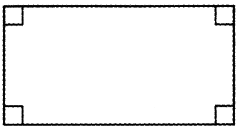
29-расм

Агар берилган кўпбурчакда:

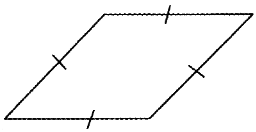
1) барча бурчаклари тўғри;

2) барча томонлари тенг бўлса,

у ҳолда бу кўпбурчак тўғри кўпбурчак деб аталади. Кўпбурчак тўғри кўпбурчак бўлиши учун 1) ёки 2) шартнинг биттаси бажарилиши етарли эмас. 29, *а* ва 29, *б*-расмларда кўрсатилган тўртбурчакларда 1) ёки 2) шартнинг фақат биттаси бажарилади, лекин улар тўғри тўртбурчак эмас. Барча тўртбурчакларнинг ичида фақат квадрат тўғри тўртбурчак бўлиб ҳисобланади (3-§ га қаранг).

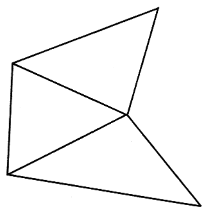


29, *а*-расм



29, *б*-расм

Эслатма. Кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳақидаги теорема қаварик бўлмаган кўпбурчаклар учун ҳам бажарилади. Масалан, 30-расмда қаварик бўлмаган бешбурчакнинг бурчакларининг йғиндиси учта учбурчакнинг бурчакларининг йиғиндисига тенг, яъни $3\cdot 180\square$. Иккинчи томондан, формулага асосан $n=5$ бўлганда $(5-2)\cdot 180\square$ бўлади.



30-расм

?

1. Қандай фигура кўпбурчак деб аталади? Унинг қандай элементларини биласиз?
2. Қаварик кўпбурчак нима?
3. Қаварик кўпбурчакнинг ички бурчакларининг йғиндиси нимага тенг? Уни исботланг.
4. Қандай фигура қаварик тўртбурчак деб аталади? Унинг элеметларини айтинг.
5. Қаварик кўпбурчакнинг ташқи бурчакларининг йиғиндиси $360\square$ га тенг бўлишини исботланг.

ПТ

1. Қавариқ: 1) бешбурчак; 2) олтибурчак ясаб, унинг элементларини кўрсатинг.
2. Қандайдир бир *ABCD* тўртбурчак ясаб, унинг қарама-қарши томонлари билан бурчакларини атаб кўрсатинг.
3. *ABCD* тўртбурчак ясаб, унинг диагоналларини ўтказинг. Шундан ҳосил бўлган барча учбурчакларни ёзиб кўрсатинг.

МИСОЛЛАР

А

26. Қавариқ тўртбурчакнинг бурчаклари бир-бирига тенг. Унинг бурчакларини топинг.

27. Бурчаклари 2, 2, 4, 5, 5 сонларига пропорционал бўлса, унда шу қавариқ бешбурчакнинг бурчакларини топинг.

28. Қавариқ: 1) ўнбурчакнинг; 2) ўн икки бурчакнинг бурчаклари йиғиндиси қанчага тенг?

29. Бурчакларининг йиғиндиси: 1)1080□; 2) 1320□; 3) 3960□; 4) 1800□ га тенг кўпбурчакнинг нечта томони бор?

30. Ҳар бир бурчаги: 1) 144□; 2) 150□; 3) 170□; 4) 171□ га тенг кўпбурчакнинг нечта томони бор?

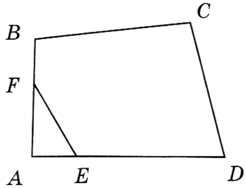
31. Кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси:1) 9180□; 1) 3600□; 3) 2040□ га тенг бўлиши мумкинми?

32. Кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси тоқ тўғри бурчаклар йиғиндисига тенг бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

33. Қавариқ n бурчакнинг бир учидан нечта диагонал ўтказиш мумкин? 1) n=4; 2) n=5; 3) n=6 4) n=10 деб олинг.

В

34. Қавариқ тўртбурчакнининг бир бурчаги қолган уч бурчагининг йиғиндисидан ортиқ бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

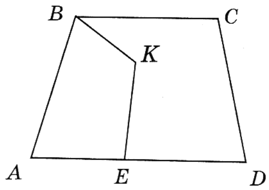


31, *а*-расм

35. Қавариқ тўртбурчакнининг: 1) кичик бурчаги 90□ дан ортиқ; 2) катта бурчаги 90□ дан кам бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

36. Ташқи тўғри бурчаклари сони тўрттадан ортиқ бўладиган;

ташқи ўтмас бурчакларининг сони учдан ортиқ бўладиган кўпбурчакнинг бўлмаслигини исботланг.



31, *б*-расм

37. *ABCD* тўртбурчакдан: 1) *FAE* учбурчакни (31, а-расм); 2) *ABKE* тўртбурчакни (31, б-расм) «қирқиб олса», кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси қандай ўзгаради?

38. 1) Барча ички бурчакларининг йиғиндиси унинг барча ташқи бурчакларининг йиғиндисига тенг кўпбурчакнинг нечта бурчаги бор? 2) Ташқи бурчакларининг барчаси ўтмас бўлган кўпбурчакнинг нечта учи бор?

39. Қавариқ тўртбурчакниниг: 1) учта бурчаги ўтмас; 2) иккита бурчаги ўтмас, қолган иккита бурчаги эса тўғри бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

40. *MNKP* қавариқ тўртбурчакниниг *M, N* учларидан бирдай узоқликда жойлашган ва *K, P* учларидан бирдай узоқликда жойлашган *O* нуқтани қандай топса бўлади? Бундай нуқтани доим топиш мумкинми? Бундай нуқталар бир нечта бўлиши мумкинми?

C

41. Қавариқ *n* бурчакнинг ўткир бурчакларининг сони нечта бўлиши мумкин? Жавобингизни асосланг.

42. Қавариқ *n* бурчакнинг диагоналларининг сони нечта?

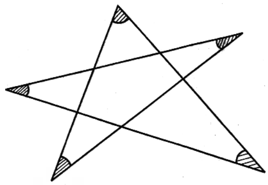
43. Агар *ABCD* тўртбурчакнинг *AC* диагонали *A* ва *C* бурчакларини тенг иккига бўлса, у ҳолда тўртбурчак томонлари ҳақида қандай хулоса қилиш мумкин?

44. Қавариқ $n+1$ бурчакнинг диагоналларининг сони *n* бурчакнинг диагоналларининг сонидан нечта ортиқ?

45. *n* нинг қандай қийматларида қавариқ *n* бурчак диагоналларининг сони *n* га тенг?

46. Шу теорема тўғрими: «Агар бир тўртбурчакнинг томонлари иккинчи тўртбурчакнинг мос томонларига тенг бўлса, унда бундай тўртбурчаклар ўзаро тенг бўлади»?

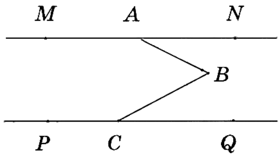
47. Бешбурчакли юлдузнинг (32-расм) белгиланган барча ўткир бурчакларининг йиғиндисини топинг.



32-расм

48. Қавариқ кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳақидаги теоремани бошқа усулда исботлаб кўринг.

49. Агар $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ ва $\angle A=26^\circ$ бўлса, $ABCD$ тўртбурчакнинг бошқа бурчакларини топинг.



33-расм

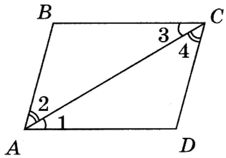
50. 33-расмда $MN \parallel PQ$. У ҳолда $\angle ABC = NAB + \angle BCQ$ бўлишини исботланг.

2-§. Параллелограмм ва унинг хоссалари

2.1. Параллелограмм ва унинг хоссалари.

Таъриф. Қарама-қарши томонлари параллель бўлган тўртбурчак ***параллелограмм*** деб аталади.

34-расмда $ABCD$ параллелограмм тасвирланган: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм – қавариқ тўртбурчак. Энди унинг бир неча хоссаларини кўриб ўтайлик.



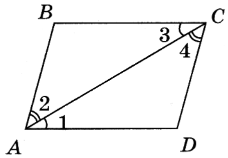
34-расм

Теорема 1. *Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари тенг ва қарама-қарши бурчаклари ҳам тенг.*

Исботи. $ABCD$ параллелограммнинг AC диагонали уни икки ABC ва CDA учбурчакларга бўлади (34-расм). Бунда $AB \parallel CD$ бўлгани учун, ички алмашинувчи бурчаклар $\angle 1=\angle 3$ ва $AD \parallel BC$ бўлгани учун, $\angle 2=\angle 4$. Унда ABC ва ADC учбурчакларининг бир томони умумий ва унга ёпишиб жойлашган мос бурчаклари тенг, яъни учбурчаклар тенглигининг II аломатига кўра бу учбурчаклар тенг. Демак, $AB=CD$, $AD=BC$, $\angle B=\angle D$ ва $\angle A=\angle C$. Теорема исботланди.

Теорема 2. *Параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.*

Исботи. $ABCD$ параллелограмм берилган бўлсин. AC ва BD диагоналларининг кесишиш нуқтаси O бўлсин



35-расм

(35-расм). 1-теоремага кўра $AD=BC$ ва ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун □1=□2, □3=□4. У ҳолда учбурчаклар тенглигининг II аломати бўйича □AOD=□COB. Бундан $AO=OC$ ва $BO=OD$. Теорема исботланди.

2.2. Параллелограммнинг аломатлари. Параллелограммнинг учта аломати бор.

1-аломати. *Агар тўртбурчакнинг икки томони тенг ва параллель бўлса, унда бу тўртбурчак параллелограмм бўлади.*

Исботи. $ABCD$ тўртбурчакда $AD \| BC$ ва $AD=BC$ (34-расм). Ички алмашинувчи бурчаклар □1=□3 бўлгани учун (чунки $AD \| BC$), учбурчаклар тенглигининг 1-аломатига кўра ABC=□CDA (чунки AC томони умумий ва $AD=BC$). Демак, □2=□4, яъни AB ва CD томонларини AC кесувчи билан кесганда □2=□4 бўлиб чиқди. У ҳолда параллелликнинг 1-аломатига кўра $AB \| CD$. Демак, $ABCD$ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари ўзаро параллель, яъни $ABCD$ – параллелограмм. Аломат исботланди.

2-аломати. *Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари жуфт-жуфтига тенг бўлса, унда бу тўртбурчак параллелограмм бўлади.*

Исботи. $ABCD$ тўртбурчакда $AB=CD$ ва $AD=BC$ бўлсин. AC диагонали уни икки ABC ва ADC учбурчакларга бўлади (34-расм). Бу учбурчакларнинг AC томони умумий ва қолган томонлари жуфт-жуфтига тенг. У ҳолда учбурчаклар тенглигининг 3-аломатига кўра □ABC=□CDA. Демак, □1=□3 ва □2=□4, яъни ички алмашинувчи бурчаклар тенг. Шунинг учун $AB \| CD$ ва $AD \| BC$. У ҳолда $ABCD$ – параллелограмм. Исботланди.

Натижа. Қўшни томонлари a га ва b га тенг параллелограммнинг периметри қуйидаги формула билан ҳисобланади: $p=2(a+b)$.

Исботи. $AB=a$, $AD=b$ бўлсин (35-расм). У ҳолда исботланган аломатга кўра $BC=b$ ва $CD=a$. Шунинг учун $p=AB+BC+CD+DA=a+b+a+b=2(a+b)$.

3-аломати. *Агар тўртбурчакнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинса, унда бу тўртбурчак параллелограмм бўлади.*

Исботи. $ABCD$ тўртбурчакнинг AC ва BD диагоналлари O нуқтасида кесишиб, тенг бўлинсин: $AO=OC$ ва $BO=OD$ (35-расм). $\square AOD=\square BOC$ (вертикаль бурчаклар) бўлганлиги учун, $\square AOD=\square COB$. Шунингдек, $\square AOB=\square COD$ эканини кўрсатиш мумкин, яъни $AB=CD$ ва $AD=BC$. У ҳолда параллелограммнинг 2-аломатига кўра $ABCD$ параллелограмм бўлади. Аломат исботланди.

?

1. Қандай тўртбурчак параллелограмм деб аталади?
2. Параллелограммнинг қандай хоссаларини биласиз?
3. Параллелограммнинг аломатларини таърифлаб, исботланг.
4. Параллелограммнинг барча бурчаклари ўткир бўлиши мумкинми?
5. Параллелограммнинг фақат биргина тўғри бурчаги бўлиши мумкинми?
6. Ҳар хил иккита ўткир бурчак бир параллелограммнинг бурчаги бўлиши мумкинми?
7. Параллелограммнинг бурчаклари орасида қандай боғланиш бор?

ПТ

1. Кўз билан чамалаб параллелограмм ясаб, уни 1) 1-аломати; 2) 2-аломати; 3) 3-аломати бўйича текширинг.
2. Учбурчак чизиб, унинг учлари параллелограммнинг учлари бўладиган ҳолда, параллелограммга тўлдиринг. Бундай параллелограммнинг неча турини ясаш мумкин?

МИСОЛЛАР

А

51. Агар: 1) $\square A=80\square$; 2) $\square B-\square A$; 3) $\square A+\square C=140\square$; 4) $\square B=2\square A$; 5) $\square ABD=90\square$, $\square ADB=30\square$; бўлса, $ABCD$ параллелограммнинг бурчакларини топинг.

52. Параллелограммнинг икки бурчагининг йиғиндиси: 1) $90\square$; 2) $120\square$; 3) $200\square$ деб олиб, унинг бурчакларини топинг.

53. Параллелограммнинг икки бурчагининг айирмаси: 1) $40\square$; 2) $80\square$; 3) $120\square$ бўлса, унинг бурчакларини топинг.

54. Параллелограммнинг икки томонининг узунликлари 10 см ва 12 см. Унинг қолган икки томонининг узунликлари қандай? Жавобингизни асосланг.

55. *ABCD* параллелограммнинг *BD* диагоналида $PB=QD$ бўладигандай *P* ва *Q* нуқталар берилган. *APCQ* тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.

56. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 5 м. Унинг асосидаги бир нуқтадан ён томонларига параллель икки тўғри чизиқ ўтказилган. Шунинг натижасида ҳосил бўлган параллелограммнинг периметрини аниқланг.

57. *ABCD* параллелограммнинг периметри 10 см, *ABD* учбурчакнинг периметри эса 8 см. *BD* диагоналининг узунлиги қандай?

58. *ABCD* параллелограммда *E* нуқта *BC* томоннинг, *F* нуқтаси эса *AD* томоннинг ўртаси. *BEDF* тўртбурчакнинг параллелограмм бўлишини исботланг.

59. *ABCD* параллелограммнинг периметри 50 см, $BD=7$ см. *ABD* учбурчакнинг периметрини топинг.

B

60. *ABCD* қавариқ тўртбурчак берилган: 1) □BAC=□ACD ва □BAC=□DCA, 2) $AB \parallel CD$, □A =□C бўлса *ABCD* тўртбурчак параллелограмм бўлишини кўрсатинг.

61. *ABCD* параллелограммнинг *B* ва *D* учларидан *AC* диагоналига *BK* ва *DM* перпендикулярлари ўтказилган. *BMDK* тўртбурчаги параллелограмм эканини исботланг.

62. *ABCD* параллелограммнинг *A* учидан ўтказилган биссектрисаси *BC* томонини *E* нуқтасида кесиб ўтади. Агар $AB=9$ см, $AD=15$ см бўлса, унда *BE* ва *EC* кесмаларнинг узунликларини топинг.

63. Параллелограммнинг икки томони нисбати 3:4 га тенг, унинг периметри эса 2,8 м. Томонларини топинг.

64. *ABCD* параллелограммнинг *B* учидан *AD* томонига туширилган перпендикуляр шу томонини тенг иккига бўлади. Параллелограммнинг периметри 3,8 м. *ABD* учбурчакнинг периметри эса 3 м. Параллелограммнинг *BD* диагоналини ва томонларини топинг.

65. Параллелограммнинг томонлари 3 см ва 5 см. Бу параллелограммнинг диагоналлари: 1) 10 см; 2) 8 см; 3) 4 см бўлиши мумкинми?

66. Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари ўрталарини туташтирувчи кесма унинг қолган икки томонига параллель бўлишини исботланг.

67. Параллелограммни ўзаро тенг иккита: 1) учбурчакларга; 2) тўртбурчакларга бўладиган қилиб тўғри чизиқ ўтказинг.

68. Диагоналларининг кесишиш нуқтасининг ва қўшни икки учининг ўрни бўйича параллелограмм ясанг.

69. Агар тўртбурчакнинг қўшни икки томонининг ҳар қайсисига ёпишган икки бурчакнинг йиғиндиси 180□ га тенг бўлса, унда бу тўртбурчак параллелограмм бўлишини исботланг.

70. Ёпишган тенг томонлари билан уларнинг орасидаги бурчаги бўйича параллелограмм ясанг.

С

71. Томони билан икки диагонали бўйича параллелограмм ясанг.

72. Параллелограммнинг қарама-қарши икки бурчагининг биссектрисалари параллель бўлишини исботланг.

73. Параллелограммнинг периметри 50 см. Унинг диагоналлари параллелограммни тўртта учбурчакка бўлади ва бу учбурчакларнинг иккитасининг периметрларининг айирмаси 5 см. Параллелограммнинг томонларини топинг.

74. KL тўғри чизиқ томонлари ўзаро тенг $ABCD$ параллелограммнинг A учидаги ташқи бурчакнинг биссектрисаси $AK=AL$. KCL учбурчакнинг тенг ёнли эканини исботланг.

75. Учбурчакнинг тенг бўлмаган томонларининг орасидаги медианасининг шу томонларнинг кичиги билан ҳосил қиладиган бурчакни иккинчи томони билан ҳосил қилган бурчагидан катта бўлишини исботланг.

76. Параллелограмм бурчакларининг биссектрисалари кесишганда ҳосил бўладиган тўртбурчакнинг: а) параллелограмм бўлишини; б) барча бурчаклари тўғри бўлишини исботланг.

3-§. Тўғри тўртбурчак, ромб, квадрат ва уларнинг хоссалари

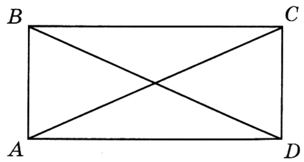
3.1. Тўғри тўртбурчак. *Ҳамма бурчаклари тўғри бўлган параллелограмм* ***тўғри тўртбурчак*** *деб аталади.*

Эслатма. Қуйи синфларда барча бурчаклари тўғри бўлган тўртбурчакларни тўғри тўртбурчак деб атаган эдик. Унда биз тўғри тўртбурчакни «тўртбурчак» ва «тўғри бурчак» каби тушунчалар орқали ифодалаганмиз. Бу таърифда эса тўғри тўртбурчакни «тўғри бурчак» ва «параллелограмм» тушунчалари билан таърифлаймиз. Демак, бир тушунчанинг ўзига турли изоҳларга асосланиб, бир неча таъриф бериш мумкин. Бундай ҳолларда, яъни бир тушунчага бир неча таъриф берилган вақтда бу таърифларнинг мазмуни бир хил эканини исботлаш керак. Яъни, бир тушунчага берилган икки таърифнинг ҳар иккаласи ҳам амалда бир тушунчани таърифлашига ишонч ҳосил қилиш керак (исботлаш керак). Бунинг учун икки таърифнинг бирини таъриф сифатида қабул қилиб, иккинчисини теорема сифатида исботлаш керак, аксинча, иккинчи таърифдан биринчи таърифнинг теорема сифатида исботланишини кўрсатиш керак. Шундагина бир тушунчага берилган икки таърифнинг бир маънога эга бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Мисол тариқасида тўғри тўртбурчакга берилган икки таърифнинг ўзаро бир хил маънога эга бўлишини математикага қизиққан иқтидорли ўқувчиларга исботлашни тавсия этамиз.

Умуман, берилган таъриф билан бир хил маънога эга бўлиши исботланган ҳар бир хулоса, қаралаётган тушунчанинг таърифи сифатида қабул қилинади. Бунда мисол сифатида қуйидаги икки теоремани кўрсатиш мумкин.

Теорема 1. *Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлади.*

Исботи. 37-расмда AC ва BD кесмалар – $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари. □ABD ва □ACD – тўғри тўртбурчакли учбурчаклар. Уларнинг AD катети умумий ва $AB=CD$. У ҳолда □BAD=□CDA. Демак, бу учбурчакларнинг гипотенузалари ҳам тенг: $AC=BD$. Теорема исботланди.



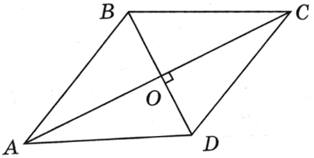
36-расм

Теорема 2. (Тескари теорема). *Диагоналлари тенг параллелограмм тўғри тўртбурчак ҳисобланади.*

Исботи. $ABCD$ параллелограммнинг диагоналлари тенг бўлсин: $AC=BD$. У ҳолда уч томони бўйича □ABD=□DCA. Демак, □BAD=□CDA. Параллелограммнинг бир томонга ёпишган икки бурчагининг йиғиндиси 180□ га тенг бўлгани учун, □BAD=□ADC. Шунингдек, □ABC=□BCD эканлигини кўрсатиш мумкин. Яъни, $ABCD$ параллелограмм – тўғри тўртбурчак. Теорема исботланди.

Исботланган бу икки теоремадан сўнг диагоналлари тенг параллелограммни тўғри тўртбурчак деб айтиш мумкин.

Натижа. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига туширилган медиана гипотенузанинг ярмига тенг.*



37-расм

3.2. Ромб.

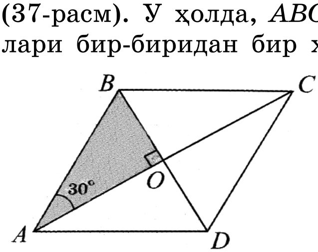
*Томонлари ўзаро тенг параллелограмм **ромб** деб аталади* (37-расм).

Теорема 3. *Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва унинг бурчакларини тенг иккига бўлади.*

Исботи. $ABCD$ – ромб. Бунда ABC учбурчак тенг ёнли ва BD диагонали шу учбурчакка B учидан туширилган BO медианасини ўз ичига олади, яъни BO ҳам биссектриса, ҳам баландлик бўлади. Шунинг учун BD □ AC. Теорема исботланди.

Теорема 4. (Тескари теорема). *Диагоналлари перпендикуляр ҳар қандай параллелограмм ромб бўлади.*

Исботи. $ABCD$ параллелорамм бўлгани учун AC ва BD диагоналлар бир-бирига ўрта перпендикуляр бўлади (37-расм). У ҳолда, $ABCD$ параллелораммнинг барча учлари бир-биридан бир хил узоқликда жойлашган, яъни $ABCD$ – ромб. Теорема исботланади.



38-расм

Мисол. 30□ ли бурчак қаршисида ётган катет гипотенузанинг ярмига тенглигини исботлаймиз.

Исботи. Ўткир бурчаги 60□ га тенг $ABCD$ **ромбни кўриб ўтамиз** (38-расм) □BAD=60□; □ABC=60□. У ҳолда 3-теорема бўйича $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$. Яъни ABD учбурчакнинг хамма бурчаклари 60□ га тенг. У ҳолда, □ABD тенг томонли учбурчак: $AB=BD=AD$.

Иккинчи жиҳатдан, исботланган теоремалар бўйича AOB=90□, □BAO=30□, $BO=OD=\frac{1}{2}BD$. Яъни □AOB – ўткир бурчаги 30□ га тенг тўғри бурчакли учбурчак ва BO □$\frac{1}{2}BD$ □$\frac{1}{2}AB$. Демак, 30□ га қарши ётган катет гипотенузанинг ярмига тенг.

3.3. Квадрат.

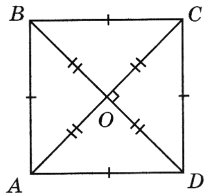
Барча томонлари тенг тўғри тўртбурчак ***квадрат*** *деб аталади.*

Тўғри тўртбурчак параллелограмм бўлгани учун, квадрат ҳам параллелограмм ҳисобланади. Барча томонлари тенг бўлганликдан, квадрат ромб ҳам бўлади. Демак, квадрат параллелорамм ҳам, тўғри тўртбурчак ҳам, ромб ҳам ҳисобланади. Шу сабабли квадрат учун шу фигураларнинг барча хоссалари бажарилади:

1. Квадратнинг барча бурчаклари тўғри.

2. Квадратнинг барча томонлари тенг.

3. Квадратнинг диагоналлари тенг, ўзаро перпендикуляр, кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади ва квадратнинг бурчакларини ҳам тенг иккига бўлади (39-расм).



39-расм

?

1. Тўғри тўртбурчак деганда нимани тушунасиз?
2. Тўғри тўртбурчакка қандай таърифлар бериш мумкин?
3. Параллелограммни қуйидагича таърифлаш мумкинми: «параллелограмм деб қарама-қарши томонлари параллель ва ўзаро тенг бўладиган тўртбурчакка айтилади». Бу таърифнинг камчилиги нимада?
4. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг эканини исботланг.
5. Ромб нима?
6. Ромбнинг диагоналлари: 1) ўзаро перпендикуляр;

2) бурчакларининг биссектрисаси бўлишини кўрсатинг.
7. Квадрат нима, унинг қандай хоссаларини биласиз?
8. Барча баландликлари ўзаро тенг параллелограмм тўғрисида нимани айтишга бўлади?

ПТ 1. Кўз билан чамалаб тўғри тўртбурчак ясанг (томонлари дафтар чизиқларига параллель бўлмасин). Чизманинг тўғрилигини ўлчаш ишлари орқали ва тўғри тўртбурчакнинг хоссалари орқали текширинг.
2. 1-топшириқни квадрат билан ромб учун ҳам бажаринг.

МИСОЛЛАР

А

77. Икки бурчаги тўғри бўлган тўртбурчакнинг тўғри тўртбурчак бўлавермаслигини кўрсатинг.

78. Тўғри тўртбурчак бўлмайдиган, бироқ диагоналлари ўзаро тенг бўлган тўртбурчакни ясанг.

79. 77 ва 78-масаладаги тўртбурчаклар ҳар вақт тўғри тўртбурчак бўлиши учун масалани қандай шартлар билан тўлдириш мумкин.

80. Барча бурчаклари ўзаро тенг тўртбурчакнинг тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.

81. Умумий учга эга икки томони тенг параллелограмм ромб бўлишини исботланг.

82. Параллелограммнинг диагоналлари: а) ўзаро перпендикуляр; б) бурчакларининг биссектрисаси бўлади деб олиб, унинг ромб бўлишини исботланг.

83. Диагоналлари перпендикуляр тўртбурчак ромб бўла оладими?

84. Диагоналлари тенг ҳамда перпендикуляр тўртбурчак квадрат бўла оладими?

85. 1) «Параллелограмм»; 2) «тўғри тўртбурчак» 3) «ромб»; 4) «тўртбурчак» тушунчаларидан фойдаланиб, квадратга таъриф беринг.

86. Тўғри тўртбурчак билан ромбга қандай таъриф бериш мумкин? Бир неча таъриф бериб кўринг.

87. Тўғри тўртбурчакнинг бир бурчаги биссектрисаси томонини тенг иккига бўлади. Унинг кичик томони 10 см. Тўғри тўртбурчакнинг периметрини топинг.

88. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари кесишиш нуқтаси катта томонига қараганда кичик томонидан 4 см узоқроқ жойлашган ва тўғри тўртбурчакнинг периметри 56 см. Унинг томонларини топинг.

89. Ромбнинг бир диагонали унинг томонига тенг. Ромбнинг бурчакларини топинг.

B

90. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари O нуқтада кесишади. 1) AOD ва AOB учбурчакларнинг тенг ёнли эканини исботланг; 2) $\angle CAD=30^\circ$, $AC=12$ см бўлса, AOB учбурчакнинг периметрини топинг.

91. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ўтказилган медианаси гипотенузанинг ярмига тенг бўлишини исботланг.

92. Айлананинг бир нуқтасидан ўтказилган ўзаро перпендикуляр икки ватарнинг марказидан узоқликлари 6 см ва 10 см. Ватарнинг узунликларини топинг.

93. Ҳар бир катети 6 см бўладиган тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган тўғри тўртбурчак билан учбурчакнинг бир бурчаги умумий. Тўғри тўртбурчакнишг периметрини топинг.

94. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг икки учи гипотенузада, қолган икки учи эса катетларда жойлашган. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари нисбати 5:2 га тенг, учбурчакнинг гипотенузаси эса 45 см. Тўғри тўртбурчакнинг катта томони гипотенузада ётса, унинг томонларини топинг.

95. $ABCD$ параллелограммда $AD>AB$. A билан B бурчакларнинг биссектрисалари параллелограммнинг BC билан AD томонларини мос K ва L нуқталарда кесади. $ABKL$ тўртбурчак ромб бўлишини исботланг.

96. Ромбнинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали унинг томонларига перпендикуляр ўтказилган. Шу перпендикулярнинг ромб томонлари билан кесишиш нуқталари тўғри тўртбурчак учлари бўлишини исботланг.

97. Ромб томонлари унинг диагоналлари билан ҳосил қиладиган бурчакларининг нисбати 4:5 га тенг. Ромбнинг бурчакларини топинг.

98. Ромбнинг периметри 16 см, баландлиги 2 см. Ромбнинг бурчакларини топинг.

99. Ҳар бир катети 2 м бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган

квадрат билан шу учбурчакнинг бир бурчаги умумий. Квадратнинг периметрини топинг.

100. Тўғри бурчакли учбурчакниг тўғри бурчаги биссектрисасининг гипотенуза билан кесишиш нуқтаси орқали катетларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканини исботланг.

101. Квадратнинг диагонали 4 м. Унинг томони иккинчи бир квадратнинг диагоналига тенг. Кейинги квадратнинг томонини топинг.

102. Айланага бир нуқтадан ўзаро перпендикуляр икки уринма ўтказилган. Айлананинг радиуси 10 см. Уринманинг узунлигини (берилган нуқтадан уриниш нуқтасигача бўлган масофани) топинг.

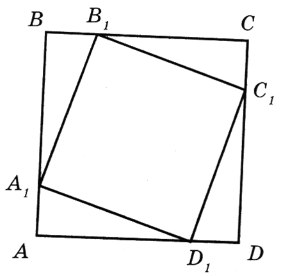
103. $ABCD$ квадратнинг AB томонидан K нуқтаси олинган: $AK=BK$. CDK учбурчакнинг тенг ёнли эканини исботланг.

C

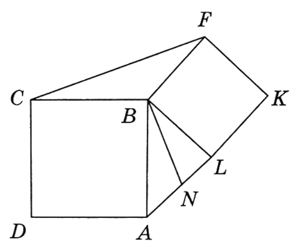
104. Квадратнинг учлари орқали унинг диагоналларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканини исботланг.

105. $ABCD$ квадратнинг ҳар бир томонига ўзаро тенг кесмалар ўлчаб қўйилган: $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчак квадрат эканини исботланг(40-расм).

106. $ABCD$ ва $BFKL$ квадратларнинг B учи умумий (41-расм). ABL учбурчакнинг BN медианаси CF кесмага перпендикуляр бўлишини исботланг.



40-расм



41-расм

107. $ABCD$ квадратнинг ичидан $\angle KAD=\angle KDA=15^\circ$ бўладиган қилиб, K нуқта олинган. BCK учбурчак тенг томонли эканини исботланг.

108. Диагоналлари бурчакларининг биссектрисаси бўладиган ҳар бир қавариқ тўртбурчак ромб бўлади. Ромбнинг шу аломатини исботланг.

109. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг учидан унинг диагоналига туширилган перпендикуляр унинг бурчагини 3:1 нисбатда бўлади. Шу перпендикуляр билан иккинчи диагоналининг орасидаги бурчакни топинг.

110. Ромбнинг диагонали унинг $2p$ га тенг периметрининг 25% ини ташкил қилади. Ромбнинг диагоналини, томонини ва бурчакларини топинг.

4-§. Тўртбурчакларни элементлари бўйича ясаш

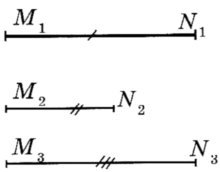
Сиз тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказиш, кесмани тенг иккига бўлиш, бурчакнинг биссектрисасини ясаш, элементлари бўйича учбурчак ясаш сингари масалалар билан 7-синфдан танишсизлар.

Мураккаблиги юқори бўлган ясашга оид масалаларни ечиш эса маълум бир режа асосида бажарилади. Аввал унинг берилиши таҳлил қилинади, берилган элементлар билан ясаладиган фигуранинг номаълум элементлари орасидаги боғланишлар билан алоқалар аниқланади, шундай қилиб ясаш режаси белгиланади. Таҳлилнинг иккинчи босқичида аниқланган ясаш режасига асосланиб, ясаш ишлари кетма-кет бажарилади. Учинчи босқичда ясаш натижасида ҳосил бўлган фигуранинг масала шартларини қаноатлантира олиш исботланади. Одатда, тўғри таҳлил қилинган масалаларда исботлаш ишлари енгил кўчади. Энг охирида текшириш ишлари олиб борилади. Масаланинг бу тўртинчи босқичида берилган элементларнинг барча мумкин бўлган қийматларида масала ечимга эга бўладими, агар бўлса, унда унинг нечта ечими борлиги текширилади. Демак, ясашга оид масалани ечиш тўрт босқичга бўлинади: I. Таҳлил. II. Ясаш. III. Исботлаш. IV. Текшириш.

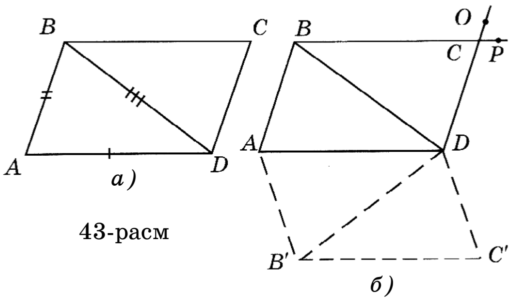
1-мисол. Қўшни икки томони билан бир диагоналга кўра параллелограмм ясаш керак.

Ечилиши. Дастлаб масаланинг берилишини тушиниб олиш керак. Параллелограммнинг қўшни икки томони билан диагонали берилган. Бу учала элемент ҳам кесма бўлганлигидан бизга M_1N_1,M_2N_2 ва M_3N_3 кесмалари берилган деб ҳисоблаш керак. Шунда бир томони M_1N_1 кесманинг узунлигигига, иккинчи томони M_2N_2 га тенг, диагонали эса M_3N_3 га тенг бўладиган параллелограмм ясаш керак (42-расм).

I. Таҳлил. Бизга керакли $ABCD$ параллелограмм ясалади деб ҳисоблайлик (43, *а*-расм). Бунда ABD учбурчакнинг томонлари берилган кесмаларга тенг эканини кўрамиз: $AD=M_1N_1,$ M_2N_2 ва $BD=M_2N_2$. У ҳолда, масалани тўғри ечиш учун ABD учбурчакни уч томони бўйича ясаб, уни $ABCD$ параллелограммга тўлдириш керак.



42-расм



43-расм

II. Ясаш. 1) 1) $AD=M_1N_1$, $AB=M_2N_2$ ва $BD=M_3N_3$ бўлган ABD учбурчакни ясаймиз (7-синфда ўрганган усул асосида).

2) D нуқтадан $DO\|AB$ қилиб DO тўғри чизиқ ўтказамиз.

3) B нуқтадан $BP\|AD$ қилиб BP тўғри чизиқ ўтказамиз.

4) BP ва DO тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини C орқали белгилаймиз (43, б-расм).

Ҳосил бўлган $ABCD$ тўртбурчак – бизга керакли параллелограмм.

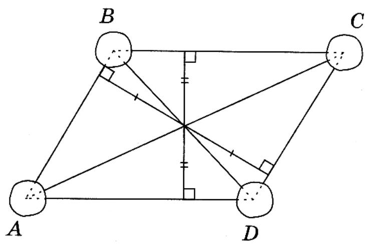
III. Исботлаш. Ясашимиз бўйича, $AD\|BC$, $AB\|CD$ ва $AD=M_1N_1$, $AB=M_2N_2$, $BD=M_3N_3$ бўлганлиги учун, $ABCD$ – параллелограмм ва у масала шартини қаноатлантиради.

IV. Текшириш. Таҳлилдан масаланинг ечими ABD учбурчакни ясашга келтирилганлигини сезамиз. У ҳолда, томонлари M_1N_1, M_2N ва M_3N_3, кесмаларига тенг бўлган

ABD учбурчакни ясаш имкони борлиги келиб чиқади. Яъни берилган уч кесма учбурчаклар тенгсизлигини қаноатлантириш керак: $M_1N_1,< M_2N_2 + M_3N_3$, $M_2N_2 < M_1N_1 + M_2N_2.$ $M_3N_3< M_1N_1,+ M_2N_2.$ Агар бу тенгсизликларни биттаси бажарилмай қолса, у ҳолда масаланинг ечими бўлмайди. Бу тенгсизликларни ҳаммаси бажарилса, у ҳолда масаланинг ечими иккита бўлади (43, б-расм). Чунки, уч томони бўйича икки шаклда (икки турли) учбурчаклар ясаш мумкин: *ABD* ва *AB'D*. У ҳолда *ABCD* ва *AB'C'D* параллелограммлар масала шартини тўлиқ қаноатлантиради.

2-мисол. Учларига бориб бўлмайдиган параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтасини топиш керак.

Ечилиши. Аввал масаланинг берилишини тушуниб олайлик. Параллелограммнинг учларига бориб бўлмайди жумласини, унинг қарама-қарши учларини қўшиб, диагоналларини ўтказиш мумкин эмас деб тушиниш керак, яъни параллелограмм учларининг аниқ ўрни номаълум. У ҳолда, бизга параллелограмм томонларининг учлари йўқ бўлакларигина берилади деб ҳисоблаш керак (44-расм).



44-расм

I. Таҳлил. Масалани ечилди деб ҳисоблаб, *ABCD* параллелограммнинг *AC* ва *BD* диагоналларининг кесишиш нуқтасини *O* деб белгилаймиз. Параллелограммнинг хоссаларига асосан *O* нуқта қарама-қарши томонлардан бир хил узоқликда жойлашган. У ҳолда параллелограммнинг қарама-қарши томонларини уларга перпендикуляр кесмалар билан бирлаштириб, шу кесмалардан ўрта перпендикуляр ўтказсак, унда бу ўрта перпендикулярнинг кесишиш нуқтаси *O* – берилган параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлади.

II. Ясаш. 1) *AB* томонларидан *P* нуқтасини олиб, *CD* томонига *PQ* перпендикуляр ўтказамиз (45-расм).

2) BC томонидан M нуқта олиб, AD томонига MN перпендикуляр ўтказамиз.

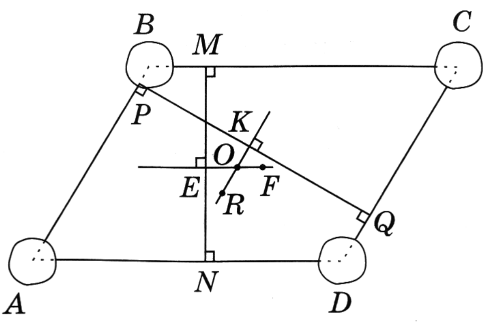
3) MN ва PQ кесмаларни ўртаси бўладиган E ва K нуқталарини топиб, шу нуқталардан кесмаларга EF ва KR ўрта перпендикулярни ўтказамиз.

4) EF ва KR тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини O деб белгилаймиз.

У ҳолда O нуқта берилган параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлади (45-расм).

III. Исботлаш. Ясашимиз бўйича O нуқтаси $ABCD$ параллелограммнинг қарама-қарши томонларидан бир хил узоқликда ётибди. Демак, O нуқтаси параллелограмм

IV. Текшириш. Масалани ечиш MN ва PQ перпендикулярларни ўтказиш имкониятларига боғлиқ. Шунинг учун, агар шу перпендикулярни ўтказиш мумкин бўлса, унда масала биттагина ечимга эга бўлади. Чунки ясаш жараёнида аниқланган элементларни фақат бир кўринишдагина ясаш мумкин. Агар MN ёки PQ перпендикулярларнинг кам деганда биттасини ўтказиш имконияти бўлмаса, у ҳолда масалани бошқа усуллар билан ечиш мумкин. Масалани ечишнинг бошқа усулларини ўқувчилар мустақил бажаришлари керак. Барча ҳолларда масаланинг ёлғиз ечими бўлади.



45-расм

T Ясашга доир масалалар қадимги математикалар асарлари орасида алоҳида ўрин олган. Чунки у вақтда барча математика фанидаги маълумотлар чизма ёрдамида, геометрия тилида берилган. Чизғич ва циркулдан фойдаланиб кўпбурчакларни, жумладан, мунтазам кўпбурчакларни ясаш масаласи буюк немис математиги Карл Гауссгача (1777–1855) ўз ечимини топмай келган. Бу масалани фақат 1801 йили К. Гаусс алгебрик йўл билан тўлиқ ҳал этди. Унинг исботлаши бўйича мунтазам n бурчакни циркуль ва чизғичдан фойдаланиб ясаш учун $n=2^m \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$, $m \square Z$, $m \square 0$ $P_1, \ldots, P_k 2^{2k}+1$ ($k \square 0$) кўринишидаги оддий сон бўлиши керак. Масалан $5=2^{2k}+1$, лекин 7 бундай шаклда ёзилмайди, яъни мунтазам еттибурчакни циркуль ва чизғичдан фойдаланиб ясаш мумкин эмас.

Карл Гаусс
(1777–1855)

?

1. Ясашга доир масалалар неча босқичдан иборат бўлади? Бу босқичларни айтиб, уларнинг мазмуни ва маъносини изоҳланг.
2. Агар ҳамма томонлари берилган бўлса, у ҳолда: 1) параллелограмм; 2) тўғри тўртбурчак; 3) ромб; 4) квадратларни ясаш мумкинми? Мумкин бўлган ҳолатда аталган фигураларни ясаб кўрсатинг.

МИСОЛЛАР

В

111. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган берилган учта нуқтада учлари жойлашадиган неча хил параллелограмм ясаш мумкин?

112. Бир томони ва икки диагонали бўйича параллелограмм ясанг.

113. Икки томони билан бир бурчаги бўйича параллелограмм ясанг.

114. Икки диагонали билан уларнинг орасидаги бурчаги бўйича параллелограмм ясанг.

115. 1) Ўткир бурчаги билан икки баландлиги бўйича; 2) баландлиги ва икки диагонали бўйича параллелограмм ясанг.

116. 1) Қўшни икки томони; 2) томони ва диагонали; 3) диагоналлари билан улар орасидаги бурчаги бўйича тўғри тўртбурчак ясанг.

117. 1) Икки диоганали; 2) томони ва бурчаги бўйича ромб ясанг.

118. 1) Томони; 2) диагонали бўйича квадрат ясанг.

119. 1) Томони, диагонали ва диагоналларининг орасидаги бурчаги; 2) икки баландлиги билан томони бўйича параллелограмм ясанг.

120. 1) Диагонали ва бурчаги; 2) диагонали ва баландлиги бўйича ромб ясанг.

121. 1) Берилган икки бурчаги; 2) қарама-қарши икки томонининг ўрта нуқталари; 3) қўшни икки томонининг ўрта нуқталари; 4) маркази (диагоналларининг кесишиш нуқтаси) ва бир томонида ётган икки нуқтаси бўйича квадрат ясанг.

C

122. ABC бурчакнинг ички D нуқтаси орқали ўтадиган ва шу бурчакнинг томонлари билан чегараланадиган кесма D нуқтада тенг иккига бўлинадиган қилиб, тўғри чизиқ ўтказинг.

123. Икки томони билан учинчи томонига туширилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

124. Диагонали ва қўшни икки томонининг йиғиндиси бўйича тўғри тўртбурчак ясанг.

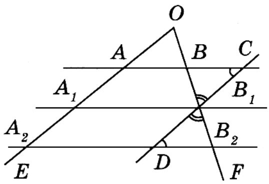
125. Параллель икки тўғри чизиқ ва уларнинг орасида жойлашган икки нуқта берилган. Икки томони берилган икки тўғри чизиқ устида ётадиган ва бошқа икки томони берилган икки нуқта орқали ўтадиган ромб ясанг.

126. Томонларидан биттадан олинган нуқталар ўринлари бўйича квадрат ясанг.

5-§. Фалес теоремаси. Учбурчакнинг ўрта чизиғи

5.1. Фалес теоремаси

Теорема 1. (Фалес теоремаси**).** *Агар бурчак томонларини кесиб ўтадиган параллель тўғри чизиқлар унинг бир* *томонидан ўзаро тенг кесмалар ажратса, бу тўғри чизиқлар бурчакнинг иккинчи томонидан ҳам тенг кесмалар ажратади.*



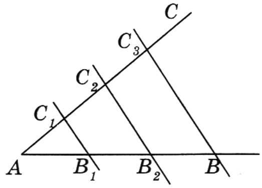
46-расм

Исботи. Параллель тўғри чизиқлар EOF бурчакнинг бир томонидан тенг кесмалар ажратсин: $AA_1=AA_2$ (46-расм). Бу тўғри чизиқлар иккинчи томонини B,B_1,B_2 нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда $BB_1=B_1B_2$ тенглиги бажарилишини исботлаш керак. Исботлаш учун B_1 нуқта орқали AA_2тўғри чизиққа параллель DC тўғри чизиқни ўтказамиз. Параллелограммнинг хоссасига асосан $AA_1=CB_1$, $A_1A_2=B_1D$. $AA_1=AA_2$ бўлганидан, $CB_1=B_1D$ тенглик бажарилади. $AB||A_2B_2$ бўлгани учун, ички алмашинувчи бурчаклар сифатида тенглик ва вертикаль бурчаклар сифатида $\square BCB_1 = B_2B_1D$ тенглик бажарилади. Унда бир томони билан унга ёпишган бурчакларнинг тенглиги бўйича $\square BCB_1=\square B_2DB_1$тенглигини ҳосил қиламиз. У ҳолда, $BB_1=B_1B_2$ Теорема исботланди.

Эслатма. Фалес теоремасида бурчак томонларининг ўрнига ҳар қандай икки тўғри чизиқни олишга бўлади. Бунда, Фалес теоремаси қуйидагича бўлади: *Берилган икка тўғри чизиқнинг биридан тенг кесмалар кесиб ўтадиган параллель тўғри чизиқлар иккинчи тўғри чизиқдан ҳам тенг кесмалар кесиб ўтади.*

1-мисол. Берилган AB кесмани тенг уч бўлакка бўлиш керак.

Ечилиши. AB кесманинг A учидан AC нур ўтказамиз. Бунда $\square BAC>0\square$ бўлиши керак, яъни AB ва AC нурлари бир-бирини устига тушмаслиги керак. AC нурнинг устидан A нуқтадан бошлаб ўзаро тенг уч кесмани навбат билан ўлчаб ясаймиз: $AC_1=C_1C_2=C_2C_3$. C_1 ва C_2 нуқталари орқали BC_3 тўғри чизиққа параллель тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар AB кесмани B_1 ва B_2 нуқталарда кесиб ўтади (47-расм). У ҳолда Фалес теоремаси бўйича B_1 ва B_2 нуқталари AB кесмани тенг уч бўлакка бўлади: $AB_1=B_1B_2=B_2B$.

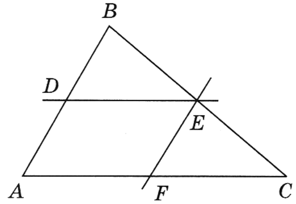


47-расм

5.2. Учбурчакнинг ўрта чизиғи

Таъриф. ***Учбурчакнинг ўрта чизиғи*** *деб унинг икки томони ўрталарини бирлаштирадиган кесмага айтилади.*

Теорема 2. *Учбурчакнинг ўрта чизиғи учбурчакнинг учинчи томонига параллель ва унинг ярмига тенг бўлади.*



48-расм

Исботи. D нуқтаси AB томоннинг ўртаси бўлсин. D нуқта орқали ва AC га параллель ўтадиган тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг BC томонини E нуқтада кесиб ўтсин. Унда Фалес теоремаси бўйича E нуқтаси BC томонининг ўртаси бўлади ($AD=DB$ бўлгани учун, $BE=EC$ тенглиги бажарилади). Ундай бўлса, DE учбурчакнинг ўрта чизиғи ва $DE \| AC$ (48-расм).

Энди $EF \| AB$ ўрта чизиғини ўтказайлик. Шунда Фалес теоремаси бўйича $AF=FC$. $DE \| AF$ ва $EF \| AD$ бўлгани учун, $ADEF$ параллелограмм, яъни параллелограмм хоссаси бўйича $DE=AF$. $DE=AF=FC$ бўлганидан, $DE \square \frac{1}{2} AC$. Теорема исботланди.

Т Фалес Милетский (эр.ав. VI а.) қадимги грек олим–файласуфи. У қадимги грек фалсафаси билан илмнинг асосини яратувчиси бўлиб саналади. Баъзи теоремаларнинг исботини Фалес номи билан боғлашади. Масалан, вертикаль бурчакларнинг тенглиги, айланани диаметри бўйича тенг иккига бўлиши ва бошқа теоремалар.

Фалес
(эр.ав. VI а.)

?
1. Фалес теоремасини таърифланг, уни исботланг.
2. Учбурчакнинг ўрта чизиғи дегани нима?
3. Учбурчакнинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремани таърифланг ва уни исботланг.

МИСОЛЛАР

А

127. 1) Параллелограмм; 2) тўғри тўртбурчак; 3) ромб; 4) квадрат томонлари ўрталарини бирин-кетин бирлаштирганда ҳосил бўладиган тўртбурчакнинг турини аниқланг.

128. Берилган кесмани: 1) ўзаро тенг тўртта; 2) ўзаро тенг бешта кесмага бўлинг.

129. Берилган кесмани: 1) 1:2; 2) 2:3 нисбатдаги икки бўлакка бўлинг.

130. Учбурчакнинг икки томони a билан b га тенг. Учинчи томонининг ўртасидан берилган томонларига параллель тўғри чизиқлар ўтказганда ҳосил бўладиган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

131. Учбурчакнинг периметри p га тенг. Учлари берилган учбурчак томонларининг ўрталари бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.

132. Тўртбурчак диагоналлари 3 дм ва 8 дм. Учлари тўртбурчак томонларининг ўрталарида ётадиган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

B

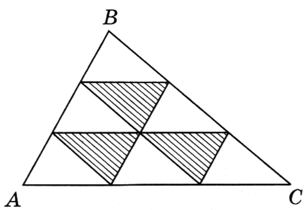
133. Ўткир бурчакли ABC учбурчакнинг B учидан туширилган баландлиги AC томонини узунлиги 6 см ва 4 см бўладиган кесмаларга бўлади. Шу учбурчак медианаларининг AC томонига туширилган проекциялари узунликларини топинг.

134. Қавариқ тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари бўлишини исботланг.

135. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари ромб учлари бўлишини ва аксинча, ромб томонларининг ўрталари тўғри тўртбурчакнинг учлари бўлишини исботланг.

136. Ҳар бир учбурчакни параллелограмм ясашга мумкин бўладигандай икки бўлакка бўлиш мумкинлигини кўрсатинг.

137. ABC учбурчакнинг ҳар бир томони ўзаро тенг уч кесмага бўлиниб, бўлиш нуқталари учбурчак томонларига параллель кесмалар билан қўшилган (49-расм). ABC учбурчакнинг периметри p га тенг бўлса, унда бўялган фигуранинг периметри қандай?



49-расм

138. Учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишиб, кесишиш нуқтасида учидан бошлаб 2:1 нисбатда бўлинишини исботланг.

139. Ромб диагоналлари d_1 ва d_2 га тенг. Учлари шу ромб томонларининг ўрталарида ётадиган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

C

140. Дарёнинг икки томонида жойлашган пунктларнинг орасидаги масофани аниқлаш учун учбурчакнинг ўрта чизиғи хоссасини қандай қўллашга бўлади?

141. Қавариқ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари ўрталарини қўшиб турган кесмани унинг бошқа икки томонининг ярим йиғиндисига тенг деб олиб, унинг ана шу икки қарама-қарши томонлари параллель бўлишини исботланг.

142. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги ихтиёрий нуқтадан ён томонларигача бўлган масофаларнинг йиғиндиси, учларининг биридан ён томонига туширилган баландликнинг узунлигига тенг бўлишини исботланг.

143. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган уч нуқтадан бир хил узоқликда ўтадиган тўғри чизиқ ясанг. Масаланинг нечта ечими бор?

144. Учбурчак расмида унинг ёнларининг ўрталари бўлиб ҳисобланадиган уч нуқтагина сақланган. Шу учбурчакни тўлиқ шаклига келтиринг.

145. Икки томони ва уларга қарши ётган бурчакларнинг айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

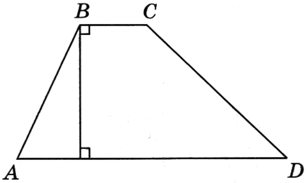
146. Бурчак томонлари билан чегараланадиган кесмаси A нуқтасида 2:1 нисбатда бўлинадиган қилиб, бурчакнинг ички A нуқтаси орқали ўтадиган тўғри чизиқ ўтказинг.

6-§. Трапеция ва унинг хоссалари

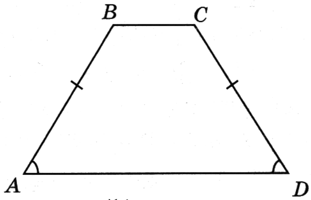
Таъриф. *Қарама-қарши икки томони параллель, бошқа икки томони параллель эмас бўлган тўртбурчак **трапеция** деб аталади.*

Трапециянинг параллель томонлари унинг ***асослари*** деб, бошқа икки томони эса ***ён томонлари*** деб аталади

(50-расм). Ён томонлари тенг трапеция ***тенг ёнли трапеция*** деб (51-расм), бир бурчаги тўғри бўлган трапеция эса ***тўғри бурчакли трапеция*** деб аталади (52-расм). Асосларига перпендикуляр ва улар билан чегараланган ҳар кандай кесмани трапециянинг ***баландлиги*** деб аталади. Трапециянинг ён томонлари ўрталарини бирлаштирган кесмани трапециянинг ***ўрта чизиғи*** деб атайди.



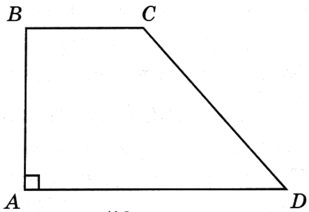
50-расм



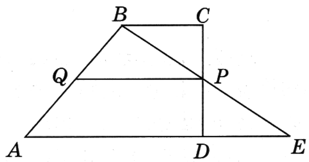
51-расм

Теорема. *Трапециянинг ўрта чизиғи асосларига параллель ва уларнинг ярим йиғиндисига тенг.*

Исботи. $ABCD$ трапеция берилган (53-расм) ва PQ унинг ўрта чизиғи бўлсин. B учини CD ён томонининг ўртаси – P нуқта билан бирлаштирамиз. Бу тўғри чизиқ AD тўғри чизиқ билан E нуқтада кесишсин. $CP=PD$, □BCP=□PDE (ички алмашинувчи бурчаклар сифатида) бўлганлигидан, убурчаклар тенглигининг иккинчи аломати бўйича BCP ва EDP учбурчаклар тенг. Унда $BP=PE$, яъни PQ кесмаси ABE учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади. Шунинг учун $PQ \parallel AD$ ва $PQ=\frac{1}{2}$ AE. У ҳолда $AE=AD+DE$ ва $BE=BC$ бўлганлиги учун, $PQ = \frac{AD+BC}{2}$. Теорема исботланди.



52-расм



53-расм

?
1. Қандай тўртбурчак трапеция деб аталади?
2. Трапециянинг ўрта чизиғи дегани нима?
3. Трапециянинг ўрта чизиғи хоссасини таърифланг, уни исботланг.
4. Трапециянинг нечта ўтмас бурчаги бўлиши мумкин?

МИСОЛЛАР

А

147. Трапециянинг учта ўткир бурчаги бўлиши мумкинми?

148. Трапециянинг бурчакларини тартиб бўйича олганда: 1) 6, 3, 4, 2; 2) 8, 7,13,12 сонларига пропорционал бўлиши мумкинми?

149. Тенг ёнли трапециянинг: 1) диагоналлари тенг; 2) асосидаги бурчаклари тенг бўлишини исботланг.

150. Агар тенг ёнли трапециянинг қарама-қарши учларидаги бурчакларнинг айирмаси 40□ бўлса, унинг ҳар бир бурчаги нимага тенг?

151. Трапециянинг бир асосидаги бурчаклари 68□ ва 71□. Трапециянинг бошқа бурчакларини топинг.

152. *ABCD* трапециянинг *BD* диагонали *AB* томонига перпендикуляр, ¶*BAD*=40□. Трапециянинг кичик асосини иккинчи ён томонига тенг деб олиб, унинг бошқа бурчакларини топинг.

153. *ABCD* трапециянинг кичик *BC* асоси 4 см. *B* учи орқали *CD* томонига параллель тўғри чизиқ ўтказилган. Бунда ҳосил бўлган учбурчакнинг периметри 12 см бўлса, унда трапециянинг периметри нимага тенг?

В

154. Асослари 2 м ва 5 м бўладиган трапециянинг ён томони тенг уч бўлакка бўлиниб, шу бўлак нуқталаридан иккинчи ён томонига қадар трапеция асосларига параллель кесмалар ўтказилган. Шу кесмаларнинг узунликларини топинг.

155. Тенг ёнли трапециянинг бир бурчаги 60□, ён томони 24 см, асосларининг йиғиндиси 44 см. Трапеция асослари узунликларини топинг.

156. Тўғри бурчакли трапециянинг асослари 10 см ва 15 см, бир бурчаги 45□. Трапециянинг кичик ён томонини топинг.

157. Трапециянинг: 1) ён томонларининг йиғиндиси асосларининг айирмасидан; 2) диагоналларининг йиғиндиси асосларининг йиғиндисидан; 3) асосларининг айирмаси ён томонларининг айирмасидан ортиқ бўлишини исботланг.

158. Тенг ёнли трапециянинг бир бурчаги 60□, асослари эса 15 см ва 49 см. Унинг периметрини топинг.

159. Диагоналлари тенг трапециянинг тенг ёнли эканини исботланг.

160. Тенг ёнли трапециянинг ўтмас бурчаги учидан туширилган баландлик катта асосини узунликлари a билан b га тенг ($a>b$) бўлакларга бўлади. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг. Ҳисобни a=30 см, b=6 см деб олиб, бажаринг.

161. A билан B қишлоқлар тўғри йўл бўйлаб солинган темир йўлнинг бир томонида жойлашган ва темир йўлдан узоқликлари 10 км ва 20 км. A билан B қишлоқларни бирлаштирувчи тўғри йўлнинг қоқ ўртасида жойлашган C қишлоқдан темир йўлгача бўлган масофа қанча?

162. Трапеция асосларининг нисбати 2:3 га тенг, ўрта чизиғи эса 5 м. Трапециянинг асосларини топинг.

163. Трапециянинг ўрта чизиғи 7 см, асосларининг айирмаси эса 4 см. Асосларини топинг.

164. Трапециянинг ўрта чизиғи 10 см. Диагоналларининг бири уни айирмаси 2 см бўладиган икки кесмага бўлади. Трапециянинг асосларини топинг.

165. Трапециянинг асослари 4 см ва 10 см. Трапециянинг ўрта чизиғини диагоналларининг бири кесганда ҳосил бўладиган кесмалар узунликларини топинг.

166. Трапециянинг асослари 8,2 см ва 14,2 см. Диагоналларининг ўрта нуқталари орасидаги масофани топинг.

167. Трапециянинг кичик асоси узунлиги 6,2 см, диагоналларининг ўрта нуқталари орасидаги масофа 4 см. Трапециянинг катта асосини топинг.

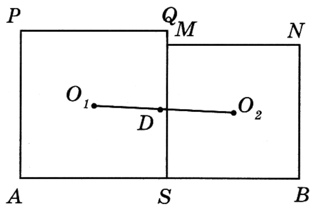
C

168. Трапецияни: 1) параллелограмм ясаш мумкин бўлган икки бўлакка; 2) учбурчак ясаш мумкин бўлган икки бўлакка; 3) тўғри тўртбурчак ясаш мумкин бўлган уч бўлакка қандай бўлишга бўлади?

169. Тенг ёнли трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтаси билан ён томонлари давомининг кесишиш нуқталари орқали ўтадиган тўғри чизиқ трапеция асосларига перпендикуляр ва уларни тенг иккига бўлишини исботланг.

170. Тенг ёнли трапециянинг ён томони кичик асосига тенг ва диагоналига перпендикуляр. Трапециянинг бурчакларини топинг.

171. Трапециянинг диагоналлари ўрталарини бирлаштирадиган кесма унинг асосларининг ярим айирмасига тенг бўлишини исботланг.



54-расм

172. Узунлиги a га тенг AB кесманинг бир томонида икки квадрат $APQS$ ва $SMNB$ солинган (54-расм). $APQS$ ва $SMNB$ квадратларнинг марказларини қўшадиган барча кесмалар ўрталарининг (D нуқталарининг) геометрик ўрни қандай фигура бўлади?

173. Асослари билан ён томонлари бўйича трапеция ясанг.

174. Асослари билан диагоналлари бўйича трапеция ясанг.

175. Тенг ёнли трапециянинг: 1) AO асоси, A бурчаги ва AB ён томони; 2) BC асоси, AB ён томони ва BD диагонали бўйича ясанг.

176. $ABCD$ тўғри бурчакли трапецияни асослари ва уларга перпендикуляр AB ён томони бўйича ясанг.

177. Трапеция асосларининг биттасига ёпишган икки бурчакнинг йиғиндиси 90□ га тенг. Асосларининг ўрталарини қўшадиган кесма улар айирмасининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

178. Асослари, баландлиги ва бир диагонали бўйича трапеция ясанг.

179. Асослари, баландлиги ва бир бурчаги бўйича трапеция ясанг.

180. Катта асоси, ён томонлари ва ўткир бурчаги бўйича трапеция ясанг.

181. Кичик асоси, бир ён томони ва икки ўтмас бурчаги бўйича трапеция ясанг.

182. Асосларининг айирмаси, икки ўткир бурчаги ва диагонали бўйича трапеция ясанг.

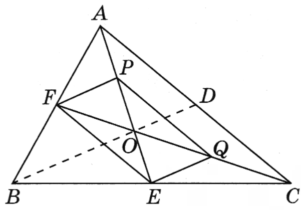
183*. Узунликлари a, b, c, d, e бўлган кесмалар берилган. Узунлиги: 1) $x\,\square\frac{ab}{d}$; ;2) $x\,\square\frac{abc}{de}$ бўладиган кесмалар ясанг.

7-§. Учбурчакнинг ажойиб нуқталари. Учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланалар

Аввал учбурчакнинг медианалари ҳақидаги теоремани исботлайлик (138-масалага қаранг).

Теорема 1. *Учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишади ва кесишиш нуқтасида учидан бошлаб 2 : 1 нисбатда бўлинади (Бу нуқта учбурчакнинг* ***оғирлик маркази*** *деб аталади).*

Исботи. ABC учбурчагининг AE ва CF медианаларининг кесишиш нуқтаси O бўлсин, AO кесманинг ўртасини P билан ва CO кесманинг ўртасини Q билан белгилайлик. Бунда FE кесма ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи, PQ кесма AOC учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлгани учун, $FE \parallel AC$, $FE=\frac{1}{2}AC$ ва $PQ \parallel AC$, $PQ=\frac{1}{2}AC$ бўлади. Ундай бўлса, $FE=PQ$ ва $PQ \parallel FE$, яъни $FEQP$ тўртбурчак

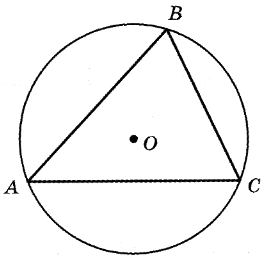


55-расм

параллелограмм бўлади (55-расм) ва унинг диагоналлари O нуқтада тенг иккига бўлинади. Шунинг учун $AP=PO=OE$ ва $CQ=QO=OF$, яъни AE ва CF медианалари O нуқтада 2:1 нисбатда бўлиниб турибди. Шу сингари, BD медианаси ҳам O нуқтаси орқали ўтишини кўрсатиш мумкин. Теорема исботланди.

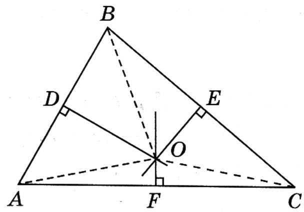
Эслатма. Механикада учбурчакнинг медианаларининг кесишиш нуқтаси унинг ***огирлик маркази*** деб аталади.

Таъриф. *Учбурчакнинг барча учлари орқали ўтадиган айланани шу* ***учбурчакка ташқи чизилган айлана*** *деб аталади* (55, *а*-расм).



55, *а*-расм

Теорема 2. *Учбурчакнинг томонларига ўтказилган ўрта перпендикулярлар бир нуқтада кесишади (Бу нуқта учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази бўлади).*



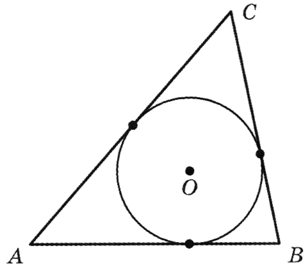
56-расм

Исботи. ABC убурчак берилган бўлсин (56-расм). AB ва AC томонларининг ўрталари – D ва F нуқталаридан шу томонларига ўтказилган перпендикулярлар O нуқтада кесишсин. Кесманинг ўртаси орқали ўтказилган перпендикулярларнинг ҳар бир нуқтаси шу кесманинг учларидан бирдай узоқликда жойлашганлиги учун O нуқта A ва B учларидан бир хил K узоқликда жойлашган. Унда O нуқта A ва C учларидан ҳам бирдай K узоқликда жойлашган деган фикр келиб чикади. Демак, O нуқта BC томонининг ўрта перпендикулярининг устида ётади. Теорема исботланди.

Натижа. *Ҳар қандай учбурчакка ташқи биргина айлана чизиш мумкин.*

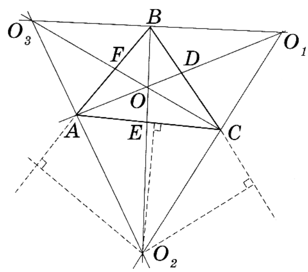
Исботи. Ҳақиқатан ҳам, олдинги теоремани исботлаганда кўрсатилгандай, *O* нуқтаси (56-расм) учбурчак учларидан бир хил *R* узоқликда жойлашган. Ундай бўлса, учбурчакнинг учлари маркази *O* нуқтада жойлашган, радиуси *R* га тенг айлананинг устида ётади. Ҳақиқатан ҳам, бундай айлана (берилган радиуси билан маркази бўйича) фақат битта бўлади.

Таъриф. *Агар айлана кўпбурчакнинг ҳамма томонларига уриниб ўтса, унда бу айлана* ***кўпбурчакка ички чизилган айлана*** *деб аталади* (56, *а*-расм).



56, *а*-расм

Теорема 3. *Ҳар бир учбурчакнинг: 1) биссектрисалари бир нуқтада кесишади; 2) бир бурчагининг биссектрисаси бошқа бурчаклардаги ташқи бурчакларнинг биссектрисалари билан бир нуқтада кесишади. (Бу нуқта учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази бўлади.)*

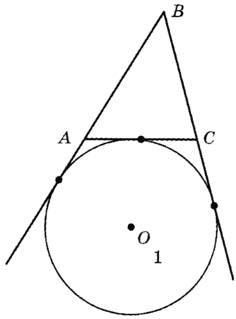


57-расм

Исботи. 1) *ABC* учбурчакнинг *AD* ва *BE* биссектрисалари *O* нуқтада кесишсин (57-расм). Биссектрисанинг хоссаси бўйича унинг устидаги нуқталар бурчакнинг томонларидан бир хил узоқликда ётади. Шунинг учун, агар *O* нуқта *AB* ва *BC* томонларидан бирдай *r* узоқликда ётса, унда *O* нуқта *AB* ва *BC* томонлардан ҳам *r* узоқликда ётади. Демак, *O* нуқта *AC* ва *BC* томонлардан бир хил *r* узоқликда ётгани учун, у *C* бурчагининг биссектрисасида ётади.

2) O_1 нуқтаси *A* бурчагининг биссектрисаси билан *B* бурчагининг ташқи бурчагининг биссектрисаларининг кесишиш нуқтаси бўлган ҳолда, бу нуқта *AB, AC* ва *BC* тўғри чизиқлардан (*A* ва *B* бурчакларнинг томонлари

сифатида) бирдай R_1 узоқликда ётади. Шу сабабли O_1 нуқтаси C бурчакнинг ташқи бурчагининг биссектрисасида ётади. Шунга ўхшаш, учбурчакнинг бошқа биссектрисалари ҳам қўшни учлардаги ташқи бурчакларнинг биссектрисалари билан O_2 ва O_3 (57-расм) нуқталарда кесишишини кўрсатишга бўлади. Теорема исботланди.



57, *а*-расм

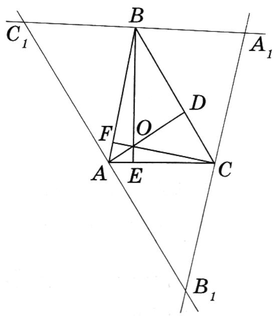
Таъриф. *Учбурчакнинг бир томонига ташқаридан ва бошқа икки томонининг давоми билан уринадиган айлана* ***учбурчакка ташқи уринадиган айлана*** *деб аталади* (57, а-расм).

Натижа. *1) Ҳар қандай учбурчакка ички биргина айлана чизишга бўлади ва унинг маркази учбурчакнинг биссектрисалари кесишиш нуқтасида жойлашади.*

2) Ҳар қандай учбурчакнинг ҳар бир томонига ташқи уринадиган биргина айлана чизишга бўлади ва унинг маркази шу томони қаршисида ётган учидан ўтказилган биссектрисаси билан бошқа икки учлари ташқи бурчаклари биссектрисаларининг кесишиш нуқтаси бўлади.

Исботи. 1) O нуқтаси учбурчакнинг томонларидан бир хил r узоқликда жойлашган (57-расм). У ҳолда, маркази O нуқтаси, радиуси r га тенг бўладиган айлана шу учбурчакнинг барча томонларига уринади ва бундай айлана ягона бўлиши тушунарли.

2) Шу каби исботланади.



58-расм

Теорема 4. *Ҳар бир учбурчакнинг баландликлари бир нуқтада кесишади (Бу нуқта центроид деб аталади).*

Исботи. ABC учбурчакда A учи орқали BC томонига параллель тўғри чизиқ, B учи орқали AC томонига параллель тўғри чизиқ ва C учи орқали AB томонига параллель тўғри чизиқ ўтказайлик. Шунда $A_1B_1C_1$* учбурчакни ҳосил қиламиз (58-

расм). AB, AC ва BC кесмалари шу $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг ўрта чизиқлари бўлгани учун A, B ва C нуқталаридан $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг ўрта перпендикулярларини ўтказсак, улар 2-теорема бўйича фақат O нуқтада кесишади. Иккинчи томондан, бу ўрта перпендикулярлар ABC учбурчакнинг баландликлари бўлиб чиқади, яъни ABC учбурчакнинг баландликлари O нуқтада кесишади. Теорема исботланди.

Эслатма. Шундай қилиб, ҳар бир учбурчакнинг тўрт нуқтаси борлигини кўрдик: медианаларининг кесишиш нуқтаси, ўрта перпендикулярларининг кесишиш нуқтаси, биссектрисаларнинг кесишиш нуқтаси, баландликларининг кесишиш нуқтаси. Бу нуқталарга ташқи уринадиган айланалар марказларини ҳам қўшсак, учбурчакнинг етти нуқтаси ҳосил бўлади. Шу нуқталар ***учбурчакнинг ажойиб нуқталари*** деб аталади.

?

1. Учбурчак медианаларининг хоссасини айтинг, исботланг.
2. Қандай айлана учбурчакка ички (ташқи) чизилган айлана деб аталади?
3. Ташқи чизилган айлана маркази қандай аниқланади?
4. Ички чизилган айлана маркази қандай аниқланади? Тегишли теоремани таърифлаб, исботланг.
5. Қандай айланалар ташқи уринадиган айланалар деб аталади, уларнинг сони нечта?
6. Ташқи уринган айлана маркази қандай аниқланади? Тегишли теоремани таърифланг, исботланг.
7. Учбурчак баландликларининг хоссаларини айтинг, исботланг.

ПТ

1. Ўз ихтиёрингиз билан ABC учбурчакни ясанг. Шу учбурчакнинг:
   а) медианаларининг кесишиш нуқтасини;
   б) баландликларининг кесишиш нуқтасини;
   в) ташқи чизилган айланани;
   г) ички чизилган айланани;
   д) ташқи уринган айланаларни ясаб кўрсатинг.

МАСАЛАЛАР

А

184. Берилган учбурчакка: 1) ички чизилган; 2) ташқи чизилган; 3) ташқи уринган айлана ясанг.

185. Агар учбурчакка: 1) ташқи ва ички чизилган айланаларнинг марказлари устма-уст тушса; 2) ташқи чизилган айлананинг маркази унинг томонида ётса; 3) ички чизилган айлананинг маркази унинг баландлигида ётса; 4) ташқи чизилган айлананинг маркази унинг баландлиги орқали ўтадиган тўғри чизиқда ётса, учбурчакнинг шакли қандай бўлади?

186. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 3 см. Унга ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиусларини топинг.

187. AB – тенг ёнли ABC ва ABD учбурчакларнинг умумий асоси. CD кесма AB нинг ўртаси орқали ўтишини исботланг.

188. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси c га, катетларининг йиғиндиси эса 5 га тенг деб олиб, шу учбурчакка ички чизилган айлананинг диаметрини топинг.

189. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 2 см, учидаги бурчаги эса 120□. Ташқи чизилган айлананинг диаметрини топинг.

190. Агар берилган учбурчакка: 1) ташқи уринадиган икки айлананинг радиуслари тенг бўлса; 2) ташқи уринадиган икки айланаларнинг марказлари медианаларнинг давомида ётса, у ҳолда бу учбурчакнинг тури қандай?

191. Гипотенузаси 12 см бўладиган тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

B

192. Учбурчакнинг икки томони ўрталари маълум. Фақат чизғич ёрдамида унинг учинчи томонининг ўртасини топинг.

193. Учбурчакнинг икки биссектрисаси ўзаро: 1) перпендикуляр; 2) параллель бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

194. Учбурчакнинг ҳар қандай бурчаги унинг бошқа икки бурчагининг учларидан туширилган баландлиги орқали ўтадиган тўғри чизиқларнинг кесишганда ҳосил бўлган вертикаль бурчаклар жуфтига тенг бўлишини кўрсатинг.

195. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси унинг ҳар бир томонидан: 1) катта; 2) кичик; 3) унга тенг бўлиши мумкинми?

196. Тенг томонли учбурчакка ташқи ва ички чизилган айлана марказлари устма-уст тушишини ва радиуслари нисбати 2:1 каби бўлишини исботланг.

197. Агар ABC учбурчакнинг AB ва AC томонлари тенг бўлмаса, у ҳолда A учидан туширилган медианаси шу учидан туширилган баландлик билан устма-уст тушмаслигини исботланг.

198. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг AB томонига ўтказилган ўрта перпендикуляр BC томонини E нуқтада кесади. Агар AEC учбурчакнинг периметри 27 см, AB=18 см бўлса, унда учбурчакнинг AC асосини топинг.

199. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчагининг учидан ички ва ташқи чизилган айланаларнинг марказлари билан бирлаштирувчи кесмалар ўтказилган. Шу кесмалар орасидаги бурчак 7□ га тенг. Учбурчакнинг ўткир бурчагини топинг.

200. ABC учбурчакнинг AB ва AC томонларининг ўрта перпендикулярлари BC томонидаги D нуқтада кесишади: 1) D нуқтаси BC томонининг ўртаси; 2) □A=□B+□C бўлишини исботланг.

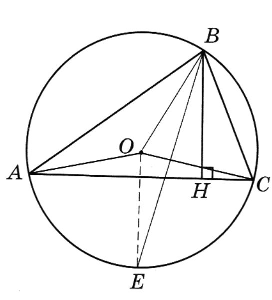
201. Жуфт-жуфти билан кесишадиган ва бир нуқтадан ўтмайдиган учта тўғри чизиққа уринадиган нечта айлана бор. Уларнинг ҳаммасини ясанг.

C

202. Тўғри бурчакли учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг диаметрлари йиғиндиси унинг катетлари йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

203. Асоси билан ташқи чизилган айлананинг радиуси бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

204. ABC учбурчакнинг B учидан BH баландлиги, BE биссектрисаси ва BO ташқи чизилган айлананинг радиуси ўтказилган. BE тўғри чизиқ OBH бурчакнинг биссектрисаси бўлишини исботланг (59-расм).



59-расм

205. O нуқта орқали ўтадиган уч тўғри чизиқ билан уларнинг бирида ётадиган A нуқта берилган: 1) бир учи A нуқтада ва баландликлари берилган чизиқларнинг устида ётадиган учбурчаклар ясанг; 2) бир учи

A нуқтада ва медианалари берилган тўғри чизиқларнинг устида ётадиган учбурчак ясанг; 3) бир учи *A* нуқтада ва биссектрисалари берилган тўғри чизиқларнинг устида ётадиган учбурчак ясанг; 4) бир учи *A* нуқтада ва берилган тўғри чизиқлар унинг ўрта перпендикулярлари бўладиган қилиб учбурчак ясанг.

206. Ҳар бир *ABC* учбурчакнинг *AE* биссектрисаси *AN* медианаси билан *AH* баландлигининг орасида ётишини исботланг.

207. Бир учидан ўтказилган биссектрисаси, медианаси ва баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

208. *ABC* учбурчакдан ташқарида томонлари *AB* ва *AC* га тенг *ABDE* ва *ACFG* квадратлар ясалган. Бунда *D* ва *F* нуқталар – *A* учига қарама-қарши жойлашган учлар. *EG* кесма учбурчакнинг *A* учидан ўтказилган медианага перпендикуляр ва шу медианадан икки марта узун бўлишини исботланг.

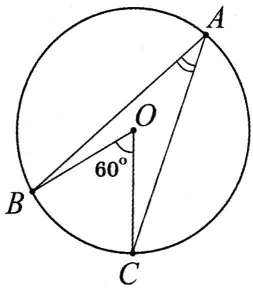
209. *ABC* учбурчакнинг AA_1 ва BB_1 медианалари *O* нуқтада тўғри бурчак ясаб кесишади. $AB=CO$ тенглиги бажарилишини исботланг.

8-§. Ички ва ташқи чизилган тўртбурчаклар

Таъриф. 1) *Агар кўпбурчакнинг барча учлари бир айлананинг устида ётса, у ҳолда бу кўпбурчак **ички чизилган кўпбурчак** деб аталади.*

2) *Агар айлана кўпбурчакнинг барча томонларига уринган бўлса, у ҳолда кўпбурчак **ташқи чизилган кўпбурчак** деб аталади.*

3) *Айлананинг бир нуқтасидан чиқадиган икки ватарнинг орасидаги бурчак айланага **ички чизилган бурчак** деб аталади* (60-расм). Ватарларнинг умумий *A* нуқтаси бурчакнинг ***учи*** деб аталади. *BC* ёйни шу ***бурчакка таянган ёй*** деб аталади. *BOC* бурчагини *BC* ёйига таянган ***марказий бурчак*** деб аталади ва *BC* ёйи *BOC* марказлик бурчаги қиймати билан ўлчанади. Масалан, агар, $\square BOC=60\square$ бўлса унда таъриф бўйича $\square EC=60\square$ деб ҳисобланади. Аввал ички чизилган бурчакнинг



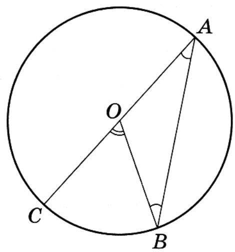
60-расм

бир хоссасини кўриб чиқайлик (унинг бошқа хоссаларини алоҳида берилган бобда кўрамиз).

Теорема 1. *Ички чизилган бурчакнинг қиймати ўзи таянган ёйнинг градус ўлчовининг ярмига тенг.*

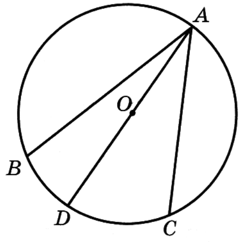
Исботи. Ички чизилган бурчак айлана марказига нисбатан уч ҳолатда жойлашиши мумкин:

1) Айлана маркази ички чизилган бурчакнинг томонида ётсин (61-расм). Унда $OA=OB$ бўлгани учун, □AOB – тенг ёнли учбурчак. Шундан □OAB=□OBA ва □AOB=180□(□OAB+□OBA)=180□−2·□OAB.Шунингучун □COB=2·□OAB.□COB=□CBбўлгани учун, □$OAB=\frac{1}{2}$□CB.



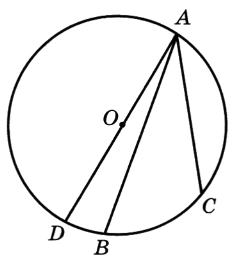
61-расм

2) Айлана маркази ички чизилган бурчакнинг ичида жойлашган (62-расм). Унда исботлаганимиз бўйича □$BAD=\frac{1}{2}$□BD ва □$DAC=\frac{1}{2}$□DC яъни □BAC=□BAD+□DAC= $\frac{1}{2}(\cup BD+\cup DC)=\frac{1}{2}\cup BC$.



62-расм

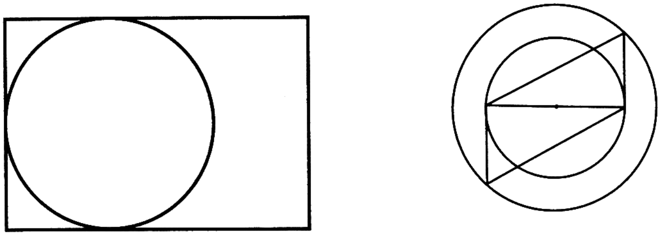
3) Айлана маркази ички чизилган бурчакдан ташқарида ётсин (63-расм). Унда□$DAC=\frac{1}{2}$□DC ва□$DAB=\frac{1}{2}$□DB бўлганидан, □BAC=□DAC−□$DAB=\frac{1}{2}\cup DC-\frac{1}{2}\cup DB=\frac{1}{2}BC$. Теорема исботланди.



63-расм

Натижа. *Диаметрга таянган ички чизилган бурчак 90□ га тенг.*

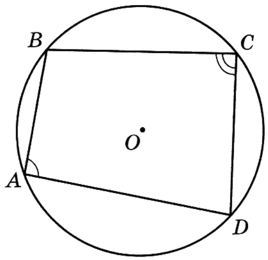
Учбурчакларга ўхшаб, ҳар қандай тўртбурчакка ички ёки ташқи айлана чизишга бўлмайди. Масалан, квадрат бўлмаган тўғри тўртбурчакка ички, тўғри тўртбурчак бўлмаган



64-расм

параллелограммга ташқи айлана чизиш мумкин эмас (64-расм). Шунга қарамасдан ички ва ташқи чизилган тўртбурчаклар ҳам мавжуд. Шуларнинг айрим хоссалари билан танишайлик.

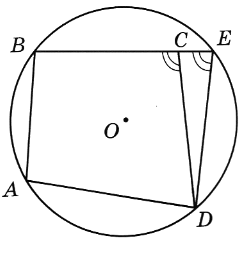
Теорема 2. *Ички чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси 180□ га тенг.*



65-расм

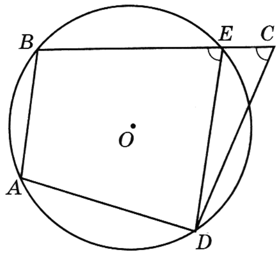
Исботи. Айтайлик, $ABCD$ тўртбурчак ички чизилган бўлсин (65-расм). У ҳолда ички чизилган бурчакларнинг хоссасига кўра $\square A=\frac{1}{2}\square BCD, \square C=\frac{1}{2}\square BAD$. У ҳолда, $\square A+\square C=\frac{1}{2}\square BCD+\frac{1}{2}\square BAD= =\frac{1}{2}(\square BCD+\square BAD)$. Бироқ, BCD ва BAD ёйларнинг йиғиндиси эса тўлиқ айлана бўлади. Демак, $\square A+\square C=\frac{1}{2}(360\square)=180\square$. Теорема исботланди.

Теорема 3. *Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклариниг йиғиндиси 180□ га тенг бўлса, унда бу тўртбурчакка ташқи айлана чизишга бўлади.*



66-расм

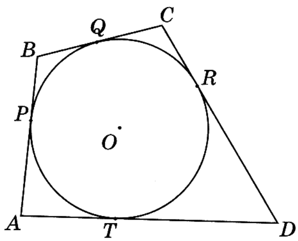
Исботи. Айтайлик, $ABCD$ тўртбурчак учун $\square A+\square C=180\square$ бўлсин. У ҳолда ABD учбурчагига ташқи айлана соламиз. Энди C учи шу айлананинг устида ётишини исботлайлик. Агар бундай бўлмаса, унда C нуқтаси айлананинг ё ичида ёки айлананинг сиртида жойлашиши керак. Айтайлик, C нуқтаси айлананинг ичида жойлашган бўлсин ва BC тўғри чизиқ билан айлана E нуқтасида кесишсин (66-расм). У ҳолда □A+□C=180□ ва □A+□E=180□ тенгликдан □C=□E тенглигини оламиз. Бироқ бу тенгликнинг бажарилиши мумкин эмас. Демак, ҳосил бўлган қарама-қаршилик C нуқта айлананинг ичида жойлаша олмаслигини кўрсатади. Шу каби C нуқта айлананинг ташқарисида ётмаслигини ҳам исботлаш мумкин (67-расм). Шу сабабли, C нуқта айлананинг устида ётади, яъни $ABCD$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин. Теорема исботланди.



67-расм

Теорема 4. *Ташқи чизилган тўртбурчак қарама-қарши томонларининг йиғиндиси тенг.*

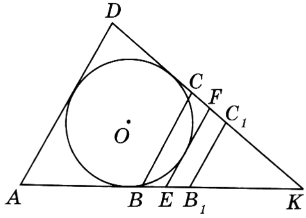
Исботи. $ABCD$ тўртбурчак айланага ташқи чизилган бўлсин (68-расм) ва P, Q, R, T нуқталари унинг мос томонлари билан айлананинг уриниш нуқталари бўлсин. Бир нуқтадан ўтказилган уринманинг хоссаси бўйича $AP=AT$, $BP=BQ$, $CR=CQ$, $DR=DT$. Шу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшсак, $(AP+BP)+(CR+DR)=(AT+DT)+(BQ+CQ)$ ёки $AB+CD=AD+BC$ тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.



68-расм

Теорема 5. *Агар қавариқ тўртбурчак қарама-қарши томонларининг йиғиндиси тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкин.*

Исботи. $ABCD$ тўртбурчак учун $AB+CD=AD+BC$ тенглик бажарилсин. AB ва CD томонла-



69-расм

рининг давомларининг кесишиш нуқтасини K орқали белгилаймиз (69-расм). (Агар бу икки томон кесишмаса, AD ва BC томонларининг давомлари кесишиш нуқтасини K деб белгилаймиз. Агар булар ҳам кесишмайдиган бўлса, $ABCD$ квадрат бўлиб, унга ички айлана чизишга бўлар эди). 3-теоремада кўрсатилган усулни қўллаб, ADK учбурчакка ички чизилган айлана $ABCD$ тўртбурчакнинг BC томонига ҳам уринишини кўрсатишни ўзингизга топширамиз.

?

1. Ички ва ташқи чизилган кўпбурчак нима?
2. Ички чизилган бурчак деб нимани айтади?
3. Ички чизилган бурчак билан унга таянган ёй (марказий бурчакка мос) орасида қандай боғланиш бор? Шу хоссани таърифлаб, исботланг.
4. Ички чизилган тўртбурчак бурчакларининг йиғиндиси тўғрисидаги теоремаларни таърифлаб, исботланг.
5. Ташқи чизилган тўртбурчаклар тўғрисидаги теоремаларни таърифлаб, исботланг.
6. Параллелограммнинг қандай турларига: 1) ташқи; 2) ички айлана чизишга бўлади?
7. Айланага: 1) ички; 2) ташқи чизилган трапециянинг қандай турини биласиз?

ПТ

1. 1) Тенг томонли учбурчакка; 2) квадратга ички ва ташқи айлана чизинг.
2. Берилган айланага ички ва ташқи трапеция чизинг.

МИСОЛЛАР

А

210. 1) Берилган айланага ички чизилган; 2) берилган айланага ташқи чизилган; 3) ташқи чизилган айлана радиуси бўйича; 4) ички чизилган айлана радиуси бўйича квадрат ясанг.

211. Бурчаклари тартиб билан: 90□, 90□, 60□, 120□; 2) 70□,130□,110□,50□;3)45□,75□,135□,105□гатенгбўладиган тўртбурчакка ташқи айлана чизишга бўладими?

212. Бурчакларнинг нисбати: 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5 сонларининг нисбатидай бўладиган тўртбурчакка ташқи айлана чизишга бўладими?

213. Айланага ички чизилган ҳар бир трапеция тенг ёнли; 2) айланага ички чизилган ҳар бир параллелограммнинг тўғри тўртбурчак; 3) айланага ички чизилган ҳар бир ромбнинг квадрат бўлишини исботланг.

214. Тўртбурчакнинг тартиб билан олинган томонларининг нисбати: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1 сонларининг нисбатидай бўлса, унда шу тўртбурчакка ички айлана чизишга бўладими?

215. Ташқи чизилган тўртбурчакнинг икки қарама-қарши томонларининг йиғиндиси 15 см. Тўртбурчакнинг периметрини топинг.

B

216. Ташқи чизилган айлананинг радиуси билан диагоналининг орасидаги бурчаги бўйича тўғри тўртбурчак ясанг.

217. Ички чизилган айлананинг радиуси билан томони бўйича ромб ясанг.

218. Агар параллелограммга ички айлана чизиш мумкин бўлса, унда унинг ромб бўлишини исботланг.

219. Агар ромбга ташқи айлана чизиш мумкин бўлса, унда унинг квадрат бўлишини исботланг.

220. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали билан бир томонининг орасидаги бурчаги 30□, унга ташқи чизилган айлана радиуси E га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томонини топинг.

221. Ҳар қандай тўғри тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

222. Айланага ташқи чизилган тенг ёнли трапециянинг ён томони 14 см. Трапециянинг периметрини топинг.

223. AOB бурчакнинг томонларига A ва B нуқталаридан ўтказилган перпендикулярлар C нуқтада кесишади. $ACBO$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

224. Параллелограммга ташқи ва ички айлана чизишга мумкин бўлса, унда унинг квадрат бўлишини исботланг.

C

225. Ҳар бир қавариқ тўртбурчакнинг биссектрисалари кесишишидан ҳосил бўладиган тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

226. Ҳар бир қавариқ тўртбурчакнинг ташқи бурчаклари биссектрисалари орқали ҳосил қилинган тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

227. Қавариқ тўртбурчакнинг барча томонларидан ўзаро тенг ватарлар кесиб ўтадиган айлана ўтказилган. Шу тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси тенг бўлишини исботланг.

228. Асослари 24 см ва 16 см бўладиган тенг ёнли трапецияга ички чизилган айлана радиуси 8 см бўлиши мумкинми?

229. Ташқи чизилган тенг ёнли трапециянинг қарама-қарши томонларининг уриниш нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар унинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтишини исботланг.

230. 229-масаланинг ечими ихтиёрий ташқи чизилган тўртбурчак учун бажарилишини кўрсатинг.

II боб

ПИФАГОР ТЕОРЕМАСИ

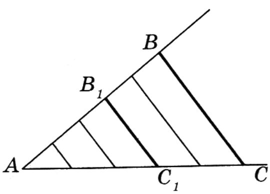
1- §. Пропорционал кесмалар ҳақида теорема. Пифагор теоремаси

1.1. Пропорционал кесмалар. AB ва CD кесмаларнинг нисбати деб уларнинг узунликларининг нисбатига айтилади, яъни $\frac{AB}{CD}\square m$ сонига айтилади. Агар $\frac{AB}{A_1B_1}\square\frac{CD}{C_1D_1}$ тенглик бажарилса, у ҳолда AB ва CD кесмалар A_1B_1 ва C_1D_1 кесмаларга ***пропорционал*** деб аталади. Масалан, AB=3 см, CD=2 см, A_1B_1=6 см, C_1D_1=4 см бўлса, у ҳолда $\frac{AB}{A_1B_1}\square\frac{3}{6}\ \square 0,5$ ва $\frac{CD}{C_1D_1}\square\frac{2}{4}\ \square 0,5$ бўлгани учун, $\frac{AB}{A_1B_1}\square\frac{CD}{C_1D_1}$ тенглик бажарилади. Демак, AB ва CD кесмалар A_1B_1 ва C_1D_1 кесмаларга пропорционал бўлади. Шу каби, бир неча кесманинг ҳам пропорционаллигини аниқлашга бўлади. Масалан, $\frac{AB}{A_1B_1}\square\frac{CD}{C_1D_1}\ \square\frac{PQ}{P_1Q_1}$ тенглиги бажарилса, унда AB, CD, PQ уч кесма A_1B_1, C_1D_1, P_1Q_1 кесмаларга пропорционал бўлади.

Теорема 1. *Бурчакнинг томонларини кесиб ўтадиган параллель тўғри чизиқлар бурчакнинг томонларидан пропорционал кесмалар ажратади.*

Исботи. Айтайлик, A бурчакнинг томонларини параллель тўғри чизиқлар B, C ва B_1, C_1 нуқталарда кесиб ўтсин (70-расм). Бунда $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ тенглиги бажарилишини исботлаш керак.

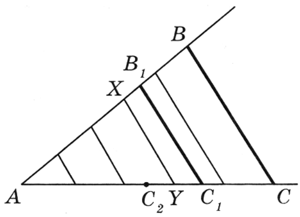
Аввал, узунлиги $\square$ сонига тенг кесма мавжуд бўлиб, $AC=n\square$, $AC_1=m\square$ ($n>m$) тенгликлари бажариладиган ҳолни қараймиз.



70-расм

AC кесмани узунликлари $\square$ га тенг n та бўлакка бўлиб, бўлиш нуқталари орқали BC кесмага параллель тўғри чизиқлар ўтказамиз (70-расм). Бунда C_1 нуқта шу бўлиш нуқталарининг бири билан устма-уст тушади. Фалес теоремаси бўйича ўтказилган параллель тўғри чизиқлар AB кесмани узунликлари $\square$ га тенг бирдай n бўлакка бўлади.

У ҳолда $AB=\square n$, $AB_1=m\square$. Бундан $\frac{AC_1}{AC}=\frac{m\varepsilon}{n\varepsilon}=\frac{m}{n}$ ва $\frac{AB_1}{AB}=\frac{m\delta}{n\delta}=\frac{m}{n}$ бўлганлигидан, $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ тенглигини оламиз.

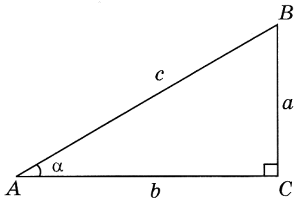


71-расм

Энди теоремани барча ҳоллар учун исбот қиламиз. Айтайлик, $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ бўлсин. Унда $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ ёки $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ тенгсизликларнинг бири бажарилиши керак. Айтайлик, $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ тенгсизлик бажарилсин. $\frac{AC}{AB}\square k$ сонига тенг деб олиб, AC нурга $AC_2=k\cdot AB_1$ кесмани ўлчаб қўяйлик. $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ бўлганлигидан, $AC_2<AC_1$ бўлади (71-расм). AC кесмани узунликлари бир хил C_1C_2 кесмадан кичик бўлган n бўлакка бўлайлик. У ҳолда C_1C_2 кесмада кам деганда бир бўлак нуқтаси ётади. Унинг бирини Y орқали белгилайлик, AB кесмада ётувчи мос нуқтани эса X орқали белгилайлик. Олдинги исботимиз бўйича $\frac{AY}{AC}\square\frac{AX}{AB}$ Шу тенгликдаги AY кесмани ундан кичик AC_2 кесма билан, AX кесмани ундан катта AB_1 кесма билан алмаштирсак, у ҳолда $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_2}{AC}$ бўлади. Шундан $AC_2<\frac{AC}{AB}\cdot AB_1$ ва $\frac{AC}{AB}\square k$ бўлганлиги учун, $AC_2<k\cdot AB_1$ тенгсизлиги келиб чиқади. Бу тенгсизлик $AC_2=k\cdot AB_1$ тенглигига зид келади. Олинган зидлик $\frac{AB_1}{AB}\square\frac{AC_1}{AC}$ тенгликни исботлайди. Теорема исботланди.

1.2. Ўткир бурчакнинг косинуси.

Таъриф. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги ***косинуси*** деб ёпишган катетнинг гипотенузага нисбатига айтилади. □ бурчакнинг косинуси бундай белгиланади: cos □.



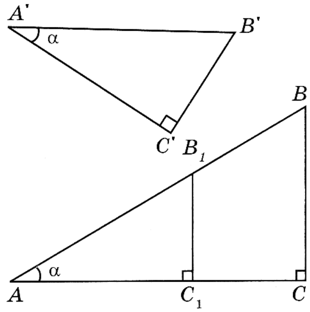
72-расм

72-расмдаги ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг A бурчаги □ га тенг, унга ёпишган катет $AC=b$, гипотенузаси эса $AB=c$ бўлса, унда таъриф бўйич

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \text{ ёки } \frac{AC}{AB} \square \frac{AC_2}{AC}.$$

Теорема **2.** *Бурчакнинг косинуси тўғри бурчакли учбурчакнинг қандай жойлашгани билан унинг ўлчамларига боғлиқ эмас, фақат бурчакнинг градус ўлчовигагина боғлиқ.*

Исботи. ABC ва $A'B'C'$ тўғри бурчакли учбурчакларнинг A ва A' бурчаклари бир хил □ га тенг бўлсин (73-расм).

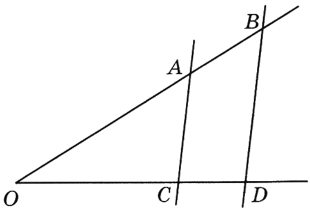


73-расм

У ҳолда $\frac{A'C'}{A'B'} \square \frac{AC}{AB}$ бўлишини исботлаш керак. 73-расмда кўрсатилгандай, $A'B'C'$ учбурчакка тенг AB_1C_1 учбурчакни ясаймиз. $AC \square BC$, $AC \square B_1C_1$ бўлганлигидан, $BC \| B_1C_1$ бўлади. Унда пропорционал кесмаларнинг хоссаси бўйича $\frac{AC_1}{AB_1} \square \frac{AC}{AB}$. Ясаш бўйича $AC_1 = A'C'$, $AB_1 = A'B'$, бўлганидан $\frac{A'C'}{A'B'} \square \frac{AC}{AB}$ тенглик бажарилади. Теорема исботланди.

1-мисол. Узунликлари a, b, c бўлган кесмалар берилган. Узунлиги $x \square \frac{b}{c}$ бўлган кесма ясаш керак.

Ечилиши. Учи O нуқтада ётадиган, ёйик бўлмаган бурчакнинг бир томонида $OA=a$, $OB=b$ кесмаларни, иккинчи томонида эса $OC=c$ кесмани ўлчаб қўямиз

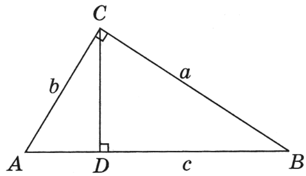


74-расм

(74-расм). Ундан кейин, A ва C нуқталарини тўғри чизиқ билан бирлаштириб, B нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллель тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ бурчакнинг иккинчи томонини B нуқтада кесиб ўтсин. Унда 1-теорема бўйича $\frac{OA}{OB}\square\frac{OC}{OD}$ ёки $OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}$ тенгликларни ҳосил қиламиз, яъни OD биз излаган кесма.

1.3. Пифагор теоремаси

Теорема. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг гиготенузаси квадрати катетларининг квадратлари йиғиндисига тенг:* $a^2+b^2=c^2$



75-расм

Исботи. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг C учидан баландлик ўтказамиз (75-расм). Косинуснинг таърифига асосан $\cos(\angle A) = \frac{AC}{AB}$. ACD тўғри бурчакли учбурчакдан $\cos(\angle A) = \frac{AD}{AC}$ тенглигини оламиз. Бундан $AB{\cdot}AD=AC^2$ бўлишини кўрамиз. Шу каби $\cos(\angle B) = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$ тенгликдан $AB{\cdot}BD=BC^2$ тенглиги чиқади. Шу чиққан тенгликларни ҳадлаб қўшиб, $AB+BD=AB$ эканини ҳисобга олсак,

$$AC^2+BC^2=AB{\cdot}AD+AB{\cdot}BD=AB(AD+BD)= AB^2$$

тенгликни оламиз. Теорема исботланди.

Пифагор теоремасидан тўғри бурчакли учбурчакнинг ҳар бир катети гипотенузадан кичик бўлиши, ихтиёрий □ ўткир бурчаги учун cos□<1 тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади.

Шу каби, Пифагор теоремасига тескари теореманинг тўғрилигига кўз еткизамиз. (258 ва 265-масалаларни кўриб ўтинглар).

Т Исботланган теорема қадимги грек олими Пифагор (эр.ав.VI аср) номи билан боғланган. Лекин бу теорема Пифагор давридан олдин маълум бўлган. Қадимги Вавилон билан Миср юртида бу теоремани ўлчаш ишларида қўллай билишган. Масалан, тўғри бурчак олиш учун улар йўғон ипни бирдай 12 бўлакка тугунлар билан бўлиб, ипнинг учларини боғлаган. Шу тугунлари бор ипни тортиб, томонлари 3, 4 ва 5 га тенг учбурчак ясашган. Шунда 5 бўлакдан иборат томонга қарши ётган бурчак тўғри бурчак бўлади $3^2+4^2=5^2$. Шу сабабли бу учбурчак ***Миср учбурчаги*** деб аталиб келган. Шундай қилиб, бу теорема Пифагоргача маълум бўлгани билан, унга Пифагорнинг қўшган ҳиссаси – теореманинг исботини топганлигида бўлса керак. Бизгача етиб келган афсоналарда Пифагор шу теореманинг ҳурматига қурбонликка ҳўкиз берган дейилади. Шу кунларда бу теореманинг ҳар турли исботларининг сони 100 дан ошади.


Пифагор
(эр.ав.VI аср)

?

1. Қандай кесмалар пропорционал кесмалар деб аталади?
2. Пропорционал кесмалар тўғрисидаги теоремани таърифланг, уни исботланг.
3. Ўткир бурчакнинг косинуси дегани нима? У қандай белгиланади?
4. Бурчакнинг косинуси тўғри бурчакли учбурчакнинг ўлчамларига боғлик эмас, фақат бурчак қийматига боғлиқ бўлишини кўрсатинг.
5. Пифагор теоремасини таърифланг, уни исботланг.
6. Қандай учбурчак Миср учбурчаги деб аталади?

ПТ

1. Кесма ясаб, уни ўзаро тенг: 1) 3; 2) 4; 3) 5 бўлакка бўлинглар.
2. Кўз билан чамалаб тўғри бурчакли учбурчак ясаб, чизманинг тўғрилигини ўлчаш орқали ва Пифагор теоремаси орқали текширинг (микрокалькулятордан фойдаланинг).

МИСОЛЛАР

А

231. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети a, гипотенузаси c. Берилган катетга қарши жойлашган бурчакнинг косинусини топинг: 1) a=10, c=12; 2) a=3, c=5; 3) a=1,5, c=3.

232. Косинуси: 1) $\frac{3}{5}$ га; 2) $\frac{4}{9}$ га; 3) 0,5 га; 4) 0,8 га тенг бўладиган бурчак ясанг.

233. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b. Унинг гипотенузасини топинг: 1) a=3, b=4; 2) a=1, b=1; 3) a=5, b=6; 4) a=0,5, b=1,2.

234. Учбурчакнинг томонлари нисбати 5:12:13 нисбатдай. Унинг тўғри бурчакли учбурчак бўлишини исботланг.

235. Тўғри бурчакли учбурчакнинг a катети билан c гипотенузаси берилган. Унинг иккинчи катетини аниқланг: 1) a=3, c=5; 2) a=5, c=13; 3) a=0,5, c=1,3.

236. Тўғри бурчакли учбурчакнинг икки томони 3 м ва 4 м. Унинг учинчи томонини топинг.

237. Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари 5, 6, 7 сонларга пропорционал бўлиши мумкинми?

238. Ромбнинг диагоналлари: 1) 6 см ва 8 см; 2) 16 см ва 30 см; 3) 5 м ва 12 м. Унинг томонларини топинг.

239. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 60 см ва 91 см. Унинг диагоналини топинг.

240. Томонлари: 1) 6,8,10; 2) 5,6, 7; 3) 9,12,15; 4) 10,24, 26; 5) 3,4, 6; 6) 11,9,13; 7) 15, 20, 25 сонлари билан ифодаланадиган учбурчак тўғри бурчакли учбурчак бўладими?

241. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ҳамма томонлари: 1) жуфт сонлар билан; 2) тоқ сонлар билан ифодаланиши мумкинми?

242. Тўғри бурчакли учбурчакнинг икки томонигина: 1) жуфт сонлар билан; 2) тоқ сонлар билан ифодаланиши мумкинми?

243. Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари қандай кетма- кет келадиган учта натурал сонлар билан ифодаланиши мумкин?

244. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети 8 см, унга қарши ётган бурчагининг косинуси 0,8 га тенг. Гипотенуза билан иккинчи катетни топинг.

245. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 12 см ва 5 см. Ташқи чизилган айлананинг диаметрини топинг.

В

246. Тенг ёнли трапециянинг асослари 5 м ва 11 м, ён томони эса 5 м. Трапециянинг баландлигини топинг.

247. Томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакнинг баландлигини топинг.

248. Берилган a ва b кесмалар бўйича узунлиги: $\sqrt{a^2 \square b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 \square b^2}$, $a>b$ кесма ясанг.

249. Томони 10 см, бир диагонали эса 12 см бўлган ромбнинг иккинчи диагоналини аниқланг.

250. Томонлари бутун сонлар билан ифодаланадиган тўғри бурчакли учбурчакларни ***Пифагор учбурчаги*** деб айтилади. Томонлари $a=2mn$, $b= m^2-n^2$ $c= m^2+n^2$ (бунда $m>n$), m, n – натурал сонлар, формулалар билан ифодаланадиган учбурчаклар Пифагор учбурчаги бўлишини исботланг.

251. Материал узатиш учун фабриканинг икки иморати орасига қия жойлашган нов ўрнатилган. Бу икки иморатнинг оралиғи 10 м. Новнинг икки учи ер юзидан 8 м ва 4 м баландликда. Новнинг узунлигини топинг.

252. Агар: 1) a=9 см , b=12 см бўлса, унда c, h, a_c,b_c ни; 2) a=12 см, b=13 см бўлса, b, h, a_c, b_c ни аниқланг. Бунда c гипотенуза, a, b - катетлар, h - гипотенузага туширилган баландлик, a_c, b_c – тўғри бурчак учидан туширилган баландликнинг гипотенузани бўлган бўлаклари.

253. Радиуслари 6 см ва 2 см бўлган айланаларнинг марказлари орасидаги масофа 10 см. Уларнинг ички ва ташқи умумий уринмаларининг узунликларини топинг.

254. Тенг бўлмаган икки ватарнинг марказга якинроқ жойлашгани иккинчисидан узун бўлишини исботланг.

255. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси c га тенг, ўткир бурчагининг бири эса $\square$ га тенг. Иккинчи ўткир бурчаги билан катетларини топинг.

256. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси c га тенг, ўткир бурчагининг бири $\square$ га тенг. Катетларини, гипотенузанинг баландлик билан бўлинадиган бўлакларини ва баландлигини топинг.

257. Тўғри бурчакнинг ичида жойлашган нуқта унинг томонларидан a ва b масофада жойлашган. Шу нуқтадан бурчакнинг учигача бўлган масофани аниқланг.

258. Пифагор теоремасига тескари теоремани таъриф-ланг.

259. Ҳар қайсиси 3 кг бўлган икки куч ўзаро тўғри бурчак остида бир нуқтага таъсир кўрсатади. Уларга тенг таъсир этувчи кучни топинг.

260. Радиуси 5 см га тенг айлананинг 8 см га тенг ва-таридан унинг марказигача бўлган масофани топинг.

C

261. Параллелограммнинг диагоналларидан бири унинг баландлиги бўлиб саналади. Параллелограммнинг периметри 50 см, икки томонининг айирмаси эса 1 см бўлса, у ҳолда унинг томонлари билан диагоналларини аниқланг.

262. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларига кўра унинг гипотенузасига туширилган баландлигини топинг: 1) 5м, 12 м; 2) 12 м, 16 м.

263. Томонлари: 1) 24 см, 25 см, 7 см; 2) 15 дм, 17 дм, 8 дм бўлган учбурчакнинг кичик баландлигини топинг.

264. a ва b кесмалар бўйича $x \square \sqrt{ab}$ кесмани қандай ясаш мумкин?

265. Учбурчакнинг a, b, c томонлари учун $a^2+b^2=c^2$ тен-глик бажарилади деб, шу учбурчакнинг тўғри бурчакли учбурчак бўлишиини исботланг.

266. Тўғри бурчакли учбурчакнинг биссектрисаси ги-потенузани 12 см ва 5 см бўлган бўлакларга бўлади деб, шу учбурчакнинг катетларини топинг.

267. Радиуслари r га тенг икки айлана бир-бирининг марказлари орқали ўтади. r ни уларнинг умумий ватар-лари орқали ифодаланг.

268. Айлананинг ўзаро тенг ва перпендикуляр икки ватарлари кесишиш нуқтасида 10 см ва 16 см бўлган бўлакларга бўлинади. Айлананинг радиусини аниқланг.

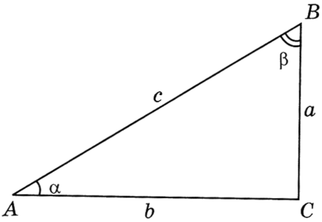
269. Диагоналлари перпендикуляр тўртбурчакларнинг қарама-қарши томонлари квадратларининг йиғиндиси ўзаро тенг бўлишини исботланг.

270. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бир бурчаги қолган икки бурчагининг ўрта арифметигига тенг. Гипотенузаси c бўлса, унинг катетларини топинг.

2-§. Ўткир бурчакнинг синуси, тангенси ва котангенси

2.1. Ўткир бурчакнинг синуси, тангенси ва котангенсининг таърифи.

Айтайлик, ABC тўғри бурчакли учбурчак берилсин: □C=90□, □A=□, □B=□ (□=90□–□)$AB=c$,$BC=a$,$AC=b$ (76-расм). Косинуснинг таърифи бўйича:



76-расм

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

яъни ёпишган катетнинг гипотенузага нисбатига тенг. □ *бурчакнинг **синуси** деб шу бурчакка қарши ётган катетнинг гипотенузага нисбатига айтилади ва қуйидагича белгиланади:*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ ёки } \sin\alpha = \frac{BC}{AB}. \qquad (2)$$

□ *бурчакнинг **тангенси** (* tg□ *) деб ўша бурчак синусининг шу бурчакнинг косинусига нисбатига айтилади:*

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

□ бурчакнинг ***котангенси*** (ctg□) деб ўша бурчак косинусининг шу бурчакнинг синусига нисбатига айтади:

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

(1), (2), (3) ва (4) формулалардан қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c},$$

яъни □ бурчакнинг тангенси шу бурчакка қарши ётган катетнинг ёпишган катетга нисбатига тенг (76-расм). □ бурчакнинг котангенси эса шу бурчакка ёпишган катетнинг қарши ётган катетга нисбатига тенг: $tg\alpha = \frac{a}{b}$, , $ctg\alpha = \frac{b}{a}$, яъни □ бурчакнинг тангенси билан котангенси ўзаро тескари катталиклар:

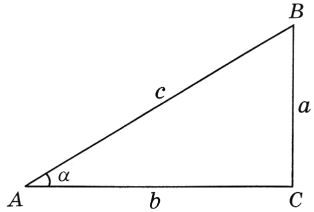
$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}.$$

Пифагор теоремаси бўйича $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$. Шу тенгликни AB га бўлиб, $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2}$ тенглигини оламиз. У ҳолда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ ва $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ формулаларидан бурчакнинг синуси, тангенси ва котангенси ҳам, косинус сингари фақат бурчакнинг қийматига боғлиқ бўлишини кўрамиз.

Хулоса қилиб айтганда, sin□, cos□, tg□, ctg□ катталиклар билан ўткир бурчаги □ га тенг тўғри бурчакли учбурчакларга тегишли қуйидаги қоидалар олинади:

1. □ *бурчакка қарши ётган катет гипотенуза билан sin□ нинг кўпайтмасига тенг.*

2. □ *бурчакка ёпишган катет гипотенуза билан cos□ нинг кўпайтмасига тенг.*



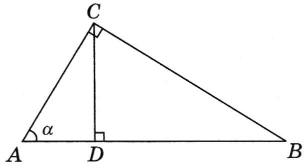
77-расм

3. □ *бурчакка қарши ётган катет ёпишган катет билан tg□ нинг кўпайтмасига тенг.*

4. □ *бурчакка ёпишган катет қарши ётган катет билан ctg□ нинг кўпайтмасига тенг* (77-расм).

$a=c \cdot \sin$□, $b=c \cdot \cos$□,
$a=b \cdot tg$□, $b=a \cdot ctg$□

1-мисол. *ABC* тўғри бурчакли учбурчак берилган: □*C*=90□, *AB*=*c*, □*A*=□.



78-расм

Топиш керак: *AC*, *BC* катетларни, *CD* баландликни, *AD* ни ва *BD* ни (78-расм).

Ечилиши: *AC*=*AB*cos□=*c*·cos□, *BC*=*AB* sin□=*c*·sin□. *ACD*, *BCD* – тўғри бурчакли учбурчаклар ва □*BCD*=□. У ҳолда,

BD=*BC*· sin□=*c*·sin²□,

CD=*AC*· sin□= *c*·sin□·cos□,

AD=*AC*·cos□= *c*·cos²□.

Шу мисолдан *AD*=*c*·cos²□ ва *BD*=*c*·sin²□ тенгликлар чиқади. Бунда *c*=*AD*+*BD*=*c*·cos²□+*c*·sin²□=*c*·(cos²□+sin²□). Охирги тенгликни *c* га бўлиб,

cos²□+sin²□=1

тенгликни оламиз. Бу тенглик ***тригонометриянинг асосий айнияти*** деб аталади.

2.2. Баъзи бурчакларнинг синусининг, косинусининг, тангенсининг ва котангенсининг қийматлари

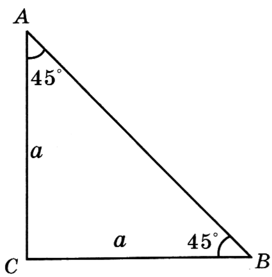
Теорема 1. *Ўткир □ бурчак учун* sin(90□-□)=cos□, cos(90□–□)=sin□ *тенгликлари бажарилади.*

Исботи. *ABC* тўғри бурчакли учбурчак берилсин: □*C*=90□, □*A*=□. □*B*=90□–□. Таърифга кўра $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$,

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}, \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB}, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}.$$

Шу тенгликларнинг иккинчиси билан учинчисини ва биринчиси билан тўртинчисини таққосласак, у ҳолда sin(90□–□)=cos□ ва cos(90□–□)=sin□ тенгликларни оламиз. Теорема исботланди.

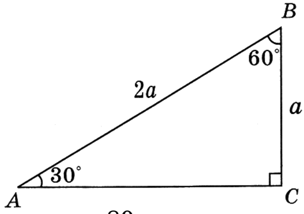
1. □=45□ бурчакни кўриб ўтайлик. □*A*=45□ бўлса, у ҳолда □*B*=45□ бўлади, яъни *ABC* – тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак (79-расм). *AC*=*BC*=*a* бўлсин. Пифагор теоремасига кўра $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$ $= \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$ унда sin45□=



79-расм

$B\,C : A\,B = \ a : \sqrt{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = AC : AB = a : \sqrt{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

tg45□=sin45□: cos45□=1, ctg45□=1.



80-расм

2. □=30□ бурчакни кўриб ўтайлик (80-расм). □*A*=30□, *BC*=*a* бўлсин. 30□ бурчакка қарши ётган катет гипотенузанинг ярмига тенг. *AB*=2*a*. Пифагор теоремасига кўра $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3} \cdot a$ Унда

$$\sin 30^\circ = BC : AB = a : 2a = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = AC : AB = \sqrt{3a} : 2a =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad tg30^\circ = \sin 30^\circ : \left(\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad ctg30^\circ =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}.$$

60□=90□−30□ бўлгани учун, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2},$,

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2}, \quad tg60^\circ = \sqrt{3}, \quad ctg60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

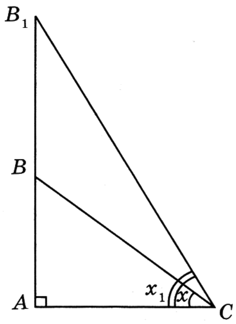
Шундай қилиб, sin□, cos□, tg□ ва ctg□ ифоддлари учун қуйидаги жадвални тузишга бўлади:

□	30□	45□	60□
sin□	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos□	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg□	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg□	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.3. Тригонометрик функциялар ва уларнинг қийматларини аниқлаш.

81–расмдан *ABC* тўғри бурчакли учбурчакнинг x ўткир бурчаги ўзгарадиган бўлса, унга боғлиқ sin$x$, cos$x$,

tgx, $ctgx$ нинг ўзгаришини кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам, $x<x_1$ бўлсин. Унда $\cos x=AC:AB>AC:AB_1=\cos x_1$, яъни x бурчакнинг қиймати ўсган сайин $\cos x$ камая бошлайди ва $\cos x$ ни x ўзгарувчига боғлиқ функция деб қарашга бўлади. Шу тарзда, x ўзгарувчи бўлганда $\sin x$, tgx, $ctgx$ катталикларни ҳам функция деб қарашга бўлади. Бу функциялар ***тригонометрик функциялар*** деб аталади.



81-расм

Шунай қилиб, $\cos x$ 0□<x<90□ оралиғида камаювчи, $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ бўлгани учун, $\sin x$ функция 0□<x<90□ оралиғида ўсувчи бўлади. $tgx=\sin x:\cos x$ тенглигидан $\cos x$-камаювчи, $\sin x$ – ўсувчи бўлганлигидан, 0□<x<90□ оралиғида *tgx* – ўсувчи функция, $ctgx$ функция эса камаювчи. 0□<x<90□ оралиғида x бурчакларининг синуслари билан косинусларининг қийматлари жадвал бўйича ёки микрокалькулятордан ёки компьютердан фойдаланиб аниқланади. Масалан, sin70□36' □ 0,9432, sin74□55'□0,9656,cos16□12□□0,9603,cos18□50□□0,9464 ва ҳ. к.

?

1. Ўткир бурчакнинг синуси, тангенси ва котангенсига таъриф беринг. Уларни тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари билан гипотенузаси орқали ифодаланг.
2. 1) 30□; 2) 45□; 3) 60□ га тенг бурчаклар учун тригонометрик функцияларнинг қийматларини айтиб беринг.
3. Тригонометрик функциялар орасида қандай боғланиш бор? Асосий тригонометрик айниятни ёзинг.
4. Тригонометрик функцияларнинг қийматлари жадвал бўйича қандай аниқланади?

МИСОЛЛАР

А

271. ABC учбурчакда □C=90□; 1) $BC=8$, $AB=17$; 2) $BC=21$, $AC=20$; 3) $BC=1$, $AC=2$; 4) $AC=24$, $AB=25$ бўлса, унда A ва B бурчакларнинг синуси, косинуси ва тангенсини топинг.

272. 1) $tg\alpha = \frac{1}{2}$; ; 2) $tg\alpha = \frac{3}{4}$; ; 3) $\cos\square = 0{,}2$; 4) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;
5) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; ; 6) $\sin\square$=0,4 бўлса, □ бурчакни ясанг.

273. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети *b* га тенг. Унга қарама-қарши бурчаги эса □ га тенг. *b* билан □ орқали учбурчакнинг иккинчи ўткир бурчагини, катетини ва гипотенузасини ифодаланг.

274. Тўғри бурчакли учбурчакнинг *b* катети билан унга ёпишган бурчаги □ берилган. Унинг бошқа томонлари билан бурчакларини *b* билан □ орқали ифодаланг.

275. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси *c* билан ўткир бурчаги □ орқали катетлари билан иккинчи ўткир бурчагини ифодаланг.

276. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг асоси □ га тенг. Ён томонини топинг.

277. Узунлиги 7 дм қозиқнинг сояси 4 дм. Қуёшнинг горизонтдан баландлигини градус ҳисоби билан топинг.

278. Тўғри бурчакли учбурчакнинг номаълум томонлари билан бурчакларини қуйидаги маълумотлар бўйича топинг.

1) Икки катети бўйича:

а) a=3, b=4; в) a=20, b=21; д) a=6; b=8;

б) a=9, b=10; г) a=11, b=60; е) a=5, b=12.

2) Гипотенузаси ва катети бўйича:

а) c=13, a=5; в) c=17, a=8;

б) c=25, a=7; г) c=85, a=84.

3) Гипотенузаси ва ўткир бурчаги бўйича:

а) c=2, a=20; в) c=8, a=70 36’;

б) c=25, a=50□20’; г) c=16, a=76□21’.

4) Катети ва унга қарши ётган ўткир бурчаги бўйича

а) a=3, a=30□27’; в) a=7, a=60□35’;

б) a=5, a=40□48’; г) a=9, a=68□.

279. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси *c*, ўткир бурчаги эса 60□. Шу бурчакка қарши ётган катетни топинг.

280.Айирманингишорасинианиқланг:1)sin31□–sin30□; 2) sin26□–sin27□; 3) cos31□–cos30□; 4) cos26□–cos27□.

B

281. 1) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ бўлса, у холда sin□, tg□ ва ctg□ ни;

2) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ бўлса, у холда sin□, tg□ ва ctg□ ни;

3) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлса, у ҳолда cos□, tg□ ва ctg□ ни;

4) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ бўлса, у ҳолда cos□, tg□ ва ctg□ ни топинг.

282. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 12,4 м, асоси эса 40,6 м. Учбурчакнинг бурчакларини ва ён томонларини топинг.

283. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 12,4 см ва 26 см. Диагоналлари орасидаги бурчакни топинг.

284. Ромб диагоналлари 4,73 см ва 2,94 см. Унинг бурчакларини топинг.

285. Ромб томони 241 м, баландлиги 120 м. Бурчакларини топинг.

286. Ифодани соддалаштиринг:

1) 1 − sin²□;
2) 1 − cos²□;
3) (1 − cos□)(1+cos□);
4) 1+ sin²□ + cos²□ ;
5) sin□ − sin□ cos²□;
6) cos45□tg45□;
7) sin85□tg5□;
8) 1 − sin18□cos72□;
9) $\frac{2\cos 2^\circ}{\sin 88^\circ + \cos 2^\circ}$; ;
10)sin⁴□+cos⁴□+2sin²□cos²□;
11) tg²□(2cos²□+sin²□−1);
12) cos²□+tg²□ cos²□;
13) tg²□ − sin²□ tg²□;
14) (1 − sin□)(1+sin□);
15)tg5□tg25□tg45□tg65□tg85□.

287. Ушбу берилганлар бўйича:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; 3) cos□=0,6. ctg□, sin□, ва tg□-ни топинг.

288. Агар: 1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; ; 2) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$; ; 3) sin□ = 0,5 бўлса, cos□, tg□, ctg□ ни топинг.

289. Агар: 1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$; 3)sin□=0,5; 4) $tg\alpha = \frac{3}{5}$;

5) tg□=0,7; 6) ctg□=1,5 бўлса, унда □ бурчакни ясаб кўрсатинг.

290. Тенг томонли учбурчакнинг томони *a*. Унга ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиусларини топинг.

291. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали унинг бир томонидан икки марта узун. Диагоналлари орасидаги бурчакни топинг.

292. Ромб диагоналлари *a* ва $a\sqrt{3}$ га тенг. Ромбнинг бурчакларини топинг.

293. Қуйидаги маълумотлар бўйича □ ва □ бурчакларни таққосланг:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}, \sin\beta = \frac{1}{4}$;
5) tg□=2,1, tg□=2,5;

2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}, \sin\beta = \frac{3}{4}$;
6) $tg\alpha = \frac{8}{3}, tg\beta = \frac{5}{2}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}, \cos\beta = \frac{2}{5}$;
7) ctg□=1,2, ctg□=1,1;

4) cos□=0,75, cos□=0,71;
8) $ctg\alpha = \frac{3}{2}, ctg\beta = \frac{7}{3}$.

294. Учидаги бурчаги 120□ бўладиган тенг ёнли учбурчакнинг асоси *b* га тенг. Ён томонини топинг.

295. Айлананинг радиуси 5 м. Унинг марказидан 13 м узоқликдаги нуқтадан айланага уринмалар ўтказилган. Уринмаларнинг узунликларини ва орасидаги бурчакларни топинг.

C

296. Учбурчакнинг асосидаги катта бурчаги 45□, баландлиги эса асосини 20 см ва 21 см ли бўлакларга бўлади. Учбурчакнинг катта ён томонини топинг.

297. 30 м баландликда турган овчига пастликда турган ҳайвон 20□ бурчак остида кўринади. Овчи билан ҳайвон орасидаги масофани топинг.

298. Агар 200 м масофада кўтарилиш баландлиги 6 м бўлса, тош йўлнинг кўтарилиш бурчагини топинг.

299. Диаметри 2 см айланага ташқи тенг ёнли трапеция чизилган. Асосларидаги бурчаклари 45□ дан бўлса, трапециянинг ўрта чизиғини аниқланг.

300. Дарёнинг бир томони 30 метрлик жар, унинг эни эса 40 м:

1) жарда ўтирган кузатувчидан дарёнинг иккинчи қирғоғигача масофа қандай?

2) кузатувчига қайиқ дарёнинг ўртасида тургандай туюлади (кузатувчига қайиқ билан дарё қирғоқлари бирдай бурчаклар остида кўринади). Ҳақикатда эса қайиқдан дарё қирғоқларигача масофа қандай?

3-§.* Учбурчакдаги метрик муносабатлар

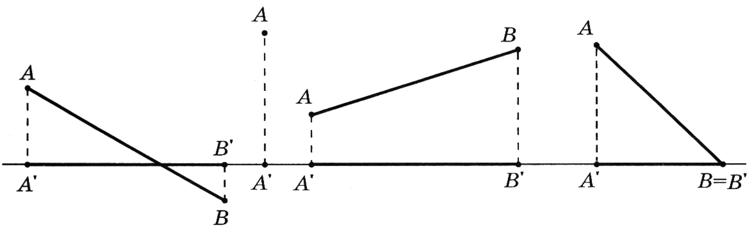
Нуқтанинг тўғри чизиқдаги проекцияси деб, шу нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асосига айталади.

Кесманинг тўғри чизиқдаги проекцияси деб шу кесманинг учлари проекциялари билан чегараланган тўғри чизиқ устидаги кесмага айтилади (82-расм).

Агар a, b ва x кесмалари учун $\frac{a}{x} \square \frac{x}{b}$ тенглик бажарилса, унда x кесмани a ва b кесмаларнинг ***ўрта геометриги*** деб аталади. Бу тенглик кўп ҳолларда бундай ёзилади: $x^2=ab$. Энди учбурчакларга хос айрим хоссаларга тўхтайлик.

Теорема 1. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг ҳар бир катети гипотенуза билан шу катетнинг гипотенузадаги проекцияларининг ўрта геометригига тенг.*

Исботи: 83-расмда $\cos\angle A = \frac{AC}{AB}$, ACD тўғри бурчак-



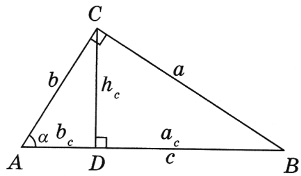
82-расм

ли учбурчакдан $\cos\angle A = \frac{AD}{AC}$.. Бундан $\frac{AC}{AB}\square\frac{AD}{AC}$, ёки $AC^2=AD\cdot AB$ тенглиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

$a^2=c\cdot a$; $b^2=c\cdot b_c$ экани маълум. $\square BCD=\square A$ бўлганидан, $\cos\angle A = \frac{AC}{AB}$, $\cos(\angle BCD) = \frac{CD}{BC}$. Унда $\frac{AC}{AB}\square\frac{CD}{BC}$. ёки $AC\cdot BC=AB\cdot CD$. Яъни ҳар бир тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари кўпайтмаси гипотенузаси билан гипотенузага туширилган баландликнинг кўпайтмасига тенг: $a\cdot b=h_c\cdot c$.

Теорема 2. *Ҳар бир тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига туширилган баландлиги гипотенузада ўзи ажратган кесмаларнинг ўрта геометригига тенг бўлади.*

$h_c^2 = a_c\cdot b_c$



83-расм

Исботи. ACD ва BCD (83-расм) учбурчаклардан

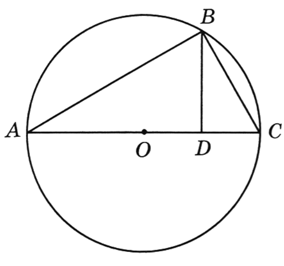
$$tg\angle A = \frac{CD}{AD}, tg(\angle BCD) = \frac{BD}{CD}$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Шулардан $CD^2=AD\cdot BD$ тенгликни оламиз. Теорема исботланди.

Шу теоремадан иккита натижа чиқади.

Натижа. *1) Айлананинг ҳар бир ватари диаметр билан шу ватарнинг бир учи орқали ўтадиган диаметрга проекциясининг **ўрта геометригига тенг** бўлади.*

2) *Айлананинг ҳар бир нуқтасидан диаметрга туширилган перпендикуляр шу диаметрда бўлинган бўлакларнинг **ўрта геометригига тенг** бўлади* (84-расм).



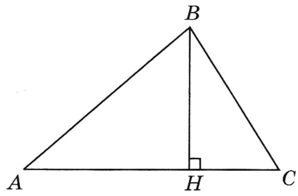
84-расм

Теорема 3. *Ҳар бир учбурчакнинг икки томони квадратларининг айирмаси шу томонлардан учбурчакнинг учинчи томонига туширилган проекциялар квадратларининг айирмасига тенг.*

Исботи. 85-расмда ABH ва BCH – тўғри бурчакли учбурчаклар. Пифагор теоремаси бўйича:

$AB^2=AH^2+BH^2$

$BC^2=CH^2+BH^2$



85-расм

Шу тенгликларни ҳадма-ҳад айирсак,

$AB^2 - BC^2= AH^2 - CH^2$

тенглик ҳосил бўлади. Теорема исботланди.

Теорема 4. *Ҳар қандай учбурчакда:*

1) *Ўткир бурчакка қарши ётган томоннинг квадрати, бошқа икки томоннинг квадратлари йиғиндисидан шу икки томоннинг бири билан иккинчисининг шу томондаги проекциясидан иккиланган кўпайтмасини айирганга тенг:*

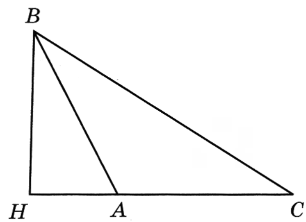
$BC^2 = AB^2+AC^2 - 2AC \cdot AH$.

2) *Ўтмас бурчакка қарши ётган томоннинг квадрати, бошқа икки томоннинг квадратлари йиғиндисига шу икки томоннинг бири билан иккинчисининг шу томондаги проекциясига иккиланган кўпайтмасини қўшганига тенг.*

$$BC^2= AB^2+AC^2+2AC\cdot AH.$$

Исботи. 1) Олдинги теорема бўйича, $BC^2=AB^2+CH^2-AH^2$. бўлганидан (85-расм), $BC^2 = AB^2+AC^2 - 2AC\cdot AH$.

2) Айтайлик, ABC учбурчакнинг A бурчаги ўтмас бўлсин (86-расм). 3-теорема бўйича $BC^2=AB^2+CH^2-AH^2$. Бунда $CH=AC+AH$ бўлганлигидан, $BC^2=AB^2+AC^2+2AC\cdot AH$. Теорема исботланди.

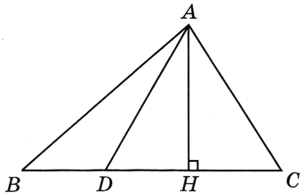


86-расм

Шу теоремадан бундай керакли натижа оламиз.

Натижа. *Агар учбурчакнинг бурчагига қарши ётган томоннинг квадрати қолган икки томоннинг квадратлари йиғиндисидан кам, тенг ёки ортиқ бўлса, у ҳолда берилган бурчак ўткир, тўғри ёки ўтмас бўлади.*

Теорема 5. *(Стюарт теоремаси). Агар ABC учбурчакнинг BC томонида ётган D нуқта берилса, унда $AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD$ тенглик бажарилади.*

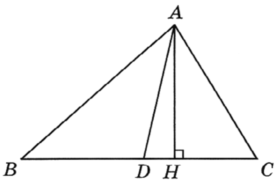


87-расм

Исботи. 87-расмда кўрсатилган A нуқтадан учбурчакнинг AH баландлигини ўтказайлик. Аниқлик учун, H нуқта D ва C нуқталарнинг орасида ётсин деб ҳисоблайлик. Олдинги теоремани ACD(□ADC ўткир) ва ABD (□ADB ўтмас) учбурчакларга қўллайлик.

$$AC^2=AD^2+DC^2-2DC\cdot DH,$$
$$AB^2=AD^2+BD^2+2BD\cdot DH.$$

Бу тенгликларнинг биринчисини BD га, иккинчисини эса CD га кўпайтиб, бир-бирига қўшамиз: $BD\cdot AC^2+CD\cdot AB^2=$ $=BD\cdot AD^2+BD\cdot DC^2-2BD\cdot DC\cdot DH+CD\cdot AD^2+CD\cdot BD^2+$ $+2\cdot BD\cdot DC\cdot DH=AD^2(BD+CD)+(BD+DC)\cdot BD\cdot DC=AD^2\cdot BC+$ $+BC\cdot BD\cdot CD$. Теорема исботланди.



88-расм

1-мисол. Берилган: ABC учбурчак, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Топиш керак: A учидан туширилган AD медианани (88-расм).

Ечилиши. Олдинги теоремада AD ни медиана деб ҳисоблаб, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, DC □ BD □ $\frac{a}{2}$ деб олсак, унда $c^2\cdot\frac{a}{2}+b^2\cdot\frac{a}{2}-AD^2\cdot a=a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}$ тенглигини a га бўлиб, $\frac{b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a}{2}=AD^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2{}^2$ тенглигини оламиз.

Шундан $AD^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$ тенглиги чиқади.

2-мисол. ABC учбурчакда $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. A учидан туширилган AH баландликни топиш керак (88-расм).

Ечилиши. ABC учбурчакнинг B ва C бурчакларининг бири ўткир бўлиши керак (иккита ўтмас, ёки иккита тўғри бурчак бўлиши мумкин эмас). Айтайлик, B ўткир бурчак бўлсин, унда 4-теоремага кўра (AB га қўллаймиз): $b^2=a^2+c^2-2a\cdot BH$. Бундан $BH=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\cdot AHB$ тўғри бурчакли учбурчакдан $AH^2 = c^2 - BH^2 = c^2 - \frac{\left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2}{4a^2}$ тенгликни оламиз. Шу квадратлар айирмасини шакл алмаштирамиз:

$$AH^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \cdot \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{\left(2ac - a^2 - c^2 + b^2\right)\left(2ac + a^2 + c^2 - b^2\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(b + c - a)(a + b - c)(a + c - b)(a + b + c)}{4a^2}.$$

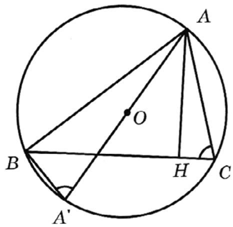
Бунда $p = \frac{a + b + c}{2}$ деб белгиласак (учбурчакнинг ярим периметри), у ҳолда $AH^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$ формулани ҳосил қиламиз.

3-мисол. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

Берилган: *ABC* учбурчак, *BC=a, AC=b, AB=c*.

Топиш керак: Ташқи чизилган айлананинг радиуси *R* ни.

Ечилиши. *AH*-учбурчакнинг баландлиги, *AA'* – ташқи чизилган айлананинг диаметри бўлсин (89-расм). Бир ёйга таянгани учун, □*A'*=□*C* ва *AA'B*, *ACH* учбурчаклар тўғри бурчаклидир.



89-расм

Уҳолда $\frac{AH}{AC}$ □$\sin C$ □$\sin A'$ □$\frac{AB}{AA'}$.

Шундан $AA' = \frac{AB \cdot AC}{AH}$ ёки $R = AO = = \frac{AB \cdot AC}{2AH}$ тенгликни оламиз. 2-мисолдан $AH = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$ эканини билган ҳолда ва қийматларини ўринларга қўйсак: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ формулани ҳосил қиламиз.

МИСОЛЛАР

B

301. Жуфт-жуфтдан кесишадиган тўғри чизиқлардан бир хил узоқликда жойлашадиган нечта нуқта бор?

302. Учбурчакнинг бир биссектрисаси унинг иккинчи биссектрисасининг ўртаси орқали ўтиши мумкинми?

303. Учбурчакнинг икки биссектрисаси: 1) перпендикуляр; 2) параллелm бўлиши мумкинми?

304. Учбурчакнинг томонлари: 1) 2, 3, 4; 2) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; 3) m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$, ($m>n$) сонларига тенг бўладиган учбурчакнинг тури қандай?

C

305. Учбурчак баландликларининг кесишишидан ҳосил бўлган уч жуфт вертикаль бурчаклар шу учбурчакнинг мос бурчакларига тенг бўлишини исботланг.

306. ABC учбурчакнинг AA_1 ва BB_1 медианалари O нуқтада тўғри бурчак ясаб кесишадиган бўлса, унда $AB=OC$ бўлишини исботланг.

307. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан CD баландлиги ўтказилган ва D нуқтасидан AC ва BC катетларига DE ва DF перпендикулярлар ўтказилган. $AE^2+BF^2+3CD^2=AB^2$ бўлишини исботланг.

308. ABC учбурчакнинг C учи билан AC ва BC томонларининг ўрталари орқали ўтадиган айлана учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтади. Учбурчакнинг томонлари a, b ва c бўлса, унда $2c^2=a^2+b^2$ бўлишини исботланг.

309. ABC учбурчакнинг AH баландлигида D нуқта олинган. $AB>AC$ бўлса, AB^2-AC^2=DB^2-DC^2 тенглик бажарилишини кўрсатинг.

310. ABC тенг ёнли учбурчакнинг AB асосидаги исталган D нуқта учун $CD^2=AC^2-AD\cdot BD$ тенглик бажарилишини исботланг.

311. ABC учбурчакнинг AD медианаси учун $2AD=AB+AC$ тенглик бажарилса, унда $(AB-AC)^2=BC^2$ тенгликни исботланг.

312. Айланага ўтказилган икки параллель уринмалардан учинчи (қўзғалувчан) уринманинг кесиб ажратадиган кесмаларининг кўпайтмаси ўзгармас бўлишини исботланг.

313. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузага туширилган h баландлигининг квадратига тескари катталик унинг катетларининг квадратларига тескари катталикларнинг йиғиндисига тенг эканини исботланг.

314. Учбурчакнинг медианалари квадратлари йиғиндисининг учбурчак томонлари квадратларининг йиғиндисига нисбатини аниқланг.

315. $ABCD$ тўртбурчакнинг AC ва BD диагоналларининг ўрталари E ва F нуқталар бўлса, унда $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4EF^2$ тенглик бажарилишини исботланг.

316. ABC учбурчакнинг медианалари O нуқтада кесишади деб олиб, текисликдаги ихтиёрий G нуқта учун $OA^2+OB^2+OC^2=GA^2+GB^2+GC^2-3OG^2$ тенглик бажарилишини исботланг.

317. $ABCD$ параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси K бўлса, унда текисликдаги ихтиёрий O нуқта учун $AO^2+OC^2-OB^2-OD^2$ ифода O нуқтага боғлиқ эмас, ўзгармас эканини исботланг.

318. ABC учбурчакнинг A учидан туширилган медианаси AB ва AC томонларининг ўрта геометригига тенг бўлса, унда томони учбурчакнинг шу томонлари айирмасига тенг квадратнинг диагонали BC томонига тенг бўлишини исботланг.

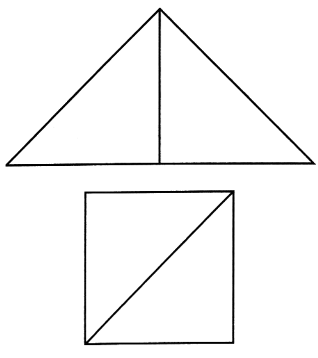
III б о б
ТЎРТБУРЧАКЛАРНИНГ ЮЗИ

1-§. Тўғри тўртбурчакнинг юзи

1.1. Ясси фигураларнинг юзи ҳақида тушунча. Кесманинг узунлиги деганимиз маълум бир масштабли кесма билан солиштиргандаги шу кесманинг ўлчами бўлишини яхши биламиз. Ясси фигура юзи ҳам шундай тушунтирилади.

Умуман, фигуранинг юзи тушунчасини кундалик иш тажрибамизда кўп қўллаймиз. Масалан, сиз ўтирган синф хонасининг юзи, паркка ажратилган ернинг юзи, футбол ўйнашга ажратилган ернинг юзи ва шу кабилар. Энди ясси фигураларнинг юзи тушунчасига таъриф беришдан олдин, бу тушунчанинг кесма узунлиги тушунчаси билан солиштиргандаги айрим ўзига хос томонларини айтиб ўтайлик.

Икки кесманинг узунликлари тенг бўлса, унда бу кесмалар тенг бўлади. Икки бурчакнинг градус (ёки радиан) ўлчовлари тенг бўлса, унда бу бурчаклар ҳам тенг бўлишини яхши биламиз. Фигураларнинг юзаларини ўлчаш жараёнида бу хоссалар бажарилавермайди. Яъни ҳар турли, ўзаро ўхшаш бўлмаган фигураларнинг юзалари бир хил бўлиши мумкин. Бундай фигураларни ***тенг катталикли*** фигуралар деб аталади. Масалан, 90-расмда тасвирланган учбурчак билан квадрат тенг катталикли. Лекин, бу квадрат билан учбурчакни тенг катталикли дегандан кўра, ***тенг таркибли*** дегани ўринлироқ. Сабаби, улар бирдай тўғри бурчакли учбурчаклардан йиғилган. Умуман, агар икки фигурани жуфт-жуфт қилиб ўзаро тенг бўлакларга бўлиш мумкин бўлса, бу фигураларни ***тенг таркибли*** деб атаймиз, 91-расмда тенг таркибли фигуралар тасвирланган. Юзанинг ўлчов бирлиги сифатида томонининг узунлиги маълум қандайдир бир квадрат олинади. Одатда, бунинг учун томонининг узунлиги 1 га тенг квадрат олинади. Агар узунликни сантиметр билан ўлчасак, у



90-расм

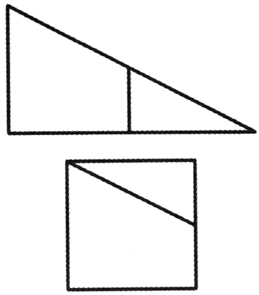
ҳолда томони 1 см бўлган квадрат – юза ўлчовининг бирлиги. Яъни юза ўлчов бирлиги 1 см^2 (квадрат сантиметр) деб олинади.

Умуман, фигура юзи тушунчасини (кесма узунлиги тушунчасига ўхшаш) қатъий математик кўринишда қуйидаги аксиомалардан олиш мумкин:

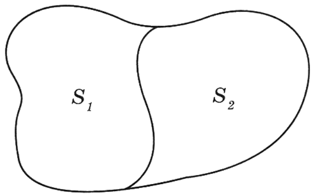
1□. *Тенг фигураларнинг юзлари тенг.*

2□. *Агар фигура қандайдир бир чизиқ билан бошқа иккита фигураларга бўлинса, унда берилган фигуранинг юзи шу бўлаклар юзларининг йиғиндисига тенг* (92-расм).

3□. *Томони бир ўлчов бирлигига тенг квадратнинг юзи 1 га тенг.*



91-расм



$S=S_1+S_2$

92-расм

Албатта, бу аксиомалар юза тушунчасининг кўргазмалилигидан келиб чиқадиган содда хоссалар ва улар фигура юзини ўлчаш жараёнини аниқлайди. Шу аксиомалардан бундай натижалар чиқади.

Натижа 1. *Агар бир фигура иккинчи фигуранинг бўлаги бўлса, унда бу фигуранинг юзи иккинчи фигуранинг юзидан кичик бўлади.*

Натижа 2. *Тенг таркибли фигураларнинг юзлари ҳам тенг бўлади.*

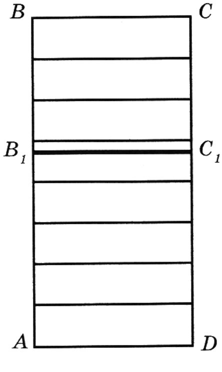
Бунга тескари тасдиқ ҳар доим ҳам бажарилавермайди, яъни юзлари тенг (тенг катталикдаги) фигуралар тенг таркибли бўлавермайди. Масалан, доира билан квадратнинг юзлари тенг бўлиши мумкин, аммо бу фигуралар тенг таркибли бўлмаслиги олий математика курсида исботланади.

1.2. Тўғри тўртбурчакнинг юзи.

Теорема 1. *Томонлари a ва b бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи қуйидаги формула билан топилади:*

$$S=ab. \tag{1}$$

Исботи. Аввал бундай фикрни исботлайлик: AD томони умумий $ABCD$ ва AB_1C_1D тўғри тўртбурчакнинг юзлари



93-расм

мос S ва S_1 га тенг бўлса, у ҳолда $\frac{S_1}{S}\square\frac{AB_1}{AB}$ нисбатнинг бажарилишини кўрсатайлик.

Бунинг учун AB томонини ўзаро тенг n та бўлакка бўламиз. (Бунда n ихтиёрий жуда катта сон бўла олади). Шунинг билан бу бўлакларнинг ҳар кайсисининг баландлиги $\frac{AB}{n}$-га тенг (93-расм). AB_1 кесмада шундай бўлакларнинг m донаси ётган бўлсин. У ҳолда

$$\left(\frac{AB}{n}\right)m \le AB_1 < \left(\frac{AB}{n}\right)(m+1)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликни AB га бўлиш орқали

$$\frac{m}{n} \le \frac{AB_1}{AB} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (2)$$

тенгсизликни оламиз.

Бўлиниш нуқталари орқали AD асосига параллель тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар $ABCD$ тўғри тўртбурчакни ўзаро тенг n тўғри тўртбурчакларга бўлади. Уларнинг ҳар қайсисининг юзи $\frac{S}{n}$ га тенг. AB_1C_1D тўғри тўртбурчакка шундай «кичкина» m тўғри тўртбурчаклар тўлиқ жойлашади, AB_1C_1D нинг ўзи $m+1$ тўғри тўртбурчаклардан ташкил топган фигурага жойлашади. Шунинг учун

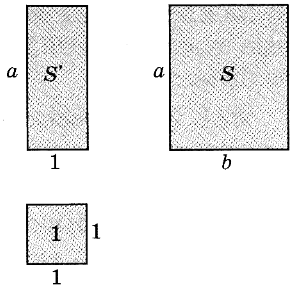
$$\left(\frac{S}{n}\right)m \le S_1 < \left(\frac{S}{n}\right)(m+1)$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан

$$\frac{m}{n} = \frac{S_1}{S} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. (2) ва (3) тенгсизликлардан $\frac{AB_1}{AB}$ ва $\frac{S_1}{S}$ нисбатлар $\frac{m}{n}$ ва $\frac{m}{n}\square\frac{1}{n}$ сонларнинг орасида ётишини кўрамиз. Ундай бўлса, бу нисбатлар бир-биридан фақат $\frac{1}{n}$ га фарқ қилиши мумкин. n сонини хоҳлаганча катта олиш мумкин бўлганлиги учун, $\frac{S_1}{S} \square \frac{AB_1}{AB}$ бажарилиши керак.

Энди бирлик квадрат, томонлари 1, a бўладиган ва томонлари a, b бўладиган тўғри тўртбурчакларни текширайлик (94-расм). Бу фигураларнинг юзлари нисбати учун исботлаганимиз бўйича



94-расм

$$\frac{S'}{1} \square \frac{a}{1} \text{ ва } \frac{S}{S'} \square \frac{b}{1}$$

тенгликларни оламиз. Бу тенгликларни ҳадлаб кўпайтириб, $S=ab$ формулани оламиз. Теорема исботланди.

?
1. Фигураларнинг юзи деб нимани тушунамиз?
2. Ясси фигураларнинг юзларини қандай ҳисоблаш мумкин?
3. Тенг катталикли ва тенг таркибли фигуралар degani нима? Уларнинг қандай фарқи бор?
4. Фигуранинг юзи тушунчасининг қандай аксиомаларини биласиз?
5. Тўғри бурчакли тўртбурчакнинг юзи қандай ҳисобланади? Тегишли теоремани айтинг ва исботланг.

ПТ
1. Партанинг сирти юзини аниқланг.
2. Синф хонасининг юзини ҳисобланг. Агар 1м^2 полни бўяш учун 50 г бўёқ ишлатилса, унда синфни бўяшга қанча бўёқ зарур бўлади?

МИСОЛЛАР

А

319. Томонлари a га ва b га тенг тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг: 1) a=3,4 см, b=5,5 см; 2) a=2 м, b=7 м; 3) $a \square \frac{2}{3}$, $b \square \frac{3}{2}$ дм.

320. N. E, L ва K нуқталар $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг AB, AD, BC ва CD томонларининг ўртаси: 1) $\square ABD$; 2) $\square ABE$; 3) $ABKD$; 4) $ABLKD$; 5) $ABLKE$; 6) $LKEN$,

7) ALD ва BEC фигуралар майдонлари $ABCD$ тўғри тўртбурчак майдонининг қандай қисмига тенг?

321. Томони: 1) 1,2 см; 2) $\frac{3}{4}$ дм; 3) $3\sqrt{2}$ м бўлган квадратнинг юзини топинг.

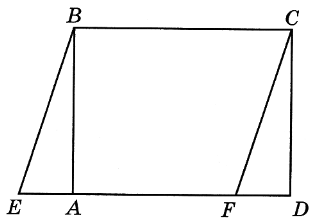
322. Юзи: 1) 16 см^2; 2) 2,25 дм^2; 3) 12 м^2 бўладиган квадратнинг томонини топинг.

323. Юзи 16 см^2 квадрат берилган. Унинг юзини: 1) мм^2; 2) дм^2; 3) м^2 орқали ифодаланг.

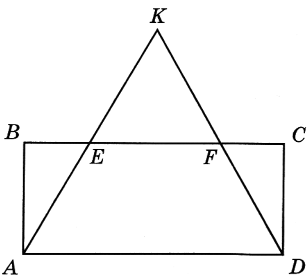
324. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари a ва b, юзи эса S орқали белгиланган. Қуйидаги маълумотлар бўйича номаълум элементларни аниқланг: 1) a=8,5 см, b=3,2 см; 2) $a=2\sqrt{2}$ м, b=3 м; 3) a=32 см, S=684,8 см^2; 4) a=4,5 м, S=12,15 м^2.

B

325. 95-расмда кўрсатилган $ABCD$ тўғри тўртбурчак билан $EBCF$ параллелограмм тенг таркибли эканини исботланг.



95-расм



96-расм

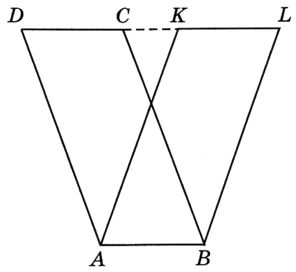
326. 96-расмда кўрсатилган $ABCD$ тўғри тўртбурчак билан AKB учбурчак тенг таркибли бўлишини исботланг.

327. 97-расмда кўсатилган $ABCD$ ва $AKLB$ параллелограммлар тенг катталикли эканини исботланг.

328. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ясалган квадратнинг юзи унинг катетларига ясалган квадратларнинг юзлари йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

329. Тўғри тўртбурчакнинг: 1) қарама-қарши томонларининг бир жуфтини икки марта орттирса; 2) ҳар бир томонини икки марта орттирса; 3) қарама-қарши томонларининг бир жуфтини икки марта орттириб, иккинчи жуфтини икки марта камайтирса, юзи қандай ўзгаради?

330. Тўғри тўртбурчакнинг: 1) юзи 250 см^2, бир томони иккинчисидан 2,5 марта катта бўлса; 2) юзи 9 м^2, периметри эса 12 м бўлса, унда унинг томонларини топинг.



97-расм

331. Томонларининг узунлиги 5,5 м ва 6 м бўладиган хонани ўлчами 305 см^2 бўладиган тўғри тўртбурчак шаклидаги паркетлар билан қоплаш учун нечта паркет тахтачалар керак бўлади?

332. Икки ер участкаси узунликлари бирдай тўсиқлар билан ўралган. Тўғри тўртбурчак шаклидаги ер участкасининг эни 60 м, узунлиги 100 м, иккинчиси эса квадрат шаклида. Шу ер участкаларидан қайсисининг юзаси катта?

С

333. Квадратни параллелограмм ҳосил қилиш мумкин бўлган қандай уч бўлакка бўлса бўлади?

334. Квадратни ромб ҳосил қилиш мумкин бўлган қандай уч бўлакка бўлишга бўлади?

335. Қандай қилиб квадратни тенг катталикли икки бўлакка бўладиган қилиб, шу квадратдан иккинчи квадратни қийиб олса бўлади?

336. Юзи берилган квадратнинг юзидан икки марта ортиқ квадрат ясанг.

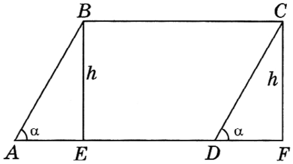
337. Барча тенг катталикли тўғри тўртбурчаклар ичида квадратнинг периметри энг кичик бўлишини исботланг.

2-§. Параллелограмм, учбурчак ва трапециянинг юзлари

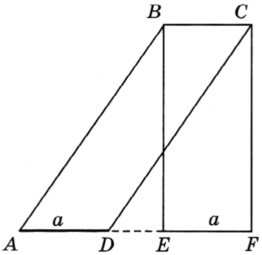
2.1.Параллелограммнинг юзи.

Параллелограммнинг юзи унинг асоси билан баландлиги кўпайтмасига тенг (98-расм).

$$S=ah. \qquad (1)$$



98-расм



99-расм

Исботи. $ABCD$ параллелограмм берилсин ва $AD=a$, $BE=h$, $BE\square AD$ бўлсин (98-расм). C нуқтадан AD тўғри чизиққа CF перпендикулярни туширайлик. Унда $BE=CF$ ва $\square BAE=\square CDF$ бўлгани учун, ABE ва DCF тўғри бурчакли учбурчаклар ўзаро тенг бўлади. Шунинг учун $ABCD$ параллелограмм билан $EBCF$ тўғри тўртбурчак тенг таркибли бўлади.

У ҳолда, $S_{ABCD}=S_{EBCF}$. $S_{EBCF}=BE\cdot EF=BE\cdot BC$ ва $BC=AD$ бўлгани учун, $S_{ABCD}=BE\cdot AD=ha$ тенгликни оламиз. (1) формула исботланди.

Эслатма 1. Параллелограммнинг асоси учун унинг исталган томонини олишга бўлади. Унда (1) формуладаги h шу асосга туширилган баландлик. Шунинг билан бирга юқоридаги исботлаш жараёнида 98-расмдан фойдаландик. Агар параллелограмм бошқача шаклда олинса (масалан, 99-расмга қаранг), у ҳолда $ABCD$ параллелограмм билан $EBCF$ тўғри тўртбурчак тенг таркибли бўлишини кўрсатиш қийин эмас (бундай ҳолларни мустақил кўриб чиқинг).

Натижа 1. *Томонлари a ва b га тенг, ўткир бурчаги α га тенг параллелограммнинг юзи*

$$S=a\cdot b\sin\square \qquad (2)$$

формуласи билан топилади (98-расм).

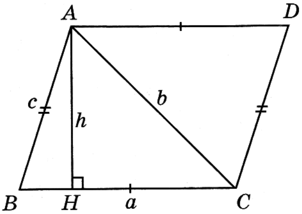
Исботи. Ҳақикатан ҳам, (1) формулага кўра $S=ah$, ABE тўғри бурчакли учбурчакдан эса $h=BE=AB\sin\square$. У ҳолда $S=a\cdot b\sin\square$ тенглик бажарилади.

2.2. Учбурчакнинг юзи.

Учбурчакнинг юзи унинг асоси билан баландлигининг ярим кўпайтмасига тенг:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h. \qquad (3)$$

Исботи. ABC учбурчакда $BC=a$, $AH=h$, $AH\square BC$ бўлсин. Унда 100-расмда кўрсатилгандай, ABC учбурчакни $ABCD$ параллелограммга тўлдирамиз. $AD=BC$, $AB=CD$ ва AC томони умумий бўлганидан, учбурчаклар тенглигининг учинчи аломати бўйича □ABC=□CDA. Шунда $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{CDA}=2\cdot S_{ABC}$. Иккинчи томондан, $S_{ABCD}=BC\cdot AH=a\cdot h$ бўлганлиги учун, $S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h$.

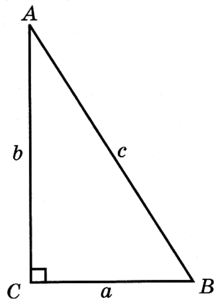


100-расм

Натижа, 2. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи унинг катетларининг ярим кўпаймасига тенг:*

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b. \qquad (4)$$

Исботи. (3) формуладан келиб чиқади. Сабаби, агар тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катетини унинг асоси деб олсак, унда иккинчи катети асосига туширилган баландлиги бўлади (101-расм).



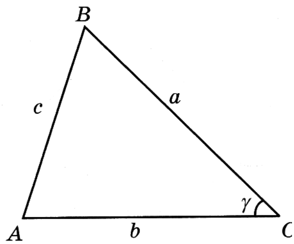
101-расм

Натижа 3. *a га ва b га тенг томонларининг орасидаги бурчаги □-га тенг учбурчакнинг юзи*

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma \quad (5)$$

формуласи билан ҳисобланади.

Исботи. (3) формуланинг исботидан ва 1-натижадан чиқади (102-расм).



102-расм

Натижа 4. (Герон формуласи). *Томонлари a га, b га ва c га тенг учбурчакнинг юзи*

$$S=\sqrt{p\left(p-a\right)\cdot\left(p-b\right)\cdot\left(p-c\right)} \quad (6)$$

формуласи билан топилади. Бундаги $p=\frac{a+b+c}{2}$ *учбурчакнинг ярим периметри.*

(Герон – қадимги грек олими эр.ав. I аср).

Исботи. II бобнинг 3-параграфидаги 2-мисол бўйича (100-расм):

$$AH = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - \left(b^2 - c^2 - a^2\right)^2}.$$

У ҳолда икки ифоданинг квадратлари айирмасининг формуласи бўйича:

$4a^2c^2-(b^2-c^2-a^2)=(2ac-b^2+a^2+c^2)\cdot(2ac+b^2-a^2-c^2)=$
$=[(a+c)^2-b^2]\cdot[b^2-(a\text{-}c)^2]=(a+b+c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)\square$
$\square(b+a-c)=(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)=$
$=2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)=16p(p-a)(p-b)(p-c).$

Бундан ва (3) формула бўйича:

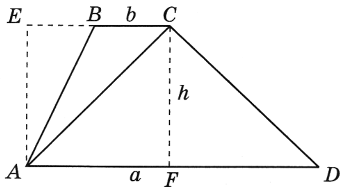
$$S = \frac{1}{2}BC\cdot AH = \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2a}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Формула исботланди.

Эслатма 2. Герон формуласини Пифагор теоремаси ва косинуслар теоремасини қўллаб исботлаш мумкин. (Уни мустақил бажаринг).

2.3. Трапециянинг юзи. *Трапециянинг юзи асосларининг ярим йиғиндиси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:*

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h. \tag{7}$$



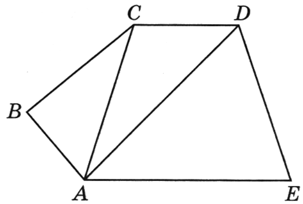
103-расм

Исботи. $ABCD$ трапециянинг асослари $AD=a$, $BC=b$ ва баландлиги $AE=CF=h$ бўлсин (103-расм). AC диагонали трапецияни икки учбурчакка бўлади: $\square ABC$ ва $\square ACD$. Унда $S_{тр}=S_{ABC}+S_{ACD}$. (3) формула бўйича:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AE = \frac{1}{2}h\cdot b \text{ ва } S_{ACD} = \frac{1}{2}AD\cdot CF = \frac{1}{2}a\cdot h..$$

Бунда $S_{тр} = \frac{1}{2}a\cdot h + \frac{1}{2}b\cdot h = \frac{a+b}{2}\cdot h.$ Формула исботланди.

Эслатма 3. Шу каби ихтиёрий кўпбурчакнинг юзи уни бир неа учбурчакларга ажратиш орқали топилади. Масалан, 104-расмда тасвирланган бешбурчакнинг юзи учта учбурчакнинг юзлари йиғиндисига тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ҳар қандай кўпбурчакни учбурчакларга ажратиб, юзини топишга бўлади. Шу сабабли кўпбурчакнинг юзини ҳисоблаш учун уни қулай усул билан учбурчакларга бўлишга ҳаракат қилинади.



104-расм

Т Қадим замонданоқ одамзод содда фигураларнинг юзини ҳисоблай олган. Масалан, бизнинг эрамиздан аввалги 2000 йиллари мисрликлар тенг томонли учбурчакнинг юзини ҳисоблаш учун тахминий формулани қўллаган. «Герон формуласи» эр. ав. I асрда яшаган Александриялик Героннинг «Математика» номли китобида учрайди. Умуман, уч томони бўйича учбурчакнинг юзини ҳисоблашни биринчи бўлиб Архимед ўйлаб топган (эр. ав.III аср).

?
1. Параллелограммнинг юзи қандай формула билан аниқланади?
2. Учбурчакнинг юзини топадиган формулаларни ёзинг.
3. Трапециянинг юзини қандай формула билан аниқлаш мумкин?
4. Трапеция, убурчак ва параллелограммнинг юзларини қандай умумий формула билан ҳисобласа бўлади?
5. Герон формуласини ёзиб, уни исботланг.

МИСОЛЛАР

А

338. S-параллелограммнинг юзи, a – асоси, h – асосига туширилган баландлиги деб олиб, жадвални тўлдиринг:

a	7		$2\sqrt{2}$	6		$\sqrt{3}$	
h	8	2		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$		7
S		12	8		4	$2\sqrt{6}$	$4\sqrt{7}$

339. S- учбурчакнинг юзи, a асоси, h асосига туширилган баландлиги деб олиб, жадвални тўлдиринг:

a	3		3	$\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$
h	2	2		$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	
S		4	6	3	2	

340. S-трапециянинг юзи, a ва b асослари, h – баландлиги деб олиб, жадвални тўлдиринг:

a	4	5	7	6	$2\sqrt{2}$		4	
b	2	3		2	$\sqrt{2}$	1		
h	3		5	3	$\frac{2}{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		24	25	21	4	7	$8\sqrt{2}$	27

341. Томони $\sqrt{3}$ см ромбнинг ўткир бурчаги 60□. Ромбнинг юзини топинг.

342. Катетлари: 1) 3 см ва 4 см; 2) 1,2 м ва 3 м бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг юзини топинг.

343. a ва b томонлари билан уларнинг орасидаги □ бурчаги бўйича учбурчакнинг юзини топинг:

1) a=2см, b=3см, □=30□; 2) $a= 2\sqrt{2dm}$, $b= 5\sqrt{dm}$, □=45□; 3) a=2 м, $b= \sqrt{3}$ м, □=90□; 4) a=0,4 см, b=0,8 см, □=120□.

344. Уч томони бўйича учбурчакнинг юзини топинг:

1) 2 см; 3 см; 4 см; 2) 2,5 см; 1 см; 2 см; 3) 5 м; 7 м; 9 м; 4) 5 дм; 5 дм; 6 дм.

B

345. Қўшни томонлари 2 см ва 5 см бўлган параллелограммнинг юзи 5 см^2. Параллелограммнинг ўткир бурчаги билан баландлигини аниқланг.

346. Параллелограммнинг узунлиги 13 см га тенг диагонали унинг 12 см га тенг томонига перпендикуляр. Параллелограммнинг юзини топинг.

347. Параллелограмм билан тўғри бурчакли тўртбурчакнинг томонлари узунликлари бир хил. Агар тўғри тўртбурчакнинг юзи параллелограммнинг юзидан икки марта катта бўлса, у ҳолда параллелограммнинг ўткир бурчагини топинг.

348. Ромбнинг юзини унинг d_1 ва d_2 диагоналлари орқали ифодаланг.

349. Диагоналлари: 1) 3,2 см ва 14 см; 2) 4,6 м ва 2 м га тенг бўлса, ромбнинг юзини топинг.

350. Ромб диагоналларининг бири иккинчисидан 1,5 марта катта, унинг юзи эса 27 $см^2$. Ромбнинг диагоналларини топинг.

351. ABC учбурчакда: AB=16 см, BC=22 см, C учидан туширилган баландлиги эса 11 см. Учбурчакнинг BC томонига туширилган баландлигини топинг.

352. Томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакнинг юзини топинг.

353. Учбурчакнинг a томонига ёпишган бурчаклари □ ва □. Учбурчакнинг юзини топинг.

354. Диагоналлари перпендикуляр қавариқ. тўртбурчакнинг юзи унинг диагоналларининг ярим кўпайтмасига тенг бўлишини исботланг.

355. Трапециянинг параллель томонлари 60 см ва 20 см, ён томонлари 13 см, 37 см. Трапециянинг юзини топинг.

356. Қўшни икки кичик томонлари 6 см дан, катта бурчаги 135□ бўладиган тўғри бурчакли трапециянинг юзини топинг.

357. Берилган трапеция билан тенг таркибли: 1) параллелограмм; 2) тўғри тўртбурчак ясанг.

358. Тенг томонли $ABCDEF$ олтибурчак умумий асоси CF бўладиган икки трапециядан ташкил топган. Агар AC=13 см, AD=10 см бўлса, унда олтибурчакли кўпбурчакнинг юзини топинг.

359. Томони a га тенг мунтазам учбурчакка ички чизилган квадратнинг юзини топинг.

360. Катетларининг йиғиндиси l, тўғри бурчагидан туширилган баландлиги h бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг юзини топинг.

361. Тенг томонли учбурчакнинг томонларига учбурчакдан ташқарида квадратлар ясалган. Квадратларнинг марказларини учбурчакнинг учлари билан бирлаштирганда ҳосил бўладиган олтибурчакнинг юзини топинг. Учбурчакнинг томонлари a га тенг.

362. Томони a га тенг квадратнинг бурчаклари мунтазам саккизбурчак ҳосил бўладиган қилиб кесилган. Шу саккизбурчакнинг юзини топинг.

363. Тенг ёнли трапециянинг асослари 24 см ва 40 см, диагоналлари эса ўзаро перпендикуляр. Трапециянинг юзини топинг.

364. Юзи 594 м^2 бўлган трапециянинг баландлиги 22 м, асосларининг айирмаси эса 6 см. Трапециянинг асосларини топинг.

365. Радиуси R га тенг айланага юзи S га тенг бўлган тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Трапециянинг асосларини топинг.

366. $ABCD$ параллелограммнинг AC диагоналидан олинган нуқта орқали унинг томонларига параллель ўтказилган тўғри чизиқлар параллелограммни тўрт параллелограммга бўлади. Улардан иккитасининг диагоналлари AC диагоналда ётади. Бошқа икки параллелограммнинг ўзаро тенг катталикли бўлишини исботланг.

367. Ҳар бир трапецияда унинг диагоналлари ва параллель бўлмаган икки томони билан чегараланган икки учбурчак ўзаро тенг катталикли бўлишини исботланг.

C

368. Герон формуласини Пифагор теоремасини қўллаб исботланг.

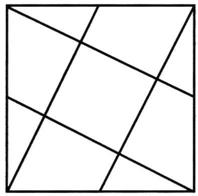
369. Томони a га тенг квадратнинг икки қўшни томонлари ўрталари бир-бири билан ва қарама-қарши учи билан бирлаштирилган. Ҳосил бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

370. Бир томони тенг ёнли учбурчакнинг асосида ётадиган қилиб, шу учбурчакка квадрат ички чизилган. Агар квадрат билан учбурчакнинг оғирлик марказлари устма-уст тушадиган бўлса, унда шу учбурчакнинг юзини топинг. Бунда квадратнинг юзи 16 $см^2$.

371. Тенг ёнли учбурчакнинг юзи шу учбурчакнинг асосини томони қилиб ясалган квадрат юзининг $\frac{1}{3}$ бўлагига тенг ва учбурчакнинг ён томонлари унинг асосидан 1 см қисқа. Учбурчакнинг томонлари билан асосига туширилган баландлигини топинг.

372. Асоси b, ён томонига туширилган баландлиги h бўлган тенг ёнли учбурчакнинг юзини топинг.

373. 105-расмда кўрсатилгандай, квадратнинг ҳар бир учи белгили бир йўналишда унинг бир томонининг ўртаси билан туташтирилган. Шундан ҳосил бўлган кичкина квадратнинг юзи берилган квадратнинг юзининг $\frac{1}{5}$ бўлагига тенг бўлишини исботланг.



105-расм

374. Ҳар бир тенг ёнли учбурчакнинг юзи унинг бир ён томони билан иккинчи ён томонининг ўртасидан биринчи ён томонига туширилган перпендикулярнинг кўпайтмасига тенг бўлишини исботланг.

МАТЕМАТИКАНИ ЧУҚУР ЎҚИТИШГА МЎЛЖАЛЛАНГАНҚЎШИМЧАМАТЕРИАЛЛАР

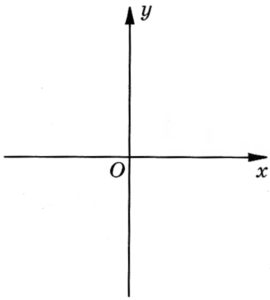
IV б о б

*ТЕКИСЛИКДАГИ ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТЛАР СИСТЕМАСИ

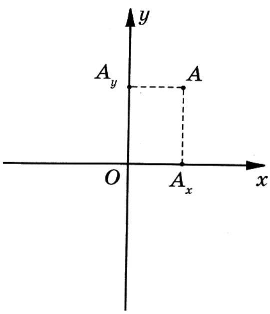
1-§. Текисликдаги нуқталарнинг декарт координатлари. Икки нуқта орасидаги масофа

1.1. Тўғри бурчакли декарт координаталар системаси. Текисликдаги координаталар системаси билан таниш эканлигингизни эсга тушириб, қискача такрорлаб ўтайлик.

O нуқтада кесишадиган, ўзаро перпендикуляр Ox ва Oy тўғри чизиқларни олайлик (106-расм). Ox тўғри чизиқни ***абсциссалар*** ўқи деб, Oy тўғри чизиқни ***ординаталар*** ўқи деб аталади. Умуман, Ox ва Oy ***координаталар ўқлари*** деб аталади. O нуқтаси координатанинг ***бош нуқтаси*** деб аталади. Координаталар боши ҳар бир ўқни (абсциссалар ва ординаталар ўқлари) иккита ярим ўққа бўлади. Ox ва Oy ўқлари учун O нуқтага 0 сонини қўйсак, унда бу ўқларни сон ўқлари деб қабул қиламиз. Бу ўқларнинг стрелка билан кўрсатилган томони ***мусбат*** деб, иккинчи томони ***манфий*** деб аталади. Ҳар бир сон ўқига ўхшаш, маълум бир масштаб билан Ox ва Oy ўқларининг мусбат қисмининг исталган нуқтасига маълум бир мусбат сон, манфий қисмининг ҳар бир нуқтасига биргина манфий сон мос келади.



106-расм

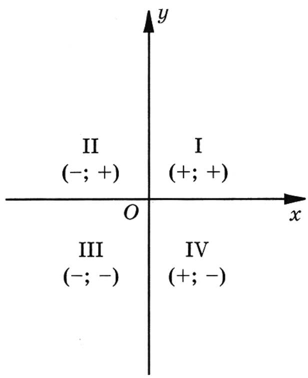


107-расм

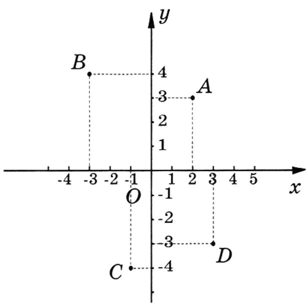
Энди текисликдаги A нуқтадан Ox ва Oy ўқларига перпендикуляр туширайлик ва уларнинг асосларини мос A_x ва A_y орқали белгилайлик (107-расм). A_x нуқтага Ox ўқидан x сони, A_y нуқтага Oy

ўқидан y сони мос келсин. Унда текисликдаги A нуқтага (x, y) сонлар жуфти мос қўйилади. Бу (x, y) сонлар жуфти A нуқтанинг ***координаталари*** деб аталади. x ни A нуқтанинг биринчи координатаси (абсциссаси), y ни A нуқтанинг иккинчи координатаси (ординатаси) деб атаймиз. Аксинча, агар қандайдир бир $(x; y)$ сонлар жуфти берилса, унда Ox ўқидан координатаси x га тенг A_x нуқтани, Oy ўқидан координатаси y га тенг A_y нуқталарини топиб, шу нуқталар орқали координата ўқларига параллель тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини A деб белгиласак, унда юқорида айтганимиз бўйича, бу нуқтанинг координаталари $(x;y)$ бўлади. Шу билан текисликдаги ҳар бир нуқта ўзининг координаталари орқали фақат бир қийматли турда аниқланади. Агар A нуқта $(x;y)$ координаталари орқали берилса, унда уни қисқача бундай ёзилади: $A(x;y)$.

Координата ўқлари текисликни тўрт бўлакка бўлади (108-расм). Бу бўлаклар I, II, III, IV ***чораклар*** деб аталади. Агар нуқта I чоракда жойлашса, унда нуқтанинг иккала координатаси ҳам мусбат бўлади. II чоракдаги нуқталарнинг биринчи координаталари манфий, иккинчи координаталари мусбат, III чоракдаги нуқталарнинг иккала координаталари ҳам манфий, IV чоракдаги нуқталарнинг биринчи координатаси мусбат, иккинчи координатаси эса манфий бўлади. Масалан, 109-расмда $A(2;3)$, $B(-3;4)$, $C(-1;-4)$, $D(3;-3)$ нуқталар тасвирланган.



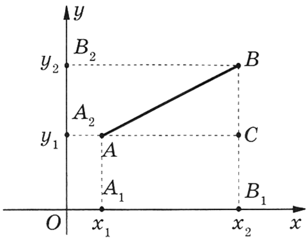
108-расм



109-расм

Бу координаталар системасини биринчи бўлиб қўллаган француз олими Рене Декарт (1596-1650) бўлганлигидан, уни ***декарт координаталари системаси*** деб аталади.

1.2. Икки нуқта орасидаги масофа. Декарт координаталари системасида $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ нуқталари берилсин. A ва B



110-расм

нуқталарнинг орасидаги масофани топиш керак.

Бунинг учун A ва B нуқталар орқали координата ўқларига параллель тўғри чизиқлар ўтказамиз (110-расм). У ҳолда ABC тўғри бурчакли учбурчакни ҳосил киламиз. $A_1(x_1;0)$, $B_1(x_2;0)$, $A_2(0;y_1)$, $B_2(0;y_2)$, бўлганидан, A_1 ва B_1 нуқталар орасидаги масофа $|x_2-x_1|$ га тенг, A_2 ва B_2 нуқталар орасидаги масофа $|y_2-y_1|$ га тенг. Иккинчи томондан, $A_1B_1=AC$, $A_2B_2=BC$ бўлганлигидан, $AC=|x_2-x_1|$, $BC=|y_2-y_1|$. Пифагор теоремаси бўйича $AB^2=AC^2+BC^2$, ёки $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \qquad (1)$$

формуласи келиб чикади. Шундай килиб, $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ нуқталар орасидаги масофа (1) формула билан топилади.

1.3. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Кесма ўртасининг координаталари.

Таъриф. *Агар AB кесмада жойлашган C нуқта учун*

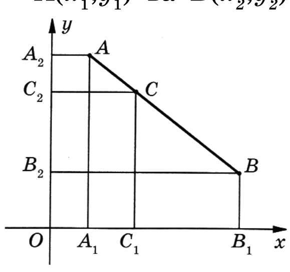
$$\frac{AB}{CB}=\lambda, \quad \lambda \neq -1 \qquad (2)$$

тенглик бажарилса, унда C нуқтаси AB кесмани □ ***нисбатда бўлади*** *деб атаймиз.*

Бунда, агар □=1 бўлса, у ҳолда $AC=BC$ тенглиги чиқади, яъни C нуқтаси AB кесманинг ўртаси бўлади.

Агар □=1 бўлса, у ҳолда A ва B нуқталари 0, AB кесмаси ҳақида . Иккинчи томондан, олинган (3) формулада нолга бўлиш амали ҳосил бўлади.

$A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ нуқталар берилсин. Энди шу AB кесмани □ нисбатда бўладиган C нуқтанинг координаталарини аниқлайлик.



111-расм

Бунинг учун A, B ва C нуқталар орқали координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, уларнинг Ox ва Oy ўқлари билан кесишиш нуқталарини мос ҳолда A_1, B_1, C_1 ва A_2, B_2, C_2 орқали белгилайлик (111-расм). C нуқтанинг номаълум координаталарини (x,y) орқали белгилайлик. Унда $A_1(x_1;\,0)$, $B_1(x_2;\,0)$, C_1(x; 0) ва $A_2(0;\,y_1)$, $B_2(0;\,y_2)$, $C_2(0;\,y)$. Шу билан, бизнинг мақсадимиз: номаълум x билан y ни x_1, x_2, y_1 ва y_2 орқали ифодалаш.

AB тўғри чизиқ билан Ox ўқини AA_1, CC_1 ва BB_1 параллель тўғри чизиқлар кесиб ўтади. Унда пропорционал кесмаларнинг хоссасига асосан: $\frac{AC}{A_1C_1} \square \frac{BC}{B_1C_1}$ ёки $\frac{AC}{BC} \square \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$.

C нуқтаси эса AB кесмани $\square$ нисбатда бўладиган бўлгани учун, $\frac{AC}{BC} = \lambda,$, яъни $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$ бўлади. Иккинчидан, $A_1C_1=x-x_1$, $B_1C_1=x_2-x$ бўлгани учун, $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda$ тенглигидан $x-x_1=\square(x_2-x)$ёки$(1+\square)x=x_1+\square x_2$тенгликларниоламиз.Бундан $x = \frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}$ формуласи чиқади. Шу каби $\frac{AC}{BC} \square \frac{A_2C_2}{B_2C_2}$

тенглигидан $y = \frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}$ формуласини оламиз. Шу билан AB кесмани $\square$ нисбатда бўладиган C($x;y$) нуқтанинг координаталарини қуйидаги формулалар бўйича топамиз:

$$x = \frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

Агар $\square$=1 бўлса, у ҳолда C нуқта AB кесманинг ўртаси бўлади. Демак, (3) формуладан кесманинг ўртаси бўладиган нуқтанинг координаталари қуйидаги формула бўйича топилади:

$$x = \frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{2}. \tag{4}$$

1-мисол. ABC учбурчакнинг учлари берилган: A(0;6), B(4;-2), C(3;8).

1. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази билан радиусини топинг.

2. Учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасини топинг.

1-мисолнинг ечилиши. ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг марказини $S(x;y)$ деб белгиласак, у ҳолда бу айлананинг радиуси $R=SA=SB=SC$ тенгликни қаноатлантиради. Бунда $SA = \sqrt{x^2+(y-6)^2}$, $SB = \sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}$, ,

$SC = \sqrt{(x-3)^2+(y-8)^2}$

бўлгани учун, $SA^2= SB^2$ ва $SA^2= SC^2$ тенгликни ҳисобга олиб,

$$\begin{cases} x^2+(y-6)^2=(x-4)^2+(y+2)^2 \\ x^2+(y-6)^2=(x-3)^2+(y-8)^2 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламадаги қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, чизиқли тенгламалар системасига келтирамиз:

$$\begin{cases} 6x+4y=37 \\ 8x-8y=-16 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 6x+4y=37 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасининг ечими x=2,9; y=4,9. Унда ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази (2,9; 4,9). R=SA тенглигидан айлананинг радиусини аниқлаймиз:

$$R=\sqrt{2,9^2+(4,9-6)^2}=\sqrt{8,41+1,21}=\sqrt{9,62}.$$

Жавоби: (2,9; 4,9) ва $R=\sqrt{9,62}$.

2-мисолнинг ечилиши. Учбурчакнинг медианалари кесишиш нуқтасида, учидан бошлаб, 2:1 нисбатда бўлинади. Айтайлик, ABC учбурчакнинг медианалари E(x_1;y_1) нуқтада кесишган ва унинг C учидан ўтказилган медианаси CD бўлса, унда D(x_2;y_2) бўлсин. Медианаларнинг хоссаси бўйича $\frac{CE}{ED}$□2 бўлади. D нуқта эса AB томонининг ўртаси бўлганликдан, (4) формула бўйича $x_2=\frac{0+4}{2}=2;$ $y_2=\frac{6-2}{2}=2.$ Яъни $D(2;\ 2)$. Энди □=2 бўлгани учун, (3) формула бўйича $x_1=\frac{3+2\cdot 2}{1+2}=\frac{7}{3};$ $y_1=\frac{8+2\cdot 2}{1+2}=4$ бўлади, яъни $E\left(\frac{7}{3};4\right)$.

Жавоби: $E\left(\frac{7}{3};4\right)$.

Т Координаталар системасини биринчи бўлиб қўллаган француз олими Рене Декарт (1596–1650) бўлганлиги учун, уни декарт координаталар системаси деб аталади. Аналитик геометриянинг асосини яратувчилар қаторида француз математиги Пьер Ферма (1601–1665) ҳам бўлган. У Тулуз шаҳрида ҳуқуқ хизматкори бўлган. Математика билан хизматдан бўш вақтларда шуғулланган ва битта ҳам мехнатини босмага бермаган. У сонлар теорияси, геометрия, чексиз кичик миқдорлар анализи билан оптика соҳалари


Рене Декарт
(1596–1650)

бўйича салмоқли натижалар олган. Бу меҳнатлари ҳақида Ферманинг замондошларига ёзган хатларидан маълум бўлган. Унинг кўплаган асарлари вафотидан сўнг, 1669 йили босмадан чиқди.

Пьер Ферма (1601–1665)

?

1. Тўғри бурчакли декарт координаталар системаси қандай ясалади?
2. Координата текислигида жойлашган нуқталарни чораклардаги ишоралари қандай?
3. а) Ox ўқидаги; б) Oy ўқидаги нуқталар координаталарининг умумий кўриниши қандай?
4. Икки нуқта орасидаги масофа формуласини ёзинг.
5. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласини ёзинг.
6. Кесманинг ўртаси қандай формула бўйича аниқланади?

МИСОЛЛАР

А

375. Декарт координаталар системасини олиб: $A(2;1)$; $B\left(\dfrac{1}{2};1\right)$; $C(1;4)$; $D(0;1)$; $E(3;2)$; $F(3;3)$ нуқталарни ясанг.

376. A ва B нуқталари мос ҳолда Ox ва Oy ўқларининг мусбат қисмида жойлашган; 1) $OA=5$; $OB=3$; 2) $OA=a$; $OB=b$ деб олиб, ABO учбурчакнинг учларининг координаталарини топинг.

377. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари Ox ва Oy ўқларида ётади, уларнинг узунликлари мос ҳолда a ва b га тенг. Агар учбурчак: 1) биринчи чоракда; 2) иккинчи чоракда; 3) учинчи чоракда; 4) тўртинчи чоракда ётса, унда унинг учларининг координаталари қандай бўлади?

378. Координаталар боши томонининг узунлиги $2a$ га тенг бўлган квадрат марказида жойлашган. Агар:

1) квадратнинг томонлари координаталар ўқларига параллель бўлса;

2) квадратнинг диагоналлари координаталар ўқларининг устида ётса, унда квадрат учларининг координаталари қандай?

379. 112-расмдаги тенг ёнли ABC учбурчакда $AB=2a$, $OC=h$ бўлса, учбурчак учларининг координаталари нимага тенг.

112-расм

380. (−3; 4) нуқтадан: 1) *Ox* ўқигача; 2) *Oy* ўқигача бўлган масофани топинг.

381. *A*(2; 3), *B*(−1; 2) деб олиб, *AB* кесмани: 1) □=1; 2) $\lambda=\frac{1}{2}$; 3) □=2; 4) $\lambda=\frac{2}{3}$ нисбатда бўладиган нуқтанинг координатасини топинг.

382. 1) *A*(2; −1), *B*(1; 2); 2) *A*(1; 5), (1; 1); 3) *A*(−3; 1), *B*(1; −2); 4) *A*(−1; 2), *B*(3; 0) деб олиб, *A* ва *B* нуқталар орасидаги масофани топинг.

383. 1) *A*(0; 1), *B*(1; -4), *C*(5; 2); 2) *A*(−4; 1), *B*(−2; 4), *C*(0; 1) деб олиб, *ABC* учбурчакнинг тенг ёнли эканини исботланг.

384. Маркази (2; −3) нуқтада бўлган ва (−2; 1) нуқта орқали ўтадиган айлананинг радиусини топинг.

385. Қуйидаги жадвални дафтарга чизиб, *AB* кесманинг ўртаси – *C* нуқтанинг координаталарини ҳисоблайдиган формуладан фойдаланиб, жадвалнинг бўш катакларини тўлдиринг:

A	(2; −3)		(0; 1)	(0; 0)	(*c*; *d*)	(3; 5)	(3*t*+5; 7)
B	(−3; 1)	(4; 7)		(−3; 7)		(3; 8)	(*t*+7; −7)
C		(−3; −2)	(3; −5)		(*a*; *b*)		

386. *ABCD* параллелограммнинг бир томондаги учлари *A*(−4; 4), *B*(2; 8) ва диагоналларининг кесишиш нуқтаси *E*(2; 2) берилган. Унинг *C* ва *B* учлари координаталарини топинг.

B

387. *A*(0; 0), *B*(5; 0), *C*(12; 3) деб олиб, *ABCD* параллелограмм *D* учининг координатасини топинг.

388. *A*(−1;2), *B*(2;5), *C*(2;1), *D*(−1;−2) деб олиб, *ABCD* тўртбурчак параллелограмм бўлишини исботланг.

389. $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6$ шартни қаноатлантирадиган ва бир тўғри чизиқда ётадиган A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 нуқталар берилган. Агар $A_2(5;5)$ ва $A_5(-1;7)$ бўлса, унда қолган нуқталарнинг координатасини топинг.

390. Учлари *A*(2;1), *B*(3; 4), *C*(1; 6) нуқталарда жойлашган учбурчак медианалари кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

391. $A(4;0)$, $B(12;-2)$, $C(5;-9)$ деб олиб, ABC учбурчакнинг: 1) периметрини; 2) AN медианасининг узунлигини; 3) ташқи чизилган айлананинг радиуси билан марказининг координаталарини топинг.

392. Учлари: 1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C(5;\ x)$; 2) $A(-4;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ x)$ нуқталари бўлган ABC учбурчакнинг тенг ёнли экани маълум бўлса, x ни топинг.

393. Ординаталар ўқидан: 1) $A(-3;\ 5)$ ва $B(6;\ 4)$; 2) $C(1;1)$ ва $D(8;1)$ нуқталардан бирдай масофада ётадиган нуқтани топинг.

394. Абсциссалар ўқидан: 1) $A(1;\ 2)$ ва $B(-3;\ 4)$; 2) $C(4;\ -3)$ ва $D(3;\ 5)$ нуқталардан бир хил узоқликда ётадиган нуқтани топинг.

395.1) $A(-3;\ -1)$, $B(1;\ -1)$, $C(1;\ -3)$, $D(-3;\ -3)$; 2) $A(4;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$, $D(0;\ 0)$ деб олиб, $ABCD$ тўртбурчакнинг тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.

396. Пифагор теоремасига тескари теорема бўйича учлари $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(9;\ 2)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканини исботланг. Унинг тўғри бурчагини кўрсатинг.

C

397. Учбурчак томонларининг ўрталари (5; 2), (2; −3), (2; 1) нуқталарда жойлашади деб олиб, шу учбурчак учларининг координаталарини топинг.

398. Учлари $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг медианалари кесишиш нуқтасининг координаталари

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

формулалар билан аниқланишини исботланг. Шу формулаларни қўллаб учлари: 1) $A(3;\ 1)$, $B(-1;\ 4)$, $C(1;\ 1)$; 2) $A(-2;\ 3)$, $B(5;\ -2)$, $C(-3;\ -1)$ нуқталарда жойлашган учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси координаталарини топинг.

399. $ABCD$ тўртбурчак берилган: $A(-1;\ 7)$, $B(5;\ 5)$, $C(7;\ -5)$, $D(3;\ -7)$; 1) AB ва CD, AD ва BC томонларининг ўрталарини қўшадиган кесмалар кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишини; 2) учлари берилган тўртбурчак томонларининг ўрталарида жойлашган тўртбурчак параллелограмм бўлишини исботланг.

400. *Ox* ўкига $A(-6;\ 0)$ нуқтада уриниб ва $B(-10;\ 4)$ нуқта орқали ўтадиган айлананинг маркази билан радиусини топинг.

401. $A(-2;\ 1)$ нуқта орқали ва координаталар ўқларига тегиб ўтадиган айлананинг маркази билан радиусини топинг.

402. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг ўртаси унинг учларидан бирдай узоқликда ётишини исботланг.

403. Параллелограммнинг барча томонлари квадратларининг йиғиндиси унинг диагоналлари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

404. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ўтказилган медиана 160 см, асоси эса 80 см. Шу учбурчакнинг қолган икки медианасини топинг.

405. Учбурчакнинг 10 см га тенг баландлиги асосини 10 см ва 4 см кесмаларга ажратади. Учбурчакнинг қолган икки томонининг кичигига туширилган медианасини топинг.

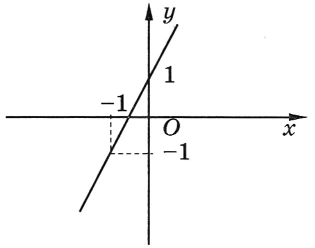
406. *ABCD* ни тўғри тўртбурчак деб олиб, текисликнинг ихтиёрий *O* нуқтаси учун $AO^2+CO^2=BO^2+DO^2$ тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

2-§. Тўғри чизиқ ва айлананинг тенгламалари

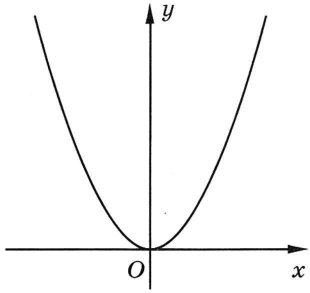
2.1. Фигура тенгламаси тушунчаси. Чизиқли тенглама.

Таъриф. *Агар x ва y ўзгарувчилари бор тенгламани L фигуранинг ҳар қандай нуқтасининг координаталари қаноатлантирса ва шу фигурада ётмайдиган ҳар бир нуқтанинг координаталари берилган тенгламани қаноатлантирмайдиган бўлса, у ҳолда бу тенгламани* ***L фигурасининг тенгламаси*** *деб аталади.*

Алгебра курсидан $y=2x+1$ тенгламанинг тўғри чизиқ бўлишини (113-расм), $y=x^2$ функциянинг графиги эса парабола бўлишини яхши биламиз (114-расм).



113-расм



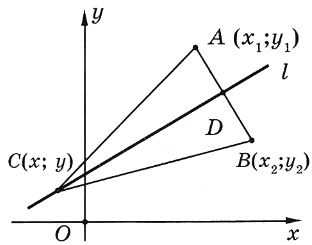
114-расм

Координаталар методи ёрдамида фигурани ўрганишда қуйидаги икки масала қаралади:

1. *Берилган фигуранинг геометрик хоссалари бўйича унинг тенгламасини топиш;*

2. *Аксинча, берилган тенгламага мос фигуранинг геометрик хоссаларини текшириш.*

Иккинчи масалани алгебра курсида берилган функцияларнинг графикларини ясашда ҳал қилганмиз, энди биринчи масалани тўғри чизиқ билан айланага қўллаб кўрайлик. Умуман, исталган тўғри чизиқни қандайдир бир кесманинг ўрта перпендикуляри сифатида олишга бўлади. Дарҳақиқат, чизиқдан ташқарида жойлашган A нуқтани олиб, шу нуқтадан l тўғри чизиққа перпендикуляр туширайлик (115-расм). Перпендикуляр билан тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини D орқали белгилайлик. l тўғри чизиқнинг иккинчи томонидан AD перпендикулярда ётадиган ва $AD=AB$ шартни қаноатлантирадиган B нуқтани олайлик. Унда l тўғри чизиқ AB кесманинг ўрта перпендикуляри бўлиши тушунарли. Сабаби, ҳар бир C□l нуқта учун икки катети бўйича (CD умумий, $AD=BD$) ACD ва BCD учбурчаклар тенг, яъни $AC=BC$. Аксинча, исталган кесманинг ўрта перпендикуляри тўғри чизиқ бўлишини яхши биламиз.



115-расм

Энди тўғри чизиқнинг шу хоссасидан унинг тенгламасини келтириб чиқаришда фойдаланайлик.

Айтайлик, l тўғри чизиқ AB кесманинг ўрта перпендикуляри бўлсин. Бунда $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. У ҳолда l тўғри чизиқнинг исталган $C(x;y)$ нуқтаси учун $AC=BC$ ёки

$AC^2=BC^2$ тенглик бажарилади. У ҳолда $C(x;y)$ нуқтанинг координаталари

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \qquad (1)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Иккинчидан, агар $E(x^2;y^2)$ нуқта l тўғри чизиқда ётмаса, унда $AE^2\square BE^2$ тенгсизлиги бажарилиб, $E(x^2;y^2)$ нуқтанинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирмайди. Демак, (1) тенглама координаталар системасида l тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлиб ҳисобланади.

Энди (1) тенгламани ихчамлайлик. Бунинг учун қавс ичидаги ифодаларни квадратга кўтариб, ўхшаш ҳадларини қўшиб, айирсак, унда тенгламани қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$ax+by+c=0, \qquad (2)$$

бу ерда

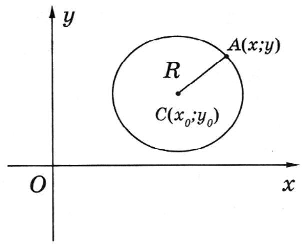
$a=2(x_1-x_2)$, $b=(y_1-y_2)$, $c=x_2^{\,2}+y_2^{\,2}-x_1^{\,2}-y_1^{\,2}$. ва $A(x_1;y_1)$ нуқталари ҳар турли нуқталар, шу сабабли a ва b коэффициентларнинг кам деганда биттаси нолдан фарқли бўлади. Шунинг билан декарт координаталар системасида тўғри чизиқнинг тенгламаси – биринчи даражали тенглама.

Агар $a=0$, $b\square 0$ бўлса, унда (2) дан $y=-\frac{c}{b}$ тенгламани оламиз. Шундан тўғри чизиқнинг устида ётадиган ҳар бир нуқтанинг ординатаси $\square\frac{c}{b}$ -га тенг эканини кўрамиз, яъни тўғри чизиқ Ox ўқига параллель. Шу каби $a\square 0$, $b=0$ бўлганда $x=-\frac{c}{a}$ тенглама ординаталар ўқига параллель тўғри чизиқни аниқлайдиганини кўрамиз. Хусусий ҳолда, $y=0$ тенглама Ox ўқининг, $x=0$ тенглама Oy ўқининг тенгламаси бўлади.

2.2. Айлананинг тенгламаси. Энди айлананинг тенгламасини унинг таърифига асосланиб, хулосалаб чиқарамиз. Умуман, ***айлана*** деб C нуқтадан (марказдан) бир хил R масофада жойлашган нуқталардан иборат фигурани айтамиз. Бундаги R айлананинг ***радиуси*** деб аталади. Демак, агар $C(x_0;y_0)$ – айлананинг маркази, R эса радиуси бўлса, унда айлана устидаги ҳар бир $A(x;y)$ нуқта учун $AC=R$ ёки $AC^2=R^2$ тенглик бажарилади. Масофа формуласи бўйича $AC=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$ бўлганликдан, айланадаги нуқталар

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (3)$$

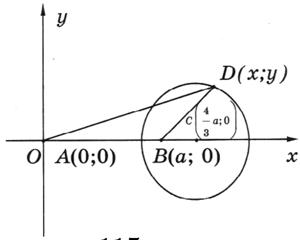
тенгламани қаноатлантиради (116-расм). Агар $B(x;y)$ нуқта айланада ётмаса, унда $R^2\square BC^2$ тенгсизлиги бажарилиб, B нуқтанинг координаталари (3) тенгламани қаноатлантирмайди. У ҳолда, (3) тенглама айлананинг тенгламаси бўлади. Шундай қилиб декарт координаталар системасида маркази $C(x_0;y_0)$ нуқтада жойлашган, радиуси эса R га тенг айлананинг тенгламаси (3) формула билан аниқланади. Агар айлана маркази координаталар бошида жойлашса, радиуси R га тенг айлананинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:



116-расм

$$x^2+y^2=R^2.$$

1-мисол. A ва B нуқталар берилган. A нуқтагача бўлган масофа B нуқтагача бўлган масофадан икки марта узун бўладиган текисликдаги барча нуқталар тўпламини аниқлаш керак.



117-расм

Ечилиши. 117-расмда кўрсатилгандай қилиб, тўғри бурчакли декарт координаталар системасини олайлик. Унда $A(0;0)$, $B(a;0)$ бўлади. Масаланинг шарти бўйича бизга керакли нуқталар тўпламига тегишли ҳар бир $D(x;y)$ нуқта учун $AD=2\cdot BD$ ёки $AD^2=4\cdot BD^2$ тенглик бажарилиши керак. $AD^2=x^2+y^2$, $BD^2=(x-a)^2+y^2$ бўлгани учун $D(x;y)$ нуқтанинг координаталари

$$x^2+y^2=4((x-a)^2+y^2) \qquad (4)$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрамиз. Бу тўпламга тегишли бўлмаган нуқталарнинг координаталари эса бу тенгламани қаноатлантирмайди. Демак, (4) тенглама бизга керакли тўпламнинг тенгламаси бўлади. Қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларини ихчамлаб, (4) тенгламани бундай шаклда ёзиш мумкин:

$$\left(x-\frac{4a}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

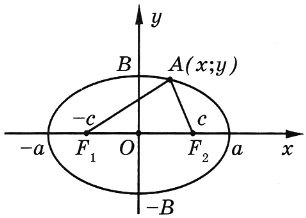
Шу билан биз излаган нуқталар тўплами маркази $C=\left(\frac{4a}{3};0\right)$ нуқтада жойлашган, радиуси $\frac{2a}{3}$ га тенг айлана бўлади.

Эслатма. Шунга ўхшаш $AD=kBD$ шартни қаноатлантирадиган барча D нуқталари тўплами маркази $\left(\frac{k^2\cdot a}{k^2-1};0\right)$ нуқтада жойлашган ва радиуси $\frac{k^2\cdot a}{k^2-1}$

га тенг айлана бўлишини исботлаш мумкин. Бунда $k\square 0$, $k>0$. Бу айлана ***Аполлоний айланаси*** деб аталади. Агар $k=1$ бўлса, унда A ва B нуқталардан бир хил узоқликда жойлашган барча D нуқталар тўпламини топиш керак. Бу тўплам AB кесманинг ўрта перпендикуляри бўлади.

3-§*. Эллипс, гипербола ва парабола тенгламалари

3.1. Эллипс тенгламаси.



118-расм

1-мисол. Текисликда берилган F_1 ва F_2 нуқталардан масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас бўлиб, $2a$ сонига тенг бўлган барча нуқталар тўпламининг тенгламасини ёзиш керак. Бу нуқталар тўплами ***эллипс*** деб аталади, F_1, F_2 нуқталарни эллипснинг ***фокуслари*** деб атаймиз.

Ечилиши. $F_1F_2=2c$ бўлса, унда $c<a$ бўлади. $F_1(-c;0)$ ва $F_2(c;0)$ бўладиган қилиб, декарт координаталар системасини танлаб олайлик (118-расм). Эллипснинг ҳар бир $A(x;y)$ нуқтаси учун $AF_1+AF_2=2a$ ёки

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$$

тенглик бажарилади. Шунинг билан бирга, эллипснинг устида ётмайдиган $B(x;\ y)$ нуқтанинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантирмайди. У ҳолда, (1) тенглама эллипснинг тенгламаси бўлади. Энди бу тенгламани

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

шаклда ёзиб, унинг икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Бу тенгламадаги қавсларни очиб, илдизли ифодани чап томонга, бошқа ҳадларни тенгликнинг ўнг томонига ўтказиб, соддалаштириб, бундай шаклга келтирамиз:

$$a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Охирги тенгламани яна квадратлаб, соддалаштириб, мана бундай шаклга келтирамиз:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

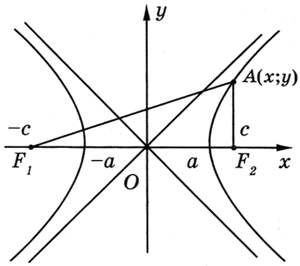
Бундан $a>c$ бўлганликдан, $a^2-c^2=b^2$ деб белгилаб, сўнгги тенгламани $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ёки

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

шаклда ёзамиз. (2) тенглама ***эллипснинг содда тенгламаси*** деб аталади. a ва b сонлари эллипснинг ***катта*** ва ***кичик ярим ўқлари*** деб аталади.

3.2. Гипербола тенгламаси.

2-мисол. Текисликнинг берилган F_1 ва F_2 нуқталардан масофалари айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас $2a$ сонига тенг бўладиган барча нуқталар тўпламининг тенгламасини ёзиш керак. Бу нуқталар тўплами ***гипербола*** деб аталади. F_1, F_2 нуқталар ***гиперболанинг фокуслари*** деб атаймиз.



119-расм

Ечилиши. 119-расмда кўрсатилгандай қилиб, декарт координата ўқларини танлаб оламиз. Унда $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ бўлади ва гиперболанинг ҳар бир $A(x;y)$ нуқтаси учун $|AF_1-AF_2|=2a$ ёки

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a \qquad (3)$$

тенглик бажарилади ва гипербола устида ётмайдиган $B(x;y)$ нуқтанинг координаталари (3) тенгламани қаноатлантирмайди. Демак, (3) тенглама – гиперболанинг тенгламаси. Айтайлик, $x>0$ бўлсин. У ҳолда (3) тенгламани бундай шаклда ёзишга бўлади:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Бу тенгламани эллипс тенгламаси сингари квадратлаб, ихчамлаб, бундай ёзишга бўлади:

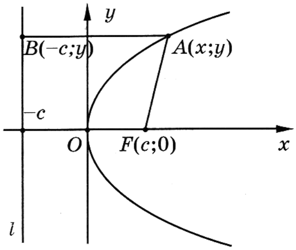
$$(c^2-a^2)x^2+a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Бунда $c>a$ бўлгани учун, c^2-$a^2=b^2$ деб белгилаб, гиперболанинг тенгламасини оламиз:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

$x<0$ бўлганда, гиперболанинг тенгламаси (4) тенглама шаклида ёзилишини кўрсатишга бўлади. (4) тенглама ***гиперболанинг содда тенгламаси*** деб аталади. $x=0$ бўлиши мумкин эмас, сабаби абсциссаси нолга тенг нуқталар (4) тенгламани қаноатлантирмайди. Бунда a гиперболанинг ***ҳақиқий ярим ўқи*** деб, b эса ***мавҳум ярим ўқи*** деб аталади.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ ва $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ тенгламалари билан аниқланадиган тўғри чизиқларни гиперболанинг ***асимптоталари*** деб atadadi. Гипербола тармоқлари $|x|$ қиймати ўсганча асимптоталарга яқинлашади, лекин уларни кесиб ўтмайди. Асимптоталар эгри графигини ясашда енгиллаштиради ва тахминан ҳисоблаш боришида тез-тез қўлланилади.



120-расм

3.3. Парабола тенгламаси.

3-мисол. l тўғри чизиқдан узоқлиги шу тўғри чизиқда ётмайдиган F нуқтагача бўлган масофага тенг бўлган барча нуқталар тўпламининг тенгламасини ёзиш керак. Бу нуқталар тўплами ***парабола*** деб аталади. l тўғри чизиқ параболанинг ***директрисаси,*** F нуқта эса ***параболанинг фокуси*** деб аталади.

Ечилиши. Декарт координаталар системасини 120-расмда кўрсатилгандай қилиб танлаймиз. $F(c,0)$ бўлса, унда параболанинг исталган $A(x;y)$ нуқтаси учун $AB=AF$ тенглиги бажарилади. Бунда B нуқтаси-A нуқтасидан l тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асоси. Бундан

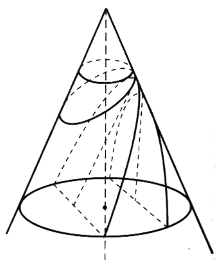
$$|x+c|=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (5)$$

тенгламани оламиз. Албатта, параболанинг устида ётмайдиган нуқталарнинг координаталари (5) тенгламани қаноатлантирмайди, яъни (5) тенглама параболанинг тенгламаси. Энди шу тенгламани квадратлаб, ихчамлайлик: $(x+c)^2=(x-c)^2+y^2$, ёки $x^2+2cx+c^2=x^2-2cx+c^2+y^2$, ё $4cx=y^2$ тенглигини оламиз. Агар $2c=p$ (фокус билан директрисанинг орасидаги масофа) деб белгиласак, унда параболанинг тенгламасини

$$y^2=2px \qquad (6)$$

шаклда ёзамиз. Бу ***параболанинг сода тенгламаси*** деб аталади. Бу ерда p – ***парабола параметри.***

T Эллипс, гипербола ва парабола атамасини биринчи бўлиб қадимги грек олими Аполлоний (эр. ав. II аср) ўзининг «Конус кесимлари» номли асарида киритган. Ҳақикатан ҳам, думалоқ конусни текислик билан кесганда пайдо бўладиган эгри чизиқларни мана бу расмдан кўришга бўлади. Агар конусни ўқига перпендикуляр ҳолатда кесса унда айлана, ўқига қандайдир бурчак



остида кесса-эллипс, ясовчисига параллель текислик билан кесса – парабола, ўқига параллель йўналишда кесса – гипербола бўлишини кўрамиз. Шу асарлардан фойдаланиб, атоқли француз математиги П.Ферма 1-даражали тенгламалар билан тўғри чизиқ, иккинчи даражали тенглама билан (икки ўзгарувчили) конус кесимлари аниқланишини кўрсатган.

?

1. Фигуранинг тенгламаси деганда нимани тушунасиз?
2. Тўғри чизиқнинг тенгламасини келтириб чиқаринг.
3. Айлананинг тенгламасини келтириб чиқаринг.
4. Эллипс нима? Унинг содда тенгламасини келтириб чиқаринг.
5. Парабола деб нимани айтамиз? Унинг содда тенгламасини келтириб чиқаринг.
6. Гипербола деб нимани айтамиз? Унинг содда тенгламасини келтириб чиқаринг.

МИСОЛЛАР

А

407. $A(-1;\ 1)$ ва $B(1;\ 0)$ нуқталар орқали ўтадиган тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

408. 1) $A(1;-1)$ ва $B(-3;2)$; 2) $C(2;5)$; $D(5;2)$ нуқталар орқали ўтадиган тўғри чизиқларнинг тенгламаларини ёзинг.

409. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқланг:

1) $x+2y+3=0$; 3) $3x-2y+6=0$; 5) $3x-4y+1=0$;
2) $3x+4y=12$; 4) $4x-2y-10=0$; 6) $x-y=0$.

410. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини аниқланг:

1) $4x+3y-6=0$ ва $2x+y-4=0$;
2) $x+2y+3=0$ ва $4x-5y+6=0$;
3) $3x-y-2=0$ ва $2x+y-8=0$;
4) $4x+5y+8=0$ ва $4x-2y-6=0$.

411. Координата ўқларига параллель ва $M(2;3)$ нуқта орқали ўтадиган тўғри чизиқлар тенгламасини ёзинг.

412. 1) $y=-3$; 2) $x=2$; 3) $y=4$; 4) $x=-7$ тенглама билан берилган тўғри чизиқларни ясанг.

413. $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 4)$, $C(-3;\ 4)$, $D(0;\ 5)$, $E(5;\ -1)$ нуқталарнинг қайси бири $x^2+y^2=25$ тенглама билан берилган айлананинг устида ётади?

414. 1) $x^2+y^2=9$; 4) $(x-1)^2+y^2=4$;
2) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; 5) $x^2+(y+2)^2=2$;
3) $(x+5)^2+(y-3)^2=25$; 6) $(x+2)^2+(y+3)^2=3$
тенгламалар билан берилган айланаларнинг марказлари координаталари ва радиусларини аниқлаб, графикларини ясанг.

415. $A(2;\ 0)$ ва $C(-4;\ 8)$ нуқталари берилган. Маркази C нуқтада бўлиб, A нуқтаси орқали ўтадиган айлананинг тенгламасини ёзинг.

416. a – эллипснинг катта ярим ўқи, b – кичик ярим ўқи ва $c^2=a^2-b^2$ деб олиб: 1) $a=10$, $b=6$; 2) $a+b=9$, $c=3$; 3) $a=6$, $c=4$ бўлгандаги эллипснинг содда тенгламасини ёзинг.

417. Қуйидаги тенгламалар билан берилган эллипс фокусларининг координаталари билан ярим ўқларининг узунлигини аниқланг:

1) $4x^2+9y^2=36$; 3) $x^2+9y^2=0$;
2) $4x^2+144y^2=576$; 4) $9x^2+25y^2-1=0$.

418. ¶+¶=1 эллипсда ётадиган ва унинг фокусларидан бир хил узоқликда жойлашган нуқтанинг координаталарини топинг.

419. $M_1(3;5)$; $M_2(-1;2)$ ва $M_3(0;3)$ нуқталарнинг қайси бири ¶+¶=1 тенглама билан берилган эллипснинг: 1) устида; 2) ичида; 3) сиртида жойлашган?

420. Қуйидаги тенгламалар билан берилган гиперболаларнинг ярим ўқлари билан фокусларининг координаталарини топинг:
1) $9x^2-4y^2-36=0$; 3) $x^2-y^2-5=0$;
2) $25x^2-16y^2-1=0$; 4) $10x^2-2y^2-10=0$.

421. 1) $y^2=6$; 3) $y^2=-2x$; 5) $2x^2-3y=0$;
2) $x^2=-4y$; 4) $x^2=y$; 6) $3y^2+16=0$.
тенгламалар билан берилган параболалар фокусларининг координаталари билан директрисаларининг тенгламаларини ёзинг:

B

422. ABC учбурчак учларининг координаталари орқали берилган $A(4;\ 6)$, $B(-4;\ 0)$, $C(-1;\ -4)$. Шу учбурчакнинг A учидан ўтказилган медианасининг тенгламасини ёзинг.

423. $ABCD$ трапеция учларининг коорданаталари орқали берилган: $A(-2;-2)$; $B(-3;\ 1)$; $C(7;\ 7)$; $D(3;\ 1)$. 1) AC ва BD диагоналлари; 2) ўрта чизиғи орқали ўтадиган тўғри чизиқларнинг тенгламасини ёзинг.

424. $x+2y=3$, $2x\text{-}y=1$ ва $3x+y=4$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишишини исботланг.

425.Учлари $A(0;1)$, $B(2;3)$ ва $C(3;2)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг медианалари кесишиш нуқтасини топинг.

426. $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(-2;4)$, $D(-5;-3)$ ва $E(-7;-2)$ нуқталарнинг қайси бири $(x+5)^2+(y-1)^2=16$ айлананинг: 1) устида; 2) ичида; 3) сиртида ётади?

427. $A(3;1)$ ва $B(-3;5)$ нуқталар берилган. Диаметри AB га тенг айлананинг тенгламасини ёзинг.

428. Маркази $C(1;2)$ бўлган ва Ox ўқига уринадиган айлананинг тенгламасини ёзинг.

429. Маркази $(-3;4)$ нуқтада бўлган ва координата боши орқали ўтадиган айлананинг тенгламасини ёзинг.

430. Қуйидаги тенгламалар билан берилган айланаларнинг марказлари координаталари билан радиусларини аниқланг.

1) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;	4) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
2) $x^2+(y+7)^2=1$;	5) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$;
3) $x^2+y^2+8x-4y+16=0$;	6) $x^2+y^2-6x+4y+4=0$.

431. 1) $M_1(2;\ \frac{\sqrt{5}}{3})$ ва $M_2(-3;0)$ нуқталари; 2) $M_1(0;3)$ ва $M_2(4;1)$ нуқталари орқали ўтадиган эллипснинг содда тенгламасини ёзинг.

432. Фокуси: 1) $F(3;0)$; 2) $F(0;5)$ нуқтада жойлашган параболанинг тенгламасини ёзинг.

433. Директрисаси: 1) $x+15=0$; 2) $y+12=0$ тенглама билан берилган параболанинг тенгламасини ёзинг.

C

434. AB тўғри чизиқда ётадиган C нуқтанинг биринчи координатаси (абсциссаси) 5 га тенг экани маълум. Агар

$A(-8;-6)$ ва $B(-31;-1)$бўлса, у ҳолда C нуқтанинг иккинчи координатасини топинг.

435. Ромбнинг 10 см ва 4 см бўлган диагоналлари координата ўқларида ётади. Ромбнинг томонлари орқали ўтадиган тўғри чизиқларнинг тенгламаларини ёзинг.

436. $A(1;4)$ нуқта орқали ўтадиган, радиуси 5 га тенг ва маркази Ox ўқида ётадиган айлананинг тенгламасини ёзинг.

437. Маркази $y=x+2$ тўғри чизиқда ётган $A(3;\ 0)$, $B(-1;\ 2)$ нуқталар орқали ўтадиган айлананинг тенгламасини ёзинг.

438. Берилган: 1) $A(1;\ -4)$, $B(4;\ 5)$, $C(3;\ -2)$; 2) $A(3;\ -7)$, $B(8;\ -2)$, $C(6;\ 2)$ уч нуқта орқали ўтадиган айлананинг тенгламасини ёзинг.

439. Учлари $A(-7;\ 5)$, $B(3;\ -1)$, $C(5;\ 3)$ нуқталарда жойлашган ABC учбурчакнинг: 1) ўрта перпендикуляри; 2) томонлари; 3) ўрта чизиқлари орқали ўтадиган тўғри чизиқларнинг тенгламаларини ёзинг.

440. $ABCD$ параллелограмм билан исталган F нуқтаси учун $(AF^2+CF^2)-(BF^2+DF^2)$ айирманинг қиймати ўзгармас ва F нуқтага боғлиқ эмаслигини исботланг.

441. 1) ABC учбурчакнинг AA_1 медианасини $AA_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{2AB^2+2AC^2-BC^2}$ формула билан ҳисоблаш мумкинлигини исботланг.

2) Шу формуладан фойдаланиб, икки медианаси тенг бўлган учбурчак тенг ёнли бўлишини исботланг.

442. A ва B нуқталар берилган: 1) $2AK^2-BK^2=2AB^2$; 2) $AK^2+2BK^2=6AB^2$ тенгликларни қаноатлантирадиган барча K нуқталарнинг геометрик ўрни қандай фигура бўлади?

443. 1) Учларининг орасидаги масофа 8 см, фокуслари орасидаги масофа эса 10 см бўлган; 2) $A(4;0)$ ва $B\left(4\sqrt{17};4\right)$ нуқталар орқали ўтадиган гиперболанинг тенгламасини ёзинг.

444. $\dfrac{x^2}{35}+\dfrac{y^2}{10}=1$ эллипс билан фокуслари умумий ва $M\left(4\sqrt{2};3\right)$ нуқта орқали ўтадиган гиперболанинг тенгламасини ёзинг.

445. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ гипербола билан фокуслари умумий $M\left(4;\ \sqrt{2}\right)$ нуқта орқали ўтадиган гипербола тенгламасини ёзинг.

446. Абсциссаси 8 га тенг M нуқта $y^2=8x$ параболада ётади деб ҳисоблаб, FM фокал радиусини топинг. Бунда *F-парабола фокуси. Бунда* ***фокал радиус*** деб парабола нуқтасидан фокусгача бўлган масофага айтилади.

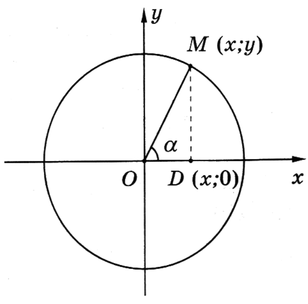
447. $x^2=-12y$ тенглама билан берилган параболанинг устида ётувчи фокал радиуси 9 га тенг нуқтанинг координаталарини топинг.

448. Ер юзаси билан ўткир бурчак ҳосил килиб улоқтирилган тош парабола бўйлаб учиб 24 м узоқликка бориб тушди. Тошнинг ер сиртидан энг баланд кўтарилган нуқтасини 6 м деб олиб, шу тошнинг учиш траекториясини топинг.

449. Параметри p га тенг параболага ABC тенг томонли учбурчак ички чизилган. Учбурчакнинг бир учи параболанинг учи билан учрашади деб олиб, учбурчакнинг томонини топинг.

4-§. 0□ дан 180□ гача оралиқдаги бурчакларнинг тригонометрик функциялари

4.1. 0□ дан 180□ гача оралиқдаги бурчакларнинг синуси, косинуси ва тангенси. Шу вақтгача биз синус, косинус ва тангенснинг қийматларини фақат ўткир бурчаклар учун аниқлаб келдик. Энди уларни 0□ дан 180□ гача оралиқдаги исталган бурчак учун аниқлайлик.



121-расм

xOy текисликдаги бирлик айлананинг (радиуси 1 га тенг) (121-расм) устида I чоракда ётадиган $M(x,y)$ нуқтани олиб, шу нуқтадан Ox ўқига перпендикуляр туширамиз. Перпендикулярнинг асоси $B(x;0)$ бўлади. Ox ўқининг мусбат йўналиши билан OM нури □ бурчак ҳосил қилади. Унда OMD тўғри бурчакли учбурчакдан

$\sin\alpha = \dfrac{MD}{OM}; \cos\alpha = \dfrac{OD}{OM}; tg\alpha = \dfrac{MD}{OD}$ тенгликларни оламиз. Бунда $MD=y$, $OD=x$ ва OM бўлганликдан,

$$\sin□=y,\ \cos□=x,\ tg\alpha = \frac{y}{x}. \qquad (1)$$

Шукаби0□□□□180□тенгсизликниқаноатлантирадиган исталган □ бурчакнинг синуси, косинуси ва тангенсини аниқлаймиз. Бошқача айтганда, агар OM нур Ox ўқининг мусбатйўналишибилана (0□□□□180□)бурчакниҳосил қилса, унда □ бурчакнинг синуси, косинуси ва тангенсини (1) формула билан аниқлаймиз. Бунда □ бурчакнинг тангенсини аниқлаганда, □ 90□ бўлишини эсга олиш керак. Агар □ 90□ бўлса, у холда x=0, y=1 . Шу сабабли, sin90□=1,cos90□=0,tg90□эсааниқланмайди,сабабисонни нолга бўлиш мумкин эмас.

Агар □=0□ бўлса, у ҳолда x=1, y=0. Шунинг учун, sin0□=0, cos0□=1, tg0□=0.

Агар □=180□ бўлса, у ҳолда x=−1, y=0. У ҳолда sin180□=0,cos180□=−1,tg180□=0.Айлананингустидаги ихтиёрий M(x;y) нуқта учун $x^2+y^2=1$ бўлганлиги учун, cos^2□+sin^2□=1 тенглик бажарилади. Ундай бўлса, 0□ дан 180□ гача оралиқдаги ихтиёрий □ бурчак учун тригонометриянинг асосий тенглиги, шунингдек, бошқа тригонометрик формулалар ҳам бажарилади:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, (\alpha \neq 90°); \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, (\alpha \neq 0°, \alpha \neq 180°).$$

0□y□1 бўлгани учун, 0□sin$y$□1 тенгсизлик, шу каби −1□x□1бўлганликдан,−1□cos$x$□1тенгсизликбажарилади.

Худдишундай0□□□□180□бўлгандаэса $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, формулалари бажарилишини кўрамиз.

4.2.Келтиришформулалари.Бизшувақтгача0□□□□90□ бўлганда sin(90□−□)=cos□, cos(90□−□)=sin□,

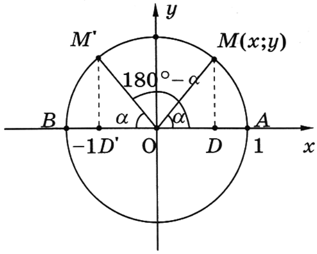
tg(90□−□)=ctg□, ctg(90□−□)= tg□ (2)

формулаларнинг бажарилишини исботладик. Шу каби бу формулаларнингихтиёрий0□□□□180□бурчакучунҳамбажарилишини исботласа бўлади. Яъни,

sin(180□−□)=sin□, cos(180□−□)=−cos□,
tg(180□−□)=−tg□ (□ 90□), ctg(180□−□)=−ctg□,
(□□0□, □□180□) (3)

формулаларнинг бажарилишини исботлайлик.

Ҳақиқатан ҳам, *OMD* ва *OM'D'* тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўткир бурчаклари ва гипотенузалари тенг (122-расм). Ундай бўлса, *OMD* ва *OM'D'* учбурчакларнинг тенглигидан *OD=OD'*, *OM=OM'*. *M'* II чоракда ётганлиги учун, *M'*(−*x*,*y*) ва *D'*(−*x*,*0*) бўлади. У ҳолда таъриф бўйича sin(180□−□)=*y* ва sin□=*y* тенгликлариданsin(180□−□)=sin□тенгликни,cos(180□−□)=−*x* ваcos□=*x*тенгликлардан эсаcos(180□−□)=−cos□тенгликни оламиз. Энди□ 90□бўлганда tg(180□−□)=sin(180□−□):cos(180□−□)=sin□:(−cos□)=−tg□,□ 0□,□ 180□бўлганда, ctg(180□−□)=cos(180□−□):sin(180□−□)=−cos□:sin□=−ctg□ тенглигини оламиз. Шуни исботлаш керак эди.



121-расм

(2) ва (3) формулаларни ***келтириш формулолари*** деб атаймиз. Уларни ихчамлаб, қуйидаги жадвал шаклида ёдда осон сақлаш мумкин.

	90□−	90□+	180□−
sin	cos □	cos □	sin □
cos	sin □	−sin □	−cos □
tg	ctg □	−ctg □	−tg □
ctg	tg □	−tg □	−ctg □

Бундаcos(90□−□)=cos(180□−(90□−□))=−cos(90□−□)=−sin□. Бошқа формулалар ҳам (90□−□) айирмаси учун шу каби исботланади.

T Олимлар тригонометрия элементларини қадимги замонлардан қўллана билган. Бизнинг эрамиздан аввалги II асрда грек олимлари айлана ватарларининг радиусга боғликлигини кўрсатадиган жадвални тузишган ($\alpha\ = 2R \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$, бунда □- ватар узунлиги, *R* – айлана радиуси, □ эса ватарга керилган марказий бурчак). Бу эса ҳақикатда синуснинг жадвали эди. Ҳинд олимлари ҳисоб ишларини енгиллаштириш учун косинусларни қўллашни таклиф қилган ва уларда етарлича катта аниқлик билан тузилган синус ва косинуслар жадвали бўлган. Бу соҳага Ўрта Осиё олимлари ҳам катта ҳисса кўшган. Масалан, ал-Хоразмийнинг (XIII а.) астрономияга оид трактатларида синус билан тангенс жадваллари учрайди. 1260 йили Насриддин ат Тусий тригонометриянинг астрономиядан мустақил, системали жадвалини таклиф қилган ва бунда «ёйнинг синуси», «бурчакнинг тангенси» тушунчалари учрайди. Европалик олимлар орасидан биринчилар қаторида тригонометрияни системали турда изоҳлаб берган немис математиги Региомонтан (1436–1476) бўлди.

Тригонометрик функцияларнинг ҳозирги номлари XVI-XVIII асрларда пайдо бўлди. Лотин тилидан таржима қилинганда «синус» термини «қавариқ» деганни билдиради. Косинус, котангенс номлари лотиннинг comp1ementom – тўлдирувчи деган сўзининг қисқаришидан «ко» қўшимчаси олинган. sin$x$ ва cos$x$ белгиланишини биринчи бўлиб И. Бернулли билан Л.Эйлер 1739 йили таклиф қилиб, ўзлари қўллай бошлаган.

?

1. 0□ дан 180□ гача оралиқдаги бурчакларнинг тригонометрик функциялари қандай аниқланади? Тригонометрик бирлик айлана дегани нима?
2. Келтириш формулаларини ёзиб кўрсатинг.

МИСОЛЛАР

A

450. Қуйидаги бурчакларнинг синусини, косинусини ва тангенсини топинг: 1) 120□; 2) 135□; 3) 150□.

451. 1) sin150□; 2) cos135□; 3) tg120□ифодаларнинг қийматини топинг.

452. 1) sin□=0,2; 2) cos □ =–0,7; 3) tg□=–0,4 деб олиб, мос □ бурчакларни ясанг.

B

453. $M_1(0;1)$, $M_2\left(0,5;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0,5\right)$, $A(1;0)$, $B(-1;0)$ нуқталари бирлик айлана устида ётишини кўрсатинг. AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4,AOB бурчакларнинг синусини, косинусини ва тангенсини топинг.

454. 1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$;; 2) cos□=–0,5; 3) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;; 4) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; бўлса, унга мос бурчак учун sin□ билан tg□-нинг қийматларини топинг.

455. 1) $\sin\square=0{,}6; 0\square<\square<90\square$; 2) $\sin\square=\frac{1}{3}$; ; $90\square<\square<180\square$; 3) $\sin\square=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $90\square<\square<180\square$ бўлса, мос$\square$ бурчаклар учун $\cos\square$ билан $\mathrm{tg}\square$ нинг қийматларини топинг.

456. 1) $\cos\square=0{,}5$; 2) $\cos\square=\square\frac{2}{3}$; ; 3) $\cos\square=-1$ бўлса, $\sin\square$-нинг қийматини топинг.

457. 1) $\sin\square=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ; 2) $\sin\square=0{,}25$; 3) $\sin\square=0$ деб олиб, косинуснинг қийматини топинг.

458. $\mathrm{tg}\square=\square\frac{5}{12}$; деб олиб, $\sin\square$, $\cos\square$-нинг қииматини топинг.

459. A нуқтанинг координаталарини: 1) (2;2); 2) (0;3); 3) $\left(\sqrt{3};1\right)$; 4) $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ деб олиб, OA нур билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакни топинг.

460. 1) $\sin\square A=\frac{2}{3}$; 2) $\cos\square A=\frac{3}{4}$; 3) $\cos\square A=\square\frac{2}{5}$ деб олиб, A бурчакни ясаб кўрсатинг.

461. Бирлик айланани кесадиган OA нур Ox ўқининг мусбат йўналиши билан $\square$ га тенг бурчак ясайди. Шундаги: 1) $OA=3$, $\square=45\square$; 2) $OA=1{,}5$, $\square=90\square$; 3) $OA=5$, $\square=150\square$; 4) $OA=1$, $\square=180\square$; 5) $OA=2$, $\square=30\square$ бўлса, бирлик айлананинг устидаги A нуқтанинг координаталарини аниқланг.

Мураккаброқ қўшимча масалалар

462. Учбурчакни унинг бир учи орқали ўтадиган икки тўғри чизиқ билан тенг катталикдаги учта бўлакка бўлинг.

463. Олдинги масаладаги учбурчакнинг ўрнига параллелограммни олиб, масалани ечинг.

464. Диагоналлари берилган барча параллелограммларнинг ичида ромбнинг юзи энг каттаси бўлишини исботланг.

465. ABC учбурчакнинг AA_1 ва BB_1 медианалари O нуқтада кесишади. P ва Q нуқталар мос ҳолда AO ва BO кесмаларнинг ўрталари. A_1B_1PQ параллелограмм бўлишини исботланг.

466. c нинг қандай қийматларида $2x+y+c=0$ тўғри чизиқ билан $x^2+y^2=4$ айлана: 1) кесишади; 2) кесишмайди; 3) уринади?

467. Тенг ёнли учбурчакнинг бир бурчаги 120□, асоси эса 10 см. Ён томонига туширилган баландлигини топинг.

468. $ABCD$ квадратда P нуқта CD томонида ётади, AK эса BAP (K□BC) бурчагининг биссектрисаси. $AP=BK+DP$ тенгликни исботланг.

469. AE ва BF- асоси AC бўлган тенг ёнли ABC учбурчакнинг баландлиги. Агар $AE:BF=\frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда асосдаги бурчакнинг косинусини топинг.

470. Тўғри бурчакли трапециянинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр. Агар трапециянинг баландлиги 2 см, катта асоси 3 см бўлса, у ҳолда унинг кичик асосини топинг.

471. Радиуслари 1, 2 ва 3 га тенг айланалар бир-бири билан ташқаридан уринган ва уларнинг ҳар қайсиси 4-айлана билан ичидан уринади. 4-айлананинг радиусини топинг.

472. Берилган учбурчак берилган бурчак остида кўринадиган текисликнинг барча нуқталари тўпламини топинг.

473. Учбурчакнинг икки томони 6 см ва 8 см. Шу томонларга туширилган медианалари ўзаро перпендикуляр. Учбурчакнинг юзини топинг.

474. ABC учбурчакнинг баландликлари O нуқтада кесишади. Агар $OC=AB$ бўлса, □C ни топинг.

475. ABC учбурчакда $MB=AC$, MB – медианаси. BA ва AC томонларининг давомидан $AD=AB$, $CE=CM$ бўладиган D ва E нуқталар олинган. DM□BE эканини исботланг.

476. Учбурчак асоси 26 см, ён томонларининг медианалари 30 см ва 39 см. Учбурчакнинг юзини топинг.

477. Учбурчак медианалари 3 см, 4 см, 5 см. Учбурчакнинг юзини топинг.

478. Қавариқ $ABCD$ тўртбурчакнинг A ва C бурчакларининг биссектрисалари B ва D бурчакларининг биссектрисалари билан тўрт нуқтада кесишади. Шу тўрт нуқта бир айлана устида ётишини исботланг.

479. Учбурчакнинг икки томони 14 см ва 35 см, уларнинг орасидаги биссектрисаси эса 12 см. Учбурчакнинг юзини аниқланг.

480. Текисликда берилган икки нуқтагача масофаларнинг нисбати $m : n$ бўладиган барча нуқталар тўпламини аниқланг.

481. Учбурчакнинг бир учидан ўтказилган баландлик билан медиана шу бурчакни ўзаро тенг уч бўлакка бўлади. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

482. ABC учбурчакнинг ичидан $S_{ABP}=S_{ACP}=S_{BCP}$ бўладиган қилиб, P нуқта олинган. P учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси бўлишини исботланг.

483. Параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтасида кесишадиган ва параллелограмм томонларига параллель икки тўғри чизиқ уни 4 бўлакка бўлади. Диагоналнинг икки томонида жойлашган бўлаклар тахминан тенг бўлишини кўрсатинг.

484. ABC учбурчакнинг A учидан BC томонини D нуқтада кесиб ўтадиган тўғри чизиқ ўтказилган. $CD{:}BC=$□, $\left(\lambda < \frac{1}{2}\right)$. BC томонининг B ва D нуқталари орасидан $CD=DE$ тенглик бажариладиган қилиб, E нуқта олинган ва шу нуқта орқали AC га параллель, AB ни F нуқтада кесиб ўтадиган тўғри чизиқ ўтказилган. $ACEF$ трапеция билан ACD учбурчакнинг юзалари нисбатини топинг.

485. Асоси AC бўлган ABC тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги AD. Агар $S_{ABD}=4$ см^2, $S_{ACD}=2$ см^2 бўлса, учбурчак томонларини топинг.

486. Параллелограмм бурчакларининг биссектрисалари кесишишидан ҳосил бўлган тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлишини ва унинг диагонали параллелограмм томонларининг айирмасига тенг эканини исботланг.

487. Қавариқ $ABCD$ тўртбурчакда □BAC=20□, □BCA=35□,□BDC=40□,□BDA=70□.Тўртбурчакдиагоналлари орасидаги бурчакни топинг.

488. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг бир ўткир бурчаги 30□ га тенг. D нуқтаси AB гипотенузанинг ўртаси, O - унга ички чизилган айлана маркази. CDO бурчакни топинг.

489. Томони a га тенг бўлган тенг томонли ABC учбурчакнинг ички нуқтасидан унинг AB, BC, CA томонларига туширилган перпендикулярлар узунлиги мос ҳолда m га, n га, k га тенг. ABC учбурчак юзининг учлари перпендикулярлар асосларида бўлган учбурчакнинг юзига нисбатини топинг.

490.Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги ва учидаги бурчакларнинг биссектрисалари ўтказилган. Агар учбурчак асосидаги бурчакнинг синуси $\frac{\sqrt{975}}{32}$ га тенг бўлса, унда биссектрисалар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

491. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 12 см, ички чизилган айлана радиуси 3 см. Учбурчакнинг юзини топинг.

492. Параллелограмм учлари унинг ичида жойлашган нуқта билан қўшилиб, параллелограммни 4 та учбурчакка бўлган. Қарама-қарши жойлашган учбурчаклар юзаларининг йиғиндиси тенг бўлишини исботланг.

493. ABC учбурчакнинг ташқарисида AB ва BC томонларига $ABFH$ ва $BCDK$ квадратлар ясалган. ABC учбурчакнинг BE медианасининг давоми BFK учбурчакнинг баландлиги бўлишини исботланг.

494. ABC учбурчакда $\square B=90\square$. AD ва AE кесмалар A бурчакни тенг уч бўлакка бўладиган қилиб, BC катетидан D ва E нуқталари олинган. Агар $AD=a$, $AE=b$ бўлса, у ҳолда $S_{ADB}:S_{AEB}$ ни топинг.

495. ABC тенг томонли учбурчакнинг ичида олинган X нуқтадан унинг томонларигача бўлган масофаларнинг йиғиндиси X нуқтага боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

496. Учбурчакнинг икки баландлиги ўзлари туширилган томонлардан кам эмас. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

497. Тенг ёнли трапециянинг юзи 5 га, диагоналларининг орасидаги ён томонига қарши ётган бурчаги $\square$ га тенг. Трапециянинг баландлигини топинг.

498. Тенг томонли ABC учбурчакнинг ички X нуқтасининг AD, BE ва CF баландликлардаги проекциялари мос ҳолда K, P ва Q. $AK+BP+CQ$ йиғинди X нуқтага боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

499. Ҳар бир учбурчакнинг медианаларининг йиғиндиси учбурчак периметридан кам, ярим периметридан эса ортиқ бўлишини кўрсатинг.

500. Юзи 5 га тенг $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг ичидан X нуқта олинган. $S\square AX\cdot CX+BX\cdot DX$ тенгсизликни исботланг.

НОМ КЎРСАТКИЧИ

МИСОЛЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

Такрорлаш: **1.** 60□, 120□. **2.** 30□. **3.** 180□. **4.** 90□. **5.** 90□. **6.** 24 см. **7.** 12 см. **10.** 100□, 80□. **14.** 180□–$\frac{\alpha+\beta}{2}$. **15.** Бўлмайди. **16.** 8 см, 24 см. **18.** 10 см, 20 см, 20 см. **20.** □*BPO* ва □*CQO* тенг ёнли. Унда *PQ=PO+OQ=PB+QC*. **21.** Параллеллик аломатини қўлланг. **23.** а) 360□; б) 540□. **24.** 120□.

I боб

1-§. **26.** 90□. **27.** 60□, 60□, 120□, 150□, 150□. **28.** 1) 1440□; 2) 1800□. **29.** 1) 8; 2) 11; 3) 24; 4) 10. **30.** 1) 10; 2) 12; 3) 36; 4) 40. **31.** 1) Мумкин, n=53. 2) Мумкин, n=22. 3) Мумкин эмас. **32.** Мумкин эмас. **33.** n – 3 диагонал ўтади; 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 7. **34.** Мумкин эмас. **35.** 1) Мумкин эмас; 2) Мумкин эмас. **37.** 1) 540□ га ортади; 2) 540□ га ортади; **38.** 1) 4; 2) 3. **39.** 1) Мумкин; 2) Мумкин эмас. **40.** *MN* ва *PK* нинг ўрта перпендикулярларини ўтказинг. **41.** 3. **42.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **43.** *AB=AD, BC=CD*. **44.** n-1. **45.** n=5. **46.** Тўғри эмас, масалан, параллелограмм. **47.** 180□. **49.** 26□, 154□, 26□, 154□. **2-§.** **51.** 1) 80□, 100□; 2) 105□, 75□, 3) 70□, 110□; 4) 60□, 120□; 5) 60□, 120□. **52.** 1) 45□, 135□; 2) 60□, 120□; 3) 100□, 80□. **53.** 1) 110□, 70□; 2) 130□, 50□; 3) 150□, 30□. **54.** 10см, 12см. **56.** 10м. **57.** 3см. **59.** 32см. **62.** 9см, 6см. **63.** 0,6м; 0,8м. **64.** 1,1см; 0,8см; 1,1см. **65.** 1) Мумкин эмас; 2) Мумкин эмас; 3) Мумкин. **71.** Томони ва икки ярим диагоналлари бўйича учбурчак ясаш керак. **73.** 10 см, 15 см. **3-§.** **83.** Йўқ. **84.** Йўқ. **87.** 60 см. **88.** 10 см, 18 см. **90.** 2) 18 см. **91.** Тўғри тўртбурчакка тўлдиринг. **92.** 20 см, 12 см. **93.** 12 см. **94.** 10 см, 25 см. **97.** 80□, 100□. **98.** 30□, 150□. **99.** 4 м. **101.** 2 м. **102.** 10 см. **109.** 45□. **110.** $d_1=\frac{4a}{4}=a$, $a=d_1=\frac{p}{2}$. Мана шундан ромб бурчаклари 60□ ва 120□ бўлиши келиб чиқади. **4-§.** **112.** Томони билан диагоналларининг ярими бўйича учбурчак ясанг. **122.** Агар *AD* тўғри чизиқ *BC* ни *E* нуқтада кесиб ўтса ва *AD* >*DE* бўлса, унда *D* диагоналларнинг кесишиш нуқтаси бўлган, бир томони BC тўғри чизиғида ётадиган ва диагоналининг ярими *DE* бўлган параллелограмм ясалса, етарли. (Агар *AD*<*DE* бўлса, унда *AD* нинг ўрнига *BD* ёки *CD* ни олиш керак). **126.** Агар *P, Q, R, S* квадрат томонларида берилган нуқталар бўлса, унда *QT*□*PR, QT=PR* бўладиган *T* нуқтани чизиш керак. Унда *ST* тўғри чизиқ квадрат томони орқали ўтадиган тўғри чизиқ бўлади. **5-§.** **127.** 1) Параллелограмм; 2) ромб; 3) тўғри тўртбурчак; 4) квадрат. **129.** Кесмаларни: 1) 3 бўлакка; 2) 5 бўлакка бўлиш керак. **130.** a+b. **131.** $\frac{p}{2}$. . **132.** 11 дм. **133.** 8 см, 7 см. **137.** p. **139.** d_1+d_2.

143. Учбурчакнинг ўрта чизиқлари. **145.** *ABC* учбурчакда *CH*-баландлик, *CD*-биссектриса бўлса, у ҳолда $\square DCH=\frac{1}{2}(\square A-\square B)$ ва *AD*:*BD*=*AC*:*BC* тенгликлари бажарилишидан фойдаланинг. **146.** *BOC* бурчак ва унинг ички *A* нуқтаси берилсин. *OA нурни ўтказиб унинг устидан OA*:*AD*=2:1бўладиган *D* нуқтани оламиз. *DEOB* ўтказамиз, *EOC*. Унда *EAOB=K ва EA:AK*=1:2. Мисолнинг 2 та ечими бор. **6-§. 147.** Мумкин эмас. **148.** 1) Мумкин эмас; 2) Мумкин. **150.** 110□, 70□. **151.** 112□, 109□. **152.** 40□, 140□, 80□. 100□. **153.** 20см. **154.** 3 м, 4 м. **155.** 10 см, 34 см. **156.** 5см. **158.** 132 см. **160.** 36 см. **161.** 15 км. **162.** 4 м, 6 м. **163.** 5 см, 9 см. **164.** 8 см, 12 см. **165.** 2 см, 5см. **166.** 3 см. **167.** 14,2 см. **170.** 60□, 120□. **174.** d_1, d_2, a+b бўйича учбурчак ясанг. **183*.** 2) Аввало $y=\frac{a\cdot b}{d}$ кесмани чизиб, ундан кейин $x=\frac{y\cdot c}{e}$ *кесмани ясаш керак.* **7-§. 185.** 1) Тенг томонли учбурчак; 2) тўғри бурчакли учбурчак; 3) тенг ёнли учбурчак; 4) тенг ёнли учбурчак. **186.** 1 см, 2 см. **188.** $\frac{S\square c}{2}$. **189.** 4см. **190.** 1)Тенг ёнли;2) тенг ёнли; **191.** 6см. **192.** Медианалар ўтказиш ксрак. **193.** 1) Мумкин эмас; 2) мумкин эмас. **195.** 1) Мумкин; 2) мумкин; 3) мумкин эмас. **198.** 9 см. **199.** 52□, 38□. **201.** 4 та айлана бор. **204.** $\square OAB=\square OBA=x$, $\square CAO=\square ACO=y$, $\square OBE=u$, $\square EBH=v$, $\square CBH=z$ деб олсак, унда $x=z$ тенглигини кўрсатиш, етарли. Ҳақиқатан ҳам, $\square A+\square B+\square C=180\square$ $x+y+y+\square OCB+\square OBC+x=180\square\square 2x+2y+2(u+v+z)=180\square$ $x+y+z+u+v=90\square$.Иккинчидан,$\square C+\square HBC=90\square$ $y+u+v+z+z=90\square$ $y+u+v+2z=90\square$.Шунинг билан $x+y+u+v+z=y+u+v+2z\square x=z$. **206.** 204-мисолга қаранг. **207.** 204-мисолга қаранг. Агар *BN* – медиана, *BE* – биссектриса, *BH* – баландлик бўлса, унда учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази *N* нуқтадан унинг томонига юргизилган (ўрта) перпендикулярда ётади. *OBE* =*EBH* бурчакни ясаб, *OA* нинг *NO* билан кесишиш *O* нуқтасини аниқлаймиз. **208.** 106-мисолга қаранг. **209.** □*AOB* ни тўғри тўртбурчакка тўлдиринг. **8-§. 211.** 1) Бўлмайди; 2) бўлади; 3) бўлади. **212.** 1) Бўлади; 2) бўлмайди. **214.** 1)Бўлади; 2) бўлмайди; 3) бўлади. **215.** 30 см. **216.** *R*, □ бўйича учбурчак ясаш керак. **220.** *R*. **222.** 56 см. **225.** Тўғри тўртбурчак. **227.** Унга ички айлана чизишга бўлади, сабаби, тенг ватарлар марказдан бирдай узоқликда ётади. **228.** Мумкин эмас. **229.** Аввало иккита кесишадиган ватарларнинг орасидаги бурчак уларга тортиладиган (вертикаль бурчакларга) икки ёйнинг ярим йиғиндиси билан ўлчанишини кўрсатинг. Агар 0 диагоналларининг кесишиш нуқтаси, *P, Q* –ён томонларининг уриниш нуқталари бўлса, унда □*POQ*=180□ бўлишини кўрсатиш, етарли. **230.** 229-мисолга ўхшаш.

II боб

1-§. 231. 1) $\frac{\sqrt{11}}{6}$;2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **233.** 1) 5; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{61}$; 4) 1,3.

235. 1) 4; 2) 12; 3) 1,2. **236.** 5 м ёки $\sqrt{7}$ м. **237.** Мумкин эмас. **238.** 1) 5 см; 2) 17 см; 3) 6,5 м. **239.** 109 см. **240.** 1) Ҳа; 2) Йўқ; 3) Ҳа; 4) Ҳа; 5) Йўқ; 6) Йўқ; 7) Ҳа. **241.** 1) Мумкин, 10, 24, 26; 2) мумкин эмас. **242.** 1) Мумкин эмас; 2) мумкин, 3, 4, 5. **243.** 3, 4, 5. **244.** 10 см, 6 см. **245.** 13 см. **246.** 4 м. **247.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **249.** 16 см. **251.** $2\sqrt{29}$ м□10,77 м. **252.** 1) c=15 см, h □$\frac{36}{5}$ см, a_c □$\frac{48}{5}$ см, b_c □$\frac{27}{5}$; 2) b = 5 см, h □$\frac{60}{13}$ см, a_c □$\frac{144}{13}$ см, b_c □$\frac{25}{13}$ см. **253.** $2\sqrt{21}$ см, 6 см. **255.** b= 90□–□; b= c □cos□; a = $a = c \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. **257.** $\sqrt{a^2 □ b^2}$. **259.** $3\sqrt{2}$ кг. **260.** 3 см. **261.** a=13 см, b=12 см, d_1=5 см, d_2= $\sqrt{601}$ см. **262.** 1) $\frac{60}{13}$ см; 2) $\frac{48}{5}$ см. **263.** 1) $\frac{168}{25}$ см; 2) $\frac{120}{17}$ дм. **266.** $\frac{85}{13}$ см, $\frac{204}{13}$ см. **267.** a – умумий ватар бўлса, у ҳолда r □$\frac{\sqrt{3}}{3}a$. . **268.** $\sqrt{178}$ см. **270.** $\frac{c}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. **2-§. 271.** 1)AC=15; $\cos A$ □$\frac{15}{17}$, $\cos B$ □$\frac{8}{17}$, $\sin A$ □$\frac{8}{17}$, $\sin B$ □$\frac{15}{17}$, tgA □$\frac{8}{15}$, tgB □$\frac{15}{8}$. **272.** Тўғри бурчакли учбурчак ясанг. **273.** $A=\frac{b}{\sin\beta}, a = b \cdot ctg\beta$, $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$. **274.** $c = \frac{b}{\cos\alpha}$, $a = b \cdot tg\alpha$, $\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha$. **275.** a=c□sin□,b=c□cos□,sin□=cos□. **276.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **277.** $tg\beta = \frac{7}{4} = 1{,}75$□□= =60□15'. **278.** 4. а) $c = \frac{3}{\sin 30°27'}$, $b = \frac{3}{tg 30°27'}$, □=59□33'. **279.** $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. **280.** 1) мусбат; 2) манфий; 3) манфий; 4) мусбат. **281.** 4) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. **282.** c □$\sqrt{565{,}85}$ □31□25', □ 117□10'. **283.** $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{31}{65} \approx 0{,}4769 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 25°30' \Rightarrow$ □ 51□. **284.** □ 29□51',□ 150□09'. **285.** □ 63□42',□=116□18'. **286.** 1) cos²□; 2) sin²□; 3) sin²□; 4) 2; 5) sin³□; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) sin5□; 8) cos²18□; 9) 1; 10) 1; 11) sin²□; 12) 1; 13) sin²□; 14) cos²□; 15) 1. **287.** 2) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $tg\alpha = \frac{8}{15}$. **288.** 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; ctg□= $\sqrt{3}$. **290.** R □$\frac{\sqrt{3}}{2}a$, r □$\frac{\sqrt{3}}{6}a$. **291.** 60□. **292.** 60□,120□. **293.** 1)□>□; 2)□<□; 3)□<□; 4)□<□; 5)

□<□; 6) □>□. **294.** $\frac{\sqrt{3}b}{3}$. **295.** 12 м, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{13}\Rightarrow\alpha\approx 45°14'$. **296.** 29 см. **297.** 87,72 м. **298.** □A=11'. 299. $2\sqrt{2}$ см. **300.** 1) 50 м; 2) 15 м, 25 м. **3-§. 301.** 4. **302.** Мумкин эмас. **303.** 1) Мумкин эмас; 2) мумкин эмас. **304.** 1) Ўтмас бурчакли; 2) тўғри бурчакли; 3) тўғри бурчакли. **307.** $AB^2=AC^2+BC^2=(AE+CE)^2+(CF+FB)^2=(AE^2+BF^2)+2(AE\cdot CE+CF\cdot BF)+(CE^2+CF^2)=AE^2+BF^2+2(ED^2+DF^2)+CD^2=AE^2+BF^2+2CD^2+CD^2=AE^2+BF^2+3\cdot CD^2$. **310.** Стюарт теоремаси бўйича $AC^2\cdot BD+BC^2\cdot AD\text{-}CD^2\cdot AB=AB\cdot AD\cdot BD$. □$ABC$ тенг ёнли: $AC=BC$, $AD+BD=AB$□$AC^2(BD+AD)-CD^2\cdot AB=AB\cdot AD\cdot BD$□$AC^2-CD^2=AD\cdot BD$□$CD^2=AC^2-AD\cdot BD$. **314.** $\frac{3}{4}$. 318. $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$ ва $m_a^2=b\cdot c$□$a^2=2(b+c-2bc)$□$a=\sqrt{2}\,|b-c|$.

III боб

1-§. 319. 1) 18,7 см²; 2) 14 м²; 3) 1 дм². **320.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{7}{8}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{2}$. **321.** 1) 1,44 см²; 2) $\frac{9}{16}$ дм²; 3) 18 м². **322.** 1) 4 см; 2) 1,5 дм; 3) $2\sqrt{3}$ м. **323.** 1) 1600 мм²; 2) 0,16 дм²; 3) 0,0016 м². **324.** 1) 27,2 см²; 2) $6\sqrt{2}$ м²; 3) 21,4 см; 4) 2,7 м. **329.** 1) 2 марта ортади; 2) 4 марта ортади;3) ўзгармайди. **330.** 1) 10 см, 25 см;2) 3 м, 3 м. **331.** 220 дона. **332.** Квадрат катта. **2-§. 341.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см². **342.** 1) 6 см²; 2) 1,8 м². **343.** 1) 1,5 см²; 2) 5$d\cdot m$; 3) $\sqrt{3}$ м²; 4) 0,08 см². **344.** 1) $\sqrt{8,4375}$ см²; 2) $0,0625\sqrt{231}$ см²; 3) $5,25\sqrt{11}$ м²; 4) 12 дм². **345.** a=30□, h_1=1 см, h_2=2,5 см. **346.** 156 см². **347.** 30□. **348.** $\frac{d_1d_2}{2}$. **349.** 1) 22,4 см²; 2) 4,6 м². **350.** 6 см, 9см. **351.** 8 см. **352.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **353.** $\frac{a^2\cdot tg\alpha\cdot tg\beta}{2(tg\alpha+tg\beta)}$. **355.** 480 см². **356.** 54 см². **358.** 120 см². **359.** $3\left(7-4\sqrt{3}\right)a^2$. **360.** $S=\frac{1}{2}\left(h\sqrt{l^2+h^2}-h^2\right)$. **361.** $\frac{\sqrt{3}\ □3}{4}a^2$. **362.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)a^2$. **363.** 1024 см². **364.** a=30 см, b=24 см. **365.** $a=\frac{S+\sqrt{S^2-16R^4}}{2R}$, $b=\frac{S-\sqrt{S^2-16R^4}}{2R}$. Кўрсатма: $a+b=\frac{S}{R}$ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+4R^2$ тенгликлардан фойдаланинг. **369.** $\frac{3}{8}a^2$. **.370.** Тенг ёнли, тўғри бурчакли учбурчак бўлишини кўрсатинг. 36 см². **371.** a=6 см асоси, b=5 см, h=4 см. **372.** $\frac{hb^2}{4\cdot\sqrt{b^2-h^2}}$.

IV боб*

1-§. 376. 1) $A(5;0)$; $B(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$. **377.** 3) $(-a;0)$, $(0;\ -b)$, $(0;\ 0)$. **378.** 1) $(a;\ a)$, $(-a;\ a)$, $(-a;\ -a)$, $(a;\ -a)$; 2) $(\sqrt{2}a\ ;0)$, $(0;\ \sqrt{2}a)$, $(-\sqrt{2}a\ ;\ 0)$, $(0;\ -\sqrt{2}a)$. **379.** $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(0;h)$. **380.** 1) 4; 2) 3. **381.** 1) $(0{,}5;2{,}5)$; 2) $\left(1;\ \frac{8}{3}\right)$; 3) $\left(0;\ \frac{7}{3}\right)$; 4) $\left(\frac{4}{5};\ \frac{13}{5}\right)$. **382.** 1) $\sqrt{10}$; 2) 4; 3) 5; 4) $2\sqrt{5}$. **384.** $4\sqrt{2}$. **386.** $C(8;0)$, $D(2;-4)$. **387.** $B(7;3)$. **389.** $A_1\left(7;\frac{13}{3}\right)$; $A_2\left(3;\frac{17}{3}\right)$; $A_4\left(1;\frac{19}{3}\right)$; $A_6\left(-3;\frac{23}{3}\right)$ **390.** $E\left(2;\frac{11}{3}\right)$. **391.** $O\left(\frac{36}{5};-\frac{21}{5}\right)$, $R=\frac{\sqrt{697}}{5}$. **393.** 1) $C(0;-9)$; 2) $E\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$, бундай нуқта йўқ. **394.** 1) $C(-2{,}7;0)$; 2) $C(-4{,}5;0)$. **396.** □B=90□. **397.** $A(5;-2)$, $B(5;6)$, $C(-1;-4)$. **398.** 1) $E\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$; 2) $E(0;0)$. **400.** $O(-6;4)$, $R=4$. **401.** $O_1(-1;-1)$, $R_1=1$; $O_2(-5;5)$, $R_2=5$. **404.** 100 см. **405.** 13 см. **2-§, 3-§. 407.** $x+2y-1=0$. **408.** 1) $3x+4y+1=0$; 2) $x+y-7=0$. **409.** 2) $A(4;0)$, $B(0;3)$; 6) $O(0;0)$. **410.** 1) $(3;-2)$; 2) $(1;-2)$; 3) $(2;4)$; 4) $(0{,}5;-2)$. **414.** 4) $O(1;0)$, $R=2$; 5) $O(0;-2)$, $R=\sqrt{2}$. **415.** $(x+4)^2+(y-8)^2=100$. **416.** 3) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. **417.** 1) $a=3$, $b=2$, $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{5};0\right)$; 4) $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{5}$, $F_{1,2}\left(\pm\frac{4}{20};0\right)$. **418.** $A(-2;0)$, $B(2;0)$. **419.** 1) M_3; 2) M_2; 3) M_1. **420.** 2) $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{4}$, $F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{41}}{20};0\right)$. **421.** 2) $y=1$, $F(0;-1)$, 6) $F\left(-\frac{4}{3};0\right)$, $x=\frac{4}{3}$. **422.** $16x-13y+14=0$. **423.** 2) $3x-5y+5=0$. **424.** (1; 1) нуқтада кесишади. **425.** $E\left(\frac{5}{3};2\right)$. **426.** 1) D-устида; 2) йўқ; 3) A, B, C, E-сиртида. **427.** $x^2+(y-3)^2=13$. **428.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **429.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **430.** 4) $C(1;-2)$, $R=5$; 5) $C(2;1)$, $R=2$; 6) $C(3;-2)$, $R=3$. **431.** 1) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$; ; 2) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; **432.** 1) $y^2=12x$; 2) $x^2=20y$. **433.** 1) $y^2=60x$; 2) $x^2=48y$. **434.** $C\left(5;-\frac{203}{23}\right)$. **436.** $(x-4)^2+y^2=25$ ва $(x+2)^2+y^2=25$. **437.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. **438.** 1) $(x+3{,}5)^2+(y-2{,}5)^2=62{,}5$; 2) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. **439.** 1) $y=\frac{5}{3}x+\frac{16}{3}$; $y=6x+10$; $y=-\frac{1}{2}x+3$. **442.** 1) Айлана; 2) айлана. **443.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$. **444.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **446.** $FM=10$. **447.** $M_{1,2}\left(\pm6\sqrt{2};-6\right)$. **448.** $(x^2-12)^2=24(y-6)$. **449.** AB □$4\sqrt{3}p$. **4-§. 450.** 1) $\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$; $tg120^\circ=-\sqrt{3}$. **451.** 1) $\frac{1}{2}$; 2)

□$\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) □$\sqrt{3}$. . **452.** 1)□11□32'; 2)□134□25'; 3)□158□12'. 454. 3) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\alpha = 1$. 455. 2) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $tg\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. **456.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) 0. **457.** 1)□0,5; 2) □$\frac{\sqrt{15}}{4}$; 3)□1. **458.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$. **459.** 3) □=120□. **461.** 1) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $A(0;1,5)$; 3) $A\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5}{2}\right)$; 4) $A(-1;\ 0)$; 5) $A\left(\sqrt{3};1\right)$.

Мураккаброқ қўшимча масалалар

462. Асосини тенг 3 бўлакка бўлиш керак. **463.** Параллелограммни 2 та учбурчакка бўлиб, аввалги масалага ўхшаб ечиш керак. **464.** d_1, d_2 – диагоналлари, □– орасидаги бурчаги бўлса, у ҳолда $S = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\alpha \le$ □0,5 $d_1 d_2$□sin90□=0,5□d_1□d_2=$S_{ромб}$□**465.** Медианалар кесишиш нуқтасида 2:1 нисбатда бўлинишини фойдаланинг. **466.** 1) $|c| < 2\sqrt{5}$ □ кесишади; 2) $|c| > 2\sqrt{5}$ □ кесишмайди; 3) $|c| = 2\sqrt{5}$ □ уринади. **467.** 5 см. **469.** $\frac{1}{4}$. **470.** $\frac{4}{3}$ см. **471.** R=6. **472.** Кўрсатма: Учбурчак томонлари орқали ўтадиган тўғри чизиқлар унинг ҳар бир учида вертикаль бурчаклар жуфтини ҳосил қилади. Бу жуфтлардаги нуқталардан учбурчак шу учига қарши ётган томони каби кўринади. **473.** 4 $\sqrt{11}$ см^2. **474.** □C=45□. **475.** AE кесмаси □BDE нинг медианаси бўлишини кўрсатинг. **476.** 720 см^2. **477.** 8 см^2. **478.** Қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180□ га тенг эканини кўрсатса, етарли. **479.** 235,2 см^2. **480.** Айлана бўлади. **481.** □A=60□, □B=90□, □C=30□. **482.** Умумий асослари бор учбурчаклар юзаларининг тенглигидан фойдаланинг. **483.** Диагонал бўйидаги параллелограмм юзаларининг йиғиндиси берилган параллелограмм юзасининг ярмига тенг эканини кўрсатинг. **484.** 4(1-□). Пропорционал кесмалар хоссасини фойдаланинг. **486.** Ички мос бурчакларнинг йиғиндиси 180□, уларнинг биссектрисалари 90□ ясаб кесишади. **487.** Бир манди аниқланмайди. Текшириш орқали 100□, 80□, 110□, 70□, 90□, 90□ вах.к бурчаклар жуфти мисол шартини қаноатлантирадиганини кўрамиз. Шуни асосланг. **488.** 15□. **489.** $\frac{a^2}{mn□mk□nk}$. **490.** $\frac{5}{8}$. **491.** 48 см^2. **493.** Ўзаро тенг параллелограмнинг томонлари ўзаро перпендикуляр. У ҳолда, уларнинг диагоналлари ҳам перпендикуляр бўлиш керак. **495.** 0,5 $(NX+PX+QX)\cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$□$NX+PX+QX=h$, яъни x га эрксиз. **496.** Берилган учбурчакнинг тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчак бўлишини кўрсатинг. 45□, 45□, 90□. **497.** $h=\sqrt{S\cdot tg\frac{\alpha}{2}}$. **498.** 495-мисолга қаранг. **499.** Учбурчаклар тенгсизлигини фойдаланинг. **500.** Пифогор теоремаси билан $\frac{a+b}{1} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (a□0, b□0) тенгсизлигини фойдаланинг.

МУНДАРИЖА