ГЕОМЕТРИЯ

Умумтаълим мактабларининг
табиий-математика йўналишидаги
11-синфи учун дарслик

11

УДК 000
ББК 000

ШАРТЛИ БЕЛГИЛАР:

— мавзунинг асосий материаллари бўйича саволлар

— амалий топшириқ

— тарихга назар ташлаш

A — I даражали топшириқлар
B — II даражали топшириқлар
C — III даражали топшириқлар
✻ — мураккаб даражали топшириқлар, математикани чуқурлаштириб ўқийдиган синфларга мўлжалланган материаллар

▲ — исботнинг ёки масалани ечилишининг боши
■ — исботнинг ёки масалани ечилишининг якуни

Геометрия. Умумтаълим мактабларининг табиий-математика йўналишидаги 11-синфи учун дарслик /

2020. – 192 бет.

ISBN

ISBN

КИРИШ

Бу дарслик янгиланган ўқув дастурига мос умумтаълим мактабларининг табиий-математика йўналишидаги 11 синфларга мўлжалланган. Планиметрия курси билан солиштирганда 10 ва 11-синфларда ўқитиладиган стереометрия курсининг алоҳида фазилатлари бор: бунда фазовий фигуралар билан уларнинг хоссалари ўрганилади. Шунинг учун ўқувчиларнинг фазовий ўйлаш қобилиятларини ривожлантириш дарсликнинг асосий мақсади бўлиб ҳисобланади. Вақтни унумли фойдаланиш учун фазовий фигураларнинг моделларини онлайн графикалик ресурсларни қўллашни таклиф қиламиз (дарсликда шу каби ресурсларга сайтлар берилган). Математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфларга таклиф қилинадиган материаллар (*) белгиси билан берилган. Шу билан бирга, **C** гуруҳининг топшириқлари ҳам асосан математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфларга мўлжалланган. Шунингдек, математикани ўзлаштиришда ўз қобилиятини кўрсатган ўқувчилар бу топшириқларни дарсдан ташқари вақтларда, мустақил ишлаганлари даркор. Бу топшириқларнинг математика олимпиадаларига ва бошқа мусобақаларга қатнашувчи ўқувчиларга фойдаси тегиши аниқ.

Бу дарсликни қўллаш жараёнида қуйидаги қоидаларга риоя қилиш даркор: ҳар бир бўлимнинг охирида мавзуни мустаҳкамлаш мақсадида таклиф қилинган топшириқларни бажариб бориш керак. Ҳар бир ўқувчи **A** гуруҳи материаллари билан амалий топшириқларни тўлиқ ўзлаштириб олгандан кейин навбати билан **B** ва **C** гуруҳларининг топшириқларига ўтгани маъқул. Шу билан бирга ҳар бўлимнинг охирида берилган назарий саволларга жавоб беришга одатланиш керак.

Изланиш билан меҳнат сўзсиз ўз маҳсулини беради!

10-СИНФДАГИ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

Бўлимни эсга тушириш жараёнида қуйидаги мақсадларга эришамиз:

– 10-синфда ўтилганларни такрорлаш;
– янги ўтиладиган материалларни яхши ўзлаштиришга тайёргарлик қилиш.

1. Фазода кесишмайдиган икки тўғри чизиқ параллел бўлади деган мулоҳаза тўғрими?

2. Фазода қандай тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар, айқаш тўғри чизиқлар дейилади?

3. Қандай тўғри чизиқ билан текисликни параллел деб атайди? Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллик белгисини таърифланг.

4. Қандай икки текисликни параллел деб атайди? Икки текисликнинг параллеллик белгисини таърифланг.

5. Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб нимага айтилади? Қандай тўғри чизиқларни ўзаро перпендикуляр деб атайди?

6. Қандай тўғри чизиқни берилган текисликка перпендикуляр деб атайди?

7. Тўғри чизиқни текисликка перпендикулярлик аломатини таърифланг.

8. Бир текисликка перпендикуляр икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлишини исботланг.

9. Нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр деб нимага айтилади? Нуқтадан текисликкача бўлган масофа қандай топилади?

10. Нуқтадан текисликка ўтказилган оғма ва унинг проекцияси деб нимага айтилади?

11. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремани таърифлаб, исботланг.

12. Қандай текисликлар перпендикуляр деб аталади?

13. Икки текисликнинг перпендикулярлик аломатини таърифлаб, исботланг.

14. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа қандай топилади?

15. Параллел проекциялашнинг қандай хоссаларини биласизлар?

16. Фазовий фигураларни қоғозда тасвирлаш қоидаларини айтинглар. Мисол келтиринглар.

17. Ортогонал проекция дегани нима? Кўпбурчакнинг ортогонал проекциясининг юзаси қандай топилади?

18. Фазодаги вектор деб нимага айтилади? Улар устида қандай амаллар қўлланилади? Уч векторни қўшишнинг параллелепипед қоидасини айтинг.

19. Фазодаги нуқта билан векторнинг координаталари қандай белгиланади?

20. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб нимага айтилади? Векторлар орасидаги бурчак қандай топилади?

21. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласини ёзинг, унинг маъносини тушунтиринг.

A

0.1. AB кесма ва у билан кесишмайдиган α текислиги берилган. Кесма учларидан юргизилган параллел тўғри чизиқлар α текислигига перпендикуляр ва уни мос равишда A_1 ва B_1 нуқталарда кесиб ўтади:

1) $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 7$ см; 2) $AA_1 = 12$ мм, $BB_1 = 8$ мм бўлса, AB кесмасининг ўртасидан α текислигигача бўлган масофани топинг.

0.2. CD кесмасининг ўртаси — O нуқтаси. C, O ва D нуқталаридан ўтувчи ўзаро параллел тўғри чизиқлар α текислигини мос равишда C_1, O_1 ва D_1 нуқталарида кесиб ўтади, C ва D нуқталари эса α текислигининг бир томонида жойлашган. 1) $CC_1 = 3$ м, $DD_1 = 11$ м бўлса, OO_1-ни;

2) $OO_1 = 12$ см, $DD_1 = 4$ см бўлса, CC_1-ни топинг.

0.3. Аввалги масалани C ва D нуқталари α текислигининг ҳар хил томонида жойлашган деб олиб ишланг.

0.4. P ва Q нуқталари α текислигида, Q ва R нуқталари β текислигида, P, Q, R нуқталари γ текислигида ётади. Шунга мос чизмани чизинг.

0.5. α, β, γ текисликлари жуфт-жуфти билан a, b, c тўғри чизиқлари бўйлаб кесишади ва $a \| b$, $b \| c$. Шунга мос чизмани чизинг.

0.6. $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$ шартини қаноатлантирадиган OA, OB ва OC тўғри чизиқлари берилган. $OA = OB = OC$ бўлса, ABC учбурчакнинг бурчакларини топинг.

0.7. OA ва OB кесмаларининг ўрталари – мос равишда A_1 ва B_1. α текислиги A_1 ва B_1 нуқталари орқали ўтади. $AB \| \alpha$ эканлигини кўрсатиб, 1) $AB = 8$ см бўлганда A_1B_1-ни; 2) $A_1B_1 = 3$ м бўлганда AB-ни топинг.

0.8. Параллел α ва β текисликлари AOB бурчагининг OA томонини A_1, A_2 нуқталарда, OB томонини B_1, B_2 нуқталарида кесиб ўтади. $OB_1 = 12$ см, $OB_2 = 18$ см, $A_2B_2 = 54$ см бўлса, A_1B_1-ни топинг.

0.9. 0.6-масаланинг шартида 1) $OA = 3$ см, $AB = 5$ см, $OC = 3$ см; 2) $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$. BC кесманинг узунлигини топинг.

0.10. A ва B нуқталаридан α текислигига туширилган перпендикулярларнинг асослари мос равишда A_1 ва B_1 нуқталари.

AB кесма билан α текислиги кесишмайди. 1) $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 14$ см, $AB = 13$ см бўлса, A_1B_1-ни; 2) $AA_1 = 27$ мм, $BB_1 = 20$ мм, $A_1B_1 = 24$ мм бўлса, AB-ни топинг.

0.11. A нуқтасидан α текислигига AB перпендикуляр билан AC оғма туширилган. 1) $AB = 6$ м, $AC = 10$ м бўлса, оғманинг проекциясини; 2) $AB = 24$ см, $BC = 10$ см бўлса, оғманинг узунлигини топинг.

0.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед берилган. 1) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{D_1B_1}$ йиғиндисига тенг ва учлари параллелепипед учларида жойлашган векторларни кўрсатинг.

0.13. A, B, C нуқталари бир тўғри чизиқда ётади. Шу тўғри чизиқдан ташқарида жойлашган ихтиёрий O нуқтаси учун $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ векторлари компланар бўлишини кўрсатинг.

0.14. Аввалги масала шартида 1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$ деб олиб, $\overrightarrow{OC}$ векторини $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ векторлари орқали ифодаланг.

B

0.15. B нуқта OA кесмани 1:3 нисбатда бўлади. A нуқтаси орқали BC кесмага параллел α текислиги ўтказилган. OC тўғри чизиғи α текислигини қандайда бир D нуқтасида кесиб ўтишини кўрсатиб, $BC = 12$ см бўлганда AD-ни топинг.

0.16. O нуқтаси $ABCD$ квадрат шаклидаги текисликдан ташқарида жойлашган ва шу текисликка параллел α текислиги OA, OB, OC, OD кесмаларини мос равишда A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталарида кесиб ўтади. Агар $OA_1 : OA = 1 : 3$ ва $AB = 12$ см бўлса, $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакнинг периметрини топинг.

0.17. $ABCD$ параллелограммнинг ҳар бир учи орқали ўтувчи ўзаро параллел тўғри чизиқлар қайсибир α текислигини мос равишда A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталарида кесиб ўтади ва A, B, C, D нуқталари α текислигининг бир қисмида жойлашади. 1) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 5$ м, $CC_1 = 6$ м; 2) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ бўлса, DD_1-ни топинг.

0.18. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг A учидан унинг текислигига AK перпендикуляри чиқарилган ва K нуқтасидан B, C ва D нуқталаригача бўлган масофа мос равишда 6 см, 9 см ва 7 см. AK-ни топинг.

0.19. Текисликдан 8 см узоқликда жойлашган нуқтадан шу текислик билан 45°ли бурчак ҳосил қилувчи иккита оғма туширилган. Агар оғмаларнинг проекциялари орасидаги бурчак 120°га тенг бўлса, оғма асослари орасидаги масофани топинг.

0.20. ABC учбурчакда $AC = BC = 10$ см, $\angle B = 30°$. BD тўғри чизиқ ABC текислигига перпендикуляр ва $BD = 5$ см. D нуқтасидан

AC тўғри чизиққача бўлган масофани ва B нуқтасидан ADC текислигигача бўлган масофани топинг.

0.21. K нуқтаси — ABC учбурчагининг AA_1 медианасининг ўртаси, O — фазонинг ихтиёрий бир нуқтаси. $\overrightarrow{OK}$ векторини $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ векторлари орқали ифодаланг.

0.22. $OABC$ — қирраси $\sqrt{2}$ га тенг мунтазам тетраэдр, K — OA кесмасининг ўртаси. $\overrightarrow{BK}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторларининг скаляр кўпайтмасини топинг.

0.23. $\vec{m}$, $\vec{n}$ ва $\vec{k}$ векторлари $\vec{m} - \vec{n} - \vec{k} = \vec{0}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, $|\vec{k}| = 7$ шартларини қаноатлантиради. $\vec{n} \cdot \vec{k} - \vec{m} \cdot \vec{n} - \vec{m} \cdot \vec{k}$ ифоданинг қийматини топинг.

0.24. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлари жуфт-жуфтдан перпендикуляр ва $|\vec{a}| = a$. $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{c})$ скаляр кўпайтмасининг қийматини топинг.

C

0.25.* ABC учбурчак учларидан бир хил масофада жойлашган фазодаги нуқталар тўпламини аниқланг.

0.26. Иккиёқли бурчакнинг ҳар хил ёқидан олинган A ва B нуқталаридан унинг қиррасига AC ва BD перпендикулярлар ўтказилган ва $AC = BD$. У ҳолда $\angle ABC = \angle BAD$ тенглик бажарилишини исботланг.

0.27. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг диагонали $2\sqrt{3}$ га тенг. P, Q ва R нуқталари мос равишда BB_1, B_1C_1 ва C_1D_1 қирраларининг ўрталари. Кубни PQR текислиги билан кесганда ҳосил бўлган кўпбурчакнинг периметрини топинг.

0.28.* $OABC$ учбурчакли пирамиданинг асосига параллел ўтказилган текислик, унинг OA, OB ва OC қирраларини мос равишда A_1, B_1 ва C_1 нуқталарида кесиб ўтади. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар медианаларининг кесишиш нуқталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ, унинг O учи орқали ўтишини исботланг.

0.29. ABC учбурчакнинг юзаси $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ формуласи орқали ифодаланишини исботланг.

0.30.* Скаляр кўпайтманинг ёрдамида $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$ ифодасининг энг катта қийматини топинг ва у x-нинг қандай қийматида энг катта қийматга эга бўлади?

I бўлим. КЎПЁҚЛАР

Бу бўлимда сизлар геометриянинг энг қизиқарли мавзуларидан бири кўпёқлар билан танишасизлар. Кўпёқларни ҳаётимизда жуда кўп учратамиз. Улар – кўркам бинолар. Шу биноларнинг элементлари юзалари билан узунликлари, ҳажмларини ҳисоблашни шу бўлимда ўқиб ўрганасизлар.

Бўлимда кўриб чиқиладиган мавзулар:

1.1. Кўп ёқли бурчак, геометрик шакл ҳақида тушунча, кўпёқ тушунчаси

1.2. Призма ва унинг элементлари, призманинг турлари. Призманинг ёйилмаси, ён сирт ва тўла сирт юзалари

1.3. Пирамида ва унинг элементлари. Мунтазам пирамида. Кесик пирамида. Пирамиданинг, кесик пирамиданинг ёйилмаси, ён сирт ва тўла сирт юзалари

1.4. Кўпёқларнинг текислик билан кесимлари. Мунтазам кўпёқлар

Нур-Султан шаҳрида жойлашган Мустақиллик саройи – Қозоғистон халқларининг бирдамлиги ва дўстлигининг белгиси. Пирамиданинг асоси – ўлчами (62×62) м бўлган квадрат, баландлиги ҳам 62 м. Бинонинг ташқи қисми шиша ва тош плиталар билан қопланган. Бу бўлимни ўқиб ўрганиш давомида пирамиданинг ташқи ён сирт юзасини қандай топилишини ўрганиб оласизлар.

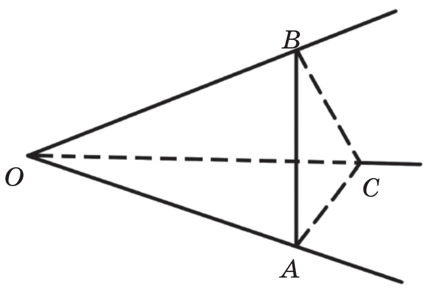
1.1 Кўп ёқли бурчак, геометрик жисм ҳақида тушунча. Кўпёқ тушунчаси

Бу бўлимда кўпёқ тушунчаси билан танишасизлар. Бўлим сўнгида:

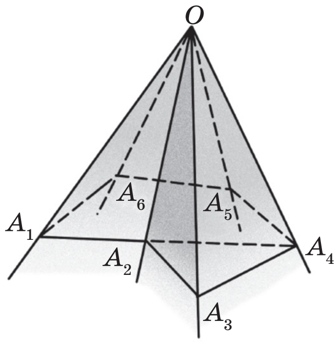
- **кўп ёқли бурчак билан геометрик жисм тушунчаларини ўрганасизлар, уларни текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **кўпёқнинг таърифи ва унинг элементларини ўрганасизлар;**
- **кўпёқларнинг элементларини топишга доир масалалар ечасизлар.**

1.1.1. Уч ёқли ва кўп ёқли бурчаклар

Фазода O нуқтасидан чиқувчи, бир текисликда ётмайдиган OA, OB ва OC нурларни олайлик. Бу нурлар AOB, BOC ва COA ёйиқ бурчакларни ифодалайди. Фазонинг шу ёйиқ бурчаклари билан чегараланган бўлагини ***уч ёқли бурчак*** деб атайди (1.1-расм). AOB, BOC ва COA бурчаклари билан чегараланган текислик қисмларини уч ёқли бурчакнинг ***ёқлари*** деб, шу бурчакларнинг томонлари уч ёқли бурчакнинг ***қирралари*** деб аталади. O нуқтаси уч ёқли бурчакнинг ***учи*** деб аталади.

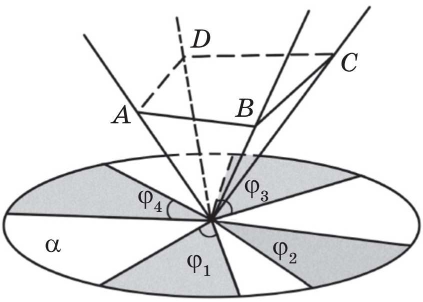


1.1-расм

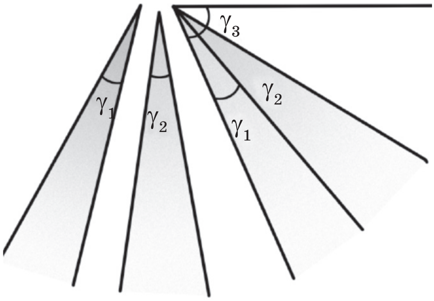


1.2-расм

Шунга ўхшаш ***кўп ёқли*** бурчак ҳақидаги тушунча ҳам ясси бурчаклардан тузилган фигура сифатида таърифланади. Кўп ёқли бурчак – умумий O учи орқали ўтказилган нурлар орасидаги n ($n \geqslant 0$) бурчакдан ташкил топган фигура. Ёқларининг сонига қараб уч ёқли, тўрт ёқли, беш ёқли ва шу тариқа ***n ёқли*** бурчаклар қаралади. Масалан, 1.2-расмда олти ёқли бурчак тасвирланган. Агар кўп ёқли бурчак унинг ҳар бир ёқи орқали ўтувчи текисликнинг бир томонида жойлашган бўлса, у ҳолда бундай кўп ёқли бурчакка ***қавариқ кўп ёқли бурчак*** деб аталади. Масалан, ихтиёрий уч ёқли бурчаклар қавариқ бўлади, ёқларининг сони учдан кўп бўлган кўп ёқли бурчакларниг ҳар бири ҳам бўлавермайди. 1.2-расмда тасвирланган олти ёқли бурчак қавариқ эмас, чунки унинг A_1OA_2 ёқи орқали ўтувчи текислик бу фигурани ички нуқталари орқали кесиб ўтади.



1.3-расм

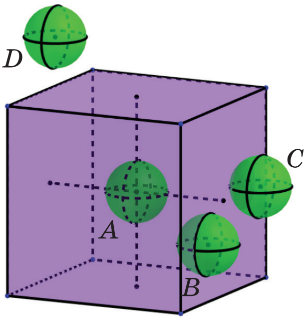


1.4-расм

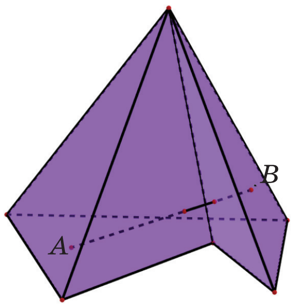
Ихтиёрий қавариқ кўп ёқли бурчакнинг учидаги ёйиқ бурчакларининг йиғиндиси 360° дан кичик ва ҳар бир ёйиқ бурчак бошқа ёйиқ бурчакларининг йиғиндисидан кичик бўлади. Буни 1.3 ва 1.4-расмлардан кўрса бўлади. 1.3-расмда *OABCD* тўрт ёқли бурчакни ҳар бир қирраси бўйича кесиб, α текислигига жойлаштирсак, бу тўрт ёқли бурчакнинг ёқлари α текислигини тўлиқ қамрамаслигини, яъни $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + + \varphi_4 < 360°$ эканлигини кўрамиз. 1.4-расмда $\gamma_1 + \gamma_2 < \gamma_3$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи γ_1, γ_2 ва γ_3 бурчаклари томонларини бирлаштириш орқали уч ёқли бурчак ҳосил қилиш мумкин эмас. Уч ёқли бурчак ҳосил қилиш учун $\gamma_3 < \gamma_1 + \gamma_2$ шарти бажарилиши керак.

1.1.2. Геометрик жисм тушунчаси

Тўпламлар назариясидан керакли маълумотларни эсга олайлик. Бунда геометрик фигураларни унинг таркибига кирадиган нуқталар тўплами қаторида қараймиз. *A* нуқтаси билан *Ф* фигураси берилсин. Агар барча нуқталари *Ф* фигурасига тегишли бўлган, маркази *A* нуқтасида бўлган шар топилса, у ҳолда *A* нуқтаси *Ф* фигурасининг *ички нуқтаси* деб аталади. Маркази *A* нуқтасида жойлашган ихтиёрий шарнинг *Ф* фигурасига тегишли бўлган ва *Ф* фигурасига тегишли бўлмаган нуқталари бор бўлса, *A* нуқтаси *Ф* фигурасининг чегаравий нуқтаси деб аталади. Барча нуқталари *Ф* фигурасига тегишли эмас бўлган, маркази *A* нуқтасида жойлашган шар топилса, *A* нуқтаси *Ф* фигурасининг *ташқи нуқтаси* деб аталади.



1.5-расм



1.6-расм

Φ фигурасини радиуси *R*-га тенг шар ичига тўлиқ жойлаштириш мумкин бўлса, бундай фигурани ***чегараланган фигура*** деб атайди. *Φ* чегараланган фигурасининг барча чегаравий нуқталар тўплами унинг ***тўла сирти*** деб аталади, *Φ* фигурасининг барча ички нуқталар тўплами билан унинг сиртида жойлашган нуқталар тўпламини ***геометрик жисм*** деб атайди. Масалан, 1.5-расмда *A* нуқтаси – кубнинг ички нуқтаси, *B*, *C* – унинг чегаравий нуқталари, *D* – сиртқи нуқтаси. Кубнинг тўла сирти олтита квадратдан ташкил топган.

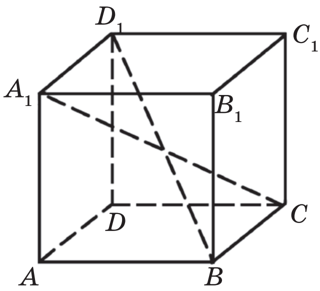
Шаклнинг ихтиёрий иккита ички нуқтасини бирлаштирувчи кесмасининг ҳамма қисми (тўлиқ) шу жисмда ётса, бундай жисмга ***қавариқ жисм*** деб аталади. Масалан, пастки синфлардан маълум бўлган параллелепипед, учбурчакли пирамида, цилиндр, куб, шар, конус ва шу каби фигуралар – қавариқ жисмлардир. 1.6-расмда тасвирланган жисм қавариқ эмас, чунки унинг ичида жойлашган *A* ва *B* нуқталарини бирлаштирувчи *AB* кесмасининг ҳамма қисми (тўлиғи билан) бу жисмда ётмайди.

1.1.3. Кўпёқ тушунчаси

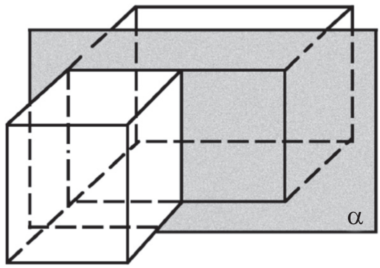
Сирти чекли миқдордаги ясси текисликлардан иборат геометрик жисм ***кўпёқ*** дейилади. Кўпёқнинг сиртидаги ҳар бир кўпбурчакни унинг ***ёқи***, шу кўпбурчакнинг томонини кўпёқнинг ***қирраси*** дейилади. Кўпёқ ёқларининг (кўпбурчакларнинг) учларини кўпёқнинг ***учлари***, бир ёқига тегишли бўлмаган иккита учини бирлаштирувчи кесмага ***диагонали*** деб аталади. Масалан, 1.7-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб тасвирланган. Унинг 6 та ёқи, 12 та қирраси ва 8 та учи бор. A_1C ва BD_1 кесмалари – унинг диагоналлари.

Геометрик жисмлар каби кўпёқлар ҳам қавариқ ва ноқавариқ бўлиб иккига бўлинади. Агар кўпёқнинг ўзи унинг сиртидаги ҳар бир кўпбурчак текислигининг бир томонида ётса, бундай кўпёқ ***қавариқ кўпёқ*** дейилади. Акс ҳолда ***ноқавариқ кўпёқ*** дейилади. Мактаб курсида бизлар асосан қавариқ кўпёқларни қараймиз.

Масалан, 1.8-расмда тасвирланган кўпёқ ноқаварик, чунки унинг битта ёқи орқали ўтувчи α текислиги кўпёқни икки қисмга ажратиб турибди.



1.7-расм



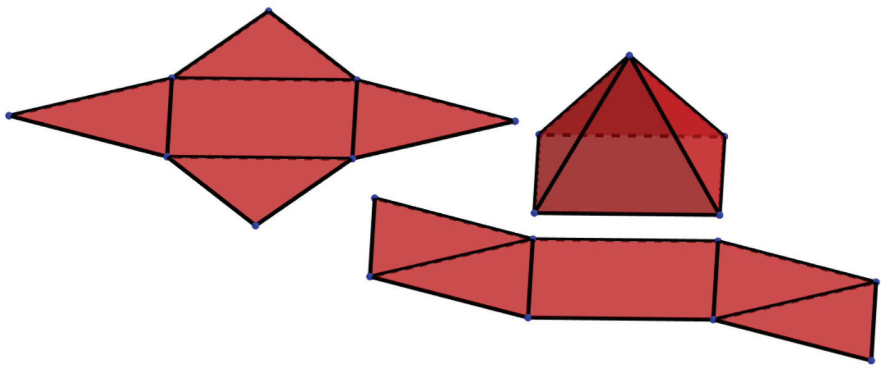
1.8-расм

Кўпёқни унинг бир нечта қирралари орқали кесиб, чиққан кўпбурчакларнинг бирлашишини бир текисликда жойлаштирганда ҳосил бўлган фигурага берилган кўпёқнинг ***ёйилмаси*** деб аталади. Битта кўпёқни турли усуллар билан кесиб, унинг турли ёйилмаларини олишга бўлади. Масалан, 1.9-расмда тўртбурчакли пирамиданинг турли ёйилмалари тасвирланган. Кўпёқнинг барча ёқлари юзаларининг йиғиндиси унинг ***тўла сирт юзаси*** дейилади. Уни $S_{\text{т.с.}}$ орқали белгиланади. Энди бир нечта масалалар келтирайлик.

1-масала.

▲ Масалан, қирраси 2 см бўлган кубнинг тўла сирт юзаси 24 см^2 га тенг. Чунки кубнинг битта ёқининг юзаси $(2 \cdot 2)$ см$^2 = 4$ см^2. Кубнинг худди шундай ўзаро тенг 6 та ёқи бор. Бундан унинг тўла сирт юзаси:

$$S_{\text{т.с.}} = 6 \cdot 4 \text{ см}^2 = 24 \text{ см}^2. \blacksquare$$

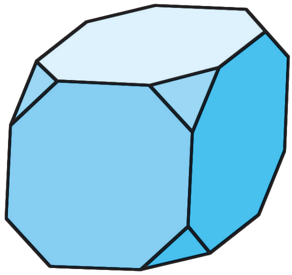


1.9-расм

Умуман олганда, ихтиёрий кўпёқ учун юқори математика курсида $n-m+k=2$ тенглиги ўринли (**Эйлер теоремаси**). Бу ерда n – кўпёқ учларининг, m – қирраларининг, k – ёқларининг сони.

2-масала.

Кўпёқнинг 14 та ёқи бор: 8 та ёқи – учбурчак, 6 та ёқи – саккиз бурчак (1.10-расм). Кўпёқнинг учлари сонини топиш керак.



1.10-расм

▲ 8 та учбурчак билан 6 та саккиз бурчак қирраларининг сони: $8 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 72$. Кўпёқнинг ҳар бир қирраси иккита ёқига умумий, демак, кўпёқ қирраларининг сони 72 нинг ярми 36 га тенг. Эйлер теоремаси бўйича:

$$n-m+k = 2 \Rightarrow n-36+14=2 \Rightarrow n=24.$$

Кўпёқнинг 24 учи бор. ■

• ***Қўшимча электрон ресурслар***

http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/9ec3aaf6-95cd-35b0-b94e-9138604828c7/00145619754673487.htm

1. Қандай бурчак уч ёқли (кўп ёқли) бурчак дейилади?
2. Кўп ёқли бурчакнинг қандай элементлари бор?
3. Кўп ёқли бурчакнинг учидаги ёйиқ бурчагининг йиғиндиси қандай бўлиши керак? Жавобингизни асосланг.
4. Фазовий фигурасининг ички (ташқи, чегаравий) нуқтаси деб нимага айтилади?
5. Геометрик жисм деб нимани тушунасиз?
6. Қаварик жисм (кўпёқ) деб қандай жисмга (кўпёқларга) айтилади?
7. Қандай жисмларга кўпёқлар дейилади? Кўпёқларнинг қандай элементларини биласиз? Мисол келтиринг.
8. Кўпёқ ёйилмаси деганда нимани тушунасиз? Мисол келтиринг.
9. Кўпёқнинг тўла сирт юзаси қандай топилади?

МАСАЛАЛАР

А

Амалий топшириқ

1.1. Тўртта ёқи мавжуд кўпёқ ясанг. Унинг нечта қирраси ва учи бор?

1.2. Картон қоғоздан уч ёқли (тўрт ёқли, беш ёқли) бурчак ясанг. Унинг барча элементларини айтиб беринг.

1.3. Қирраси 5 см бўлган кубнинг ихтиёрий бир ёйилмасини ясанг ва унинг ёрдамида кубни ясанг. Жами кубнинг нечта ёйилмаси бор? Шу ёйилмаларнинг барча турларини чизиб кўсатинг.

1.4. Футбол тўпининг сирти 20 та мунтазам олти бурчак, 12 та мунтазам беш бурчакдан, жами 32 та ёқдан ташкил топган кўпёққа ўхшайди (1.11-расм). Бу кўпёқнинг нечта учи бор?

1.11-расм

1.5. Учидаги ёйиқ бурчакларининг ўлчами 1) $140°$, $86°$ ва $38°$; 2) $110°$, $80°$ ва $42°$; 3) $160°$, $130°$ ва $82°$; 4) $160°$, $130°$ ва $80°$ бўлган уч ёқли бурчак ясаш мумкинми?

1.6. Учидаги ёйиқ бурчакларининг ўлчами 1) $30°$, $80°$, $90°$ ва $160°$; 2) $150°$, $90°$, $90°$ ва $20°$; 3) $150°$, $60°$, $50°$ ва $30°$; 4) $170°$, $100°$, $90°$ ва $80°$ бўлган тўрт ёқли бурчак ясаш мумкинми?

1.7. 6 та учи ва 8 та ёқи бўлган кўпёқнинг нечта қирраси бор?

1.8. n, m ва k кўпёқнинг мос равишда учлари, қирралари ва ёқларининг сонини билдиради. Берилган маълумотлар бўйича ўша учликнинг номаълум ўлчамларини топинг: 1) $n=4$, $m=6$; 2) $n=8$, $k=6$; 3) $m=18$, $k=8$.

1.9. Кубнинг берилган қирраси бўйича унинг тўла сирт юзасини топинг: 1) 3 см; 2) 6 дм; 3) 12 м; 4) 20 см.

1.10. Кубнинг қиррасини 30% га орттирсак, унинг тўла сирт юзаси неча фоизга ортади?

A. 30%; B. 69%; C. 119.7%; D. 169%.

1.11. Кубнинг тўла сирт юзаси бўйича унинг қирраси узунлигини топинг: 1) 24 м^2; 2) 54 см^2; 3) 150 дм^2; 4) 294 мм^2.

1.12. Қирраси 1) 2 см; 2) 4 м; 3) 5 дм; 4) 12 мм бўлган мунтазам тетраэдрнинг (барча ёқлари мунтазам учбурчак бўлган учбурчакли пирамида) тўла сирт юзасини топинг.

1.13. Уч ёқли бурчакнинг учидаги икки ёйиқ бурчаги $45°$ га тенг. Шу ёйиқ бурчакларнинг ёқлари ўзаро перпендикуляр. Учинчи ёйиқ бурчакнинг ўлчамини топинг.

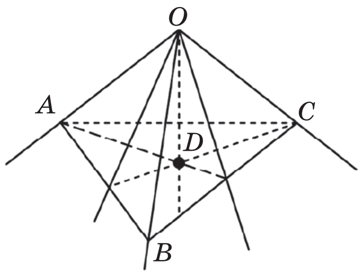
1.14. Учи O нуқтасида жойлашган $OABC$ уч ёқли бурчакнинг барча ёйиқ бурчаклари $90°$ га тенг. $OA=1$, $OB=1$ ва $OC=2$ деб, 1) OAB; 2) OBA; 3) OCA; 4) OCB бурчагини топинг.

B

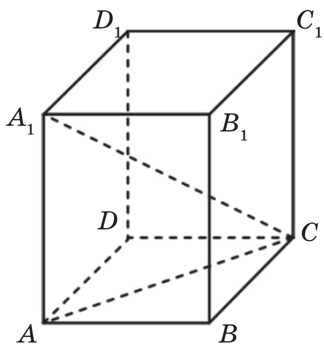
1.15. Текисликдан ташқарида жойлашган нуқтадан шу текисликка $60°$ ва $20°$ ли бурчак ясайдиган оғма туширилган. Шу оғмалар орасидаги бурчак қандай бўлиши мумкин?

1.16. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг асослари – диагоналлари 10 см, 24 см бўлган ромб. Параллелепипеднинг баландлиги 10 см. Параллелепипеднинг 1) диагонал кесимларини; 2) тўла сирт, юзасини топинг.

1.17. $OABC$ уч ёқли бурчакда $\angle BOC=90°$, $\angle AOB=\angle AOC=60°$, $OA=a$: 1) A нуқтасидан BOC текислигигача бўлган масофани; 2) OA қирраси билан BOC текислиги орасидаги бурчакни топинг.



1.12-расм



1.13-расм

1.18. $OABC$ уч ёқли бурчакда $\angle BOC = 90°$, $\angle AOB = \angle AOC = 60°$, $OA = OB = OC$. ABC ва BOC текисликларининг ўзаро перпендикуляр бўлишини исботланг.

1.19. Барча ёйиқ бурчаклари 90° га тенг уч ёқли бурчакнинг ички нуқтасидан унинг ёқларигача бўлган масофа 5 см, 7 см ва 9 см. Шу нуқтадан уч ёқли бурчакнинг учигача бўлган масофани топинг.

1.20. $OABC$ уч ёқли бурчакнинг барча ёйиқ бурчаклари 90°. Унинг ички D нуқтасидан ёқларигача бўлган масофалар ўзаро тенг. $OD = 4\sqrt{3}$ см деб, D нуқтасидан ёқларигача бўлган масофаларни топинг (1.12-расм).

1.21. 1.18-масала шартини $OA = OB = OC = a$ деб, $OABC$ пирамиданинг тўла сирт юзасини топинг.

1.22. Ёқларининг бири квадрат бўлган тўғри параллелепипеднинг диагонали $2a$, квадрат шаклли ёқининг томонини a деб, унинг 1) қирраларини узунликларини; 2) тўла сирт юзасини топинг (1.13-расм).

▲ **Берилган:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – тўғри параллелепипед. $ABCD$ – квадрат. $AB = a$, $A_1C = 2a$.

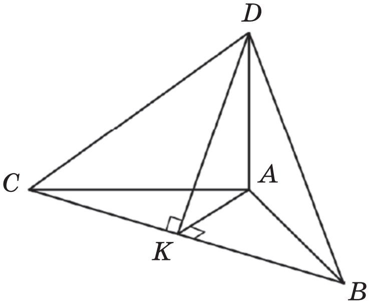
Топиш керак: 1) қолган қирраларини; 2) $S_{т.с.}$ – ?

Ечилиши. 1) $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ ёқлари квадрат бўлганлигидан, бу ёқларининг қирралари ўзаро тенг ва шарт бўйича $A_1A = BB_1 = CC_1 = DD_1$ ни топсак етарли.

AC – квадратнинг диагонали, яъни $AC = a\sqrt{2}$. ΔACA_1 – тўғри бурчакли учбурчак. У ҳолда

$$AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = \sqrt{2}a.$$

2) $S_{\text{т.с.}} = 2 \cdot S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABB_1A_1} = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot \sqrt{2}a = 2(1 + 2\sqrt{2})a^2$. ■



1.14-расм

1.23. Уч ёқли бурчакнинг барча ёйиқ бурчаклари тўғри бурчак. Уч ёқли бурчакнинг ёқлари жуфт-жуфти билан перпендикуляр эканлигини кўрсатинг.

1.24. Учбурчакнинг томонлари 10 см, 17 см ва 21 см. Унинг A катта бурчаги учидан учбурчак текислигига AD перпендикуляр чиқарилган, AD=15 см. D нуқтасидан учбурчакнинг катта томонигача бўлган масофани топинг (1.14-расм).

C

1.25. Уч ёқли бурчакнинг ёйиқ бурчаклари 45°, 45° ва 60°. Ёйиқ бурчаклари 45° га тенг ёқларининг орасидаги бурчакни топинг.

1.26. Қаварик кўп ёқли бурчакнинг қўшни ёқларининг орасидаги ўткир бурчаклар сони энг кўпи билан қанча бўлиши мумкин?

1.27. Битта қирраси a ва шу a умумий қирраси бўлган ёқларининг юзалари S_1 ва S_2 га тенг бўлган тўғри бурчакли параллелепипеднинг тўла сирт юзаси билан диагоналини топинг.

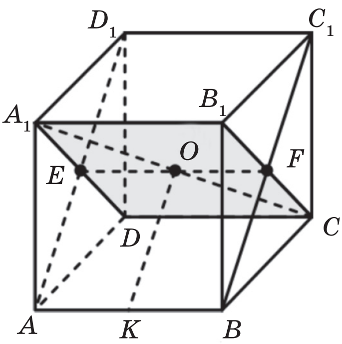
1.28. Тетраэдрнинг битта қирраси a, қолган қирралари b. $0 < a < b\sqrt{3}$ тенгсизлигининг бажарилишини исботланг.

1.29. Тўғри параллелепипеднинг бир учидаги ёқларининг юзалари S_1, S_2 ва S_3. Унинг қирраларини топинг.

1.30.* Уч ёқли бурчакнинг барча қирраларидан бир хил узоқликда жойлашган нуқталар тўпламини аниқланг.

1.31.* Уч ёқли бурчакнинг барча ёқларидан бир хил узоқликда жойлашган нуқталар тўпламини аниқланг.

1.32. Қирраси a га тенг кубнинг диагонали ва у билан кесишмайдиган қирралари орасидаги масофани топинг (1.15-расм).



1.15-расм

▲ **Берилган:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

Топиш керак: A_1C билан AB нинг орасидаги масофани.

Ечилиши: (A_1B_1CD) ва (ABC_1D_1) текисликлари ўзаро перпендикуляр. Чунки, $BF \perp B_1C$, $B_1F \perp EF$ ва $BF \perp EF$. Агар $AK = KB$ бўлса, $OK \| AE \| BF$. Бундан

$OK \perp (A_1B_1CD)$, демак, $OK \perp A_1C$.

У ҳолда, OK нинг узунлиги:

$$OK = BF = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Жавоб: $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. ■

Такрорлашга доир топшириқлар

1.33. 1) ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг B тўғри бурчагидан AC гипотенузасига BD баландлиги туширилган. AB=13, BD=12 бўлса, ABC учбурчагининг юзасини топинг.

2) ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг A тўғри бурчагидан BC гипотенузасига AH баландлиги туширилган. CH=3, AC=5 бўлса, ABC учбурчагининг юзасини топинг.

1.2. Призма ва унинг элементлари, призманинг турлари. Призманинг ёйилмаси, ён сирт ва тўла сирт юзалари

Бу бўлимда призма ва унинг элементлари, призманинг турлари, ёйилмаси, ён сирт ва тўла сирт юзаларини ўқиб ўрганасизлар. Бўлим сўнгида:

- **призманинг таърифи, элементлари, призма турларини ва уларни текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **призманинг элементларини топишга доир масалаларни еча оласизлар;**

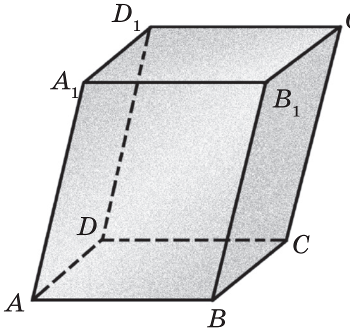
- **призманинг ён сирт ва тўла сирт юзалари топиш формулаларини келтириб чиқарасизлар ва уларни масалалар ечишда қўллай оласизлар;**
- **призмаларнинг ёйилмаларини ясай оласизлар.**

1.2.1. Призма ва унинг элементлари, призманинг турлари

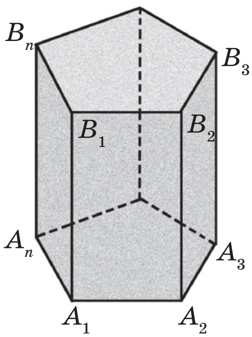
Иккита ёқлари параллел текисликларда жойлашган ўзаро тенг n бурчаклар, қолган ёқлари параллелограммдан иборат n ёққа ***призма*** дейилади. Параллел текисликларда жойлашган икки кўпбурчакни призманинг ***асослари***, қолган ёқлари унинг ***ён ёқлари***, асоси билан ён ёқларида жойлашган кўпбурчакнинг қирраларини ***призма қирралари*** (асос қирралари билан ён қирралари) деб аталади (1.17-расм).

Призманинг асослари жойлашган параллел α ва β текисликлари орасидаги масофани унинг ***баландлиги*** дейилади.

Призманинг ён қирралари асос текислигига перпендикуляр бўлса, бундай призмага ***тўғри призма*** дейилади. Тўғри призманинг барча ён ёқлари тўғри тўртбурчак бўлади. Призмани унинг асосидаги кўпбурчакнинг учларининг сонига қараб, ***n бурчакли призма*** дейилади. 1.17-расмда беш бурчакли тўғри призма тасвирланган, 1.16-расмда эса тўрт бурчакли призма – ***оғма призма*** (яъни ён қирралари асос текислигига перпендикуляр эмас). Асоси мунтазам кўпбурчакдан иборат бўлган тўғри призмага ***мунтазам призма*** дейилади.



1.16-расм



1.17-расм

Асоси параллелограммдан иборат бўлган призмага ***параллелепипед*** дейилади.

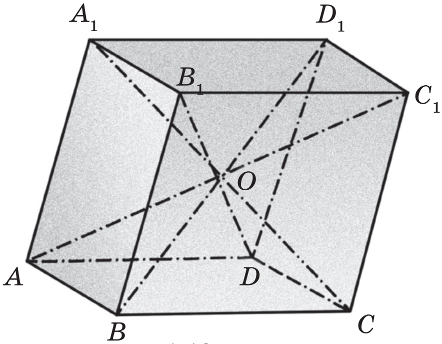
Шунинг билан параллелепипеднинг 6 та ёқи бор ва уларнинг барчаси параллелограммдан иборат. Бундан параллелепипеднинг қарама-қарши ёқлари ўзаро параллел ва тенг параллелограммлар бўлади.

1-теорема

Параллелепипеднинг диагоналлари бир нуқтада кесишади ва кесишган нуқтасида тенг иккига бўлинади.

▲ **Исботи.** Айтайлик, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди берилсин (1.18-расм). Унинг AC_1, BD_1, A_1C ва B_1D диагоналлари бир нуқтада кесишишини кўрсатайлик.

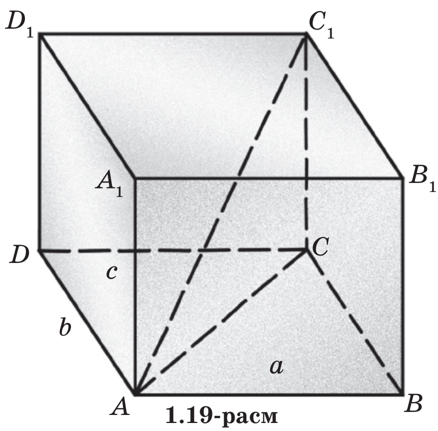
Ҳақиқатан ҳам, параллелепипеднинг AB, A_1B_1, C_1D_1 ва CD қирралари ўзаро параллел ва тенг. Шу каби AD, BC, B_1C_1 ва A_1D_1 қирралари ҳам ўзаро параллел ва тенг. Бундан A_1BCD_1 ва ABC_1D_1 тўртбурчаклари параллелограмм ва уларнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади. Демак, A_1BCD_1 параллелограммнинг A_1C ва BD_1 диагоналлари O нуқтасида кесишиб, шу нуқтада тенг иккига бўлинади.



1.18-расм

У ҳолда ABC_1D_1 параллелограммнинг BD_1 ва AC_1 диагоналлари ҳам BD_1 нинг ўртаси O нуқтада кесишиб, шу нуқтада тенг иккига бўлинади. Шу каби B_1D диагонали ҳам O нуқтаси орқали ўтиб, шу нуқтада тенг иккига бўлиниши A_1B_1CD параллелограммидан келиб чиқади. Шундан, параллелепипеднинг барча диагоналлари O нуқтаси орқали ўтади ва шу нуқтада тенг иккига бўлинади. Теорема исботланди. ■

Ён қирралари асос текислигига перпендикуляр бўлган параллелепипедга ***тўғри параллелепипед*** дейилади. Тўғри параллелепипеднинг ён ёқлари тўғри тўртбурчаклар, асослари эса ихтиёрий параллелограмм бўлади. Асоси тўғри тўртбурчакдан иборат бўлган тўғри параллелепипедга ***тўғри бурчакли параллелепипед*** дейилади. Масалан, 1.19-расмда $ABCD$ параллелограмм бўлса, у ҳолда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – тўғри параллелепипед; $ABCD$ тўғри тўртбурчак бўлса, у ҳолда тўғри бурчакли параллелепипед бўлади. Барча қирралари ўзаро тенг тўғри бур-



1.19-расм

чакли параллелепипед ***куб*** дейилади. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг барча диагоналлари ўзаро тенг, чунки унингдиагонал кесимлари тўғри тўртбурчаклар. Тўғри бурчакли параллелепипед учун қуйидаги Пифагор теоремасининг кононик кўринишдаги формуласи бажарилади.

2-теорема

Тўғри бурчакли параллелепипед диагоналининг квадрати унинг уч ўлчамларининг (эни, узунлиги ва баландлиги) квадратларининг йиғиндисига тенг.

▲ **Исботи.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедида $AB = a$, $AD = b$ ва $AA_1 = c$ бўлсин (1.19-расм). У ҳолда $AC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$ тенглиги бажарилишини кўрсатайлик.

Ҳақиқатан ҳам, $ABCD$ тўғри тўртбурчак бўлганлигидан, $AC^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + b^2$. $AA_1 = CC_1 = c$ ва ΔACC_1 тўғри бурчакли учбурчак ($CC_1 \perp (ABC)$) бўлгани учун, $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$ тенглиги бажарилади. Теорема исботланди. ■

1.2.2. Призманинг ёйилмаси, ён сирт ва тўла сирт юзалари

Призманинг ён ёқларининг юзаларини йиғиндиси призманинг ***ён сирт юзаси*** деб аталади.

3-теорема

Тўғри призманинг ён сирт юзаси унинг баландлигини асосининг периметри кўпайтмасига тенг.

$$S_{\text{ён с.}} = h \cdot p.$$

▲ **Исботи.** Призманинг баландлиги h, асосининг периметри p га тенг бўлсин. У ҳолда $S_{\text{ён с.}} = hp$ формуласи ўринли эканлигини кўрсатайлик.

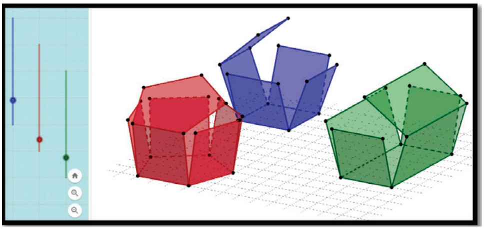
Ҳақиқатан ҳам, тўғри призманинг ён ёқлари – тўғри тўртбурчаклардан иборат. Унинг эни призма асосидаги кўпбурчакнинг мос томонига, иккинчи томони призманинг ён қиррасига (баландлигига) тенг (1.17-расм).

Ундай бўлса,

$S_{\text{ён с.}} = A_1A_2 \cdot h + A_2A_3 \cdot h + \ldots + A_nA_1 \cdot h = (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) \cdot h = p \cdot h$. ■

Призманинг тўла сирт юзаси унинг ён сирт юзаси билан асос юзасининг иккиланганлиги йиғиндисига тенг. $S_{\text{т.с.}} = S_{\text{ён с.}} + 2S_{\text{асос}}$.

Призманинг ёйилмаси – унинг барча текисликларининг ўлчовларини бир текисликка ўзгаришсиз кўчиришдир.

Қўшимча электронли йўлланма	QR-Code
3D анимацияга йўлланма «Уч турли призмаларининг ёйилмалари» – https://geogebra.org/classic/ttsjw3ug 	

1. Қандай кўпёққа призма дейилади? Призманинг қандай элементлари бор?
2. Тўғри призма, оғма призма ва мунтазам призма деб нимага айтилади?
3. Тўғри призманинг ён сирт юзаси қандай топилади?
4. Қандай призмага параллелепипед дейилади?
5. Параллелепипед диагоналларининг қандай хоссалари бор? Уни исботланг.
6. Қандай параллелепипедга тўғри параллелепипед, тўғри бурчакли параллелепипед деб аталади?
7. Пифагор теоремасининг кононик кўринишдаги формуласи қандай таърифланади? Уни исботланг.

МАСАЛАЛАР

А

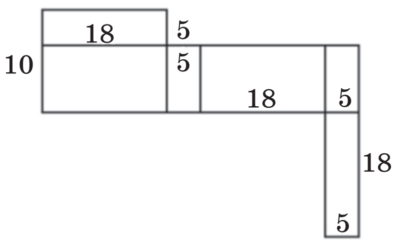
Амалий топшириқ

1.34. Тахта ёки картон қоғоздан 1) тўғри; 2) тўғри бурчакли; 3) оғма параллелепипеднинг макетини ясанг.

1.35. Картон қоғоздан 1) учбурчакли; 2) олти бурчакли мунтазам призманинг ёйилмасини ясаб, ундан мос призмани йиғинг.

1.36. Кубнинг қирраси 12 га тенг. Унинг тўла сирт юзаси асоси гипотенузаси 10, бир катети 6 бўлган тўғри бурчакли учбурчак бўлган тўғри призманинг тўла сирт юзасига тенг. Призманинг баландлигини баландлигини топинг.

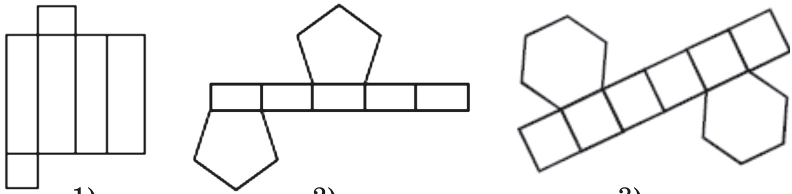
1.37. Кўпёқни турини ёйилмаси бўйича аниқлаб, тўла сирт юзасини ҳисобланг (1.20-расм).



1.20-расм

1.38. Кўпёқни аниқланг ва расмини чизинг: 1) кўпёқнинг ёқлари квадрат билан тўғри тўртбурчаклардан ташкил топган ва 12 та қирраси мавжуд; 2) кўпёқнинг бешта ёқи мавжуд, унинг иккитаси бир-бири билан устма-уст тушадиган учбурчаклар; 3) кўпёқ олтита бир хил квадратдан ташкил топган.

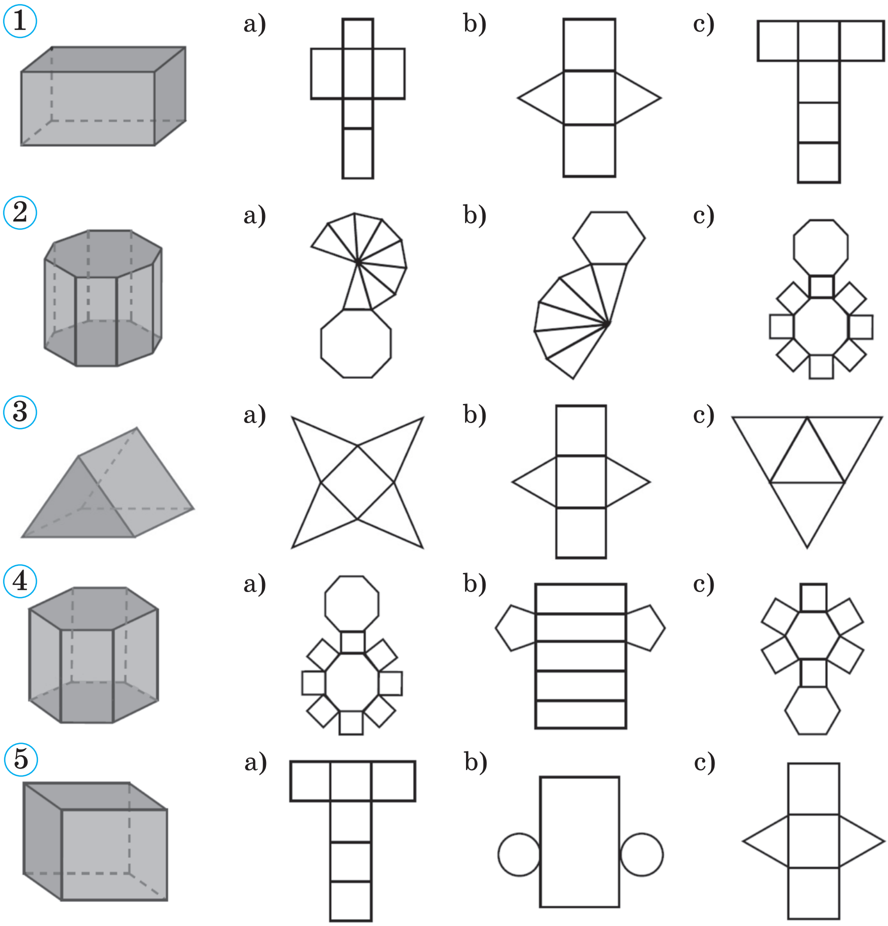
1.39. 1.21-расмдаги ёйилмалар бўйича кўпёқларни аниқланг. Кўпёқнинг нечта учи, қирраси бор?



1) 2) 3)

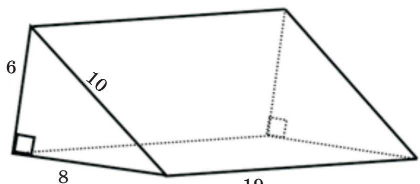
1.21-расм

1.40. Кўпёқнинг тўлиқ номини ва унинг ёйилмасини аниқланг (1.22-расм):

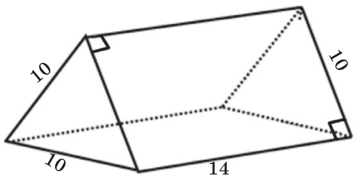


1.22-расм

1.41. Чизмада кўрсатилган ўлчамлари бўйича учбурчакли призманинг тўла сирт юзасини ҳисобланг (1.23-расм).



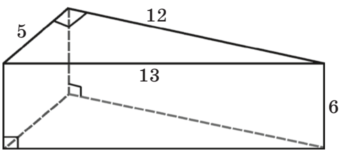
1)



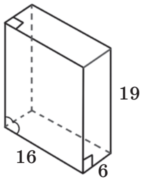
2)

1.23-расм

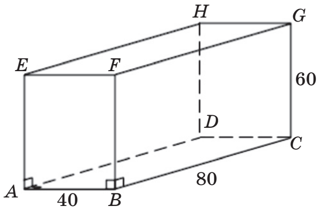
1.42. 1.24-расмдаги кўпёқларни аниқлаб, уларнинг ён сиртларини ва тўла сирт юзаларини ҳисобланг.



1)



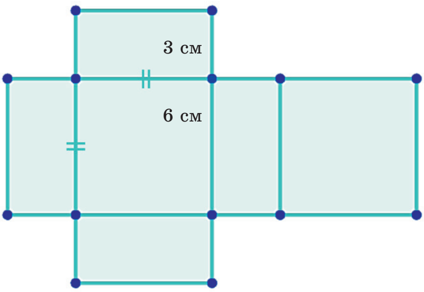
2)



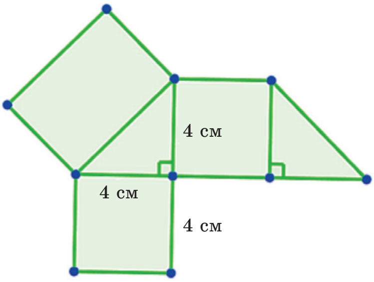
3)

1.24-расм

1.43. 1.25-расмдаги кўпёқларни аниқлаб, уларнинг ён сиртларини ва тўла сирт юзаларини ҳисобланг.



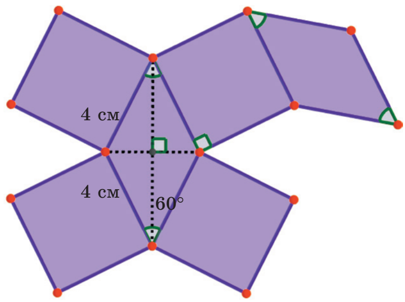
1)



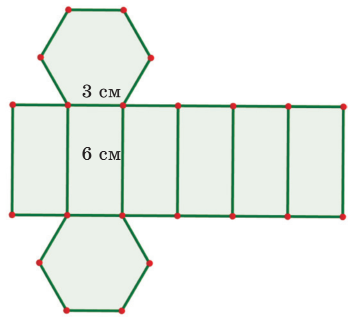
2)

1.25-расм

1.44. Призманинг асоси – ўткир бурчаги 60°, томони 4 см бўлган ромб. Призманинг ён ёқлари – квадрат. Призма ёйилмасининг юзаси $16\left(4+\sqrt{3}\right)$ см² бўлишини исботланг (1.26-расм).



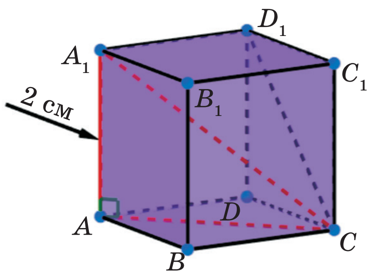
1.26-расм



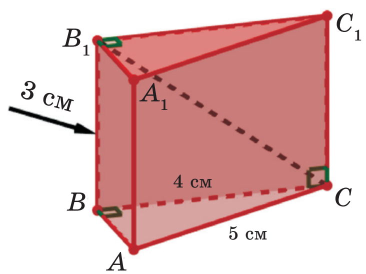
1.27-расм

1.45. Призманинг асоси – томони 3 см га тенг мунтазам олтибурчак. Баландлиги 6 см призма ёйилмасининг юзаси $27\left(4+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ см^2 бўлишини исботланг (1.27-расм).

1.46. Қирраси 2 см га тенг куб берилган. Унинг 1) ён ёқининг диагоналини; 2) кубнинг диагоналини; 3) диагонал кесимининг юзасини; 4) тўла сирт юзасини топинг (1.28-расм).



1.28-расм



1.29-расм

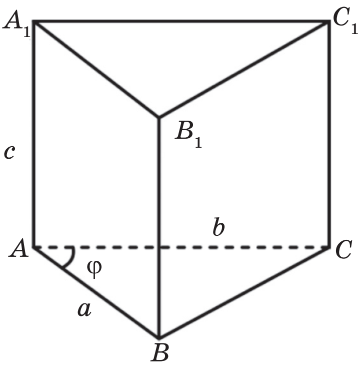
1.47. Тўғри призманинг асоси – катети 4 см, гипотенузаси 5 см га тенг тўғри бурчакли учбурчак. Узун катетидаги ён ёқининг диагоналини ва призманинг тўла сирт юзасини ҳисобланг (1.29-расм). Призманинг баландлиги 3 см.

1.48. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг a, b ва c ўлчамлари бўйича унинг диагоналини топинг: 1) a=1 м, b=2 м, c=2 м; 2) a=5 см, b=4 см, c=10 см; 3) a=6 дм, b=8 дм, c=24 дм; 4) a=7 мм, b=13 мм, $c=\sqrt{71}$ мм.

1.49. Аввалги масала шартида тўғри тўрт бурчакли параллелепипеднинг 1) ён сирт юзасини; 2) тўла сирт юзасини; 3) диагонал кесимининг (параллелепипеднинг диагонали ва шу диагонал билан умумий учга эга бўлган ён қирраси орқали ўтувчи текислик ёрдамида олинган кесим) юзасини топинг.

1.50. Бир учга эга бўлган учта ёқининг юзалари бўйича тўғри бурчакли параллелепипеднинг уч ўлчамини топинг: 1) 30 см^2, 40 см^2, 48 см^2; 2) 21 м^2, 33 м^2, 77 м^2.

1.51. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари a ва b, улар орасидаги бурчак φ, ён қирраси c. Параллелепипеднинг ён сирти билан тўла сирт юзасини топинг: 1) a=2 см, b = 3 см, φ=60°, c=5 см; 2) a = 2 м, b=5 м, φ=45°, c=6 м; 3) a=5 мм, b=8 мм, φ=30°, c=10 мм.



1.30-расм

1.52. 1 – Аввалги масала шартида a ва b – учбурчакнинг томонлари, φ – уларнинг орасидаги бурчак, c асоси учбурчакли тўғри призманинг ён қирраси деб, призманинг ён сирти билан тўла сиртини юзасини топинг (1.30-расм).

1.53. Мунтазам тўртбурчакли призма асосининг юзаси 169 см^2, баландлиги 10 см. Унинг ён сирти билан тўла сирт юзасини топинг.

1.54. Мунтазам учбурчакли призма асосининг томони a, баландлиги h. Призманинг тўла сирт юзасини топинг: 1) a=5 м, h=8 м; 2) a =2$\sqrt{3}$ см, h=4 см.

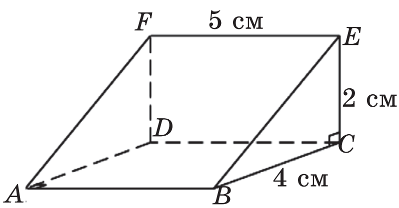
1.55. Мунтазам олти бурчакли призманинг ён қиррасидаги икки ёқли бурчакнинг ўлчамини аниқланг.

1.56. Мунтазам призма учларининг сони 1) 20 га; 2) 32 га; 3) 105 га тенг бўлиши мумкинми? Мумкин бўлса, призманинг нечта қирраси билан ёқлари мавжуд? Жавобингизни асосланг.

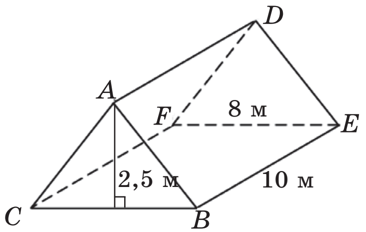
1.57. Кубнинг диагонали d ни унинг a қирраси орқали ифодаланг.

Амалий топшириқлар (1.58 – 1.59):

1.58. Қишда болалар учун 1.31-расмда тасвирлангандек чанғи ясалди. Чанғининг юзига қотирилган материалнинг юзасини топинг.



1.31-расм



1.32-расм

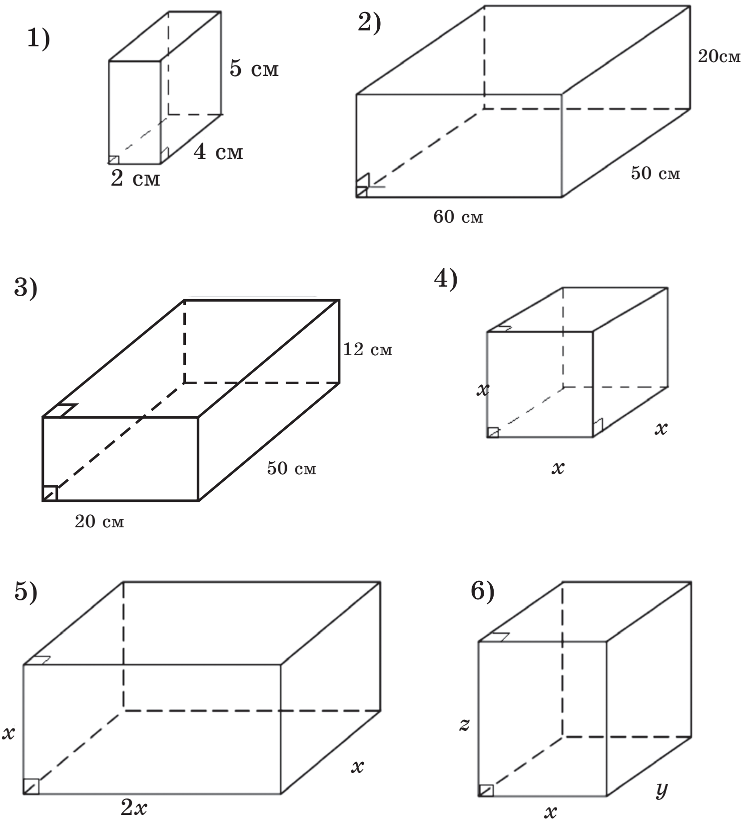
1.59. Уйнинг томи 1.32-расмдаги каби солиниши режалаштирилмоқда. Томнинг баландлиги 2,5 м. Уйнинг узунлиги 10 м, эни эса 8 м. Битта шифернинг юзаси 2 м^2 бўлса, томни ёпиш учун қанча шифер олиш керак?

B

1.60. Кубнинг диагонали d ни унинг ёқининг диагонали d_1 орқали ифодаланг.

1.61. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ён қирраси 5 см, асосининг юзаси 360 см^2, асосининг диагонали 41 см. Параллелепипеднинг ён сирт юзасини топинг.

1.62. 1.33-расмдаги тўғри бурчакли параллелепипеднинг ичига жойлаштиришга мумкин бўлган энг узун стерженнинг узунлигини топинг:



1.33-расм

1.63. Тўғри призманинг асоси – ромб. Призманинг диагоналлари 8 см ва 5 см, баландлиги 2 см. Ромбнинг томонларини топинг.

1.64. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг асос томонларининг нисбати 7:24 каби, баландлиги 5 см, ён сиртининг юзаси 620 см^2. Унинг асосининг томонларини топинг.

1.65. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг уч ўлчамининг нисбати 3:7:8 каби, ён сиртининг юзаси 640 см^2. Параллелепипеднинг қирраларини топинг.

1.66. Диагоналлари 5 м ва 8 м, баландлиги 2 м, асос диагоналларининг орасидаги бурчак 60° бўлган тўғри параллелепипед берилган. Параллелепипеднинг тўла сирт юзасини топинг.

1.67. Мунтазам учбурчакли призма қирраларининг ҳар бири a га тенг бўлса, унинг тўла сирт юзасини топинг.

▲ **Берилган:** $ABCA_1B_1C_1$ – мунтазам учбурчакли призма (ҳар бир қирраси a га тенг). Унинг асоси тенг томонли ABC учбурчакдан иборат. Призманинг баландлиги a.

Топиш керак: $S_{\text{т.с.}}$ — ?

Ечилиши: $\blacktriangle ABC \Rightarrow AB = AC = BC = a \Rightarrow S_{\text{асос}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
$P_{\text{асос}} = AB + AC + BC = 3a$, $h = AA_1 = a$;

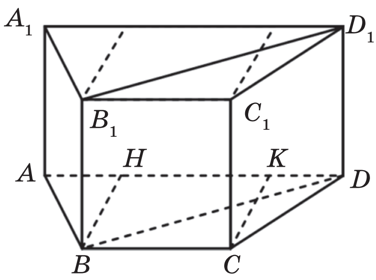
$$S_{\text{т.с.}} = 2S_{\text{асос}} + P_{\text{асос}} \cdot h = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a \cdot a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)a^2 = \frac{6+\sqrt{3}}{2}a^2. \blacksquare$$

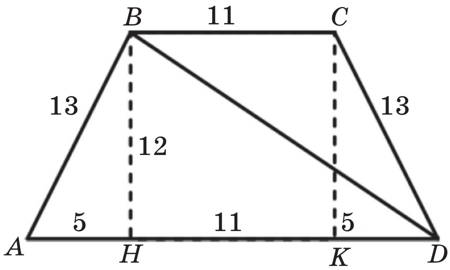
1.68. Ёқлари ўткир бурчаги φ, томонлари a га тенг ромбдан иборат оғма призманинг баландлигини топинг.

1.69. Куб диагонал кесими орқали иккита бўлакка бўлинган. Кубнинг қирраси 4 см бўлса, ҳосил бўлган бўлакнинг ёйилмасини чизинг.

1.70. Мунтазам учбурчакли призманинг ён ёқлари – квадратлар, асосига ички чизилган айлананинг радиуси r га тенг. Призманинг тўла сирт юзасини топинг.

1.71. Тўғри призманинг асоси – тенг ёнли трапеция. Трапециянинг ён томони 13 см, асослари 11 см ва 21 см. Призманинг диагонал кесимининг юзаси 180 см^2. Призманинг тўла сирт юзасини топинг.





1.34-расм

▲ **Берилган:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – тўғри призма. $ABCD$ – тенг ёнли трапеция (1.34-расм). $AD = 21$ см, $BC = 11$ см, $AB = 13$ см, $S_{BDD_1B_1} = 180$ см^2.

Топиш керак: $S_{т.с.}$ – ?

Ечилиши: $\Delta ABH \Rightarrow BH = 12$ см, $\Delta BHD \Rightarrow BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} =$
$= \sqrt{144 + 256} = 20$ см, $S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1 \Rightarrow 20$ см $\cdot BB_1 = 180$ см$^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow BB_1 = 9$ см.

$S_{т.с.} = 2 \cdot S_{ABCD} + (AB + BC + CD + AD) \cdot BB_1 = 2 \cdot \frac{11 + 21}{2} \cdot 12 + (13 +$
$+ 11 + 13 + 21) \cdot 9 = 906$ см^2. ■

C

1.72. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг асос томонларининг нисбати 3:4 каби, диагонал кесимининг юзаси 15 см^2. Параллелепипеднинг ён сиртини юзасини топинг.

1.73. Учбурчакли оғма призманинг ён қирраларининг орасидаги масофа 17 см, 10 см ва 21 см. Унинг катта ёқидан унга қарама-қарши ўтган қиррасигача бўлган масофани топинг.

1.74.* Асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлган тўғри призманинг барча учларидан бирдай узоқликда жойлашган нуқтани аниқланг.

1.75. Агар тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали ва у билан учи умумий бўлган учта қирраси мос равишда α, β ва γ га тенг бурчаклар ясаса, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

1.76. Агар тўғрибурчакли параллелепипеднинг диагонали ва унинг учта ёқи мос равишда α, β ва γ га тенг бурчаклар ясаса, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

Такрорлашга доир топшириқлар

1.77. 1) ABC учбурчагида $AB=6$, $AB=BC$. AB томони диаметри бўлган айлана чизилган. Бу айлана BC томонини D нуқтасида кесиб ўтиши ва $BD:DC=2:1$ эканлиги маълум бўлса, AC томонини топинг.

2) ABC тўғри бурчакли учбурчагининг BC катети диаметри бўлган айлана чизилган. Бу айлана гипотенузасини $AD:DB=1:3$ каби нисбати ўринли бўладигандай D нуқтасида кесади. C учидан гипотенузага туширилган баландлик 3 га тенг бўлса, BC катетнинг узунлигини топинг.

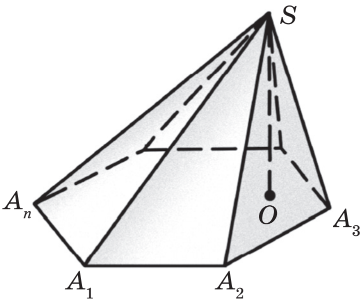
1.3. Пирамида ва унинг элементлари. Мунтазам пирамида. Кесик пирамида. Пирамиданинг, кесик пирамиданинг ёйилмаси, ён сирт ва тўла сирт юзалари

Бу бўлимда пирамида ва унинг элементлари билан танишасизлар. Бўлим сўнгида:

- **пирамида таърифини, унинг элементларини, пирамида турларини ўрганасизлар ва уларни текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **пирамида учининг асос текислигига проекциясини жойлашишини аниқлаб, масалалар ишлай оласизлар;**
- **пирамида элементларини топишга доир масалаларни еча оласизлар;**
- **кесик пирамида таърифини билиб, уни текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **пирамиданинг (кесик пирамиданинг) ён сирт ва тўла сирт юзалари формулаларини келтириб чиқара оласизлар ва уларни масалалар ечишда қўллай оласизлар;**
- **пирамиданинг ёйилмасини ясай оласизлар.**

1.3.1. Пирамида ва унинг элементлари. Мунтазам пирамида

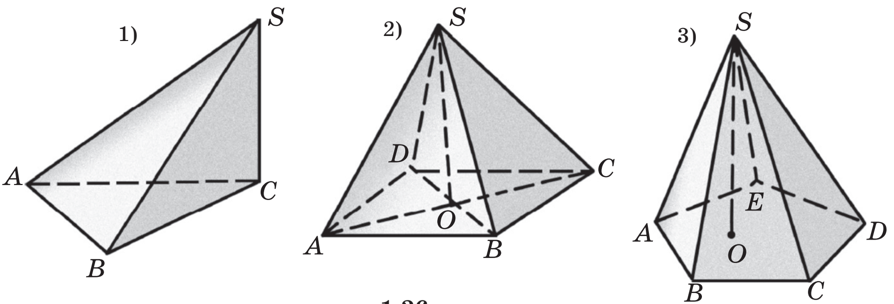
$A_1A_2 \dots A_n$ кўринишда берилган n бурчаги билан шу n бурчак текислигида ётмайдиган S нуқтасини олайлик. S нуқтасини берилган кўпбурчак учлари билан туташтирсак, SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 учбурчакларини ҳосил қиламиз. Фазонинг шу учбурчаклар билан ва берилган $A_1A_2 \dots A_n$ кўпбурчаги билан чегараланган қисми ***пирамида*** дейилади. S нуқтаси пирамиданинг ***учи***, берилган $A_1A_2 \dots A_n$ кўпбурчаги ***асоси***, SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1



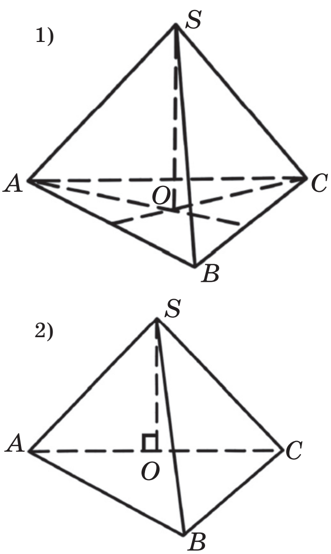
1.35-расм

учбурчакларини ***ён ёқлари***, SA_1, SA_2, ..., SA_n кесмаларни пирамиданинг ён қирралари дейилади, бу пирамидани $A_1A_2 \ldots A_n$ кўринишда белгилайди (1.35-расм).

Пирамидани унинг асосидаги кўпбурчакнинг учларининг сонига қараб, ***п бурчакли пирамида*** деб аталади. Масалан, 1.36-расмда мос равишда учбурчакли, тўртбурчакли ва бешбурчакли пирамидалар тасвирланган. Пирамиданинг учидан асос текислигига туширилган перпендикулярга унинг ***баландлиги*** дейилади.



1.36-расм

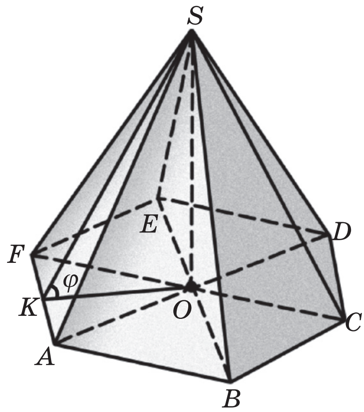


1.37-расм

Пирамиданинг текисликдаги тасвирини тўғри чизиш учун унинг баландлигининг бир учи асосининг қаерига тушушини билиш зарур. Масалан, 1.36-расмдаги учбурчакли пирамида баландлиги асоси ABC учбурчагининг C учига, тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги эса пирамида асосининг диагоналларининг кесишиш нуқтасига тушяпти. 1.37-расмда бир қарашда ташқи кўриниши бир хил иккита учбурчакли пирамида тасвирланган. Бу пирамидаларнинг биринчисида баландликнинг бир учи ABC учбурчакнинг медианаларининг кесишиш нуқтасида бўлса, иккинчисида баландликнинг бир учи AC томонининг ўртасида ётади. Бундан улар ҳар хил пирамидалар эканлиги кўринади.

Пирамиданинг асоси мунтазам кўпбурчак бўлиб, баландлигининг бир учи унинг асосидаги кўпбурчакнинг марказига тушса, бундай пирамидаларга ***мунтазам пирамидалар*** дейилади. Масалан, 1.37, 1)-расмда учбурчакли ва 1.36, 2)-расмда тўртбурчакли мунтазам пирамидалар, 1.38-расмда мунтазам олтибурчакли пирамида тасвирланган. Мунтазам пирамидаларнинг ён қирралари ўзаро тенг, чунки уларнинг асос текислигидаги проекциялари тенг (1.38-расмда $AO=BO=CO=DO=EO=FO$). Шунинг учун мунтазам пирамидаларнинг ён ёқлари ўзаро тенг бўлган тенг ёнли учбурчаклар бўлади.

Пирамиданинг ён ёқининг баландлигини унинг ***апофемаси*** деб аталади. 1.38-расмда $SK \perp AF$, яъни SK кесмаси – SAF ёқининг апофемаси.



1.38-расм

4-теорема

Мунтазам пирамиданинг ён сиртининг юзаси унинг апофемаси билан асосининг ярим периметрининг кўпайтмасига тенг:

$$S_{\text{ён.с.}} = l \cdot p,$$

l – апофема, p – ярим периметр.

▲ **Исботи.** Мунтазам пирамиданинг апофемаси l, асосидаги мунтазам кўпбурчакнинг томони a бўлса (1.38-расм, $SK = l$, $AF = a$), пирамиданинг SAF ёқининг юзаси $\frac{1}{2}a \cdot l$ га тенг. Мунтазам пирамиданинг ён сирти шундай n учбурчакдан ташкил топган ва асосининг ярим периметри $\frac{na}{2}$ бўлганлигидан,

$$S_{\text{ён.с.}} = n \cdot \frac{1}{2}al = l \cdot \frac{na}{2} = lp$$

тенглигини оламиз. Теорема исботланди. ■

Мунтазам пирамиданинг ён сиртининг юзасини унинг ортогонал проекцияси юзасининг формуласи орқали ҳам топса бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, 1.38-расмда OAF учбурчаги – SAF ёқининг ортогонал проекцияси. Шу учбурчаклар орасидаги иккиёқли бурчакнинг ўлчови φ-га тенг бўлса, $S_{OAF} = S_{SAF} \cdot \cos\varphi$ ёки $S_{SAF} = \dfrac{S_{OAF}}{\cos\varphi}$ тенглиги бажарилади. $S_{\text{ён.с.}} = n \cdot S_{SAF}$ ва асос юзаси $S_{\text{асос}} = n \cdot S_{OAF}$ бўлганлигидан, $S_{\text{ён.с.}} = n \cdot S_{SAF} = n \cdot \dfrac{S_{OAF}}{\cos\varphi} = \dfrac{S_T}{\cos\varphi}$ формуласи келиб чиқади. Бундан, $S_{\text{ён.с.}} = \dfrac{S_T}{\cos\varphi}$.

Ижодий иш

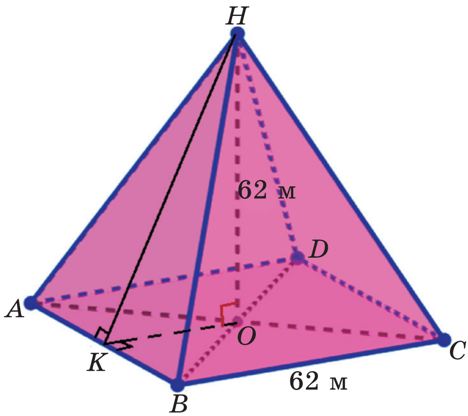
Нур-Султан шаҳрида жойлашган Мустақиллик саройи – Қозоғистон халқларининг бирдамлиги ва дўстлигининг белгиси. Пирамиданинг асоси- ўлчами 62 м × 62 м, бўлган квадрат, баландлиги ҳам 62 м. Бинонинг ташқи қисми шиша ва тош плиталар билан қопланган. Пирамиданинг ташқи юзасини, яъни ён сирт юзасини топиш керак (1.39-расм).

▲ Аввалам бор пирамиданинг апофемасини топиб оламиз: $BC = 62 \Rightarrow OK = \dfrac{62}{2}$.

$\Delta HKO \Rightarrow \angle O = 90°$. Пифагор теоремаси бўйича

$$HK = \sqrt{HO^2 + OK^2} =$$

$$= \sqrt{62^2 + \left(\frac{62}{2}\right)^2} = \sqrt{4805}.$$



1.39-расм

Пирамиданинг асоси – квадрат, ярим периметри

$$p = \frac{62 \cdot 4}{2} = 124 \text{ м}.$$

4-теорема бўйича

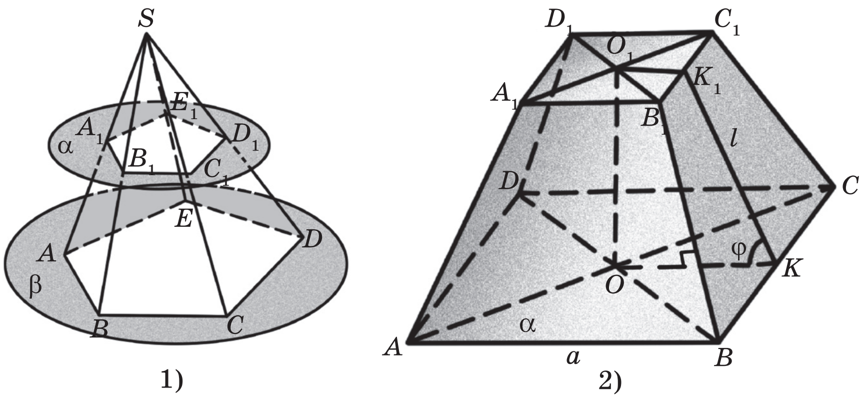
$$S_{\text{ён.с.}} = l \cdot p = \sqrt{4805} \cdot 124 \approx 8595{,}4 \text{ м}^2.$$

Жавоб: Мустақиллик саройининг ташқи юзасига, яъни ён сирт юзасига 8595,4 м² шиша ва тош плиталар сарфланган. ■

1.3.2. Кесик пирамида

n бурчакли пирамидани асосига параллел текислик билан кесиб ўтса, натижада берилган пирамидадан икки ёқи *n* бурчаклар, бошқа *n* ёқлари трапециялардан иборат кўпёқ олинади. Олинган кўпёққа *кесик пирамида* дейилади.

1.40, 1-расмда $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бешбурчакли кесик пирамида тасвирланган. Бу ерда, α ва β текисликлари ўзаро параллел. $ABCDE$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1$ бешбурчаклари кесик пирамиданинг ***асослари***, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 – ён қирралари, ABB_1A_1, BCC_1B_1, ..., EAA_1E_1 трапециялари кесик пирамиданинг ён ёқлари бўлади. Асос текисликларининг орасидаги масофа кесик пирамиданинг ***баландлиги***, ён ёқларининг баландлиги шу ёқнинг ***апофемаси*** дейилади.



1.40-расм

Кесик пирамида мунтазам пирамиданинг бир қисми бўлса, бундай пирамидага мунтазам ***кесик пирамида*** дейилади. 1.40, 2-расмда тўртбурчакли мунтазам кесик пирамида тасвирланган. Мунтазам кесик пирамиданинг асосларининг ярим периметрлари мос равишда p_1 (кичик асосининг) ва p_2 (катта асосининг) бўлса, мунтазам кесик пирамиданинг ён сиртининг юзаси

$$S_{\text{ён.с.}} = (p_1 + p_2)\cdot l$$

формуласи билан аниқланишини исботлаш қийин эмас. Бу ердаги l – апофема. Катта асосидаги икки ёқли бурчакнинг ўлчови φ бўлса, мунтазам кесик пирамиданинг ён сирт юзасини

$$S_{\text{ён.с.}} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi}$$

формуласи билан топилади. Бу ердаги S_2 – катта асосининг юзаси, S_1 – кичик асосининг юзаси.

Исботи. Бизга $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $KK_1 = l$ эканлиги маълум. Демак, $O_1K_1 = OF = \frac{b}{2}$, $OK = \frac{a}{2}$ ва $FK = \frac{a-b}{2}$. KFK_1 тўғрибурчакли учбурчакнинг косинуси φ бурчаги:

$$\cos\varphi = \frac{FK}{KK_1} = \frac{a-b}{2l}.$$

Энди, чап томондаги бизга берилган кесик пирамиданинг ён сирт юзасини аниқлайлик:

$$S_{\text{ён.с.}} = 4 \cdot S_{AA_1B_1B} = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot l = 2l \cdot (a+b).$$

1.40, 2-расмдаги кесик пирамиданинг асос юзаларини аниқлаймиз:

$$S_2 = S_{ABCD} = a^2, \qquad S_1 = S_{A_1B_1C_1D_1} = b^2.$$

Косинус φ бурчагини қўллаб, формуланинг ўнг томонининг ечимини ёзайлик:

$$\frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi} = \frac{a^2 - b^2}{\frac{a-b}{2l}} = \frac{(a-b)(a+b)\cdot 2l}{(a-b)} = 2l \cdot (a+b).$$

Демак,

$$S_{\text{ён.с.}} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\varphi}. \blacksquare$$

1. Қандай кўпёққа пирамида дейилади? Унинг элементларини атаб ўтинг.
2. Мунтазам пирамида деб, нимага айтилади?
3. Мунтазам пирамиданинг ён сиртининг юзасини топиш формуласи қандай?
4. Кесик пирамида деб, нимага айтилади? Унинг элементларини атаб ўтинг.
5. Мунтазам кесик пирамида деб, нимага айтилади?
6. Мунтазам кесик пирамиданинг ён сиртининг юзасини топиш формуласи қандай? Уларни исботланг.

МАСАЛАЛАР

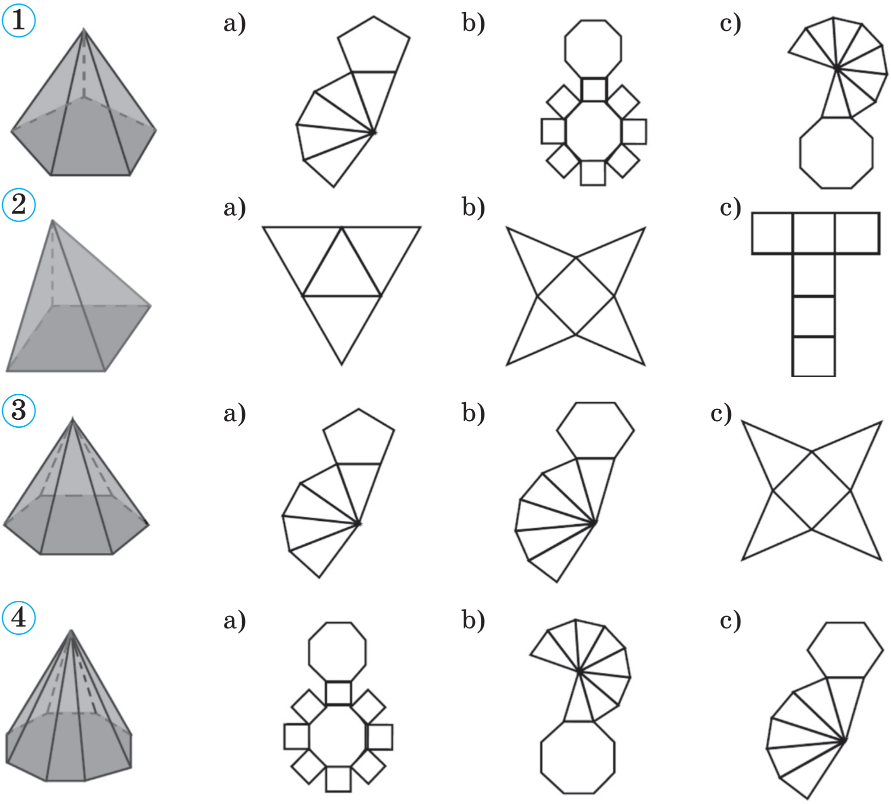
А

Амалий топшириқ

1.78. Картон қоғоздан ёки бошқа материаллардан мунтазам 1) учбурчакли; 2) тўртбурчакли пирамиданинг макетини ясанг.

1.79. Картон қоғоздан мунтазам олтибурчакли 1) пирамиданинг; 2) кесик пирамиданинг ёйилмасини ясаб, ундан мос олтибурчакли пирамидани ва кесик пирамидани ясанг.

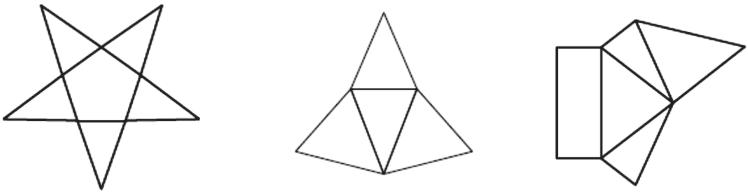
1.80. Пирамидаларнинг тўлиқ номини ва ёйилмасини топинглар (1.41-расм):



1.41-расм

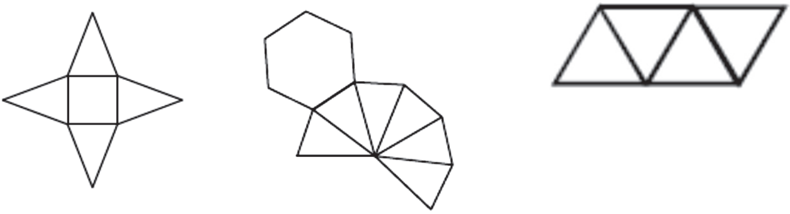
1.81. 1.42-расмдаги ёйилмалари бўйича кўпёқларни аниқланг.

1.82. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг учидаги ёйиқ бурчаги 1) 20°; 2) 30°; 2) 60°; 3) 70 бўлиши мумкинми? Жавобингизни изоҳланг.



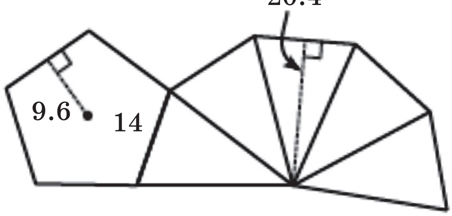
1.42-расм

1.83. 1.43-расмдаги ёйилмалари бўйича кўпёқларни аниқланг.



1.43-расм

1.84. Қирраларининг сони 1) 8; 2) 13; 3) 98; 4) 127 га тенг пирамида бўладими? Бўлса, у неча бурчакли бўлади? Жавобингизни изоҳланг.



1.44-расм

1.85. 1.44-расмдаги кўпёқни турини аниқлаб, унинг ён сирт ва тўла сирт юзаларини топинг.

1.86. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг асос томони a, апофемаси l. Пирамиданинг ён сирт юзасини топинг: 1) a=3 см, l=4 см; 2) a=8 м, l=7 м.

1.87. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг асосидаги икки ёқли бурчаги φ, асос томони a бўлса, пирамиданинг ён сирт юзасини топинг: 1) $\varphi = 45°$, $a = 3\sqrt{2}$ см; 2) $\varphi = 60°$, a=4 м.

1.88. 1.86-масалани мунтазам тўртбурчакли пирамида учун ҳам топинг.

▲ **Берилган:** $PABCD$ – мунтазам тўртбурчакли пирамида. Унинг $ABCD$ асоси – томони a га тенг квадрат, пирамиданинг апофемаси l.

Топиш керак: $S_{\text{ён.с.}}$ — ? 1) a = 3 см, l = 4 см; 2) a = 8 м, l = 7 м.

Ечилиши: $S_{\text{ён.с.}} = p_{\text{асос}} \cdot l \Rightarrow p_{\text{асос}} = p(ABCD) = 4a$.

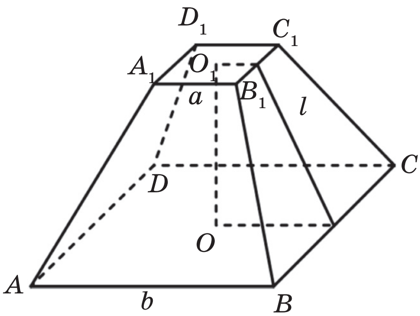
1) $S_{\text{ён.с.}} = p(ABCD) \cdot l = 4a \cdot l = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ (см);

2) $S_{\text{ён.с.}} = p(ABCD) \cdot l = 4a \cdot l = 4 \cdot 8 \cdot 7 = 224$ (м).■

1.89. 1.87-масалани мунтазам олтибурчакли пирамида учун ҳисобланг.

1.90. Икки ён ёқи асосига перпендикуляр бўлган 1) учбурчакли; 2) тўртбурчакли пирамида ясанг. Унинг баландлиги билан асосини топинг.

1.91. Асоси тенг ёнли трапеция, баландлиги трапециянинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи пирамида ясанг.



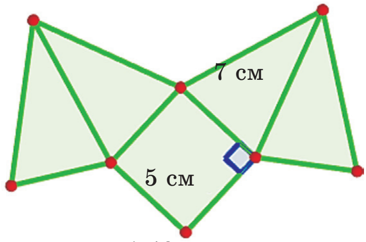
1.45-расм

1.92. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг асосининг томонлари a ва b, l – апофема. Пирамиданинг ён сирт юзасини топинг: 1) a=3 см, b=5 см; l=4 см; 2) a=8 м, b=12 м; l=5 м (1.45-расм).

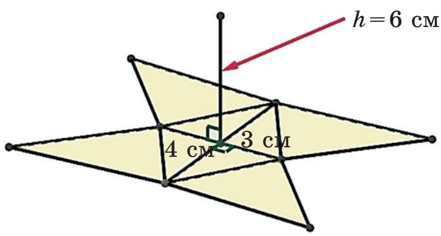
1.93. 1.92-масалани мунтазам учбурчакли кесик пирамида учун ҳисобланг.

1.94. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асос томони 8 м, ён қирраси асос текислиги билан 60° ли бурчак ясайди. Пирамиданинг 1) ён қиррасини; 2) ён сирт юзасини топинг.

1.95. Пирамида асоси – томони 5 см га тенг квадрат. Ён қирраси 7 см бўлса, унинг ёйилмасининг юзаси $5\left(5+\sqrt{171}\right)$ см² бўлишини исботланг (1.46-расм).



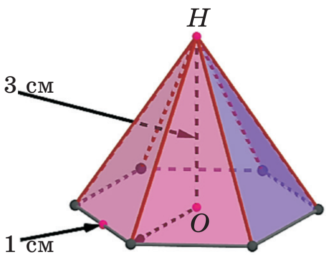
1.46-расм



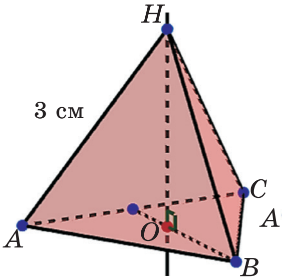
1.47-расм

1.96. Пирамиданинг асоси – диагоналлари 6 см ва 8 см бўлган ромб. Пирамиданинг баландлиги 6 см. Пирамида ёйилмасининг юзаси $8\left(3+\sqrt{305}\right)$ см² бўлишини исботланг (1.47-расм).

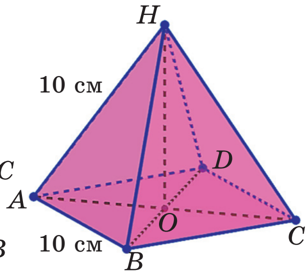
1.97. Пирамиданинг асоси томони 1 см бўлган мунтазам олтибурчак. Пирамиданинг баландлиги 3 см. Пирамиданинг тўла сирт юзаси $S_{т.с.} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{13})$ см^2 бўлишини исботланг (1.48-расм).



1.48-расм



1.49-расм

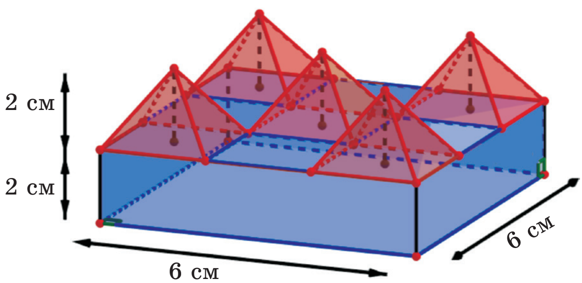


1.50-расм

1.98. Тетраэдрнинг қирраси 3 см. Тетраэдрнинг 1) баландлигини; 2) тўла сирт юзасини топинг (1.49-расм).

1.99. Пирамиданинг асоси квадрат ва барча қирралари ўзаро тенг ва 10 см га тенг. Пирамиданинг тўла сирт юзаси $S_{т.с.} = 25\left(4+\sqrt{3}\right)$ см^2 бўлишини исботланг (1.50-расм).

1.100. Бешта пирамида ва битта тўғри бурчакли параллелепипеднинг композициясидан ташкил топган фигура 1.51-расмда тасвирланган. Параллелепипеднинг асоси – томони 6 см га тенг квадрат. Параллелепипеднинг ва пирамиданинг баландликлари 2 см. Кўпёқнинг тўла сирт юзаси $20\left(5+\sqrt{5}\right)$ см^2 бўлишини исботланг.



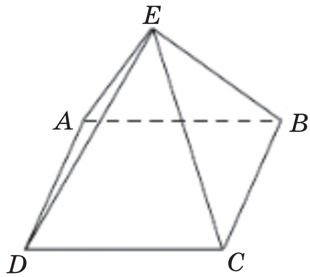
1.51-расм

В

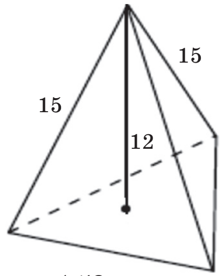
1.101. Мунтазам учбурчакли пирамида асосининг томони 6 см, баландлиги $\sqrt{22}$ см. 1) пирамиданинг апофемасини; 2) асосидаги икки ёқли бурчагини; 3) ён қирраси билан асос текислиги орасидаги бурчакни топинг.

Амалий топшириқ

1.102. Уйнинг том қисми 1.52-расмдаги каби ёпилган. Томнинг ён ёқлари – томони 4 м га тенг мунтазам учбурчаклар. Томнинг баландлигини топинг.



1.52-расм



1.53-расм

1.103. Учбурчакли пирамиданинг асоси – мунтазам учбурчак. Ёқлари – ён томонлари 15 см бўлган тенг ёнли учбурчаклар. Пирамиданинг баландлиги 12 см. Пирамида асосининг томонини топинг (1.53-расм).

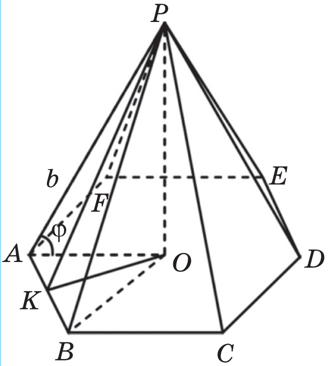
1.104. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асос томони 6 м, апофемаси 5 м. 1) пирамида баландлигини; 2) асосидаги икки ёқли бурчагини; 3) ён қиррасини; 4) ён қирраси билан асоси орасидаги бурчакни; 5) учидаги ёйиқ бурчакни топинг.

1.105. Тўртбурчакли пирамиданинг асоси тенг ёнли трапеция, унга ташқи чизилган айлананинг маркази трапециянинг катта асосида ётади. Пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг бўлса, пирамида баландлигининг бир учи қаерга тушишини топинг.

1.106. 1.105-масалада айлананинг радиуси билан трапециянинг кичик асоси 6 см, пирамиданинг баландлиги 8 см бўлса, унинг тўла сирт юзасини топинг. Трапециянинг катта асосидаги икки ёқли бурчакнинг ўлчовини топинг?

1.107. Пирамиданинг асоси – томонлари 3 см ва 7 см, бир диагонали 6 см бўлган параллелограмм. Пирамиданинг баландлиги 4 см ва у параллелограмнинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтади. Пирамиданинг 1) ён қирралари; 2) тўла сирт юзасини топинг.

1.108. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ён қирраси b ва у асос текислиги билан φ бурчак ясайди. Пирамиданинг 1) баландлигини; 2) асосига ташқи чизилган айлана диаметрини; 3) асос томонини; 4) апофемасини; 5) ён сирт юзасини топинг.



1.54-расм

▲ **Берилган:** $PABCDEF$ – мунтазам олтибурчакли пирамида.

$AP = b$, $\angle PAO = \varphi$ (1.54-расм).

Топиш керак: 1) PO – ? 2) AD – ? 3) AB – ? 4) PK – ? 5) $S_{\text{ён.с.}}$ – ?

▲ **Ечилиши:** 1) $\Delta APO \Rightarrow PO = AP \cdot \sin\varphi = b \cdot \sin\varphi$.

2) $AO = b \cdot \cos\varphi \Rightarrow AD = 2b \cdot \cos\varphi$.

3) ΔABO – тенг томонли.

4) $AB = AO = b \cdot \cos\varphi$.

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} b \cos\varphi .$$

$$\Delta POK \Rightarrow PK = \sqrt{KO^2 + PO^2} = \sqrt{\frac{3}{4} b^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} = \frac{b}{2}\sqrt{4 - \cos^2\varphi}.$$

5) $S_{\text{ён.с.}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot PK \cdot AB = 1{,}5 b^2 \cos\varphi \sqrt{4 - \cos^2\varphi}$. ■

1.109. Пирамиданинг учи кубнинг юқориги ёқининг марказида, асосининг учлари кубнинг пастки ёқи томонларининг ўрталарида жойлашган. Кубнинг қирраси a га тенг бўлса, пирамиданинг тўла сирт юзасини топинг.

1.110. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг асос томонлари 3 см ва 5 см, баландлиги 2 см га тенг. Кесик пирамиданинг диагоналини топинг.

1.111. Мунтазам учбурчакли кесик пирамиданинг асос томонлари 2 см ва 6 см, ён ёқи билан катта асоси орасидаги бурчак 60°. Унинг баландлигини топинг.

1.112. Кесик пирамиданинг асослари периметрларининг нисбати 13:17 каби. Баландлигининг ўртаси орқали ва асосларига параллел текислик уни периметри 45 см бўлган кўпбурчак бўйлаб кесиб ўтади. Кесик пирамида асосларининг периметрини топинг. Бу неччи бурчакли кесик пирамида бўлиши мумкин?

1.113.* Ён қирралари ўзаро тенг учбурчакли кесик пирамиданинг асослари – тўғри бурчакли учбурчаклар. Пирамиданинг гипотенузалар орқали ўтувчи ён ёқи асос текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг.

1.114. Пирамиданинг асоси – тенг ёнли трапеция. Трапециянинг баландлиги 5 см, асослари 6 см ва $4\sqrt{6}$ см. Пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг ва 13 см бўлса, пирамиданинг баландлигини топинг.

1.115. Пирамиданинг асоси – квадрат. Пирамиданинг битта ён қирраси квадратнинг томонига тенг ва асос текислигига перпендикуляр. Энг узун ён қирраси 12 см. Пирамиданинг баландлигини топинг.

1.116. Кесик пирамиданинг асоси – томонлари 4 ва 2 га тенг мунтазам учбурчаклар. Кесик пирамиданинг ён қирраси 2 га тенг бўлса, унинг баландлиги билан апофемасини топинг.

C

1.117. Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамидага бир ёқи кесик пирамиданинг кичик асоси билан устма-уст тушадиган, унга қарама-қарши ёқи катта асосда ётувчи ички куб чизилган. Кубнинг қирраси a, кесик пирамиданинг кичик асосининг томони катта асосининг томонидан 2 марта кам. Пирамиданинг ён сирт юзасини топинг.

1.118. n бурчакли пирамиданинг барча ёйиқ бурчакларининг йиғиндисини топинг.

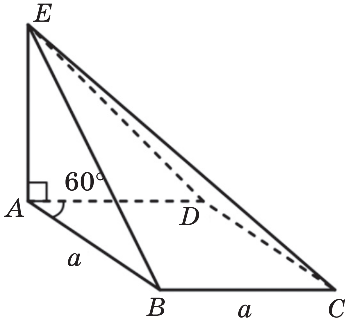
1.119. Мунтазам n бурчакли пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан φ бурчак ясайди. Пирамиданинг ён қирраси билан асоси орасидаги бурчакни топинг.

1.120. Кесик пирамиданинг асосларининг юзалари S_1 ва S_2. Унинг баландлигининг ўртаси орқали асосларига параллел ўтувчи текислик билан кесик пирамиданинг кесишишидан ҳосил бўлган кўпбурчакнинг юзасини топинг.

1.121. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асос томони a, қўшни икки ён ёқи орасидаги бурчак φ га тенг бўлса, пирамиданинг ён сирт юзасини топинг.

1.122. Пирамиданинг асоси – ўткир бурчаги $60°$ га тенг ромб. Ромбнинг томони билан пирамиданинг баландлиги a ва баландлигининг бир учи ромбнинг ўткир бурчагининг учига устма-уст тушади. Пирамиданинг ён сирт юзасини топинг (1.55-расм).

1.123.* Пирамиданинг барча ён ёқлари билан асос орасидаги икки ёқли бурчаклар ўзаро тенг бўлса, пирамида асосидаги кўпбурчакка ички айлана чизиш мумкинлигини ва пирамиданинг баландлиги шу айлананинг маркази орқали ўтишини исботланг.



1.55-расм

Такрорлашга доир топшириқлар

1.124.* 1) $ABCD$ параллелограммнинг периметри 26 м. ABC бурчаги 120°. BCD учбурчагига ички чизилган айлананинг радиуси $\sqrt{3}$ м. Параллелограммнинг AD томони AB томонидан узун бўлса, параллелограммнинг томонларини топинг.

2) ABC учбурчагининг юзаси $15\sqrt{3}$ м², $\angle BAC = 120°$. ABC бурчаги ACB бурчагидан катта. Учбурчакнинг A учидан учбурчакка ички чизилган айлана радиусигача бўлган масофа 2 м бўлса, учбурчакнинг B учидан ўтказилган медианасининг узунлигини топинг.

1.4. Кўпёқларнинг текислик билан кесими. Мунтазам кўпёқлар

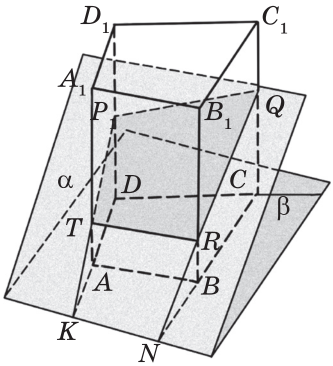
Бу бўлимда кўпёқнинг кесимларини чизиб, уларга тегишли масалаларни ечишни ўрганасизлар. Бўлим сўнгида:

- **кўпёқнинг текислик билан кесимларини чиза оласизлар;**
- **мунтазам кўпёқнинг таърифи билан танишиб, уларни турларини ажрата оласизлар.**

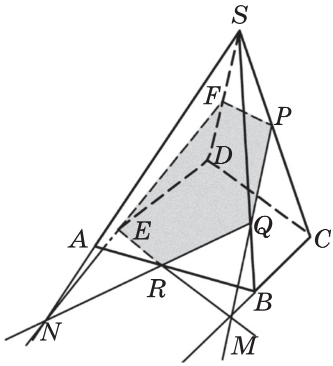
1.4.1. Кўпёқнинг кесимлари

Фазода Φ кўпёғи билан α текислигининг кесишишидан ҳосил бўлган фигура, берилган кўпёқнинг ***кесими***, α эса ***кесувчи текислик*** дейилади. Қавариқ кўпёқларнинг ихтиёрий кесими – қавариқ кўпбурчак. α текислиги билан кўпёқнинг ёқи орқали ўтувчи текисликнинг (кўпёқнинг қирраси орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг) кесишиш тўғри чизиғига (нуқтасини) кесувчи текисликнинг ***изи*** деб аталади. Масалан, 1.56-расмда тўртбурчакли призма билан α текислигининг кесими тасвирланган.

Бу ерда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призманинг α текислиги билан кесиб ўтганда $PQRT$ кесими келиб чиқади. P, Q, R ва T нуқталари – α текислигининг мос равишда DD_1, CC_1, BB_1 ва AA_1 қирраларидаги излари, N нуқтаси – α текислигининг BC тўғри чизиғидаги изи. Шу каби QR тўғри чизиғи – α текислигининг BB_1C_1C ёқи орқали ўтувчи текисликдаги изи, KN тўғри чизиғи – асос текислигидаги изи. Бундан кесувчи текисликнинг бошқа текисликдаги изини топиш учун шу изга тегишли икки нуқтанинг жойини билиш етарли.



1.56-расм



1.57-расм

1-масала.

▲ $SABCD$ тўртбурчакли пирамиданинг AB, BS ва CS қирраларида мос равишда R, Q ва P нуқталари берилган. Пирамиданинг P, Q, R нуқталари орқали ўтувчи текислик билан ҳосил бўладиган кесимни чизиш керак (1.57-расм).

Ечилиши. Бу кесимни чизиш учун α текислигининг пирамидани кесиб ўтадиган ёқларидаги изларини аниқлаймиз. Бунинг учун α текислиги билан пирамида қирраларининг кесишиш нуқталарини аниқласак, етарли.

Берилгани бўйича α текислиги пирамиданинг SC, SB ва AB қирраларини мос равишда P, Q ва R нуқталарида кесиб ўтади, яъни SBC ёқини PQ кесмаси бўйлаб, SAB ёқини эса QR кесмаси бўйлаб кесиб ўтади. Энди α текислигининг асос текислиги билан кесишиш тўғри чизиғини аниқлаш керак. Бу тўғри чизиққа тегишли биттагина нуқтанинг жойи белгили: $R \in \alpha \cap AB$. Шу тўғри чизиқнинг иккинчи нуқтаси (M) PQ ва BC тўғри чизиқларининг кесишиш нуқталари бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $M = BC \cap PQ$ бўлса, $BC \subset SBC$, $PQ \subset SBC$. Иккинчи томондан, $M \in BC \subset (ABCD)$ ва $M \in PQ \subset \alpha$ бўлганлигидан, M нуқтаси α билан $ABCD$ асос текислигининг кесишиш тўғри чизиғида ётади. Бундан, MR тўғри чизиғи – α текислигининг асос текислигидаги изидир. У ҳолда $E = MR \cap AD$. Шу каби $F = \alpha \cap SD$ нуқтасини топамиз (1.57-расм). Бизга керакли кесим – $PQREF$. ■

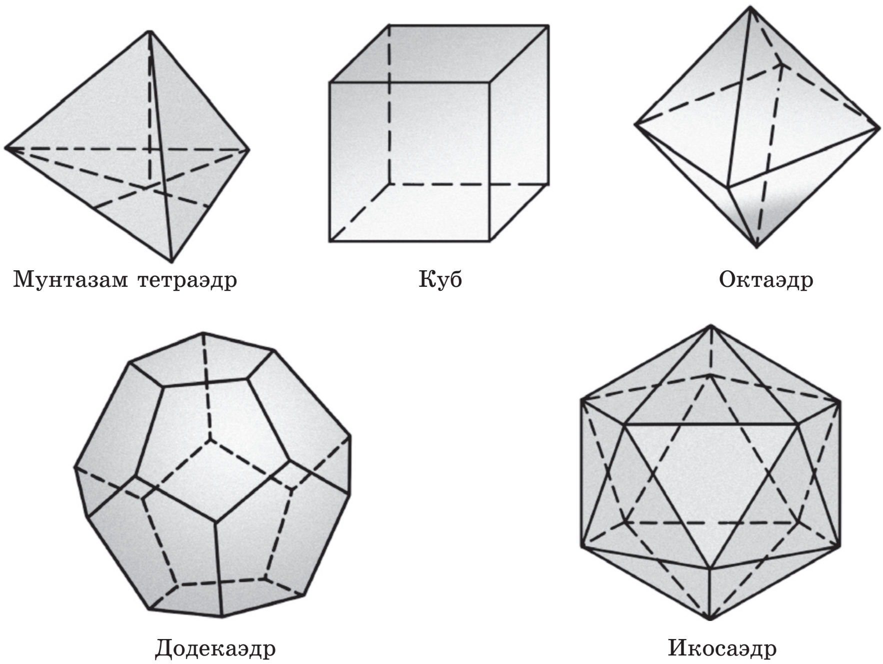
1.4.2 Мунтазам кўпёқлар

Қавариқ кўпёқнинг барча ёқлари ўзаро тенг мунтазам кўпбурчаклар ва барча учларида туташган қирраларининг сони бирдай бўлса, бундай кўпёққа ***мунтазам кўпёқ*** дейилади.

Умуман, мунтазам кўпёқларнинг бешта тури мавжуд. 1.58-расмда мос равишда ***мунтазам тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр*** ва ***икосаэдр*** тасвирланган.

Мунтазам тетраэдрнинг барча ёқлари ўзаро тенг мунтазам учбурчаклар ва унинг ҳар бир учида учта қирраси туташади. Демак, мунтазам тетраэдр – барча қирралари ўзаро тенг учбурчакли пирамида. Мунтазам тетраэдрни мунтазам учбурчакли пирамида билан адаштирмаслик керак. Мунтазам учбурчакли пирамидаларда учта ён ёқи бирдай тенг ёнли учбурчаклар бўлгани билан улар асосидаги тенг томонли учбурчакка тенг бўлавермайди.

Куб – бизга пастки синфлардан маълум бўлган мунтазам кўпёқ. Унинг ёқлари – ўзаро тенг квадратлар, ҳар бир учида эса учта қирраси туташади. Умуман, куб ёрдамида мунтазам тетраэдр билан октаэдрни ясашга бўлади. 1.59-расмда кубнинг қарама-қарши ёқларининг айқаш диагоналлари ёрдами билан мунтазам тетраэдрни чизиш ва куб ёқларининг ҳар бирининг марказлари орқали октаэдрни чизиш усуллари кўрсатилган.

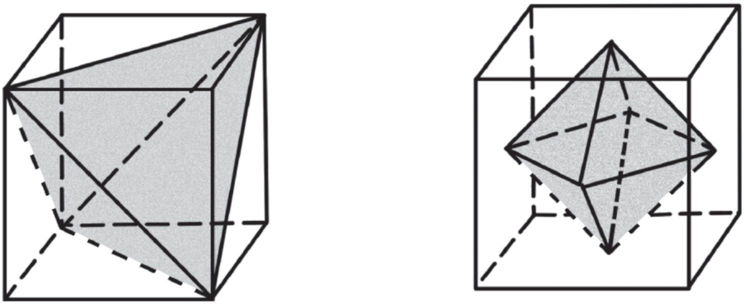


1.58-расм

Октаэдр – ўзаро бирдай саккиз тенг томонли учбурчаклар билан чегараланган фигура. Унинг олтита учи, 12 та қирраси бор ва ҳар бир учида 4 қирраси туташади.

Додекаэдр 12 та мунтазам ўзаро тенг бешбурчаклардан ташкил топган фигура.Унинг ҳар бир учида 3 та қирраси туташади.

Икосаэдр – 20та бирдай тенг томонли учбурчаклардан ташкил топган фигура ва унинг ҳар бир учида 5 та қирраси туташади.



1.59-расм

• ***Қўшимча электронли ресурслар***
https://vuzlit.ru/930013/istoricheskie_svedeniya_pravilnyh_mnogogrannikah

1. Кўпёқнинг кесими деб, нимага айтилади? Кесувчи текислик деганда нимани тушунасиз?
2. Кесувчи текисликнинг кўпёқ юзасидаги (қирраларидаги) изи деганда нимани тушинасиз?
3. Қандай кўпёқларга мунтазам кўпёқлар дейилади? Уларнинг неча хил тури мавжуд?
4. Мунтазам учбурчакли пирамида билан мунтазам тетраэдрнинг қандай фарқи бор?

МАСАЛАЛАР

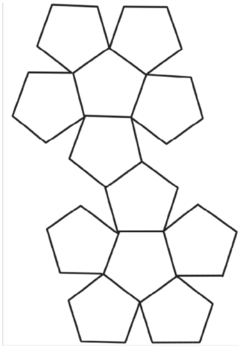
А

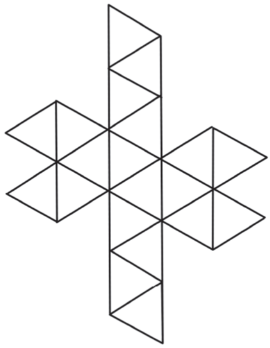
Амалий топшириқ (125 – 127):

1.125. Картон қоғоздан 1) мунтазам тетраэдр; 2) куб; 3) октаэдр ёйилмасини ясаб, ундан мос фигурани ташкил қилинг.

1.126. Тахтадан тўғри бурчакли параллелепипед макетини ясаб, уни ихтиёрий бир кесувчи текислик бўйлаб арра билан кесинг.

1.127. 1.60-расмда кўрсатилган ёйилмалар ёрдамида картон қоғоздан додекаэдр билан икосаэдр макетларини ясанг. Бу ерда, олдинроқ картонга кўрсатилган ёйилмаларни каттароқ масштаб билан чизиб олинг.





1.60-расм

1.128. Халқнинг орасида туз номи билан маълум бўлган натрий хлориди молекуласининг атомлари октаэдрнинг учларида жойлашган. Кристалл қурилмада молекулаларнинг қирралари умумий. Натрий хлориднинг бир молекуласи билан умумий қирраси мавжуд бўлган қўшни молекулалар сонини аниқланг (1.61-расм).

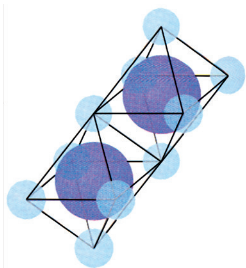
▲ Натрий хлориднинг бир молекуласи билан умумий қирраси мавжуд бўлган қўшни молекулалар сонини аниқлаш керак. Молекуланинг қурилмаси октаэдр сингари бўлганлигидан, унинг 8 та ёқи ва 6 та учи мавжуд. Эйлер теоремаси бўйича

$$n - m + k = 2,$$

n – кўпёқ учларининг сони, m – қирраларининг сони, k – унинг ёқларининг сони.

$$\Rightarrow 6 - m + 8 = 2 \Rightarrow m = 12.$$

Демак, натрий хлоридининг бир молекуласи билан умумий қирраси мавжуд бўлган қўшни молекулалар сони 12. ■



1.61-расм

1.129. Кубнинг қирраси 1) 5 см; 2) 8 см; 3) $3\sqrt{2}$ м га тенг бўлса, унинг диагонал кесимининг юзасини топинг.

1.130. Кубнинг бир учида туташувчи икки ёқи диагоналларининг орасидаги бурчакни топинг.

1.131. Учлари куб ёқларининг марказларида жойлашган кўпёқ мунтазам кўпёқ бўла оладими? Бу қанақа мунтазам кўпёқ?

1.132. Октаэдр қандай икки мунтазам тўртбурчакли пирамидалардан ташкил топган? Бу пирамиданинг баландлигини асос томонига нисбати қандай?

1.133. Учлари 1) мунтазам тетраэдр; 2) октаэдр қирраларининг ўрталарида жойлашган жисм мунтазам кўпёқ бўла оладими? Бўлса, у қандай кўпёқ?

1.134. Қирраси 1) 5 см; 2) 12 см бўлган октаэдрнинг диагонал кесимининг юзасини топинг.

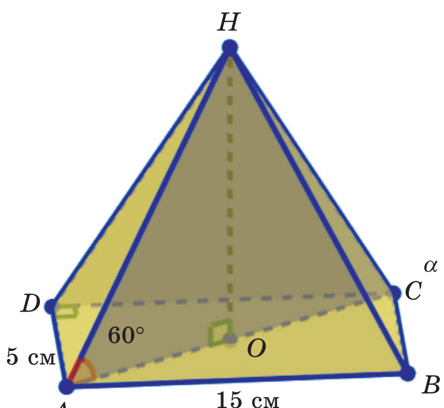
1.135. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AB қирраси орқали ўтувчи $ABCD$ асоси билан 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° ли бурчак ҳосил қиладиган кесимни чизинг.

1.136. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призманинг AB қирраси орқали ва 1) C_1 учи орқали; 2) CC_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни чизинг.

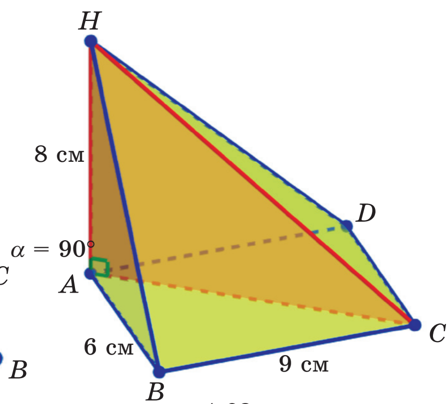
1.137. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг AB қирраси билан SC қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни чизинг. $AB=SA=4$ см бўлса, кесимнинг юзасини топинг.

1.138. 1.62-расмда тасвирланган пирамиданинг асоси – томонлари 5 см ва 15 см бўлган тўғри тўртбурчак. Ён қирралари асос текислиги билан 60° ли бурчак ясайди. AHC кесимининг юзаси $\dfrac{125\sqrt{3}}{2}$ см^2 бўлишини исботланг.

1.139. Пирамиданинг асоси – томонлари 6 см ва 9 см га тенг тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг баландлиги A учига тушади ва 8 см га тенг. AHC кесимининг юзаси $12\sqrt{13}$ см^2 бўлишини исботланг (1.63-расм).

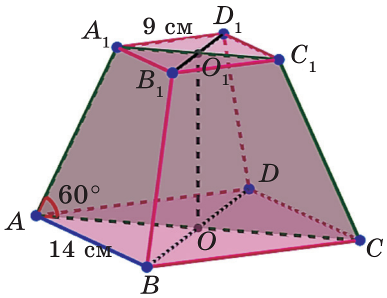


1.62-расм

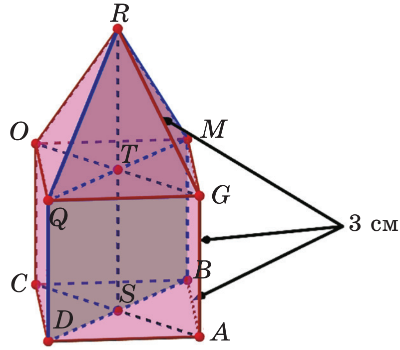


1.63-расм

1.140. Кесик пирамиданинг асослари – томонлари 14 см ва 9 см бўлган квадратлар, ён қирралари асос текислиги билан 60° ли бурчак ясайди. Диагонал кесимининг юзаси $S_{\text{кесим}} = \dfrac{115\sqrt{3}}{2}$ см^2 бўлишини исботланг (1.64-расм).



1.64-расм



1.65-расм

1.141. Куб ва пирамидадан ташкил топган кўпёқ берилган (1.65-расм). Кўпёқнинг барча қирралари 3 см. Диагонал кесимининг юзаси $9\left(0,5+\sqrt{2}\right)$ см^2 бўлишини исботланг.

B

1.142. Тўғри параллелепипеднинг асоси – томонлари 2 см ва 5 см, ўткир бурчаги эса 30° бўлган параллелограмм. Параллелограммнинг кичик томони орқали ўтувчи ва асос текислиги билан 60° ли бурчак ясовчи кесимнинг икки учи параллелепипеднинг ён қирраларида ётади. Ўша кесимнинг юзасини топинг.

1.143. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг қўшни томонларининг ўрталари орқали пирамиданинг асос текислигига перпендикуляр кесим ўтказилган. Пирамиданинг баландлиги h, ён қирраси b ($b>h$) бўлса, кесимнинг юзасини топинг.

1.144. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мунтазам кесик пирамидада AB=12 см, A_1B_1= 4 см. Кесик пирамиданинг баландлиги 4 см га тенг бўлса, ABC_1D_1 кесимнинг юзасини топинг.

1.145. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг қирраси a га тенг. Унинг AB, AD, B_1C_1 ва C_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг ва юзасини топинг.

1.146. Октаэдрнинг барча қирраларининг ўрталари, учлари бўладиган фигура мунтазам кўпёқ бўла оладими? Октаэдрнинг қирраси a га тенг бўлса, шу ҳосил бўлган фигуранинг тўла сирт юзасини топинг.

1.147. Тўртбурчакли тўғри призманинг ён қирраларида ётувчи P, Q ва R нуқталари орқали ўтувчи кесимни чизинг.

1.148. Мунтазам тетраэдрнинг икки ёқли бурчагини топинг.

1.149. Октаэдрнинг $\angle QKP = \varphi$ бўладиган икки ёқли бурчагини топинг (1.66-расм).

▲ **Берилган:** $ABCDPQ$ — октаэдр.

Топиш керак: $\angle QKP = \varphi$ – ?

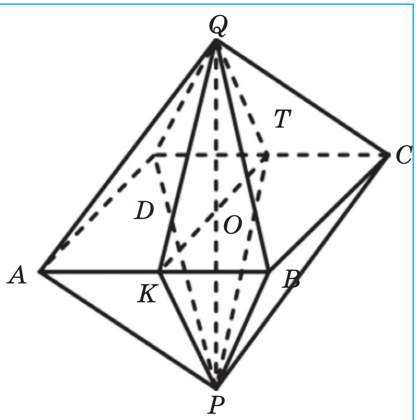
Ечилиши: $PKQT$ – ромб.

$KT = a,\ KO = \dfrac{a}{2}.$

$\Delta\, AQB$ – тенг томонли.

$QK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a.\ \{KOQ \Rightarrow QO =$

$= \sqrt{QK^2 - KO^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow PQ = \sqrt{2}\cdot a.$



1.66-расм

Косинуслар теоремасига кўра

$PQ^2 = KQ^2 + KP^2 - 2 \cdot KQ \cdot KP \cdot \cos\varphi,$

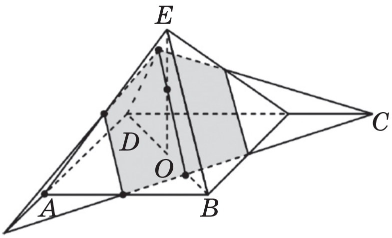
$$\cos\varphi = \frac{2\cdot\frac{3}{4}a^2 - 2a^2}{2\cdot\frac{3}{4}a^2} = -\frac{1}{3},\quad \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Жавоб: $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$. ■

1.150. Кесик пирамида асосларининг юзалари 2 см^2 ва 32 см^2. Баландлиги ўзаро тенг уч бўлакка бўлинган. Шу бўлиниш нуқталари орқали асосларига параллел текисликлар билан чегараланган кесимнинг юзасини топинг.

C

1.151. Қирраси a га тенг октаэдрнинг қарама-қарши ёқлари параллел бўлишини исботлаб, уларнинг орасидаги масофани топинг.



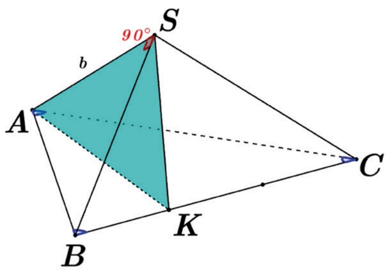
1.67-расм

1.152. Ҳар бир қирраси a га тенг мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асосидаги иккита қўшни томонининг ўртаси билан пирамида баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни чизинг ва унинг юзасини топинг (1.67-расм).

1.153. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги h ва у ён қирраси билан φ бурчак ясайди. Пирамида асосининг диагонали орқали асос текислиги билан γ бурчак ҳосил қиладиган кесимнинг юзасини топинг.

1.154.* Агар мунтазам учбурчакли пирамиданинг ҳар бир учидаги ёйиқ бурчакларининг йиғиндиси 180° бўлса, жисмнинг мунтазам тетраэдр бўлишини исботланг.

1.155. Мунтазам $SABC$ пирамидада $AS=b$, $\angle ASB=90^\circ$, ΔABC – тенг томонли ва K нуқтаси BC қиррасини 1:2 каби нисбатда бўлади, яъни $BK:KC=1:2$. ASK учбурчакнинг юзасини топинг (1.68-расм).



1.68-расм

▲**Берилган:** $SABC$ – мунтазам пирамида, $AS=b$, $\angle ASB=90^\circ$, $BK:KC=1:2$.

Топиш керак: S_{ASK} – ?

Ечилиши:

1) $\Delta ASB \Rightarrow AS = b,\ BS = b \Rightarrow AB = \sqrt{2b}$.

$BC = \sqrt{2}\cdot b \Rightarrow BK = \dfrac{\sqrt{2}}{3}b,\ \angle B = 60^\circ.$

Косинуслар теоремасига кўра

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2AB\cdot BK\cdot\cos 60^\circ = 2b^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{4}{3}b^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{14}{9}b^2 \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{14}}{3}b.$$

2) $\Delta BSK \Rightarrow BK = \dfrac{\sqrt{2}}{3}b$, $\angle SBK = 45^\circ$,

$AK=\dfrac{\sqrt{14}}{3}b$. Косинуслар теоремасига кўра

$$SK^2 = BS^2 + BK^2 - 2BS\cdot BK\cdot \cos 45^\circ = b^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}b^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{9}b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SK = \frac{\sqrt{5}}{3}b.$$

3) $\Delta ASK \Rightarrow AS = b,\ AK = \dfrac{\sqrt{14}}{3}b,\ SK = \dfrac{\sqrt{5}}{3}b \Rightarrow$

ΔASK нинг ярим периметри

$p = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{\sqrt{14}}{3}b + \dfrac{\sqrt{5}}{3}b\right) = \dfrac{b}{6}\left(3 + \sqrt{14} + \sqrt{5}\right) \Rightarrow$ Герон формуласига кўра

$$S_{ASK} = \sqrt{p(p - AS)\cdot(p - AK)\cdot(p - SK)} =$$

$$= \sqrt{\frac{b}{6}\left(3 + \sqrt{14} + \sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{14}}{6}b + \frac{\sqrt{5}}{6}b - b\right)} \times$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{14}}{6}b + \frac{\sqrt{5}}{6}b - \frac{\sqrt{14}}{3}b\right)\cdot\left(\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{14}}{6}b + \frac{\sqrt{5}}{6}b - \frac{\sqrt{5}}{3}b\right)} =$$

$$= \left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{14} + \sqrt{5} + 3\right)\cdot\left(\sqrt{14} + \sqrt{5} - 3\right)\cdot\left(3 + \sqrt{5} - \sqrt{14}\right)\cdot\left(3 + \sqrt{14} - \sqrt{5}\right)} =$$

$$= \left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(\left(\sqrt{14} + \sqrt{5}\right)^2 - 9\right)\left(9 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{14}\right)^2\right)} =$$

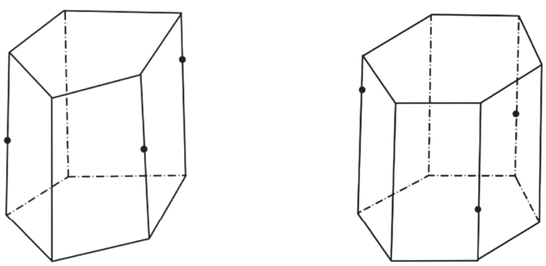
$$= \left(\frac{b}{6}\right)^2\sqrt{\left(10 + 2\sqrt{70}\right)\cdot\left(2\sqrt{70} - 10\right)} = \frac{b^2\sqrt{180}}{36} = \frac{b^2\sqrt{5}}{6}.$$

$$S_{ASK} = \frac{b^2\sqrt{5}}{6}.$$ ■

1.156. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг асоси томони a га тенг квадрат, ён қирраси b га тенг. AA_1 қирраси ва у билан бир учида туташувчи қирралари билан ўзаро тенг φ бурчак ясайди. Параллелепипеднинг диагонал кесимининг юзасини топинг.

1.157. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг A_1BD кесими унинг AC_1 диагоналини 1:2 каби нисбатда бўлишини исботланг.

1.158. 1.69-расмда тасвирланган тўғри призмаларнинг белгиланган учта нуқтаси орқали ўтувчи кесимларни чизинг.



1.69-расм

Такрорлашга доир топшириқлар

1.159. 1) Тенг ёнли трапецияга ички айлана чизилган. Айлана радиуси 2, трапециянинг юзаси 20 га тенг бўлса, трапециянинг катта асосини топинг.

2) Тенг ёнли трапецияга ички айлана чизилган. Айлана радиуси 3, трапециянинг катта асоси 18 га тенг бўлса, трапециянинг кичик асосини топинг.

Терминларнинг аталиш луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Кўпёқ	Көпжақ	Многогранник	Polyhedron
Призма	Призма	Призма	Prism
Параллелепипед	Параллелепипед	Параллелепипед	Parallelepiped
Пирамида	Пирамида	Пирамида	Pyramid
Кесик пирамида	Қиық пирамида	Усеченная пирамида	Truncated pyramid
Мунтазам кўпёқ	Дұрыс көпжақ	Правильный многогранник	Regular polyhedron
Ён сирт юзаси	Бүйір бетінің ауданы	Площадь боковой поверхности	Surface area
Кўпёқнинг ёйилмаси	Көпжақтың жазбасы	Развертка многогранника	Net of a polyhedron
Кўпёқнинг асоси	Көпжақтың табаны	Основание многогранника	Base of a polyhedron
Кўпёқнинг учлари	Көпжақтың төбелері	Вершины многогранника	Vertices of a polyhedron

«КЎПЁҚЛАР» бўлимининг хулосаси

1) **Ихтиёрий қавариқ кўпёқли бурчакнинг учидаги ёйиқ бурчакларининг йиғиндиси 360° дан кичик ва ҳар бир ёйиқ бурчаги бошқа ёйиқ бурчакларининг йиғиндисидан кичик.**
2) Ф чекланган фигуранинг барча чегаравий нуқталар тўплами унинг ***сирти***, Ф фигурасининг барча ички нуқталар тўплами билан унинг ***сирт*** қисмида жойлашган нуқталар тўпламини ***геометрик жисм*** деб аталади.
3) ***Кўпёқлар*** деб, сирти саноқли кўпбурчаклардан ташкил топган геометрик жисмга айтилади. Кўпёқ сиртидагиҳар бир

кўпбурчакни унинг ***ёқи***, шу кўпбурчак томонига кўпёқнинг ***қирраси*** деб аталади. Кўпёқ ёқининг (кўпбурчакнинг) учини кўпёқнинг ***учи***, бир ёқига тегишли бўлмаган икки учини бирлаштирувчи кесмага кўпёқнинг ***диагонали*** дейилади.

4) Агар кўпёқни унинг бир нечта қирралари бўйлаб кесса, ҳосил бўлган кўпбурчакларнинг мажмуасини текисликка жойлаштирганда ҳосил бўлган фигурага, шу кўпёқнинг ***ёйилмаси*** деб аталади.

5) Кўпёқнинг барча ёқларининг юзаларини йиғиндиси унинг ***тўла сирт юзаси*** дейилади. Уни $S_{\text{т.с.}}$ орқали белгилайди.

6) Параллелепипед диагоналлари бир нуқтада кесишишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.

7) Тўғри бурчакли параллелепипед диагоналининг квадрати унинг уч ўлчовининг (эни, узунлиги ва баландлиги) квадратларининг йиғиндисига тенг.

8) Тўғри призманинг ён сирт юзаси унинг баландлигини асосининг периметрига кўпайтмасига тенг.

9) Призманинг тўла сирт юзасини топиш учун, унинг ён сирт юзасини асос юзасини иккиланганига қўшилса, етарли:

$$S_{\text{т.с.}} = S_{\text{ён.с.}} + 2S_{\text{асос}}.$$

10) Агар пирамиданинг асоси мунтазам кўпбурчак бўлса, пирамида баландлигининг бир учи, унинг асосидаги кўпбурчак маркази билан устма-уст тушса, бундай пирамидаларга ***мунтазам пирамидалар*** дейилади. Пирамиданинг ён ёқининг баландлигига унинг ***апофемаси*** дейилади.

11) Мунтазам пирамиданинг ён сирт юзаси унинг апофемасини асосининг ярим периметрига кўпайтмасига тенг, яъни l – апофема, p – ярим периметр бўлса, $S_{\text{ён.с.}} = l \cdot p$.

12) Мунтазам кесик пирамиданинг асосининг ярим периметрлари мос равишда p_1 (кичик асосининг) ва p_2 (катта асосининг) тенг бўлса, у ҳолда кесик пирамиданинг ён сирт юзаси: $\boldsymbol{S_{\text{ён.с.}} = (p_1 + p_2) \cdot l}$. Бу ерда l – апофема.

13) Фазода Ф кўпёқи билан α текислигининг кесишишидан ҳосил бўлган фигура шу кўпёқнинг ***кесими***, α текислиги эса ***кесувчи текислик*** дейилади.

14) Кесувчи текисликнинг изи деб, α текислиги билан кўпёқнинг бир ёнидан ўтувчи текислик билан кесишувчи тўғри чизиғи (нуқтаси).

II бўлим. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАЛАРИНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Бу бўлимда геометриянинг қизиқарли йўналишининг бири – аналитик геометрия усуллари билан танишиб, уларни қўллай олишни ўрганасизлар.

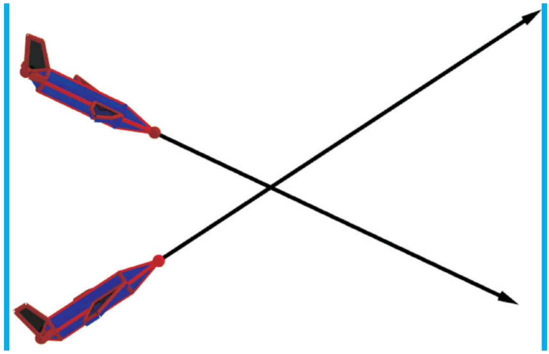
Бўлимда кўриладиган мавзулар:

2.1. Тўғри чизиқ билан текислик тенгламалари

2.2. Фазодаги нуқталар билан текисликларнинг ўзаро жойлашиши

2.3. Фазодаги масофаларни топиш

2.4. Фазодаги бурчакларни топиш



Бўлимни ўқиб ўрганиш давомида сизлар самалётларнинг нима учун тўқнашмаслигини билиб оласизлар.

2.1. Тўғри чизиқ билан текислик тенгламалари

Бўлимни ўқиб ўрганиш давомида фазодаги тўғри чизиқ билан текислик тенгламаларини эсга оласизлар. Мавзу сўнгида:

- **йўналтирувчи вектор бўйлаб тўғри чизиқ тенгламасини ва нормал вектор бўйлаб текислик тенгламасини ёзиб, уни қўллай оласизлар;**
- **уч нуқта орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзиб, уни қўллашни ўрганасизлар.**

2.1.1. Фазодаги тўғри чизиқ билан текислик тенгламаси

Гуруҳ билан ишлаш

1-топшириқ. 1) Берилган $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва $\vec{p}(m; n; k)$ векторига параллел тўғри чизиқ ўтказишга бўладими? Мумкин бўлса, M_0 нуқтаси орқали $\vec{p}$ векторига параллел нечта тўғри чизиқ ўтади?

2) Шу l тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий $M(x; y; z)$ нуқтасини олиб, $\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{p}$ векторлари қандай жойлашганини аниқлаб, тушунтиринглар.

3) Векторларнинг коллинеарлик шарти қандай ёзилади? $\overrightarrow{M_0M}$ вектори координаталарини ёзиб, $\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{p}$ векторларнинг коллинеарлик шартини ёзинглар.

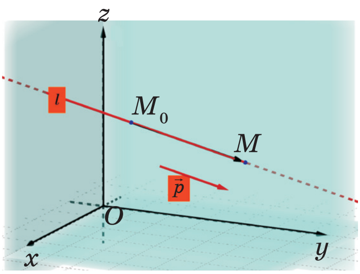
4) Пропорционаллик коэффицентини t орқали белгилаб, коллинеарлик шартини қуйидагича ёзиш мумкинлигини кўрсатинглар:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases}$$

Бу тенглама қандай номланади? $M_0(2; -1; 0)$ ва $\vec{p}(3; 2; 2)$ бўлса, M_0 нуқтаси орқали ўтувчи ва p векторига параллел тўғри чизиқнинг параметрли тенгламасини ёзинглар.

Демак, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва $\vec{p}(m; n; k)$ йўналтирилган векторига параллел l тўғри чизиғининг параметрли тенгламаси қуйидагича бўлади (2.1-расм):

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt. \end{cases} \qquad (1)$$



2.1-расм

(расмнинг йўлланмаси: https://www.geogebra.org/m/cgepxeaw)

Шу системанинг ҳар бир тенгламасидан t ни бошқа ўзгарувчилар орқали ифодалаб, қуйидаги тенгламаларни олиш мумкинлигини кўрсатинг:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \qquad (2)$$

Бу тенгламага тўғри чизиқнинг ***каноник тенгламаси*** дейилади.

Гуруҳ билан ишлаш

2-топшириқ. 1) Берилган $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва $\vec{n}(a;\, b;\, c)$ векторига перпендикуляр текислик ўтказишга бўладими? Мумкин бўлса, нечта текислик ўтади? $\vec{n}$ вектори қандай номланади?

2) Шу α текислигида ётувчи ихтиёрий $M(x;\, y;\, z)$ нуқтаси учун, $\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{n}$ векторлари қандай жойлашган? $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}$ скаляр кўпайтмасининг қийматини топинг?

3) $\overrightarrow{M_0M}$ вектори координаталарини ёзиб, $\vec{n}$ ва $\overrightarrow{M_0M}$ векторларининг перпендикулярлик шартини ёзинглар. Шу ёзилган формулани α текислигининг тенгламаси ўрнида қўллашга бўладими? Бўлса, бу тенглама қандай номланади?

4) $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ тенгламасидан текисликнинг $ax+by+cz+d=0$ кўринишдаги умумий тенгламани қандай олишга бўлади?

5) $M_0(1;\, 2;\, 3)$ ва $\vec{n}(2;-3;4)$ бўлса, унга мос текисликнинг умумий тенгламасини ёзинглар.

Демак, $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи $\vec{n}(a;\, b;\, c)$ векторига перпендикуляр текисликнинг тенгламаси қуйидагича бўлади (2.2-расм):

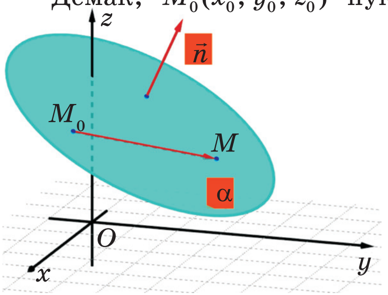
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad (3)$$

$$d=-ax_0-by_0-cz_0$$

бўлса, текисликнинг умумий тенгламаси

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (4)$$

кўринишида ёзилишини кўрсатинглар.



2.2-расм

(https://www.geogebra.org/m/nd7ck4z3)

2.1.2. Уч нуқта орқали ўтувчи текисликнинг тенгламаси

Бизга коллинеар бўлмаган $\vec{p}_1(m_1;\, n_1;\, k_1)$ ва $\vec{p}_2(m_2;\ \ n_2;\, k_2)$ векторлари берилсин.

$$\vec{n}(n_1k_2-n_2k_1;\, k_1m_2-k_2m_1;\, m_1n_2-m_2n_1) \qquad (5)$$

векторини қарайлик.

Гуруҳ билан ишлаш

1) (5) формула бўйича $\vec{p}_1$ ва $\vec{p}_2$ векторлари ёрдами билан $\vec{n}$ векторининг координаталарини аниқланглар; 2) $\vec{n}\cdot\vec{p}_1$ ва $\vec{n}\cdot\vec{p}_2$ скаляр кўпайтмаларни топинглар; 3) Натижасини синф билан бирга таҳлил қилиб, хулоса чиқаринглар. Ҳар доим $\vec{n}\perp\vec{p}_1$ ва $\vec{n}\perp\vec{p}_2$ бўладими? 4) $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи, $\vec{p}_1$ ва $\vec{p}_2$ векторларига параллел α текислиги топиладими? Топилса, бу текислик ягонами? 5) Шу α текислиги тенгламасини қандай ёзиш мумкинлигини тушунтиринглар. Бу ерда $\vec{p}_1$ ва $\vec{p}_2$ векторлари α текислигининг ***йўналтирувчи векторлари*** дейилади.

1-гуруҳ топшириғи:	2-гуруҳ топшириғи:
$\vec{p}_1(1; 2; -1)$, $\vec{p}_2(3; -2; 1)$, $M_0(2; 0; 1)$	$\vec{p}_1(1; 2; 3)$, $\vec{p}_2(-1; 3; 2)$, $M_0(2; -4; 1)$
3-гуруҳ топшириғи:	**4-гуруҳ топшириғи:**
$\vec{p}_1(2; 4; 1)$, $\vec{p}_2(1; 2; -3)$, $M_0(3; 1; 4)$	$\vec{p}_1(2; 5; -3)$, $\vec{p}_2(4; 1; 1)$, $M_0(0; 3; 1)$

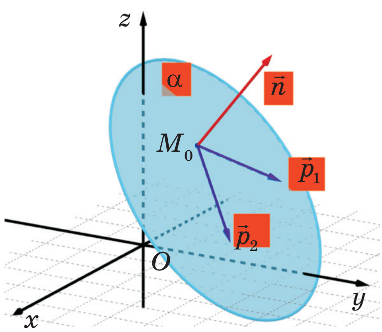
$\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ ва $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторлари (5) формула билан аниқланган $\vec{n}$ векторига перпендикуляр бўлишини исботланг (2.3-расм).

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи, $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ ва $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторларига параллел текисликнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \quad (6)$$

Бу ерда,

$$\begin{cases} a = n_1k_2 - n_2k_1, \\ b = k_1m_2 - k_2m_1, \\ c = m_1n_2 - m_2n_1. \end{cases} \quad (7)$$



2.3-расм

(https://www.geogebra.org/classic/np3tbc8p)

Гуруҳ билан ишлаш

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ва $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ нуқталари орқали ўтувчи текислик тенгламасини ёзинглар. Бунинг учун бир-бирингларга савол бериб, юқорида кўрсатилган усулдагидай M_0 нуқтаси ўрнида қайси нуқтани, $\vec{p}_1$ ва $\vec{p}_2$ векторлари ўрнига қандай векторларни олишингларни аниқлаб, топшириқни бажаринглар.

1-гуруҳ топшириғи:	2-гуруҳ топшириғи:
$M_1(0;\ 7;\ 2)$, $M_2(0;\ 1;\ 6)$, $M_3(-1;\ 5;\ 0)$	$M_1(4;\ -4;\ 10)$, $M_2(4;\ 10;\ -2)$, $M_3(2;\ 8;\ 4)$
3-гуруҳ топшириғи:	**4-гуруҳ топшириғи:**
$M_1(6;\ 6;\ -5)$, $M_2(4;\ -9;\ 5)$, $M_3(4;\ 6;\ -1)$	$M_1(7;\ 2;\ 2)$, $M_2(4;\ -2;\ 4)$, $M_3(2;\ 3;\ 7)$

2.1.3. Умумий тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини аниқлаш

Фазодаги ҳар бир тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиши натижасида аниқлашга бўлади. Агар икки текислик $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ тенгламалар билан берилса,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

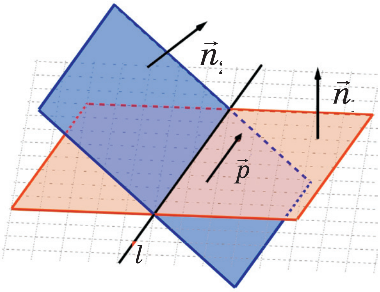
Системаси билан шу текисликларнинг кесишиши натижасида аниқланадиган тўғри чизиқ тенгламаси берилади. (8) тенгламага тўғри чизиқнинг ***умумий тенгламаси*** дейилади.

Гуруҳ билан ишлаш

Умумий тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори ва унга тегишли нуқта координаталарини қандай топиш мумкин? Жавоб бериш учун қуйидаги топшириқларни бажаринглар.

1-гуруҳ топшириғи:	2-гуруҳ топшириғи:
$\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0, \\ 3x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 3x - 2y - 5z - 6 = 0 \end{cases}$

3-гуруҳ топшириғи:	4-гуруҳ топшириғи:
$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 4x+y-3z-3=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-4y-2z+3=0, \\ 3x+y+z-5=0 \end{cases}$



2.4-расм

https://www.geogebra.org/classic/pzrzrhtb

(4) умумий тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторлари

$\vec{p}(b_1c_2-b_2c_1;\ c_1a_2-c_2a_1;\ a_1b_2-a_2b_1)$ (9)

формуласи билан топилади (2.4-расм).

1-мисол.

$$\begin{cases} 2x-5y-7=0, \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

Умумий тенглама билан берилган l тўғри чизиқнинг тенгламасини каноник кўринишда ёзиш керак.

▲ 1) l тўғри чизиғида ётувчи қандайдир M_0 нуқтасининг координатасини топиш керак; 2) (9) формуладан фойдаланиб, $\vec{n}_1(m_1;\ n_1;\ k_1)$ ва $\vec{n}_2(m_2;\ n_2;\ k_2)$ векторларига перпендикуляр бўлган $\vec{p}$ вектори (йўналтирувчи вектор) координаларини топиш керак.

1) Бизга берилган системада иккита тенглама ва учта номаълум мавжуд. Шунинг учун бир номаълумнинг қийматини ихтиёрий танлаб оламиз. Айтайлик, $z=0$ бўлсин. У ҳолда берилган система қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} 2x-5y=7, \\ x+3y=-2 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=-1,$$

$M_0(1;\ -1;\ 0)$ нуқтаси l тўғри чизиғида ётади.

2) $\vec{n}_1(2;\ -5;\ 0)$ ва $\vec{n}_2(1;\ 3;\ 4)$ бўлганлигидан,

$$\vec{p}(-5\cdot 4-0\cdot 3;\ 0\cdot 1-4\cdot 2;\ 2\cdot 3-(-5)\cdot 1)=(-20;\ -8;\ 11).$$

$\vec{p}(-20;\ -8;\ 11)$ вектори – l тўғри чизиғининг йўналтирувчи вектори. l тўғри чизиғининг каноник кўринишдаги тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x-1}{-20}=\frac{y+1}{-8}=\frac{z}{11}.$$ ■

1. Тўғри чизиқнинг каноник кўринишидаги тенгламаси қандай бўлади? Мисол келтириб, йўналтирувчи вектори ва унга тегишли нуқтанинг координаталарини топинг.
2. Нормал вектор билан берилган текислик тенгламаси қандай бўлади? Мисол келтиринг.

3. Текисликнинг умумий тенгламаси қандай бўлади? Мисол орқали унинг нормал векторини ёзиб кўрсатинглар.
4. Берилган икки коллинеар бўлмаган векторларга перпендикуляр векторнинг координаталари қандай топилади? Мисол келтиринг.
5. Уч нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламасини келтириб чиқариш усулини таҳлил қилиб, тушунтиринг. Мисол келтиринг.
6. Умумий тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори ва унга тегишли нуқтанинг координаталарини топишни тушунтиринг. Мисол келтиринг.

МАСАЛАЛАР

А

2.1. Берилган тўғри чизиққа тегишли ва унга тегишли бўлмаган нуқталарнинг координаталарини топинг:

1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{5}$; 2) $\frac{x}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{7}$;

3) $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1+t, \\ z=1-t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=3+2t \\ z=2-2t. \end{cases}$.

2.2. Аввалги масалада берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини топинг.

2.3. Берилган текисликка тегишли ва унга тегишли бўлмаган нуқталарнинг координаталарини топинг:

1) $x+2y-z-2=0$; 2) $5x-y+4z+3=0$;
3) $2x-y+z-3=0$; 4) $2y+z+3=0$.

2.4. Аввалги масалада берилган текисликнинг нормал векторини топинг.

2.5. Берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг коллинеар эмаслигини кўрсатиб, уларнинг иккаласига ҳам перпендикуляр бўлган $\vec{n}$ векторининг координаталарини топинг:

1) $\vec{a}(1; 2; -2)$, $\vec{b}(3; 0; 4)$; 2) $\vec{a}(0; 3\ 4)$, $\vec{b}(2; 5; 4)$;

3) $\vec{a}(1; 3; -2)$, $\vec{b}(2; 1; 1)$; 4) $\vec{a}(-2; 1; 4)$, $\vec{b}(1; -2; 3)$.

2.6. Берилган тўғри чизиққа тегишли ва тегишли бўлмаган нуқталарнинг координаталарини топинг:

1) $\begin{cases} x+y-z-5=0, \\ 2x-y-3z-13=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y+9z-3=0, \\ 2x+y-5z+8=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y - z - 5 = 0, \\ 2y - 3z + 9 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + z - 4 = 0, \\ y - z - 1 = 0. \end{cases}$

B

2.7. 2.5-масаланинг шартида $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларига параллел бўлган ва $M_0(-2;\ 3;\ 0)$ нуқтаси орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

2.8. 2.6-масала шартида берилган тўғри чизиқнинг (1) формула ёрдамида йўналтирувчи векторнинг координаталарини топинг ва бу тўғри чизиқнинг каноник кўринишидаги тенгламасини ёзинг.

2.9. (5) ва (6) формулалар ёрдамида берилган уч нуқта орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг:

1) $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2; 1; 4)$, $M_3(-2; 0; 2)$;

2) $M_1(-3; 1; -2)$, $M_2(-2; 0; 3)$, $M_3(1; 1; -1)$;

3) $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(0; 1; 4)$, $M_3(2; -2; 0)$;

4) $M_1(1; 2; -2)$, $M_2(3; 0; 4)$, $M_3(0; 3; -4)$.

2.10. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг учларининг координаталари берилган: $A\ (1;\ -2;\ 5)$, $B\ (-3;\ 0;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (-2;\ 1;\ 4)$. 1) ABC ва ABD ёқларининг тенгламаларини ёзинг; 2) AB тўғри чизиғининг умумий тенгламаси ёзинг ва бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини топинг; 3) топилган векторнинг $\overrightarrow{AB}$ вектори билан коллинеар бўлишини исботланг. Хулоса қилинг.

2.11. Аввалги масала шартида AB тўғри чизиғининг тенгламасини икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ формуласи бўйича ёзиб, шу каноник тенглама бўйича AB тўғри чизиғининг умумий тенгламасини келтиринг. Бу келтирилган тенглама аввалги масалада келтирилган AB нинг умумий тенгламаси билан бир хил бўлмаслик сабабини тушунтиринг.

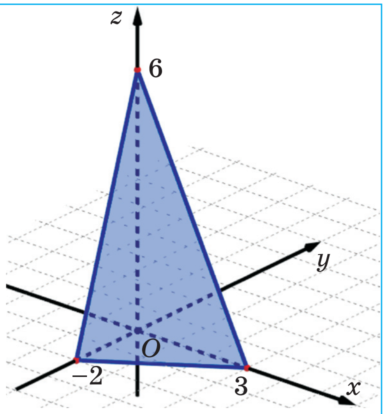
2.12. 2.10-масала шартида пирамиданинг ҳар бир учидан қарама-қарши ёқига туширилган баландлиги орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини келтиринг.

2.13. Текисликнинг тенгламасини кесманинг тенгламаси кўринишида ёзинг ва унинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг:

1) $2x - 3y + z - 6 = 0$; 2) $x + y - 2z - 4 = 0$;

3) $x - 5y + 2z + 10 = 0$; 4) $3x - y + z - 6 = 0$.

1) ▲ 10-синфда $ax + by + cz + d = 0$ кўринишдаги умумий тенглама билан берилган текисликнинг тенгламасини $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$, кўринишида, яъни кесманинг тенгламаси кўринишида ёзиш мумкинлигини кўрсатганмиз. Бунинг учун $d \neq 0$ бўлган ҳолатда берилган умумий тенгламани d сонига бўлса, етарли.



2.5-расм
https://www.geogebra.org/classic/bwcy9d4n

$$2x - 3y + z - 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + z = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1.$$

Бундан, текислик координата ўқларини $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -2;\ 0)$ ва $C(0;\ 0;\ 6)$ нуқталарида кесиб ўтишини кўрамиз (2.5-расм). ■

2.14. $M_0(5;\ -4;\ 7)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва 2.6-расмда берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқнинг каноник кўринишидаги тенгламасини ёзинг.

C

2.15. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = 0, \\ 3x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ тўғри чизиғи орқали ўтувчи ва $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{4}$ тўғри чизиғига параллел текисликнинг тенгламасини ёзинг.

2.16. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$ тўғри чизиғи билан $x = -1 - t$, $y = 8 - 2t$, $z = 2 + t$ кўрсатиб, параметрли тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг кесишишини кўрсатиб, шу тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

2.17.* $M_0(2;\ 1;\ 3)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва координата ўқларидан бирдай кесмалар кесиб ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

Такрорлашга доир топшириқлар

2.18. *Oxy* текислигида берилган тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашишини топинг:

1) $x - 2y + 8 = 0$ ва $5x - y = 0$;

2) $x - 2y + 8 = 0$ ва $x = 2y$;

3) $2x - 4y = 16$ ва $x = 2y + 8$.

2.19. $M_1(1;\ 2)$ ва $M_2(3;\ 4)$ нуқталари орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

2.20. $M_1(1;\ 2)$ ва $M_2(3;\ 4)$ нуқталари берилган. M_1M_2 кесмасининг ўрта перпендикуляри тенгламасини ёзинг.

2.2. Фазодаги тўғри чизиқлар билан текисликларнинг ўзаро жойлашиши

Мавзуни ўқиб ўрганиш давомида фазодаги тўғри чизиқлар билан текисликларнинг ўзаро жойлашишини текшириб, текислик билан тўғри чизиқ тенгламаларини қўллашни ўрганасизлар. Мавзу сўнгида:

- **тенгламаларига асосланиб, фазодаги тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашиш ҳолатларини аниқлай оласизлар;**
- **тенгламаларига асосланиб, фазода икки текисликнинг ўзаро жойлашиш ҳолатларини аниқлай оласизлар;**
- **тенгламаларига асосланиб, фазода икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашиш ҳолатларини аниқлай оласизлар.**

2.2.1. Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашиши

Гуруҳ билан ишлаш

1) Фазода l тўғри чизиғи билан α текислигининг ўзаро жойлашишининг неча хил ҳолати бўлиши мумкин? Барча ҳолатларни айтинг ва амалда кўрсатинг;

2) l тўғри чизиғи каноник

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

тенглама билан ва α текислиги $ax + by + cz + d = 0$ умумий тенглама билан берилса, у ҳолда $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси, $\vec{p}(m; n; k)$ ва $\vec{n}(a; b; c)$ векторлари ҳақида нима деса бўлади?

Демак, фазода l тўғри чизиғи билан α текислиги мос равишда қуйидаги тенгламалар билан берилсин:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k} \quad \text{ва} \quad ax + by + cz + d = 0.$$

l тўғри чизиғи билан α текислигининг ўзаро жойлашишининг уч хил ҳолати бўлиши мумкин: 1) тўғри чизиқ билан текислик кесишади; 2) тўғри чизиқ билан текислик кесишмайди, яъни улар ўзаро параллел жойлашади; 3) тўғри чизиқ тўлиғи билан текисликда ётади.

Жуфт бўлиб ишлаш

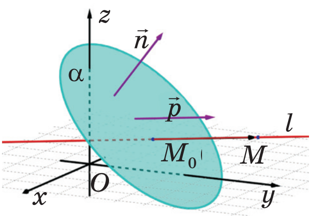
Юқорида айтилган уч ҳолатни $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси, $\vec{p}(m; n; k)$ ва $\vec{n}(a; b; c)$ векторлари орқали ифодаланг. Натижасини синф билан бирга таҳлил қилинглар. **I.** $\vec{p} \not\parallel \vec{n}$ **II.** $\vec{p} \perp \vec{n}$, $M_0 \notin \alpha$; **III.** $\vec{p} \perp \vec{n}$, $M_0 \in \alpha$ бўлса, l тўғри чизиғи билан α текислиги ўзаро қандай жойлашади? Жавобларингизни асосланг.

Бундан,

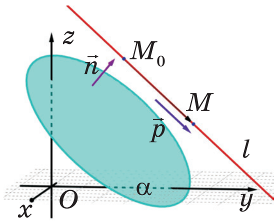
I. $\vec{p} \not\parallel \vec{n}$ бўлса, l тўғри чизиғи билан α текислиги кесишади (2.6-расм) ва $\vec{p} \cdot \vec{n} \neq 0$ бўлиши шарт:

$$ma + nb + kc \neq 0$$

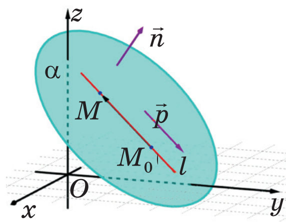
Бу – *тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш шарти.*



2.6-расм



2.7-расм



2.8-расм

II. $\vec{p} \perp \vec{n}$, $M_0 \notin \alpha$ бўлса, l тўғри чизиғи билан α текислиги ўзаро параллел: $l \parallel \alpha$ (2.7-расм) . Бу ерда

$$\begin{cases} ma + nb + kc = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0 \end{cases}$$

шартлари бажарилади. Бу – *l тўғри чизиғи билан α текислигининг ўзаро параллеллик шарти.*

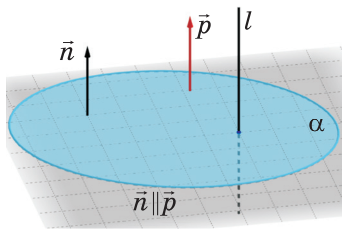
III. $\vec{p} \perp \vec{n}$, $M_0 \in \alpha$ бўлса, l тўғри чизиғи билан α текислигида ётади: $l \subset \alpha$ (2.8-расм) , яъни

$$\begin{cases} ma + nb + kc = 0, \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \end{cases}$$

шартлари бажарилади. Бу — *l тўғри чизиғи билан α текислигининг ўзаро параллеллик шарти.*

Агар $\vec{p} \parallel \vec{n}$ бўлса, l тўғри чизиғи α текислигига перпендикуляр: $l \perp \alpha$ (2.9-расм) ва бу шарт қуйидагича ёзилади:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}.$$



2.9-расм

1-мисол. l тўғри чизиғи $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ тенглама билан, α текислиги $x-y+3z+2=0$ тенглама билан берилган.

l тўғри чизиғи α текислигига нисбатан қандай жойлашганини аниқлайлик.

▲ l тўғри чизиғида ётувчи $M_0(1;\ -1;\ 0)$ нуқтаси билан $\vec{p}(2;\ 3;\ 1)$ йўналтирувчи вектори ва α текислигининг $\vec{n}(1;\ -1;\ 3)$ аниқлаб, $\vec{p}$ ва $\vec{n}$ векторларининг скаляр кўпайтмасини топамиз: $\vec{p}\cdot\vec{n}=2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot3\neq0$. У ҳолда $\vec{p}\not\perp\vec{n}$, демак, l тўғри чизиғи билан α текислиги кесишади, лекин улар ўзаро перпендикуляр эмас $\vec{p}\nparallel\vec{n}$. ■

2-мисол. Аввалги мисолдаги l тўғри чизиғи билан α текислигининг кесишиш нуқтасини топиш керак.

▲ l тўғри чизиғининг параметрли тенгламасини олиш мақсадга мувофиқ: $x=2t+1$, $y=3t-1$, $z=t$. α текислиги билан l тўғри чизиғининг кесишиш нуқтасининг координаталарини топиш учун, ўша параметрли тенглама билан текислик тенгламасини бир системага олиб, x, y, z ўзгарувчиларнинг қийматларини топамиз:

$$\begin{cases} x=2t+1,\\ y=3t-1,\\ z=-2t,\\ x-y+3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow (2t+1)-(3t-1)+3t+2=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2t+4=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow x=2(-2)+1=-3$, $y=3\cdot(-2)-1=-7$, $z=-2$. Бундан, l тўғри чизиғи билан α текислиги $M(-3;\ -7;\ -2)$ нуқтасида кесишади. ■

2.2.2. Икки текисликнинг ўзаро жойлашиши

Гуруҳ билан ишлаш

1-топшириқ:	2-топшириқ:
1) $\begin{cases} x-2y+z-3=0,\\ 3x+y-z+1=0; \end{cases}$	1) $\begin{cases} x-y+3z-6=0,\\ y+z-3=0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x-2y+z-3=0,\\ 2x-4y+2z+7=0; \end{cases}$	2) $\begin{cases} x-y+3z-6=0,\\ 2x-2y+6z+6=0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x-2y+z-3=0,\\ -2x+4y-2z+6=0. \end{cases}$	3) $\begin{cases} x-y+3z-6=0,\\ -2x+2y-6z+12=0. \end{cases}$

1) Системадаги тенгламалар фазодаги қандай фигурани тенгламаси?

2) Тенгламалар системасининг ҳар бири фазодаги тўғри чизиқнинг тенгламасими? Тўғри чизиқнинг тенгламаси ёки тенгламаси эмаслигини ажратинг. Жавобингизни асосланг.

3) Агар тўғри чизиқ бўлса, системадаги тенгламалар билан ифодаланган текисликлар ўзаро қандай жойлашади? Уларнинг нормал векторлари ҳақида қандай фикр айтишга бўлади?

4) Агар тўғри чизиқ бўлмаса, системадаги тенгламалар билан ифодаланган текисликлар ўзаро қандай жойлашади? Уларнинг нормал векторлари ҳақида қандай фикр айтишга бўлади?

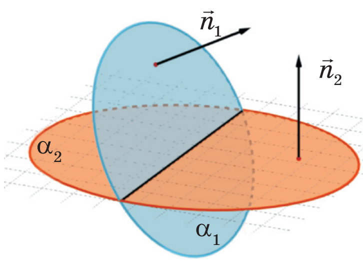
5) Агар системадаги тенгламаларнинг барча коэффицентлари билан озод ҳадлари ўзаро пропорционал бўлса, мос текисликлар ҳақида қандай фикр айтишга бўлади?

Юқоридаги саволларга жавоб бера туриб, фазода икки текисликнинг ўзаро жойлашиши бўйича хулоса чиқаринглар.

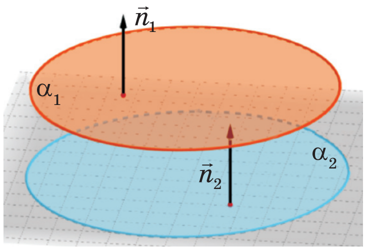
α_1 ва α_2 текисликлари мос равишда $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ тенгламалар билан берилса, бу текисликларнинг нормал векторлари $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ ва $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ бўлади.

1) $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \Rightarrow \alpha_1$ ва α_2 текисликлари тўғри чизиқ бўйлаб кесишади (2.10-расм). Бу ҳолатда $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлари ўзаро коллинеар эмас.

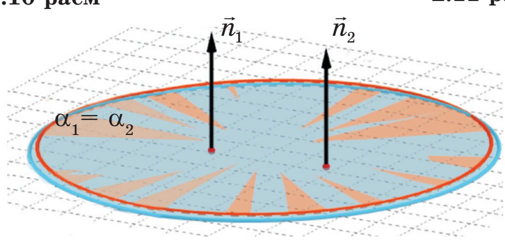
Баъзи ҳолларда, агар $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, яъни $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ бўлса, α_1 ва α_2 текисликлари ўзаро перпендикуляр бўлади.



2.10-расм



2.11-расм



2.12-расм

https://www.geogebra.org/classic/fvxsztuh

2) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$ бўлса, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ (2.11-расм).

3) Егер $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$ бўлса, системадаги икки тенглама билан битта текислик эканлиги келиб чиқади. Бу ҳолатда α_1 ва α_2 текисликлари устма-уст тушади деб ҳисобланади (2.12-расм).

2.2.3. Фазодаги икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашиши

Гуруҳ билан ишлаш

l_1 ва l_2 тўғри чизиқлари жадвалда кўрсатилган тенгламалар билан берилган. Саволларга жавоб беринг.

1) l_1 тўғри чизиғининг йўналтирувчи вектори $\vec{p}_1$ ва унда ётадиган M_1 нуқтасининг координаталарини топинг;

2) l_2 тўғри чизиғининг йўналтирувчи вектори $\vec{p}_2$ ва унда ётадиган M_2 нуқтасининг координаталарини топинг;

3) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторларининг координаталарини таққосланг;

4) $\vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2$ параллел бўлмаган ҳолатда 2.1.2-мавзудаги (1) формула бўйича $\vec{n} \perp \vec{p}_1$ ва $\vec{n} \perp \vec{p}_2$ шартларини қаноатлантирадиган $\vec{n}$ векторининг координаталарини топинг.

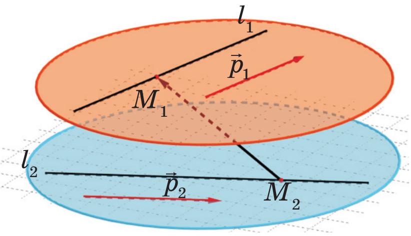
5) $\vec{n}$ векторига перпендикуляр ва M_1 нуқтаси орқали ўтувчи α текислигининг тенгламасини ёзинг:

l_1 тўғри чизиқнинг тенгламаси	l_2 тўғри чизиқнинг тенгламаси
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$	$\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$	$x = 5 - t,\quad y = 5 + 2t,\quad z = 2 + 3t$
$\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$	$\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{-6} = \dfrac{z-2}{-2}$
$x = 6 + t,\quad y = 3 - 2t,\quad z = -1 - 3t$	$x = 5 - t,\quad y = 5 + 2t\quad z = 2 + 3t$

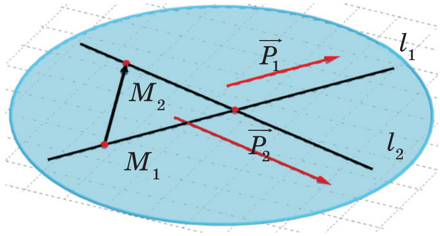
Бундан,

1) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлари компланар бўлмаса, l_1 ва l_2 – айқаш тўғри чизиқлар бўлади (2.13-расм).

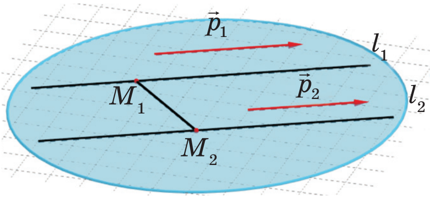
2) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлари – компланар векторлар ва $\vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2$ бўлса, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлари кесишишади (2.14-расм).



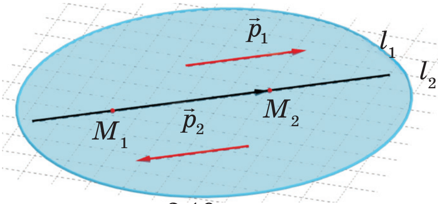
2.13-расм



2.14-расм



2.15-расм

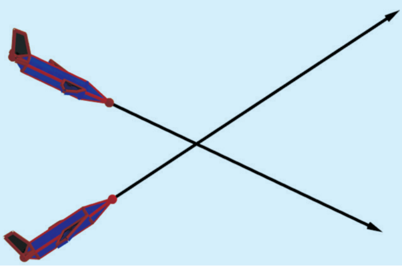


2.16-расм

3) $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ ва $p_2 \nparallel M_1M_2$ бўлса, $l_1 \parallel l_2$ (2.15-расм).

4) $p_1 \parallel p_2 \parallel M_1M_2 \Rightarrow l_1 \equiv l_2$. Бундай ҳолатда икки тенглама билан битта тўғри чизиқ ифодаланади (2.16-расм).

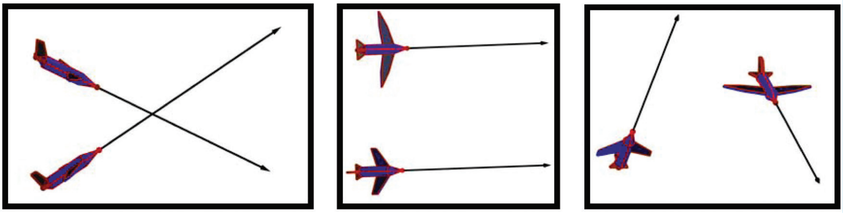
1) Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашиш ҳолларининг неча хил тури мавжуд? Барча ҳолларни айтиб, уларга мос келадиган шартларни ёзинг ва уларни таҳлил қилиб беринг.
2) Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасини топиш усулини тушунтиринг.
3) Фазода икки текислик ўзаро қандай жойлашади? Барча ҳолларни айтиб, уларга мос келадиган шартларни ёзинг ва уларни таҳлил қилиб беринг.
4) Фазода икки тўғри чизиқ ўзаро қандай жойлашади? Барча ҳолларни айтиб, уларни тушунтиринг. Тенгламалари бўйича тўғри чизиқларнинг ўзаро қандай жойлашишини топиш усулини тушунтиринг.



Амалий машғулот

Ҳаво йўлидаги самолётларнинг нима учун тўқнашмаслигини тушунтиринг.

Саволга жавоб:
Самолётлар айқаш тўғри чизиқлар бўйлаб учганлигидан, тўнашмайди.



МАСАЛАЛАР

А

Жуфт бўлиб ишлаш (2.21 – 2.22):

2.21. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси $ax + by + cz + d = 0$ текислигида ётиши учун қандай шарт бажарилиши керак? Топшириқни жуфтлашиб бажаринг. Олинган натижа ёрдамида $A(-1; -1; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(6; 1; 0)$, $D(3; -2; -4)$, $E(1; 3; 2)$ нуқталарининг қай бири $x - 2y + 3z - 4 = 0$ текислигида ётишини топинг.

2.22. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтаси $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$ тўғри чизиғида ётиши учун қандай шарт бажарилиши керак? Топшириқни жуфтлашиб бажаринг. Олинган натижа ёрдамида $A(-1; 1; 1)$, $B(4; 1; 1)$, $C(0; -3; -1)$, $D(3; 4; 2)$, $E(-1; -5; -1)$ нуқталарининг қай бири $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ тўғри чизиғида ётишини топинг.

2.23. Тўғри чизиқ билан текислик ўзаро қандай жойлашган:

1) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$ ва $2x - y - 3z + 5 = 0$;

2) $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$ ва $2x + 3y + z - 9 = 0$;

3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ ва $2x - 4y - 5z - 9 = 0$?

2.24. Фазода икки текислик ўзаро қандай жойлашган:
1) $x + 2y - z - 1 = 0$ ва $4x - 2y + 4z - 3 = 0$;
2) $2x - y + z - 4 = 0$ ва $-6x + 3y - 3z + 8 = 0$;
3) $x + 2y - z - 1 = 0$ ва $-2x - 4y + 2z - 2 = 0$?

2.25. Фазода икки тўғри чизиқ ўзаро қандай жойлашган:

1) $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -1 + 2t$ ва $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-2}$;

2) $x = 3t,\ y = 1 - 2t,\ z = -2 + 3t$ ва $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{3}$?

2.26. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасини топинг:

1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ ва $3x - 2y + z - 3 = 0;$

2) $x = 2t,\ y = 1 + t,\ z = 2t - 1$ ва $x + 2y + 3z - 5 = 0.$

2.27. M нуқтаси орқали ўтувчи ва $3x - 2y + z - 3 = 0$ текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг: 1) $M(1;\ 2;\ 3)$; 2) $M(2;\ 0;\ -2)$; 3) $M(4;\ -3;\ 1)$; 4) $M(3;\ 1;\ 1)$.

2.28. 1) Oxy; 2) Oxz; 3) Oyz координата текислигининг тенгламасини ёзинг.

2.29. 1) Ox; 2) Oy; 3) Oz координата ўқининг тенгламасини ёзинг.

2.30. Текисликнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг. Бунинг учун текисликнинг тенгламасини кесманинг тенгламаси кўринишига келтириб олинг:

1) $3x + 2y + z - 6 = 0;$ 2) $x - y - z + 3 = 0;$

3) $x + 3y - z - 6 = 0;$ 4) $2x + y - 2z - 4 = 0.$

2.31. $M(3;\ 1;\ 1)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва берилган тўғри чизиғига параллел тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг:

1) $\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{3};$ 2) $x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5;$

3) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3};$ 4) $x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t.$

2.32. $M(3;\ 0;\ 1)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва берилган текисликка параллел текислик тенгламасини ёзинг:

1) $x + 2y + z - 6 = 0;$ 2) $x - y - 2z + 3 = 0;$

3) $x + 3y - 2z - 6 = 0;$ 4) $2x + 3y - 2z - 4 = 0.$

2.33. $M(3;\ 0;\ 1)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва аввалги масалада берилган текисликка перпендикуляр тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

B

2.34. Фазода берилган икки тўғри чизиқ қандай жойлашади:

1) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$ ва $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2};$

2) $x = 3t,\ y = 1 - 2t,\ z = -2 + 3t$ ва $x = 1 + 2t,\ y = 1 - 2t,\ z = -1 + 2t$?

▲ 2) Тўғри чизиқда ётувчи нуқта билан тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини топайлик. Биринчи, l_1 тўғри чизиғи учун: $M_1(0;\ 1;\ -2)$, $\vec{p}_1(3; -2; 3)$; иккинчи, l_1 тўғри чизиғи учун: $M_2(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{p}_2(2; -2; 2)$. $\vec{p}_1$ ва $\vec{p}_2$ векторларининг координаталари пропорционал эмас, яъни $l_1 \not\parallel l_2$. Демак, бу тўғри чизиқлар – айқаш тўғри чизиқлар ёки кесишишадиган тўғри чизиқлар. Уни аниқлаш учун $\overrightarrow{M_1M_2}$ вектори билан $\vec{n} \perp \vec{p}_1$ ва $\vec{n} \perp \vec{p}_2$ шартларини қаноатлантирувчи $\vec{n}$ векторини топамиз:

$\overrightarrow{M_1M_2}\,(1;\ 0;\ 1)$, $\vec{n}\,(-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2);\ 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2;\ 3 \cdot (-2) - (-2) \times 2) =$
$= (2;\ 0;\ -2)$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{n} \perp \vec{p}_1$, $\vec{n} \perp \vec{p}_2$. Бундан бир векторга перпендикуляр уч (коллениар эмас) векторнинг компланарлиги келиб чиқади. У ҳолда,ўзаро параллел эмас l_1 ва l_2 тўғри чизиқлари бир текисликда ётади. Демак, улар кесишади. ■

2.35. 1) $A(-1;\ -1;\ 1)$, $B(0;\ 2;\ 3)$, $C(6;\ 1;\ 0)$, $D(3;\ -2;\ -4)$ нуқтаси $x - 2y + z + d = 0$ текислигида ётувчи d озод ҳадни топинг. Ихтиёрий нуқта учун масаланинг ечими бўладими? Фақат озод ҳадлари билангина фарқ қиладиган тенгламалар билан аниқланадиган текисликлар ўзаро қандай жойлашади? Жавобингизни асосланг.

2.36. Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашишини топинг. Улар кесишадиган ҳолатда кесишиш нуқтасини топинг:

1) $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 3t$ ва $2x - 2y + z - 5 = 0$;

2) $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ ва $2x - y - 3z + 5 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 5y - 13, \\ 4y - z - 11 = 0 \end{cases}$ ва $3x - y + 2z - 5 = 0$;

4) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$ ва $2x + 3y - z + 1 = 0$.

2.37. Фазода $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 3t$ тўғри чизиғи орқали ўтувчи ва $2x + 3y - z + 1 = 0$ текислигига перпендикуляр текисликнинг тенгламасини ёзинг.

2.38. $M_0(1;\ 0;\ 1)$ нуқтасининг

1) $\dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$;

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$;

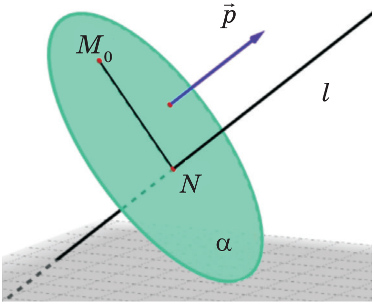
3) $x = 2 - t$, $y = 15 + 2t$, $z = 3t - 5$;

4) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$

тўғри чизиғидаги проекциясини топинг.

▲ 4) масалани ечиш учун берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини топиш керак. Уни икки хил усул билан топади.

1-*усул*: $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y+z-2=0 \end{cases}$ системадаги тенгламаларнинг ҳар бири текисликни ифодалайди. Уларнинг нормал векторлари, мос равишда, $\vec{n}_1(1;-2;0)$ ва $\vec{n}_2(0;3;1)$. (5) формула бўйича (п.2.1.3) $\vec{p}(2;1;-3)$. Энди $M_0(1;0;1)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва $\vec{p}$ векторига перпендикуляр α текислигининг тенгламасини ёзамиз:



2.17-расм

$2(x-1)+1(y-0)-3(z-1)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+y-3z+1=0$. M_0 нуқтасининг берилган тўғри чизиқдаги проекцияси (N нуқтаси, 2.17-расм) шу текислик билан берилган тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси бўлади. Бу нуқтани топиш учун навбатдаги системани ечиш керак:

(https://www.geogebra.org/classic/yeztxbkf)

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-2=0, \\ 2x+y-3z+1=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-3, \\ z=-3y+2, \\ 2(2y-3)+y-3(-3y+2)+1=0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow 14y-11=0 \Rightarrow y=\frac{11}{14};\ x=-\frac{10}{7};\ z=-\frac{5}{14}.$$

Жавоб: $N\left(-\frac{10}{7};\ \frac{11}{14};\ -\frac{5}{14}\right)$.

2-*усул*: Берилган тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий A ва B нуқталарини олиб, $\overrightarrow{AB}$ векторини α текислигининг нормал вектори қаторида қабуллашга бўлади. $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-2=0 \end{cases}$ системасида учта ўзгарувчи ва иккита тенглама мавжуд. Шунинг учун бир ўзгарувчининг қийматини ҳоҳлагандек олишимизга бўлади. $y_1=0$ деб олсак, $x_1=-3$, $z_1=2$. Бир нуқтанинг, айтайлик A нуқтасининг координаталари топилди: $A(-3;\ 0;\ 2)$. $y_2=1$ деб олсак, $x_2=-1$, $z_2=-1$, яъни $B(-1;\ 1;\ -1)$. У ҳолда $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2;1;-3)$ ва бизга керак бўлган α текислигининг тенгламаси $2x+y-3z-1=0$ кўринишида ёзилиб, масаланинг ечими кўрсатилган усул билан давом этади.

Жавоб: $N\left(-\frac{10}{7};\ \frac{11}{14};\ -\frac{5}{14}\right)$. ■

2.39. *Oz* ўқига параллел ва $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 0;\ 1)$ нуқталари орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

C

2.40. Тўғри чизиқларнинг айқаш жойлашишини кўрсатиб, уларнинг ҳар бири орқали ўтувчи ва иккинчисига параллел бўлган текисликнинг тенгламасини ёзинг:

1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+3}{3}$ ва $\begin{cases} x+2y+3=0, \\ 3y+z=0; \end{cases}$

2) $x=-1+t,\ y=t,\ z=1+2t$ ва $\begin{cases} y=3x-1, \\ z=4x+2. \end{cases}$

2.41. $A(1;\,2;\,4)$ нуқтаси билан $2x-y+3z-6=0,\ x+2y-z+3=0$ текисликларининг кесишиш чизиқлари орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

2.42.* Фазода $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$ тўғри чизиғи $ABCD$ параллелограммнинг AB томони, $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$ тўғри чизиғи AC диагонали орқали ўтади. C (3; 2; 1) нуқтаси параллелограммнинг учи бўлиши мумкинми? Агар мумкин бўлса, 1) параллелограммнинг бошқа учларининг координаталарини; 2) параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтасини топинг; 3) параллелограммнинг бошқа томонлари орқали ўтувчи тўғри чизиқларнинг каноник тенгламасини ёзинг.

2.43. Пирамиданинг умумий учга эга бўлган учта ёқи ётган текисликларнинг тенгламалари берилган: $x-2y+3=0$, $3y+z-1=0$, $2x+y-z-1=0$. Пирамиданинг ўша учининг координаталарини топинг.

▲ Бир учдан ўтувчи, яъни битта кесишиш нуқтаси мавжуд пирамиданинг учта ён ёқлари ётган текисликларнинг тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-1=0, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases}$$

Уни A (x,y,z) нуқтаси орқали белгилаймиз ва берилган учининг координаталарини топамиз.

Ечилиши:

1) Системадаги биринчи ифодани (-2) сонига кўпайтирамиз ва уни учинчи ифодага қўшамиз:

$$\begin{cases} x-2y+3=0, & \big| \cdot(-2) \\ 3y+z-1=0, & \quad\Rightarrow \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ \Rightarrow (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} -2x+4y-6=0, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases} \Big| (1)+(3) \Rightarrow \begin{cases} 5y-z-7=0, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases}$$

2) Энди биринчи ифодага $z = 1 - 3y$ тенгламасини қўйиб, $A(x,y,z)$ учининг координаталарини топамиз:

$$\begin{cases} 5y-(1-3y)-7=0, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y=8, \\ z=1-3y, \\ 2x+y-z-1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1, \\ z=-2, \\ x=-1. \end{cases}$$

3) Учининг координаталари $A = (-1,\ 1,\ -2)$;

4) $3D$ расмга сайт:

https://www.geogebra.org/classic/udfrmfhd ■

Такрорлашга доир топшириқлар

2.44. 1) $\vec{a}(1;\ 2;3)$, $\vec{b}(3;\ 2;1)$; 2) $\vec{a}(-2;\ 3;4)$, $\vec{b}(5;\ 0;2)$.

Топиш керак: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

2.45. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ бўлса, ABC учбурчагининг турини топинг: 1) a=8, b=6, c=10; 2) a=4, b=5, c=6; 3) a=5, b=6, c=9. Жавобингизни асосланг.

2.3. Фазодаги масофаларни топиш

Мавзуни ўқиб ўрганиш давомида икки нуқтанинг орасидаги масофа формуласини қўлланиб, нуқта билан тўғри чизиқ, нуқта билан текислик орасидаги масофани топишни ўрганасиз. Мавзу сўнгида:

- **нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани топишни ўрганиб, уни масалаларни ечишда қўлланасиз;**
- **нуқтадан текисликкача бўлган масофани топиш формуласини келтириб чиқарасизлар ва уни масалаларни ечишда қўлланасиз.**

2.3.1. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

Гуруҳ билан ишлаш

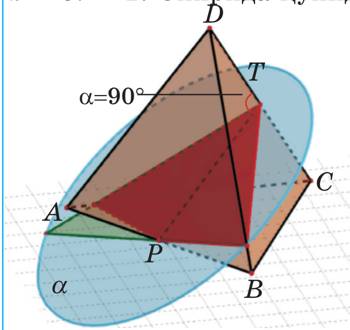
Тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқтадан шу тўғри чизиққача бўлган масофани қандай топиш мумкинлигини ўйланглар. Фикрингларни синф билан бирга таҳлил қилинглар ва нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани топиш алгоритмини мулоҳаза қилинг. Олинган натижа бўйича қуйидаги топшириқни бажаринг: $A(1;\ 2;\ 3)$ нуқтасидан жадвалда берилган тўғри чизиққача бўлган масофани топинг:

1-гуруҳ топшириғи	2-гуруҳ топшириғи
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$	$x = 5 - t,\ \ y = 5 + 2t,$ $z = 2 + 3t$
3-гуруҳ топшириғи	**4-гуруҳ топшириғи**
$\begin{cases} x+2y+3=0, \\ 3y+z=0; \end{cases}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-2}$
5-гуруҳ топшириғи	**6-гуруҳ топшириғи**
$x = 6 + t,\ \ y = 3 - 2t,$ $z = -1 - 3t$	$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ 2x-4y+2z+7=0 \end{cases}$

Бундан, *l тўғри чизиғидан ташқарида ётган A нуқтасидан шу тўғри чизиққача бўлган* **масофа** *деб, A нуқтасидан l тўғри чизиғига туширилган перпендикулярнинг бир учигача бўлган масофага айтилади*. Шу масофани топиш учун 1) *A нуқтаси орқали l тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган α текисликни ўтказиш керак;* 2) *l тўғри чизиғи билан α текислигининг кесишиш нуқтаси B нинг координаталарини топамиз;* 3) *A нуқтасидан B нуқтасигача бўлган масофани топамиз*. Мана шу бизга керак бўлган масофа эди.

1-мисол. $ABCD$ учбурчакли пирамида учларининг координаталари берилган: $A(1;\ -2;\ 5)$, $B\ (-3;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$ ва $D(-2;\ 1;\ 4)$. AB томонининг ўртасидан CD тўғри чизиғигача бўлган масофани топиш керак.

▲ Аввал AB кесмасининг ўртаси P нуқтаси ва $\overrightarrow{CD}$ векторининг координаталарини топайлик: $x_p=\frac{1-3}{2}=-1;$ $y_p=\frac{-2+0}{2}=-1;$ $z_p=\frac{5+0}{2}=2{,}5$. У ҳолда, $P(-1;\ -1;\ 2{,}5)$, $\overrightarrow{CD}(-3-0;\ 1-0;\ 4-1) = (-3;\ 1;\ 3)$. Энди P нуқтаси орқали ўтувчи ва $\overrightarrow{CD}$ векторига перпендикуляр текисликнинг тенгламасини ёзамиз: $-3(x+1)+(y+1)+$ $+3(z-2{,}5)=0 \Rightarrow 3x-y-3z+9{,}5=0$. Шундан кейин CD тўғри чизиғининг параметрли тенгламасини ёзамиз: $x=-3t$, $y=t$, $z=3t+1$. Охирида қуйидаги системани ечамиз:



2.18-расм
https://www.geogebra.org/classic/bjwn5asb

$$\begin{cases} x=-3t, \\ y=t, \\ z=3t+1, \\ 3x-y-3z+9{,}5=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3\cdot(-3t)-t-3\cdot(3t+1)+9{,}5=0 \Rightarrow t=\frac{65}{190}.$$

$\Rightarrow x=-1\dfrac{5}{190};\ y=\dfrac{65}{190};\ z=2\dfrac{5}{190}$, яъни (2.18-расм) $T\left(-1\dfrac{5}{190};\dfrac{65}{190};2\dfrac{5}{190}\right)$. Энди PT ни топамиз:

$$PT=\sqrt{\left(-1\frac{5}{190}+1\right)^2+\left(\frac{65}{190}+1\right)^2+\left(2\frac{5}{190}-2{,}5\right)^2}=\sqrt{\frac{(-5)^2}{190^2}+\frac{255^2}{190^2}+\frac{(-90)^2}{190^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{25+8100+255^2}{190^2}}=\sqrt{\frac{73150}{190\cdot190}}=\sqrt{\frac{77}{38}}\cong 1{,}42.$$

2.3.2. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

Гуруҳ билан ишлаш

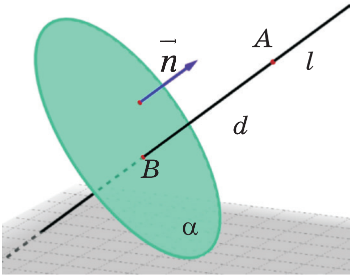
Текисликда ётмайдиган нуқтадан шу текисликкача бўлган масофа деб нимага айтилишини тушунтиринг. Бунинг учун текисликка нуқтадан туширилган перпендикулярнинг бир учи ҳақидаги мулоҳазани эсга туширинг ва таъриф келтиринг. Натижасини синф билан бирга таҳлил қилинглар, хулоса чиқаринглар. Шу масофани топиш алгоритмини тузинглар ва уни синф билан бирга таҳлил қилинглар.

Шунинг билан, *α текислигидан ташқарида ётган A нуқтасидан шу текисликкача бўлган* ***масофа*** *деб, A нуқтасининг α текислигига туширилган перпендикулярнинг бир учигача бўлган масофага айтилади. Шу масофани топиш учун*: 1) *A нуқтаси орқали α текислигига перпендикуляр l тўғри чизиғи ўтказилади;* 2) *l тўғри чизиғи билан α текислигининг кесишиш нуқтаси B нинг координаталарини топамиз;* 3) *A нуқтасидан B нуқтасигача бўлган масофани топади*. Бу бизга керак бўлган масофа эди. Энди умумий ҳолда, шу масофани топадиган формулани келтириб чиқарайлик:

Айтайлик, бизга $ax + by + cz + d = 0$ тенгламаси билан α текислиги ва унда ётмайдиган $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтаси берилсин. У ҳолда A нуқтаси орқали ўтувчи ва α текислигига перпендикуляр l тўғри чизиғига $\vec{n}(a; b; c)$ вектори йўналтирувчи вектор бўлади (2.19-расм). Шунинг учун l тўғри чизиғининг параметрли тенгламаси қуйидагича ёзилади: $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + zt$. Энди шу тўғри чизиқ билан α текислигининг кесишиш нуқтаси B нинг координаталарини топиш учун қуйидаги системани ечиш керак:

$$\begin{cases} x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct, \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + + d = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d + t(a^2 + b^2 + + c^2) = 0 \Rightarrow\ t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$.



2.19-расм

3D расмга йўлланма: https://www.geogebra.org/classic/yeztxbkf

Энди ёзиш ҳажмини қисқартириш учун $P = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ деб, белгилаб оламиз. У ҳолда B нинг координаталари қуйидагича ифодаланади: $x = x_0 + aP$, $y = y_0 + bP,\ z = z_0 + cP$, яъни $B(x_0 + aP;\ y_0 + bP;\ z_0 + cP)$. Ундай бўлса,

$$AB = \sqrt{(x_0 + aP - x_0)^2 + (y_0 + bP - y_0)^2 + (z_0 + cP - z_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(aP)^2 + (bP)^2 + (cP)^2} = |P|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \left|-\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Шунинг билан, A нуқтасидан α текислигигача бўлган масофани h орқали белгилаб, биз қуйидаги формулани исботладик:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (1)$$

2-мисол. $ABCD$ учбурчакли пирамида учларининг координаталари берилган: $A(1;\ 3;\ 0)$, $B\ (4;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 0;\ 1)$ ва $D(4;\ 3;\ 5)$. Пирамиданинг D учидан туширилган баландликнинг узунлигини топиш керак.

▲ Аввал ABC ёқининг тенгламасини ёзамиз. Бунинг учун $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторларига перпендикуляр $\vec{n}$ векторининг координаталарини топамиз. $\overrightarrow{AB}(3; -4; 2)$ ва $\overrightarrow{AC}(2; -3; 1)$ бўлганлигидан, (5) формула (п.2.1.2) бўйича

$$\vec{n}\,(-4+6;\ 4-3;\ -9+8) = (2;\ 1;\ -1)$$

вектори ABC текислигининг нормал вектори бўлади. Шунинг учун бу текисликнинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$2(x-1)+(y-3)-(z-0)=0 \Rightarrow 2x+y-z-5=0.$$

Пирамиданинг D учидан туширилган баландлиги DH бўлса, (1) формула бўйича

$$DH=\frac{|2\cdot 4+1\cdot 3-1\cdot 5-5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Жавоб: $\frac{\sqrt{6}}{6}$. ■

1. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа деб, нимага айтилади? Уни топиш алгоритмини тушунтиринг.
2. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа деб, нимага айтилади? Уни топиш формуласини келтириб чиқаришни тушунтиринг.

МАСАЛАЛАР

A

2.46. $A(1;\ 2;\ 3)$ нуқтасидан 1) $3x-y-3z-3=0$; 2) $2x+y+3z-7=0$; 3) $2x-y+3z+9=0$; 4) $3x-4y+8=0$ текислигигача бўлган масофани топинг.

2.47. 1) $A(2;\ 0;\ -3)$; 2) $B(0;\ 3;\ 1)$; 3) $C(-1;\ 1;\ 3)$; 4) $D(-2;\ 1;\ 4)$ нуқтасидан $2x+y+3z-7=0$ текислигигача бўлган масофани топинг.

2.48. $A(1;\ 2;\ 3)$ нуқтасидан 1) $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z-2}{-2}$; 2) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$; 3) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{2}$; 4) $x=6+t,\ y=5+2t,\ z=2+3t$ тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

2.49. 1) $A(2;\ 0;\ -3)$; 2) $B(0;\ 3;\ 1)$; 3) $C(-1;\ 1;\ 3)$; 4) $D(-2;\ 1;\ 4)$ нуқтасидан $x=6+t,\ y=5+2t,\ z=2+3t$ тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

B

2.50. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ ва $\begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x+6z-6=0 \end{cases}$ тўғри чизиқларининг параллел эканлигини кўрсатиб, уларнинг орасидаги масофани топинг.

2.51. m нинг қандай қийматида $\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ тўғри чизиғи ва $3x + 4y + 2z - 5 = 0$ текислиги ўзаро параллел бўлади? Уларнинг орасидаги масофани топинг.

Жуфт бўлиб ишлаш (2.52 – 2.53):

2.52. Параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани қандай топишга бўлади? Жуфт бўлиб, шу масофани топиш алгоритмини ёзинг ва натижасини синф билан бирга таҳлил қилинг. Навбатдаги параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-2}$ ва $x = 6 + 2t$, $y = 5 + 3t$, $z = 2 - 2t$;

2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{1}$ ва $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-5}{1}$.

2.53. Параллел текисликлар орасидаги масофани қандай топишга бўлади? Жуфт бўлиб, шу масофани топиш алгоритмини ёзинг ва натижасини синф билан бирга таҳлил қилинг. Қуйидаги параллел текисликлар орасидаги масофани топинг:

1) $2x - y + 3z - 5 = 0$ ва $2x - y + 3z + 7 = 0$;

2) $x + y - 3z + 4 = 0$ ва $2x + 2y - 6z - 9 = 0$.

2.54. Агар α_1 ва α_2 параллел текисликлари мос равишда $ax + by + cz + d_1 = 0$ ва $ax + by + cz + d_2 = 0$ тенгламалар билан берилса, бу текисликларнинг орасидаги масофа

$$d=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

формула билан топилишини кўрсатинг.

▲ Айтайлик, $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha_1$ бўлсин. Бизга керакли d масофа қуйидагича топилади:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Бу ерда $ax_0+by_0+cz_0+d_1=0 \Rightarrow ax_0+by_0+cz_0=-d_1$ бўлганлигидан, $d=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. ■

C

2.55. $ABCD$ учбурчакли пирамида учларининг координаталари берилган: $A(2; 0; -3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 1; 3)$, $D(-2; 1; 4)$. Унинг ҳар бир учидан туширилган баландлигининг узунлигини топинг.

2.56. $A(2;\ 0;\ -3)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 3)$ нуқталари $ABCD A_1B_1C_1D_1$ параллелепипедининг пастки асосида, $A_1(5;\ 2;\ 4)$ – нуқта – юқори асосида жойлашган. Параллелепипеднинг: 1) бошқа учларининг координаталарини; 2) асослари орқали ўтувчи текисликларнинг тенгламаларини; 3) баландлигининг узунлигини (асосларининг орасидаги масофани) топинг.

2.57.* Агар l_1 ва l_2 айқаш тўғри чизиқлар бўлса, бу икки тўғри чизиқнинг орасидаги масофа деб, нимага айтилади? Шу масофа ўрнида икки тўғри чизиқ нуқталари орасидаги масофанинг энг қисқасини олишга бўладими? Бўлса, уни топади? Шу масофани топиш алгоритмини тузинг ва синф билан бирга таҳлил қилинг. $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2 \end{cases}$ тўғри чизиқларнинг айқашлигини исботлаб, улар орасидаги масофани топинг.

Такрорлашга доир топшириқлар

2.58. $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $C(-1;\ 1)$ нуқталари – ABC учбурчагининг учлари. Учбурчак бурчагининг косинусини топинг.

2.59. Ромбнинг томони унинг диагоналлари билан ўзаро 4:5 каби нисбатда бурчаклар ясайди. Ромбнинг бурчакларини топинг.

2.60. Учидаги бурчаги $120°$ бўлган тенг ёнли учбурчакка ташқи чизилган айлананинг диаметри 18 см. Учбурчакнинг ён томонини топинг.

2.4. Фазодаги бурчакларни топиш

Фазодаги тўғри чизиқлар, тўғри чизиқ билан текислик ва текисликлар орасидаги бурчакни топиш формулаларини келтириб чиқариб, уларни масалаларни ечишда қўлланишни ўрганасизлар.

Мавзу якунида:

- **тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни (тўғри чизиқларнинг тенгламалари бўйича) топа оласизлар;**
- **координаталардаги тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларини масалаларни ечишда қўллана оласизлар;**
- **тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни топа оласизлар;**
- **икки текислик орасидаги бурчакни топа оласизлар.**

2.4.1. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

Гуруҳ билан ишлаш

Бизга каноник тенгламалари билан l_1 ва l_2 тўғри чизиқлари берилсин: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{k_1}$ ва $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{k_2}$. Гуруҳ бўлиб ёки жуфт бўлиб шу l_1 ва l_2 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни қандай топиш мумкинлигини ўйлаб кўринглар. Шу бурчакни ифодалаганда $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ ва $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторларидан қандай фойдалансак бўлади? Одатда, икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак ўрнида пайдо бўлган икки турли бурчакнинг ўткири олинади. Шу маълумотни эсда сақланглар. Жавобларинггизни синф билан таҳлил қилинглар. Навбатдаги l_1 ва l_2 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг:

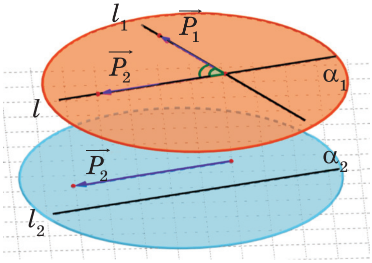
l_1 тўғри чизиғининг тенгламаси	l_2 тўғри чизиғининг тенгламаси
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$	$\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$
$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$	$x = 5-t,\ \ y = 5+2t,$ $z = 2 + 3t$
$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$	$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z-2}{1}$
$x = 6 + 2t,\ \ y = 3 - 2t,\ z = -1 - 3t$	$x = 5 + t,\ \ y = 5 + 2t,\ z = 2 + 2t$

Шунинг билан, $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ ва $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторлари орасидаги бурчакнинг косинуси

$$\cos\left(\widehat{\vec{p}_1,\vec{p}_1}\right)=\frac{m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+k_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+k_2^2}}$$

формуласи билан ифодаланади.

Бу ердаги $\vec{p}_1$ ва $\vec{p}_2$ векторлари орасидаги бурчак, уларнинг йўналишига қараб ўткир ҳам, ўтмас ҳам, бурчак косинусининг қиймати эса мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин $\cos\left(\widehat{\vec{p}_1,\vec{p}_2}\right)$. l_1 ва l_2 тўғри чизиқлари орасидаги бурчак ўтмас эмас деб олинганлигидан, бу бурчакнинг косинусини қуйидаги формула билан ифодалаш керак (2.20-расм):



2.20-расм

$$\cos\left(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}\right) = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}. \quad (1)$$

Агар $l_1 \perp l_2$ бўлса,

$$m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2 = 0. \quad (2)$$

Шарти бажарилишини яхши биламиз. Агар $l_1 \parallel l_2$ бўлса, бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларининг координаталари ўзаро пропорционал:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (3)$$

2.4.2. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак

Гуруҳ билан ишлаш

Айтайлик, $\frac{x - x_0}{m} + \frac{y - y_0}{n} + \frac{z - z_0}{k}$ тенглама билан l тўғри чизиғи ва $ax + by + cz + d = 0$ тенгламаси билан α текислиги берилсин. Гуруҳ бўлиб ёки жуфт бўлиб, қуйидаги саволларга жавоб беринглар:

• тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деганда нимани тушунасиз? Тўғри чизиқнинг текисликдаги проекцияси деб, нимага айтилади?

• тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни ифодалаш учун $\vec{p}(m; n; k)$ ва $\vec{n}(a; b; c)$ векторларидан қандай фойдалансак бўлади? Жавобингларни асослаб, уни синф билан бирга таҳлил қилинглар. Шунинг натижаси ўрнида қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни топинглар.

l тўғри чизиғининг тенгламаси	α текислигининг тенгламаси
$\frac{x-3}{8} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{3}$	$x + 2y + z - 6 = 0$
$x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5$	$x - y - 2z + 3 = 0$
$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$	$x + 3y - 2z - 6 = 0$
$x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t$	$2x + 3y - 2z - 4 = 0$

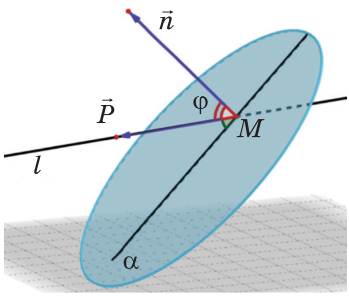
Шунинг билан, агар l тўғри чизиғининг йўналтирувчи вектори $\vec{p}(m; n; k)$, α текислигининг нормал вектори $\vec{n}(a; b; c)$ бўлса, шу векторлар орасидаги бурчакнинг косинуси

$$\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)=\frac{ma+nb+kc}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Бу ердаги $\vec{p}$ ва $\vec{n}$ векторлари орасидаги бурчак йўналишига қараб ўткир ҳам, ўтмас ҳам, бурчак косинусининг қиймати эса мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин $\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)$. У ҳолда $\vec{p}$ ва $\vec{n}$ векторлари орасидаги ўткир бурчакнинг косинуси

$$\left|\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right|=\frac{|ma+nb+kc|}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

l тўғри чизиғи ва α текислиги орасидаги бурчакни φ деб олсак, бу бурчак учун $\varphi=\frac{\pi}{2}-\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)$ тенглиги бажарилади (2.21-расм). Бурчакнинг ўткирлигини ҳисобга олсак, $\sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right)=$ $=\left|\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{n}}\right)\right|$ тенглиги келиб чиқади.



2.21-расм

Ундай бўлса, l тўғри чизиғи ва α текислиги орасидаги бурчакнинг синуси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\sin\varphi=\frac{|ma+nb+kc|}{\sqrt{m^2+n^2+k^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (4)$$

Агар $l \parallel \alpha$ бўлса,

$$ma+nb+kc=0 \qquad (5)$$

тенглиги бажарилади. $l \perp \alpha$ бўлган ҳолатда $\vec{p} \parallel \vec{n}$. Уларнинг координаталари ўзаро пропорционал:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{k}. \qquad (6)$$

2.4.3. Икки текислик орасидаги бурчак

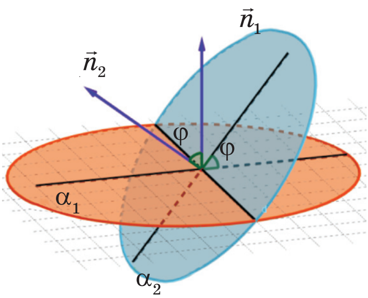
Гуруҳ билан ишлаш

Фазода α_1 ва α_2 текисликлари тенгламаси билан берилсин: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ва $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Шу икки текислик орасидаги бурчакни топиш усулини ўйлаб кўринглар. Бундаги $\vec{n}_1(a_1;b_1;c_1)$ ва $\vec{n}_2(a_2;b_2;c_2)$ нормал векторларидан қандай фойдалансак бўлади? Жавобларингизни асослаб, синф билан таҳлил қилинглар. Натижа бўйича қуйидаги тенгламалар билан берилган α_1 ва α_2 текисликларининг орасидаги икки ёқли бурчак ўлчовини топинглар:

α_1 текисликнинг тенгламаси	α_2 текисликнинг тенгламаси
$x + 2y + z - 6 = 0$	$4x - y - 2z + 3 = 0$
$5x + 3y - 2z - 6 = 0$	$2x + 3y - 2z - 4 = 0$
$x - 2y + z - 3 = 0$	$3x + y - z + 1 = 0$
$x - 2y + z - 3 = 0$	$2x - 4y + 2z + 7 = 0$

Шунинг билан, агар α_1 ва α_2 текисликларининг нормал векторлари $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ ва $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ бўлса, шу векторлар орасидаги бурчакнинг косинуси қуйидагича ифодаланади:

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$



2.22-расм

Бу ердаги $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлари орасидаги бурчак уларнинг йўналишига қараб, ўткир, ўтмас, $\cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right)$ ўлчовининг қиймати эса мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин (2.22-расм). Шунинг учун α_1 ва α_2 текисликларининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг косинуси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\cos\left(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}\right) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \quad (7)$$

$\alpha_1 \parallel \alpha_2$ бўлганда мос тенгламаларнинг коэффицентлари пропорционал:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (8)$$

$\alpha_1 \perp \alpha_2$ бўлганда

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \tag{9}$$

1-мисол. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг учларининг координаталари берилган: $A(2; 0; -3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 1; 3)$, $D(-2; 1; 4)$. 1) $\angle ABC$ бурчагини; 2) AD тўғри чизиғи билан ABC ёқи орасидаги бурчакни; 3) ABC ва ABD ёқлари орасидаги бурчакни топиш керак.

▲ 1) $\angle ABC$ бурчагини AB ва BC тўғри чизиқлари орасидаги бурчак ўрнида (1) формула ёрдамида топишга бўлмайди. Чунки, бу формула билан фақат ўтмас бўлмаган бурчаклар топилади. ABC үучбурчагида ўтмас бурчаклар бўлиши мумкин. Шунинг учун, $\angle ABC$ бурчагини $\overrightarrow{BA}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторлари орасидаги бурчак ўрнида олиш керак. Бу ерда $\overrightarrow{BA}$ $(2; -3; -4)$ ва $\overrightarrow{BC}$ $(-1; -2; 2)$, $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ ва $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$ бўлганлигидан, икки векторнинг орасидаги бурчакни топиш формуласи бўйича

$$\cos(\angle ABC) = \frac{|2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-2)+(-4)\cdot 2|}{\sqrt{29}\cdot 3} = \frac{4}{3\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{87}.$$

Бурчакни топиш учун шу бурчакнинг косинусини, синусини ёки тангенсини топилса етарли бўлади.

2) AD тўғри чизиғи билан ABC ёқи орасидаги бурчакни топиш учун уларнинг тенгламаларини ёзиб олиш керак. $\overrightarrow{AD}(-4; 1; 7)$ бўлганлигидан, AD тўғри чизиғининг тенгламаси қуйидагича ёзилади: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{7}$. $\overrightarrow{BA}(2;\ -3;\ -4)$ ва $\overrightarrow{BC}(-1;\ -2;\ 2)$ бўлганлигидан, ABC ёқининг нормал вектори қуйидагича ёзилади: $\vec{n}_1(-6; -8; 4-4; -4-3) = (-14; 0; -7)$. Энди -7 га қисқартириб, нормал вектор ўрнида $\vec{n}_1$ $(2;\ 0;\ 1)$ векторини олишга бўлади. Шунинг билан, ABC ёқининг тенгламаси қуйидагича ёзилади: $2(x-2) + 0(y-0) + (z+3) = 0 \Rightarrow 2x + z - 1 = 0$. У ҳолда бизга керакли φ бурчаги қуйидагича ифодаланади:

$$\sin\varphi = \frac{|-4\cdot 2 + 1\cdot 0 + 7\cdot 1|}{\sqrt{4^2+1^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{330}}{330}.$$

3) ABC ёқининг тенгламасини биз биламиз: $2x + z - 1 = 0$. Энди ABD ёқининг тенгламасини ёзиш керак. $\overrightarrow{AD}(-4; 1; 7)$ ва $\overrightarrow{AB}(-2; 3; 4)$

бўлганлигидан, ABD ёқининг нормал вектори қуйидагича ёзилади: $\vec{n}$ $(4 - 21; - 14 + 16; - 12 + 2) = (-17; 2; -10)$. У ҳолда ABD ёқининг тенгламаси $-17(x - 2) + 2y - 10(z + 3) = 0 \Rightarrow 17x - 2y + 10z - 4 = 0$ келиб чиқади. Шунинг билан, бу икки ёқли бурчак γ бўлса,

$$\cos\gamma = \frac{|2\cdot 17 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 10|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17^2 + 2^2 + 10^2}} = \frac{44}{\sqrt{1965}} = \frac{44\sqrt{1965}}{1965}.$$

Жавоб: 1) $\cos(\angle ABC) = \dfrac{4\sqrt{29}}{87}$; 2) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{330}}{330}$.

3) $\cos\gamma = \dfrac{44\sqrt{1965}}{1965}$. ■

1. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак (тенгламалари бўйича) қандай ифодаланади? Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак ўрнида қайси бурчак олинади?
2. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак қандай топилади? Формуласини ёзиб, уни тушунтиринг.
3. Икки текислик орасидаги бурчак (тенгламалари бўйича) қандай ифодаланади? Формуласини ёзиб, уни тушунтиринг.
4. Учбурчак бурчакларини унинг мос томонлари орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари ёрдамида қандай ифодаланади? Жавобингизни асосланг. $\angle ABC$ бурчакни топиш учун қандай векторлардан фойдаланиш кекрак?

МАСАЛАЛАР

А

2.61. $M_0(2; 0; -1)$ нуқтаси орқали ўтувчи, йўналтирувчи вектори $\vec{p}(-1; -2; 2)$ бўлган тўғри чизиқ билан берилган тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг:

1) $\dfrac{x-3}{8} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{3}$;

2) $x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5$;

3) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$;

4) $x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t$.

2.62. $M_0(2;\ 0;\ -1)$ нуқтаси орқали ўтувчи, нормал вектори $\vec{n}\ (-3;\ 0;\ 4)$ бўлган текислик билан берилган текислик орасидаги икки ёқли бурчакнинг ўлчовини топинг:

1) $x + 2y + z - 6 = 0;$ 2) $x - y - 2z + 3 = 0;$

3) $x + 3y - 2z - 6 = 0;$ 4) $2x + 3y - 2z - 4 = 0.$

2.63. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг:

1) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-5}{3}$ ва $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-5}{3};$

2) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-5}{1}$ ва $x = 2 - 2t,\ y = 1 + 3t,\ z = 3t - 2;$

3) $x = 7 + 5t,\ y = 4 + t,\ z = 5 + 4t;$ ва $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3};$

4) $x = 5t,\ y = 4 + 2t,\ z = 1 - 4t$ ва $x = 2 - t,\ y = 1 + 3t,\ z = 3t - 1.$

2.64. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчакни топинг:

1) $\dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+5}{5}$ ва $x + 2y + 3z + 6 = 0;$

2) $x = 2 - t,\ y = 15 + 2t,\ z = 3t - 5$ ва $2x + y - 2z - 6 = 0;$

3) $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-2}{1}$ ва $x - 5y - 2z + 4 = 0;$

4) $x = 2 - 3t,\ y = 4 - t,\ z = -1 + 4t$ ва $x + y - 2z - 1 = 0.$

2.65. Икки текислик орасидаги бурчакни топинг:

1) $2x - 5y - 2z + 4 = 0$ ва $x + 2y + z - 6 = 0;$

2) $x + 2y - 2z - 1 = 0$ ва $4x - y - 2z + 3 = 0;$

3) $2x + y - 2z - 6 = 0$ ва $x + 3y - 2z - 6 = 0;$

4) $3x + 2y - z + 6 = 0$ ва $2x + 3y - 2z - 4 = 0.$

B

2.66. $x - 2y + 2z - 5 = 0$ текислигига параллел бўлган ва бу текисликдан 1) 2-га; 2) 4-га; 3) 5-га; 4) 8-га тенг бўлган масофадан ўтувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

▲ 1) $x-2y+2z-5=0$ – берилган текислик. Бизга зарур бўлган текисликнинг тенгламаси ҳам $x-2y+2z+d=0$ кўринишида ёзилади (уни асосланг). У ҳолда бу икки текисликнинг орасидаги масофа қуйидагича ҳисобланади (2.54-масалага қаранг):

$$2=\frac{|d+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|d+5|}{3}\Rightarrow |d+5|=6\Rightarrow d_1=-11,\ d_2=1.$$

Бизга зарур текисликнинг тенгламаси бундай ёзилади:

$x-2y+2z-11=0$ ёки $x-2y+2z+1=0$. ■

2.67. $\begin{cases}2x+y-4z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases}$ тўғри чизиғи ва $M_0(2;\ 3;\ -1)$ нуқтаси билан координаталар боши орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг орасидаги бурчакни топинг.

2.68. $M_0(2;\ 0;\ -2)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва 1) Oy ўқига параллел; 2) Oy ўқига перпендикуляр тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

2.69. $\begin{cases}x+3y-4z+1=0,\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}$ тўғри чизиғи ва унинг $2x+2y-3z-1=0$ текислигидаги проекцияси орасидаги бурчакни топинг.

2.70. $M_0(2;\ 0;\ -2)$ нуқтасидан ўтувчи ва $\begin{cases}x-4z+1=0,\\ y-z-3=0\end{cases}$ тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

2.71. $x=4z+10$ текислиги билан $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ 2x-y+z+1=0\end{cases}$ тўғри чизиғининг 1) кесишиш нуқтасини; 2) орасидаги бурчакни топинг.

2.72. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг учларининг координаталари берилган: $A(1;\ 8;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ 2;\ 3)$, $D(-3;\ -2;\ 5)$. 1) $\angle ABC$; 2) AD тўғри чизиғи билан ABC ёқи орасидаги бурчакни; 3) ABC ва ABD ёқлари орасидаги бурчакни топинг.

C

2.73. Oy ўқи орқали ўтувчи ва $x-y=0$ текислиги билан $60°$ ли бурчак ясаб, кесишадиган текисликнинг тенгламасини ёзинг.

2.74.* $2x + 2y - z = 0$ ва Oxy текисликлари орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликнинг тенгламасини ёзинг.

2.75. $A(1; 8; -3)$, $B(3; 4; 1)$, $C(-1; 2; 3)$, $A_1(-3; -2; 5)$ нуқталари $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг учлари. Унинг 1) бошқа учларининг координаталарини; 2) AB, AC ва AA_1 қирраларининг тенгламаларини; 3) $\angle ABC$; 4) AA_1 қирраси билан асос текислиги орасидаги бурчакни; 5) AB, AC ва AA_1 қирраларида тўқнашадиган икки ёқли бурчакларни топинг.

2.76. $x = 2 + t$, $y = 15 + 2t$, $z = 2t - 5$ тўғри чизиғи билан координата ўқлари орасидаги бурчакларнинг косинусларини топинг. Бу косинусларга тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади. Шунинг билан, агар α, β ва γ лар мана шу бурчаклар бўлса, у ҳолда $\cos\alpha = \frac{1}{3}; \cos\beta = \frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{2}{3}$. Бу ерда $\vec{p}(1; 2; 2)$ берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори ва $|\vec{p}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Ундай бўлса, $|\vec{p}|\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ вектори ҳам берилган тўғри чизиққа параллел бирлик вектор бўлади. Умуман олганда, $\frac{x - x_0}{m} + \frac{y - y_0}{n} + \frac{z - z_0}{k}$ тўғри чизиғининг йўналтирувчи косинусларини топинг.

Терминларнинг аталиш луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Тўғри чизиқ тенгламаси	Түзудің теңдеуі	Уравнение прямой	Line equation
Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори	Түзудің бағыттаушы векторы	Направляющий вектор прямой	Leading vector of a line
Текисликнинг тенгламаси	Жазықтықтың теңдеуі	Уравнение плоскости	Plane equation
Текисликнинг нормал вектори	Жазықтықтың нормаль векторы	Вектор нормали плоскости	Normal vector of a plane

Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси	Түзудің канондық теңдеуі	Каноническое уравнение прямой	Canonical equation of a line
Тўғри чизиқнинг параметрли тенгламаси	Түзудің параметрлік теңдеуі	Параметрическое уравнение прямой	Parametric equation of a line
Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси	Түзудің жалпы теңдеуі	Общее уравнение прямой	General equation of a line
Текисликнинг умумий тенгламаси	Жазықтықтың жалпы теңдеуі	Общее уравнение плоскости	General equation of a plane

«ФАЗОДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАЛАРИНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИ»
бўлимининг хулосаси

1) $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва $\vec{p}(m; n; k)$ йўналтирувчи векторига параллел l тўғри чизиғининг параметрли тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt, \end{cases}$$

2) Шу системанинг ҳар бир тенгламасидан t ни бошқалари орқали ифодалаб, қуйидаги тенгламаларни олишга бўлса,

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

бу тенглама тўғри чизиқнинг ***каноник тенгламаси*** дейилади.

3) $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи ва $\vec{n}(a; b; c)$ векторига перпендикуляр текисликнинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

4) Текисликнинг ***умумий тенгламаси***:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

5) $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтаси орқали ўтувчи, $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ ва $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторларига параллел текисликнинг тенгламаси:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Бу ердаги:

$$\begin{cases} a = n_1k_2 - n_2k_1, \\ b = k_1m_2 - k_2m_1, \\ c = m_1n_2 - m_2n_1. \end{cases}$$

6) Фазодаги ҳар бир тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиши ўрнида ифодалашга бўлади. Агар $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ва $a_2x + + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ тенгламалар билан иккита текислик берилса,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Системаси билан шу текисликларнинг кесишиши натижасида ифодаланадиган тўғри чизиқнинг тенгламаси берилади. Бу тенгламага тўғри чизиқнинг ***умумий тенгламаси*** деб аталади.

7) $\vec{p}_1(m_1; n_1\ k_1)$ ва $\vec{p}_2(m_2; n_2; k_2)$ векторлари орасидаги бурчак қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\cos\left(\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_2}\right) = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}.$$

8) Агар l тўғри чизиғининг йўналтирувчи вектори $\vec{p}(m; n; k)$, α текислигининг нормал вектори эса $\vec{n}(a; b; c)$ бўлса, шу векторларнинг орасидаги бурчакнинг синуси қуйидагича ифодаланади:

$$\sin\varphi = \frac{|ma + nb + kc|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

9) Агар α_1 ва α_2 текисликларнинг нормал векторлари $\vec{n}_1(a_1; b_1; c_1)$ ва $\vec{n}_2(a_2; b_2; c_2)$ бўлса, шу векторларнинг орасидаги бурчакнинг косинуси қуйидагича ифодаланади:

$$\cos\left(\widehat{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2}\right) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

III бўлим. АЙЛАНМА ЖИСМЛАР

Мана шу бўлимда сизлар геометриянинг қизиқарли мавзуларининг бири айланма жисмлар билан танишасизлар. Ҳайкалтарошлик касбида айланма жисмларга мисол бўла оладиган цилиндр, конус, кесик конус шаклидаги бинолар кўплаб учрайди.

Бўлимда кўриладиган мавзулар:

3.1. Цилиндр.

3.2. Конус. Кесик конус

3.3. Сфера ва шар

«НУРЛИ ОЛАМ» – Нур-Султан шаҳридаги, ЭКСПО – 2017 нинг архитектуравий тимсолидир. Бу – оламдаги энг катта сфера шаклидаги бино. Унинг диаметри 80 м. Бу сфера шаклидаги бино 8 қаватдан ташкил топган. Бу бўлимни ўқиб-ўрганиш давомида унинг 7 қавати кесимининг юзасини ҳисоблашни ўрганасизлар.

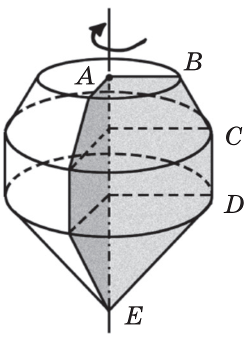
3.1. Цилиндр

Бу бўлимда цилиндр ва унинг элементлари билан танишиб, цилиндрнинг ёйилмаси, ён ва тўлиқ сиртининг юзаларини ҳисоблашни ўрганасизлар. Бўлим сўнгида:

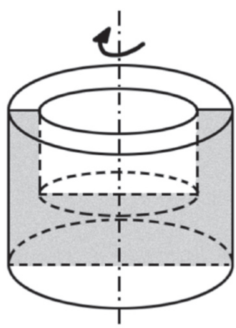
- **цилиндрнинг таърифини, унинг элементларини биласизлар, цилиндрни текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **цилиндрнинг ён сирти ва тўла сирт юзалари формулаларини келтириб чиқариб чиқарасизлар ва уларни масалалар ечишда қўлланасизлар;**
- **цилиндрнинг элементларини топишга доир масалаларни еча оласизлар;**
- **цилиндрнинг ёйилмасини ясай оласизлар;**
- **цилиндрнинг текислик билан кесимларини тасвирлаб, масалалар еча оласизлар.**

3.1.1. Айланма жисмлар ва айланма сиртлари тушунчаси

Айланма жисмлар билан айланма сиртлари тушунчасини фарқлай билиш лозим. Биринчи бўлиб, айланма жисмлар тушунчасини қарайлик. Айтайлик, $ABCDE$ ёйиқ бешбурчаги берилсин. Уни AE томони орқали ўтувчи тўғри чизиғи бўйлаб айлантирайлик. Шунда 3.1-расмда кўрсатилган жисм олинади. Бу жисмга ***айланма жисм***, AE тўғри чизиғига айланма жисмнинг ***ўқи*** дейилади. Айланма жисмнинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесганда ҳосил бўлган кесим унинг ***ўқ кесими*** дейилади. Айланма жисмнинг ҳар бир ўқ кесими унинг ўқига нисбатан симметрик бошланғич ёйиқ фигурага тенг иккита фигурадан ташкил топади. Айланма жисмни унинг ўқига перпендикуляр текисликлар билан кесганда ҳосил бўлган кесимлари доира ёки халқа шаклида бўлади (3.2-расм).

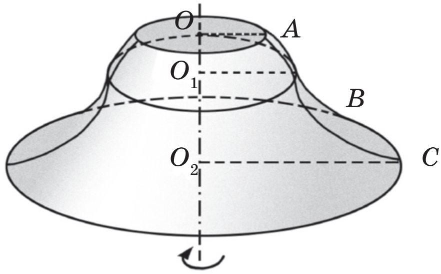


3.1-расм


3.2-расм

Айланма жисмнинг чегаравий нуқталарининг тўплами унинг ***сирти*** ёки ***айланма сирти*** дейилади.

Умуман олганда, айланма сиртларини қандайда бир ясси чизиқлардан ташкил топган фигурани маълум бир ўқдан айлантириб ҳосил қилса ҳам бўлади. Масалан, 3.3-расмда AB ва BC ёйларидан ташкил топган синиқ чизиқни OO_2 ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўлган сирт тасвирланган. Бу ерда AB ва BC ёйларидан ташкил топган чизиққа айланма сиртнинг ***ясовчиси*** дейилади.



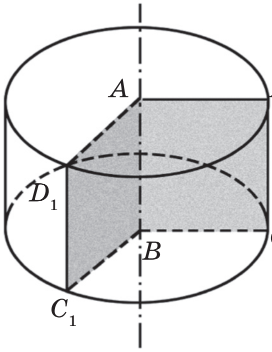
3.3-расм

Шунинг билан, айланма жисмни (сиртни) ҳосил қилиш учун айланма ўқи билан шу ўқ атрофида айланадиган ясси фигурани кўрсатиш етарли.

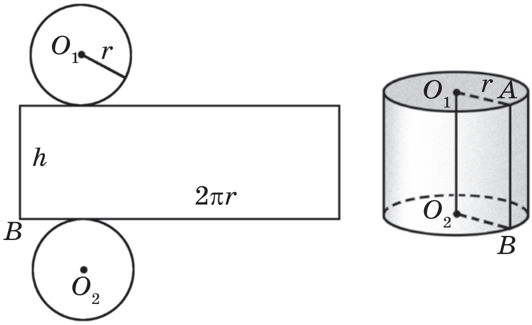
3.1.2. Цилиндр

Цилиндр деб, тўғри тўртбурчакни бирор томони атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмга айтилади.

Масалан, 3.4-расмда $ABCD$ тўғри тўртбурчагининг AB томони атрофида айлантирганда пайдо бўлган цилиндр тасвирланган. AB томони цилиндрнинг ***ўқи*** деб аталади. Умуман олганда, бундай цилиндрларга ***доиравий цилиндр***, унинг сиртига ***цилиндрнинг сирти*** деб аталади. Бу ерда CD кесмаси билан цилиндрнинг ён сиртида жойлашган CD га параллел кесмалар, шу цилиндр сиртининг ясовчилари бўлади: CD, C_1D_1 – ясовчилари бўлади. Шунинг билан, цилиндр ясовчисининг айланишидан пайдо бўлган сирт – унинг ***ён сирти*** бўлади. AD ва BC кесмаларининг айланишидан ўзаро тенг иккита доира пайдо бўлади. Уларга цилиндрнинг ***асослари*** дейилади. AD ва BC – асос радиуслари. Цилиндр ясовчиларининг узунлиги унинг ***баландлиги*** бўлади, чунки улар цилиндрнинг асос текисликлари орасидаги масофани билдиради.



3.4-расм



3.5-расм

Агар цилиндрнинг асосида жойлашган айланалар бўйлаб ва бир ясовчиси бўйлаб кесиб, пайдо бўлган фигурани текислик сиртига жойлаштирсак, у ҳолда цилиндрнинг ***ёйилмасини*** ҳосил қиламиз (3.5-расм). Цилиндр асосининг радиуси r га тенг бўлса, у ҳолда цилиндрнинг ён сиртининг ёйилмаси, ўлчовлари h (цилиндр баландлиги) ва $2\pi r$ га (цилиндр асосидаги айлана узунлиги) тенг тўғри тўртбурчак бўлади. Ундай бўлса, бу цилиндрнинг ён сирт юзаси $S_{\text{ён.с.}} = 2\pi rh$, тўла сирт юзаси

$$S_{\text{т.с.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r\,(r + h)$$

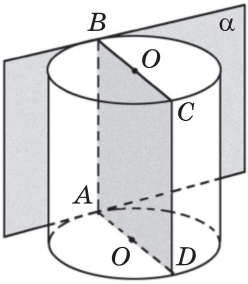
формуласи билан ифодаланиши келиб чиқади.

3.1.3. Цилиндрга ички ва ташқи чизилган призмалар

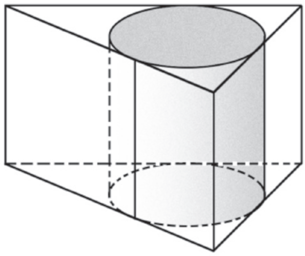
Цилиндрнинг ясовчиси орқали ўтиб ва цилиндр билан бошқа умумий нуқталари бўлмаган текисликка цилиндрга ***уринма текислик*** дейилади. 3.6-расмда тасвирланган α текислиги – берилган цилиндрга уринма текислик бўлади. Шу ясовчи орқали ўтган цилиндрнинг ўқ кесими α уринма текислигига перпендикуляр: $(ABCD) \perp \alpha$.

Асослари цилиндрнинг мос асос текисликларида жойлашган, ён ёқлари цилиндрга уринувчи тўғри призмага ***цилиндрга ташқи чизилган призма*** дейилади. 3.7-расмда цилиндрга ташқи чизилган учбурчакли призма тасвирланган. Унинг асослари цилиндр асосларига ташқи чизилган учбурчаклар бўлади.

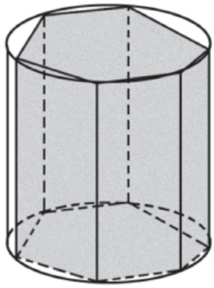
Асослари цилиндрнинг мос асосларига ички чизилган кўпбурчакли тўғри призмага ***цилиндрга ички чизилган призма*** дейилади. 3.8-расмда цилиндрга ички олтибурчакли тўғри призма чизилган ва унинг асослари цилиндр асосларидаги айланаларга ички чизилган.



3.6-расм



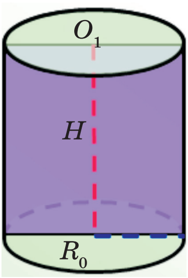
3.7-расм



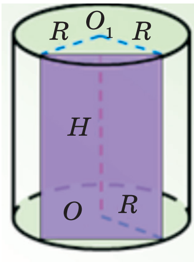
3.8-расм

3.1.4. Цилиндр кесимлари

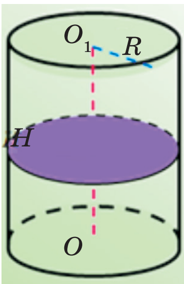
Фазода *Ф* айланма жисми билан α текислигининг кесишишидан пайдо бўлган фигура шу жисмнинг ***кесими***, α текислиги эса ***кесувчи текислик*** дейилади.



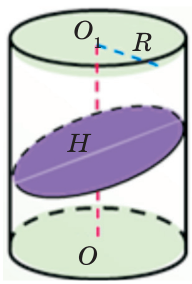
Цилиндр ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесилганда пайдо бўлган кесимни цилиндрнинг ўқ кесими деб атайди. У тўғри тўртбурчак бўлади.



Цилиндр ўқига параллел текислик билан кесилганда пайдо бўлган кесим тўғри тўртбурчак бўлади.



Цилиндр ўқига перпендикуляр текислик билан кесилганда пайдо бўлган кесим доира бўлади.



Цилиндр ўқига қандайдир бир бурчак остида кесиб ўтувчи текислик билан кесилганда пайдо бўлган кесим эллипс бўлади.

Қўшимча электронли ресурслар
https://scienceforum.ru/2019/article/2018011262

1. Айланма жисм деб, нимага айтилади? Айланма жисмнинг ўқ кесими деб, нимага айтилади? Ясовчи нима?
2. Айланма сирт деганда нимани тушунасиз? Унинг айланма жисм билан фарқи нимада?
3. Доиравий цилиндр деб, нимага айтилади? Унинг асослари, баландлиги, ён сирти деб, нимага айтилади?
4. Цилиндр сиртининг ёйилмаси деб, нимага айтилади? У қандай фигуралардан ташкил топган ва юзаси қандай формула билан ифодаланади?
5. Цилиндрга ташқи ва ички чизилган тўғри призма деб, нимага айтилади?
6. Қандай текисликка цилиндрга уринма текислик деб атайди?

МАСАЛАЛАР

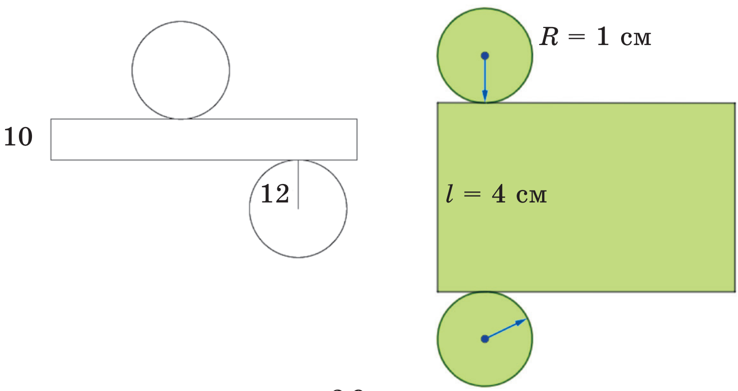
А

Амалий топшириқ

3.1. Кундалик ҳаётимизда учрайдиган цилиндрсимон сиртларга (жисмларга) мисоллар келтиринг.

3.2. Бир бет варақ ёрдамида цилиндр сирт ясашга бўладими? Бу тўғри тўртбурчакли варақни тўғри доиравий цилиндрнинг ён сирти деб, унинг асос радиуси билан баландлигини топинг. Масаланинг нечта ечими мавжуд?

3.3. Квадратнинг бирор томони атрофида айланишидан пайдо бўладиган жисмни ясанг.

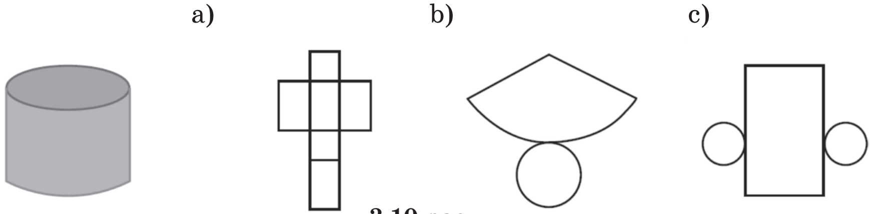


3.9-расм

3.4. Ёйилмаси бўйича фигурани аниқланг (3.9-расм). Уларнинг тўла сирт юзасини ҳисобланг.

3.5. Тўғри бурчакнинг кичик томонидан айлантирганда пайдо бўладиган жисмни ясанг.

3.6. Фигуранинг тўлиқ номини атанг ва ёйилмасини топинг (3.10-расм):

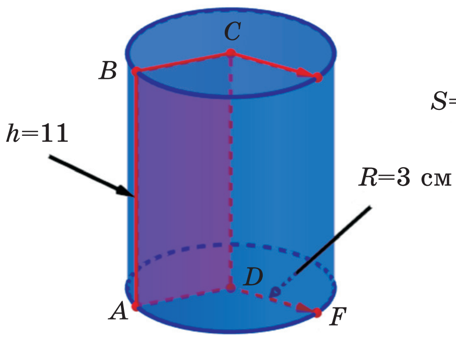


3.10-расм

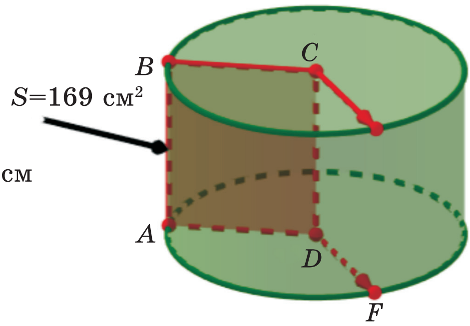
3.7. Асос радиуси r га, баландлиги h га тенг бўлган цилиндрнинг ён сирт юзасини топин: 1) $r = 2$ см, $h = 3$ см; 2) $r = 10$ мм, $h = 7$ мм; 3) $r = 5$ м, $h = 12$ м.

3.8. Цилиндрнинг ўқ кесими квадрат ва унинг юзаси S га тенг. Цилиндрнинг тўла сирт юзасини топинг: 1) S=16 см^2; 2) S=121 м^2; 3) S=441 мм^2.

3.9. Цилиндрнинг баландлиги 11 см, радиуси 3 см га тенг. Унинг тўла сирт юзасини ҳисобланг (3.11-расм).



3.11-расм



3.12-расм

3.10. Юзаси 169 см^2 квадратнинг бир томони атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган цилиндрнинг тўла сирт юзаси билан радиусини топинг (3.12-расм).

3.11. Ўлчовлари 2 см ва 4 см бўлган тўғри тўртбурчакнинг ҳар бир томонидан айлантириш натижасида пайдо бўладиган цилиндрларни ясанг. Уларнинг ўқ кесимининг юзаси билан ён сирт юзасини топинг.

3.12. Цилиндрнинг асос радиуси 6 см, баландлиги 5 см га тенг. Унинг ўқ кесимининг диагоналини топинг.

3.13. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали 12 см ва у асос текислигига 30° ли бурчак остида оғма ҳосил қилади. Цилиндрнинг 1) асосининг радиусини; 2) баландлигини; 3) асос юзасини топинг.

3.14. Цилиндрга қирраси 4 см бўлган куб ички чизилган. Цилиндрнинг тўла сирт юзасини топинг.

3.15. Цилиндрнинг ён сирт ёйилмаси – томони 10 см бўлган квадратдан иборат. Цилиндрнинг радиусини топинг.

3.16. Цилиндрнинг нечта 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги мавжуд? Унинг симметрия текисликларининг барчаси ҳам цилиндр ўқи орқали ўтиши шартми? Жавобингизни асосланг.

3.17. Цилиндрнинг ўқ кесимининг диагонали 48 см ва у асос текислигига 60° ли бурчак остида оғма ҳосил қилади. Цилиндрнинг 1) асосининг радиусини; 2) баландлигини; 3) асос юзасини топинг.

3.18. Цилиндрнинг баландлиги 12 см, радиуси 10 см га тенг. Цилиндрни унинг ўқига паралел текислик билан кесиб ўтганда квадрат ҳосил бўлди. Цилиндрнинг ўқ кесимигача бўлган масофасини топинг.

Амалий топшириқ

3.19. Узунлиги 4 м, диаметри 20 см бўлган чуқурлик ясаш керак. Тунукаларни жисм шаклига келтирганда унинг юзасининг 2,5%-и устма-уст тушади деб, шундай 4 та чуқурлик ясаш учун фойдаланиладиган тунукаларнинг юзасини топинг.

В

3.20. Тўғри тўртбурчакни ҳар бир томони атрофидан айлантириб, иккита турли цилиндр ҳосил қилишга бўлади. Уларнинг ён сирт юзаларининг тенг эканлигини исботланг. Тўла сирт юзалари тенг бўладими?

3.21. 1) Тенг томонли учбурчакнинг; 2) мунтазам олтибурчакнинг бир томони атрофидан айлантирганда ҳосил бўладиган айланма жисмни ясанг.

3.22. Аввалги масаладаги айланма жисмларнинг ўқ кесимини, кўпбурчак томонини a га тенг деб олиб топинг.

3.23. Радиуси 5 см ва баландлиги 6 см цилиндрнинг ўқидан 3 см узоқликдаги ўқига параллел кесимининг юзасини топинг.

▲ **Берилган:** цилиндрнинг баландлиги (ўқи) $OO_1 = 6$ см, радиуси $OA = 5$ см, $AA_1B_1B - OO_1$ ўқига параллел цилиндрни кесувчи текислик. $OF = 3$ см – цилиндрнинг ўқи билан уни кесувчи текисликкача бўлган масофа.

Топиш керак: $S_{кесим}(AA_1B_1B)$ – ?

Ечилиши: $S_{кесим}(AA_1B_1B) = OO_1 \cdot AB$.

1) Берилган параметрлар билан цилиндрни ясаш мабойнида унинг асосида тенг ёнли учбурчак AOB ётишини кўрамиз. Унинг ёнлари: $R = OA = OB = 5$ см, $OF = 3$ см – O нуқтасидан AB (цилиндрни кесувчи учбурчакнинг ёни) ёнига тушурилган баландлик.

2) Пифагор теоремасидан фойдаланиб, AB узунлигини топамиз:

$$AF = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ см}.$$

$AB = 2AF = 2 \cdot 4 = 8$ см.

3) Цилиндрнинг баландлиги (ўқи) $OO_1 = 6$ см. Кесувчи учбурчакнинг юзаси:

$S_{кесим}(AA_1B_1B) = OO_1 \cdot AB = 6 \cdot 8 = 48$ см^2.

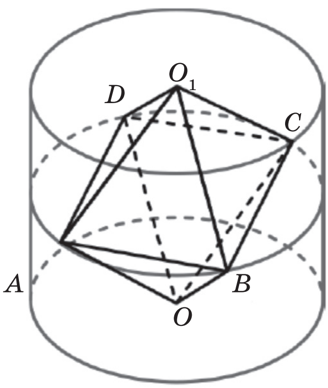
4) 3D расмга сайт:

https://www.geogebra.org/classic/fku24dcx ■

3.24. Цилиндрга мунтазам олтибурчакли призма 1) ички; 2) ташқи чизилган. Цилиндр билан призманинг ён сиртларининг нисбатини топинг.

3.25. Цилиндрнинг баландлиги унинг радиусидан 6 см ортиқ, тўла сирт юзаси 112 см^2 га тенг. Цилиндрнинг радиуси билан баландлигини топинг.

3.26. Икки қарама-қарши учлари цилиндр асосларининг марказларида, бошқа учлари цилиндрнинг ён сиртида жойлашган, цилиндрга мунтазам октаэдр ички чизилган. Октаэдрнинг қирраси a га тенг бўлса, цилиндрнинг ён сирт юзасини топинг (3.13-расм).



3.13-расм

3.27. Радиуси R цилиндрнинг ён сиртининг юзаси асослари юзаларининг йиғиндисига тенг. Цилиндрнинг баландлигини топинг.

3.28. Баландлиги h ва асосининг томони a га тенг бўлган мунтазам учбурчакли тўғри призмага ички чизилган цилиндрнинг ён сирт юзасини топинг.

3.29. Аввалги масаладаги призмага ташқи чизилган цилиндрнинг диаметрли кесимининг юзасини топинг.

Амалий топшириқ

3.30. Диаметри 1420 мм бўлган газ қувурини икки марта сақлагич (изоляцияли) пленка билан ўраб чиқади. Газ қувурининг 1 км ни ўрашга кетадиган пленканинг юзасини топинг. Пленканинг қалинлигини ҳисобга олмаймиз.

▲ **Берилган:** Цилиндр.

$R = 710$ мм $= 0,71$ м, $l = 1$ км $= 1000$ м.

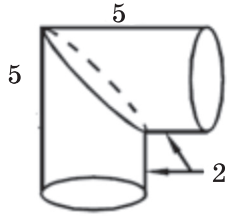
Топиш керак: $2S_{\text{ён.с.}}$ – ?

Ечилиши: $2S_{\text{ён.с.}} = 2 \cdot 2\pi Rl = 2 \cdot 2\pi \cdot 0,71 \cdot 1000 = 2 \cdot 1420\ \pi\text{м}^2 \approx$ ≈ 8918 м^2. ■

3.31.* Берилган S ўқ кесимининг юзаси бўйича цилиндрнинг ён сирт юзасини топиш мумкинми? Жавобингизни асосланг.

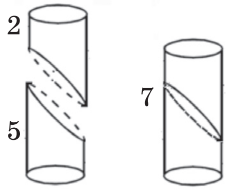
3.32. Тўғри призманинг асоси – катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғрибурчакли учбурчак. Призма баландлиги 10 см бўлса, призмага ташқи чизилган цилиндрнинг ён сиртининг ва тўла сиртининг юзасини топинг.

3.33. Узунлиги 5 см, диаметри 3 см икки қувир 3.14-расмда кўрсатилгандек бурчаклаб қўшилган. Ҳосил бўлган фигуранинг сирт юзасини топинг.



3.14-расм

Бу масалада бурчаклаб қўшилган икки қувурни расмда кўрсатилгандек узунлиги 7 см бўлган битта қувур деб шакллантирса, масалани ечиш осон бўлади.



▲ **Берилган:** Цилиндр. $R = 1,5$ см, $h = 7$ см.

Топиш керак: $S_{\text{ён.с.}}$ – ?

Ечилиши: $S_{\text{ён.с.}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 7 = 21\pi$ см^2. ■

C

3.34. Тўғри тўртбурчакнинг бир томони 6 см, диагонали 10 см га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг узун томони атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган цилиндрнинг тўла сирт юзасини топинг.

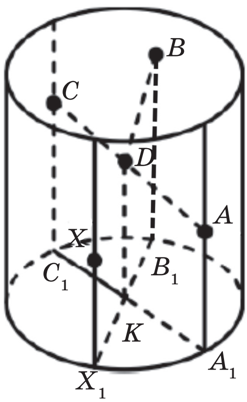
3.35. Цилиндрнинг битта ясовчиси орқали ўтказилган икки кесимининг бири цилиндрнинг ўқи орқали ўтади ва бу кесимлар орасидагиикки ёқли бурчак φ га тенг. Шу кесимлар юзаларининг нисбатини топинг.

3.36. Цилиндрдан ташқарида ётган нуқтадан шу цилиндрнга уринувчи текисликни қандай ясашга бўлади? (Текисликни ясаш учун унда ётувчи кесишувчи икки тўғри чизиқни кўрсатиш етарли).

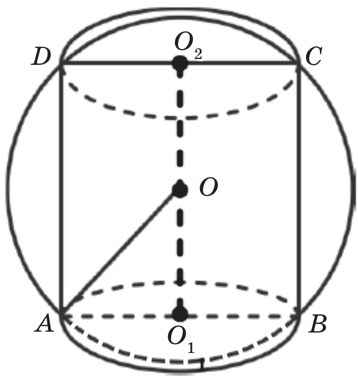
3.37. Цилиндрга ташқи чизилган тўртбурчакли призманинг қарама-қарши ёқлари юзаларининг йиғиндиси тенг эканлигини кўрсатинг.

3.38.* Цилиндрга ички чизилган тўртбурчакли призманинг қарама-қарши ён қирраларидаги икки ёқли бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг эканлигини кўрсатинг.

3.39.* Цилиндрнинг ён сиртида иккитаси битта ясовчида ётмайдиган ихтиёрий учта нуқта олинган. Шу учта нуқта орқали ўтувчи текислик билан цилиндрнинг ихтиёрий ясовчисини кесишиш нуқтасини қандай топишга бўлади (3.15-расм)?



3.15-расм



3.16-расм

3.40. Цилиндр ён сиртининг юзаси унинг ўқ кесимига ташқи чизилган айлана билан чегараланган доиранинг юзасига тенг бўлиши учун цилиндрнинг радиуси билан баландлиги орасидаги боғлиқлик қандай бўлиши зарур (3.16-расм)?

▲ **Берилган:** Цилиндр. R – радиуси, h – баландлиги, S – ўқ кесимига ташқи чизилган доиранинг юзаси. $S_{\text{ён.с.}} = S$.

Топиш керак: R ва h орасидаги боғлиқлик.

Ечилиши: $S_{\text{ён.с.}} = 2\pi Rh$. Иккинчи томондан $\Delta AOO_1 : AO_1 = R$,

$$OO_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow AO = \sqrt{AO_1^2 + OO_1^2} = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + h^2}.$$

Бундан $S = \pi \cdot AO^2 = \frac{\pi}{4}(4R^2 + h^2) \Rightarrow 8Rh = 4R^2 + h^2$, $\frac{h}{R} = x$ деб олсак, $x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm\sqrt{12}$, яъни $h = 2(2 \pm\sqrt{3})R$. ■

Такрорлашга доир топшириқлар

3.41. Тенгёнли учбурчакка радиуси 7,5 бўлган айлана ички чизилган ва у баландликни 17:15 каби нисбатда бўлади. Учбурчакнинг периметри билан юзасини топинг.

3.42. Трапецияга радиуси 6 га тенг айлана ички чизилган. Уринма нуқтаси трапециянинг пастки асосини узунлиги 9 ва 12 бўлган кесмаларга бўлади. Трапециянинг томонлари билан юзасини топинг.

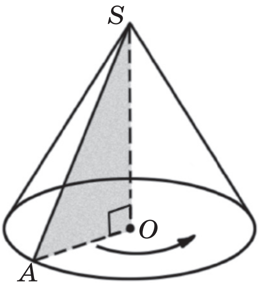
3.2. Конус. Кесик конус

Бу бўлимда конус, кесик конус ва уларнинг элементларини, конуснинг ёйилмасини, ён ва тўла сирт юзаларини ўқиб ўрганасизлар. Бўлим сўнгида:

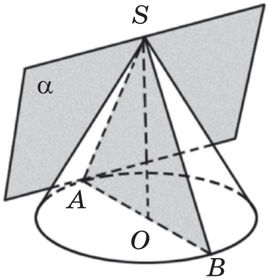
- **конуснинг, кесик конуснинг таърифларини, уларнинг элементларини биласизлар, конусни текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **конуснинг элементларини топишга доир масалаларни еча оласизлар;**
- **конуснинг ён ва тўла сирт юзалари формулаларини келтириб чиқарасизлар ва уларни масалалар ечганда фойдаланасизлар;**
- **конуснинг, кесик конуснинг ёйилмаларини ясай оласизлар;**
- **кесик конуснинг элементларини топишга доир масалаларни еча оласизлар;**
- **кесик конуснинг ён сирти ва тўла сиртининг юзалари формулаларини келтириб чиқарасизлар ва уларни масалалар ечганда фойдаланасизлар;**
- **конуснинг текислик билан кесимларини тасвирлаб, уларни масала ечганда фойдалана оласизлар.**

3.2.1. Конус

Тўғри бурчакли учбурчакни катети атрофида тўлиқ айлантиришдан ҳосил бўлган жисмга **конус** дейилади.



3.17-расм

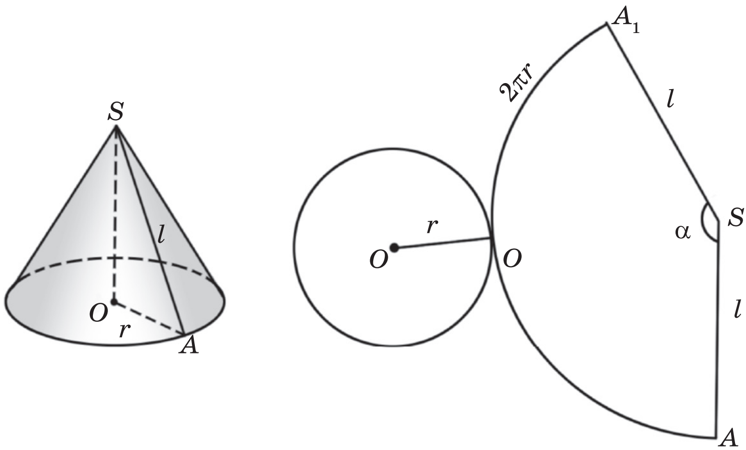


3.18-расм

3.17-расмда AOS тўғри бурчакли учбурчакнинг SO катети атрофида тўлиқ айлантиришда ҳосил бўлган конус тасвирланган. Бу ерда AS гипотенузасидан айлантирганда ҳосил бўладиган сиртга конуснинг ***ён сирти***, AO катетидан айлантирганда ҳосил бўлган доирага конуснинг ***асоси*** деб аталади. Конус асосининг радиуси унинг ***радиуси***, S нуқтаси ***учи***, ***SO баландлиги***, SO тўғри чизиғи конуснинг ***ўқи*** деб аталади. Конус ўқи орқали ўтувчи ҳар бир текислик унинг *симметрия текислиги*, конуснинг ўқи унинг *симметрия ўқи* бўлади. Конусда симметрия маркази бўлмайди. Конуснинг барча ўқ кесимлари тенг ёнли учбурчаклар ва улар ўзаро тенг. Конус учи билан унинг асосидаги айлананинг ихтиёрий нуқтасини бирлаштирувчи кесма – конуснинг ***ясовчиси*** дейилади.

Конуснинг бир ясовчиси орқали ўтадиган ва конус билан бошқа умумий нуқталари бўлмайдиган текисликка унинг ***уринма текислиги*** дейилади. 3.18-расмда конуснинг SA ясовчиси орқали ўтувчи α уринма текислиги тасвирланган. Бу ерда α текислиги SA ясовчиси билан SO ўқи орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр.

Агар конуснинг ён сиртини асосидаги айлана бўйлаб кесиб, олинган сиртни текисликка жойлаштирсак, конус сиртининг ёйилмасини оламиз. 3.19-расмда радиуси r га, ясовчиси эса l га тенг конус сиртининг тўлиқ ёйилмаси тасвирланган. Унинг ён сиртининг ёйилмаси – радиуси l га ва узунлиги $2\pi r$ га тенг ёйга тиралган доира сектори бўлади.



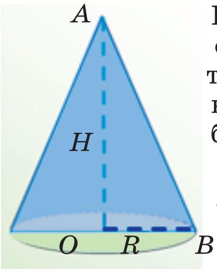
3.19-расм

Энди конуснинг ён сирт юзасини топайлик. 3.19-расмдан конуснинг ён сирт юзаси радиуси l га, марказий бурчаги α га тенг AA_1S секторининг юзасига тенг эканлигини кўрамиз: $S_{\text{ён.с.}} = S_{\text{сек.}}$ Планиметрия курсидан AA_1 ёйининг узунлиги $l_{AA_1} = \alpha \cdot l$ (α бурчаги радиан ўлчов бирлиги билан олинган), иккинчи томондан, бу ёйнинг узунлиги конус асосидаги айлана узунлиги $2\pi r$ га тенг. $\alpha l = 2\pi r$ тенглигидан $\alpha = \dfrac{2\pi r}{l}$ келиб чиқади. Радиуси l ва бурчаги α га тенг секторнинг юзаси $S_{\text{сек.}} = \dfrac{\alpha}{2} l^2$ формуласи билан ифодаланишини биламиз. Бундан

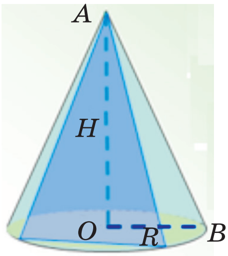
$$S_{\text{ён.с.}} = S_{\text{сек.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{l} \cdot l^2 = \pi rl, \; S_{\text{ён.с.}} = \pi rl.$$

Конуснинг тўла сирт юзаси $S_{\text{т.с.}} = S_{\text{ён.с.}} + S_{\text{асос}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

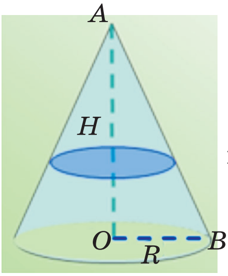
Конуснинг кесимлари



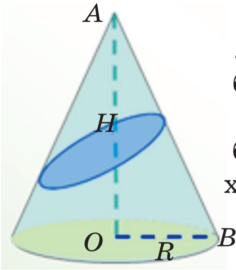
Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесганда ҳосил бўлган кесмага конуснинг ***ўқ кесими*** деб аталади. У тенг ёнли учбурчак.



Конуснинг учи орқали ўтувчи, ўқига параллел бўлмаган текислик билан кесими тенг ёнли учбурчак бўлади.



Конуснинг ўқига перпендикуляр текислик билан кесганда ҳосил бўладиган кесим доира бўлади.

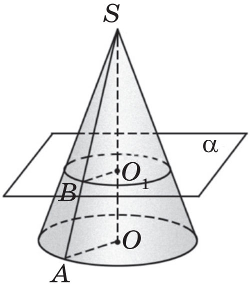


Конус ўқи билан қандайдир бурчак ясайдиган текислик билан кесганда ҳосил бўладиган кесим эллипс бўлади.

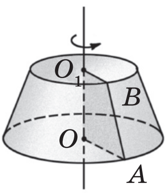
3.2.2. Кесик конус

Ихтиёрий конусни унинг асосига параллел текислик билан кесилсин. Пайдо бўладиган кесим доира ва у конусни икки бўлакка бўлади. Бир бўлаги берилган конусга ўхшаш кичик конус, иккинчиси – ***кесик конус*** (3.20-расм). Кесим орқали пайдо бўлган доира билан берилган конуснинг асоси кесик конуснинг ***асослари*** деб аталади. Кесик конус асосларининг орасидаги масофа унинг ***баландлиги*** дейилади.

Баландлик ўрнида кесик конус асосларининг марказларини бирлаштирувчи OO_1 кесмасини олишга бўлади. Умуман олганда, кесик конусни тўғри бурчакли ABO_1O трапециясининг OO_1 ўқи атрофида тўлиқ айлантиришдан ҳосил қилса бўлади. OO_1 кесмасининг айланишидан ҳосил бўлган сирт кесик конуснинг ***ён сирти***, айланиш жараёнидаги AB кесмасининг ихтиёрий ўрнидаги кесмасига унинг ***ясовчиси*** деб аталади. AB кесмасининг айланишидан ҳосил бўлган сиртга кесик конуснинг ***ён сирти*** деб аталади.



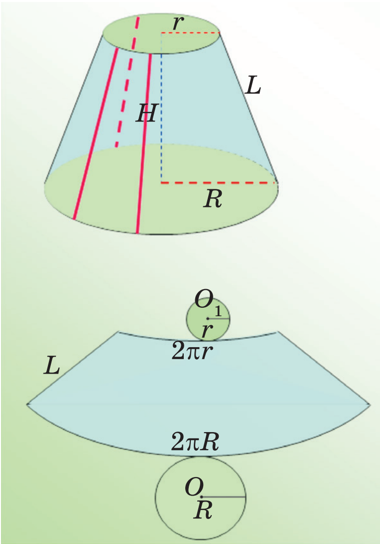
3.20-расм



3.21-расм

Кесик конусни архитектурада тез-тез учратиб туриш мумкин. Астана шаҳридаги «Алтын Орда» бизнес маркази – бунинг ёрқин далили бўла олади (3.21-расм).

Кесик конуснинг хоссалари



3.22-расм

- Кесик конуснинг барча ясовчилари ўзаро тенг.

- Кесик конуснинг ён сирти уни чегаралаб турувчи конус ён сиртининг мос бўлагидир.

- Кесик конуснинг тўла сирти унинг ён сиртидан ва асосларидаги бир бирига тенг бўлмаган иккита доирадан ташкил топади.

- Кесик конуснинг ёйилмаси айланахалқасининг бўлаги билан бир бирига тенг бўлмаган иккита доирадан ташкил топган (3.22-расм).

Кесик конуснинг ён сиртининг юзасини топиш учун катта конуснинг ён сирт юзасидан кичик конуснинг ён сирт юзасини айириш, етарли. Айтайлик, кесик конус асосларининг радиуслари мос равишда r ва R, ясовчиси $AB = l$ бўлсин. У ҳолда кичик конуснинг ён сирти $S_1 = \pi r \times SB$ тенглиги билан катта конуснинг ён сирти $S_2 = \pi R \cdot SA$ тенглиги билан ифодаланади. У ҳолда

$$S_{\text{ён.с.}} = S_2 - S_1 = \pi R \cdot SA - \pi r \cdot SB = \pi R(SB + AB) - \pi r \cdot SB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{ён.с.}} = \pi Rl + \pi \cdot SB(R - r).$$

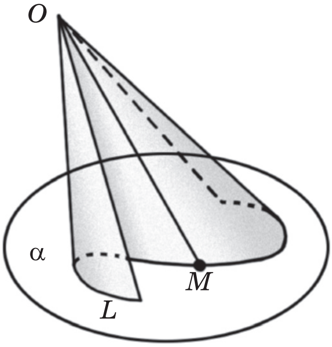
Энди SB ни l, r ва R орқали ифодалайлик. SBO_1 ва SAO учбурчаклари ўхшаш, шунинг учун $\frac{SB}{SA} = \frac{r}{R}$ ёки $\frac{SB}{SB+l} = \frac{r}{R}$ тенглиги бажарилади. Бундан $SB = \frac{lr}{R-r}$. У ҳолда

$S_{\text{ён.с.}} = \pi Rl + \pi \cdot SB(R - r)$ тенглигидан $S_{\text{ён.с.}} = \pi Rl + \pi rl = \pi l(R + r)$ келиб чиқади. Шунинг билан,

$$S_{\text{ён.с.}} = \pi l(R + r).$$

Умуман олганда, кўп шароитда биз қараётган конусга тўғри ***доиравий конус*** дейилади. Чунки, унинг ўқи асосига перпендикуляр ва асоси доирадан иборат.

Иш жараёнида конус сиртларнинг бошқа ҳолатлари ҳам қараштирилади. Айтайлик, α текислигида жойлашган L чизиғи билан шу текисликдан ташқарида ётган O нуқтаси берилсин. L чизиғининг ихтиёрий M нуқтасини O нуқтаси билан туташтирганда OM ($M \in L$) кесмалар тўплами орқали ташкил топган фигурага ***конус сирти*** дейилади. Бу ердаги L чизиғига конус сиртининг ***йўналтирувчиси***, O нуқтасига ***учи*** деб аталади (3.23-расм). Мамлакатимизнинг пойтахтидаги «Хан Шатыр» саройи – дунёдаги **конус** шаклидаги қурилишларнинг энг каттасидир (3.24-расм).

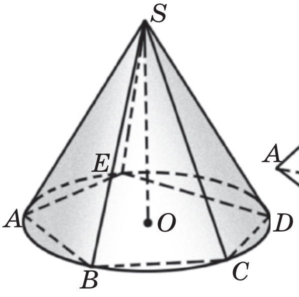


3.23-расм

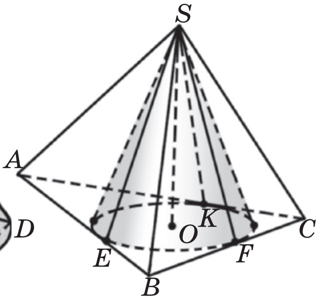

3.24-расм

Мактаб курсида тўғри доиравий конусгина ўрганилади.

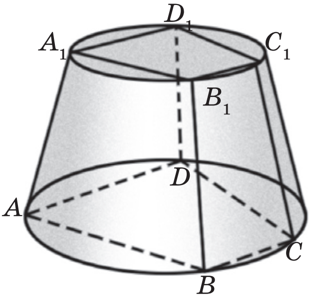
Пирамиданинг асоси конус асосига ички чизилган кўпбурчак бўлса ва учи конус учи билан устма-уст тушса, бундай пирамидага конусга ***ички чизилган пирамида*** дейилади (3.25-расм). Агар пирамиданинг асоси конус асосига ташқи чизилган кўпбурчак ва уларнинг учлари умумий бўлса, бундай пирамидага конусга ***ташқи чизилган пирамида*** дейилади (3.26-расм). Шу каби кесик конусга ички ва ташқи чизилган кесик пирамидаларни ҳосил қилишга бўлади. Масалан, 3.27-расмда кесик конусга ички чизилган тўртбурчакли пирамида тасвирланган.



3.25-расм

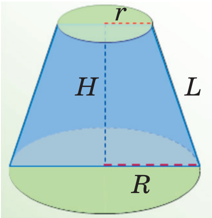


3.26-расм

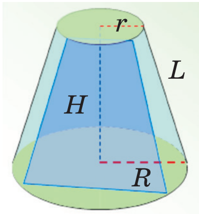


3.27-расм

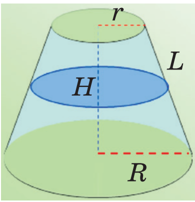
Кесик конуснинг баъзи бир кесимлари



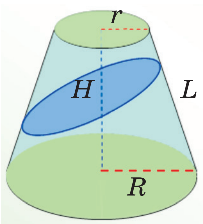
Кесик конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесганда ҳосил бўладиган кесимга конуснинг *ўқ кесими* дейилади. У тенг ёнли трапециядан иборат бўлади.



Кесик конуснинг ўқига параллел текислик билан кесими тенг ёнли трапециядан иборат бўлади.



Кесик конус ўқига перпендикуляр текислик билан кесганда ҳосил бўладиган кесим доирадан иборат бўлади.



Кесик конус ўқига қандайдир бурчак ясайдиган текислик билан кесганда ҳосил бўладиган кесим эллипсдан иборат бўлади.

1. Қандай жисмга конус дейилади? Конуснинг барча элементларини атанг ва кундалик ҳаётимиздан конусга мисоллар келтиринг. Агар мумкин бўлса, унинг элементларининг ўлчамларини топинг (асос радиусини, ясовчисини, баландлигини).
2. Конуснинг ён сиртининг (тўла сиртининг) юзаси қандай формула билан ифодаланади? Уни исботланг.
3. Кесик конус деб, нимага айтилади? Унинг қандай элементларини биласиз? Уларга кундалик ҳаётимиздан мисоллар келтиринг.
4. Кесик конуснинг ён сиртининг юзаси қандай формула билан ифодаланади? Уни исботланг.

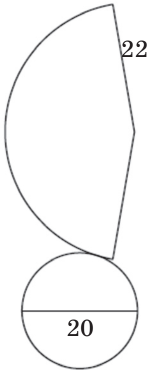
МАСАЛАЛАР

А

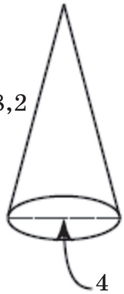
Амалий топшириқ

3.43. Картон қоғоздан доира кесиб олинглар. Шу доирани ихтиёрий иккита радиуси бўйлаб кесиб, иккита секторга бўлинглар. Ҳосил бўлган секторларнинг ҳар биридан конус сиртини ташкил қилинглар.

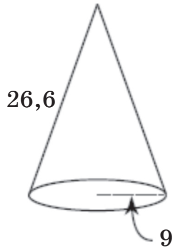
3.44. 3.28-расмдаги конуснинг ёйилмаси бўйича унинг баландлигини, радиусини ва тўла сирт юзасини топинг.



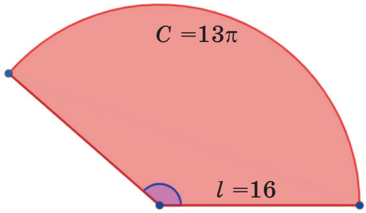
3.28-расм



3.29-расм



3.30-расм

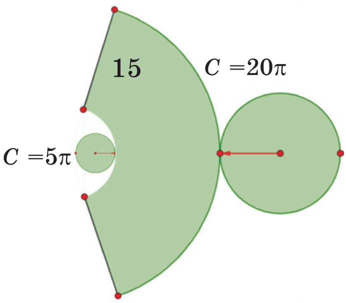


3.31-расм

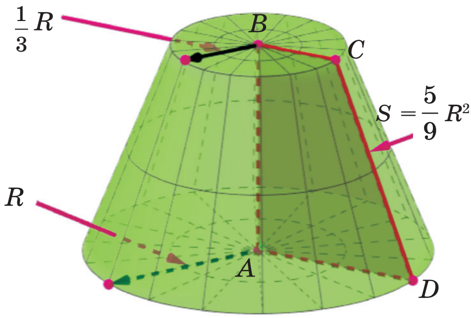
3.45. 3.29 ва 3.30-расмларда тасвирланган конуснинг ёйилмасини чизинг ва ён сирт юзасини ҳисобланг.

3.46. 3.31-расмда конуснинг ён сирт юзаси берилган. Конуснинг баландлиги билан асос радиусини топинг.

3.47. 3.32-расмдаги кесик конуснинг асос радиусларини, ясовчисини ва ёйилмасининг юзасини топинг.



3.32-расм



3.33-расм

3.48. Конуснинг баландлиги 4 см, асосининг радиуси 3 см. Унинг ён сиртининг ёйилмаси – сектор. Секторнинг периметрини топинг.

3.49. Катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли учбурчакни кичик катети атрофида айлантирганда ҳосил бўлган конуснинг ён сирт юзасини топинг.

3.50. $ABCD$ трапециясини AB томони атрофида айлантирганда ҳосил бўлган кесик конуснинг асос радиуслари R ва $\frac{1}{3}R$. Трапециянинг юзаси $S=\frac{5}{9}R^2$ бўлса, кесик конуснинг ён сирт юзасини топинг (3.33-расм).

3.51. Конуснинг баландлиги h, асосининг радиуси R га тенг. Конуснинг ўқ кесимининг юзасини топинг: 1) h=5 см, R=3 см; 2) h=8 м, R=2 м; 3) h=12 мм, R=4 мм.

3.52. Конуснинг ясовчиси l, радиуси R га тенг. Ён сирт юзасини топинг: 1) l=3 м, R=1 м; 2) l=12 см, R=7 см; 3) l=20 мм, R=8 мм.

3.53. Конуснинг ясовчиси l, баландлиги h га тенг. Тўла сирт юзасини топинг: 1) l=13 см, h=12 см; 2) l=10 м, h=6 м; 3) l=5 м, h=4 м.

3.54. Конуснинг радиуси R, ўқ кесимининг юзаси Q га тенг. Унинг ясовчисини топинг: 1) R=5 см, Q=60 см^2; 2) R=6 м, Q=48 м^2; 3) R=3 м, Q=12 м^2.

3.55. Кесик конуснинг асос радиуслари r ва R, ясовчиси l га тенг. Унинг ўқ кесимининг юзасини топинг: 1) r=3 см, R=6 см, l=5 см; 2) r=4 см, R=10 см, l=10 см; 3) r=10 мм, R=15 мм, l=13 мм.

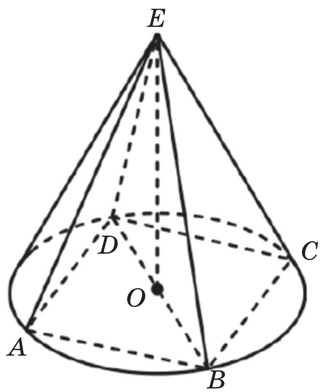
3.56. 3.55-масаланинг шартидан фойдаланиб, кесик конуснинг тўла сирт юзасини топинг.

3.57. Кесик конуснинг ўқ кесими – асослари a, b, баландлиги h бўлган тенг ёнли трапеция. Унинг ён сиртининг юзасини топинг: 1) a=2 м, b=10 м, h=3 м; 2) a=10 см, b=22 см, h=8 см; 3) a=5 см, b=19 см, h=24 см.

3.58. Конуснинг ясовчиси l, баландлиги h га тенг. Унинг ясовчиси асос текислиги билан қандай бурчак ясайди: 1) $l = 24$ см, $h = 12$ см; 2) $l = 12$ см, $h = 6\sqrt{3}$ см; 3) $h = 15$ см, $l = 5\sqrt{2}$ см?

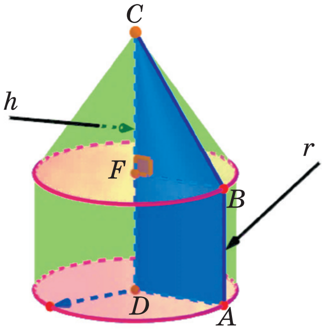
3.59. Ўқ кесими тўғри бурчакли учбурчак бўлган конуснинг ясовчиси унинг асос текислиги билан қандай бурчак ясайди?

3.60. Конусга асос томони $\sqrt{2}$ см ва баландлиги 5 см бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамида ички чизилган. Конуснинг ўқ кесимининг юзасини топинг (3.34-расм).



3.34-расм

B



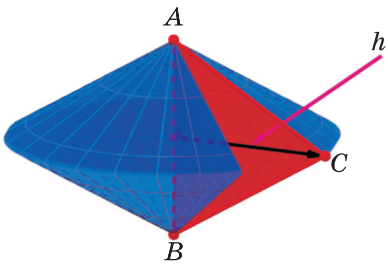
3.35-расм

3.61. Пирамиданинг асоси – томони 6 см бўлган квадрат. Пирамиданинг баландлиги 5 см бўлса, пирамидага ички чизилган конуснинг ён сиртининг юзасини ҳисобланг.

3.62. *ABCD* тўғри бурчакли трапециясини асоси *CD* атрофида айлантирганда 3.35-расмда тасвирланган жисм пайдо бўлган. *BFD* – қирраси *r* га тенг квадрат. *CF* = *h* бўлиб, жисмнинг тўла сиртининг юзаси $S_{\text{т.с.}} = \pi r\left(3r + \sqrt{h^2 + r^2}\right)$ эканлигини исботланг.

3.63. Конуснинг ясовчиси l ва у асос текислигига φ бурчак остида оғма ҳосил қилган. Конуснинг 1) асос радиусини; 2) баландлигини; 3) ўқ кесимининг юзасини; 4) ён сирт юзасини топинг.

3.64. Конуснинг баландлиги *h*. Унинг асос текислигига параллел кесимининг юзаси асосининг юзасидан 2 марта кичик бўлса, кесими билан асосининг орасидаги масофани топинг.



3.36-расм

3.65. Конус асосининг радиуси *R* га тенг. Унинг баландлигини учидан ҳисоблаганда 1:2 каби нисбатда бўлувчи асосига параллел кесимнинг юзасини топинг.

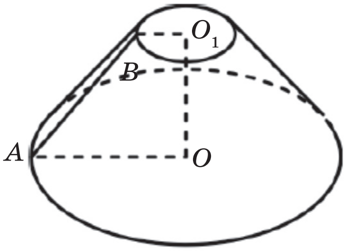
3.66. Тенг томонли *ABC* учбурчагининг баландлиги *h*. Шу учбурчакнинг *AB* томони атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг тўла сирт юзасини топинг (3.36-расм).

3.67. Конуснинг ясовчиси l ва асосининг радиуси *r*. Конуснинг асосида 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90° ли ёйга тиралган ватар билан конуснинг учи орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

3.68. Конуснинг ўқ кесими тенг томонли учбурчак. Конус асосининг радиуси *R*. Конуснинг ўзаро 30° ли бурчак ясайдиган икки ясовчиси орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

3.69. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 30 см. Уни баландлигидан айлантирганда ҳосил бўлган конуснинг тўла сирт юзаси 64 π см². Учбурчакнинг томонларини топинг.

3.70. Кесик конус асосларининг юзалари 4 см^2 ва 25 см^2, унинг баландлиги ўзаро тенг уч бўлакка бўлинган. Бўлиниш нуқталаридаги асосларига параллел кесимларнинг юзаларини топинг.



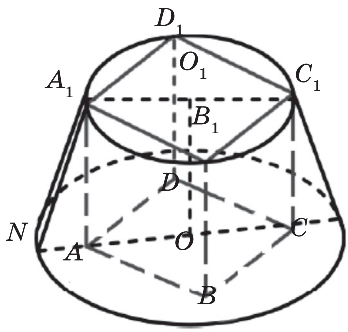
3.37-расм

3.71. Кесик конус асосларининг радиуслари r ва R, ясовчиси асос текислиги билан 45° ли бурчак ясайди. Кесик конуснинг тўла сирт юзасини топинг (3.37-расм).

3.72. Кесик конуснинг ясовчиси асос текислиги билан 30° ли бурчак ясайди, ўқ кесимининг юзаси Q га тенг. Кесик конуснинг ён сирт юзасини топинг.

3.73. Кубнинг бир ёқи кесик конуснинг кичик асосига ички чизилган. Унинг қарама-қарши ёқи кесик конуснинг катта асосида ётади. Кесик конус асосларининг радиуслари r ва R деб олиб, кубнинг қиррасини топинг (3.38-расм).

▲ **Берилган:** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб конусга ички чизилган.
$A_1O_1 = r$, $NO = R$.
Топиш керак: AB – ?
Ечилиши: бу масалани кубнинг қирраси кесик конуснинг катта асосининг радиуси R га тенг. r куб ёқининг (квадратнинг) диагоналининг ярми. Шунинг учун, $AB = \sqrt{2}\, r$. ■



3.38-расм

3.74. Кесик конус асосларининг радиуслари билан унинг ясовчисининг нисбати 1:4:5 каби нисбатда, унинг баландлиги h га тенг. Кесик конуснинг ён сирт юзасини топинг.

3.75. Конуснинг l ясовчиси билан h баландлиги орасидаги бурчак 30° га тенг. Шу конусга ички чизилган мунтазам 1) учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) олтибурчакли пирамиданинг ён сирт юзасини топинг.

3.76. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони m ва асоси билан φ бурчак ясайди. Учбурчакни асос томони атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг тўла сирт юзасини ҳисобланг.

3.77. Томонлари 10, 17 ва 21 бўлган учбурчакни катта томони атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг тўла сирт юзасини топинг.

3.78. Учбурчакнинг икки томони 8 ва 15, улар орасидаги бурчак 60°. Учбурчакни катта томони атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг тўла сирт юзасини топинг.

C

3.79. Конусга ички чизилган цилиндрнинг тўла сиртининг юзаси Шу конуснинг ён сирт юзасига тенг. Конуснинг ўқ кесими тўғри бурчакли учбурчак. Конус учидан цилиндрнинг юқори асосигача бўлган масофа конус ясовчисининг ярмига тенг эканлигини исботланг.

3.80. Конуснинг тўла сирт юзаси радиуси конуснинг баландлигига тенг доиранинг юзасига тенг бўлиши учун конуснинг ясовчиси билан асос радиуси орасидаги бурчак қандай бўлиши лозим?

3.81. Конус ёйилмаси доиранинг чорак қисмини ташкил қилади. Агар шу конуснинг ўқ кесимининг юзаси Q бўлса, унинг тўла сирт юзасини топинг.

3.82. Конус асосининг юзаси m, ён сиртининг юзаси $3m$. Конус ясовчиси асос текислигига қандай бурчак билан оғиб турибди?

✦ Амалий топшириқ

3.83. Темир челак кесик конус шаклида бўлади. Асос радиуслари 15 см ва 10 см, ясовчиси 30 см. Челакни ичи ва сиртини тўлиқ бўяш керак. Агар 1 м^2 сиртга 200 гр бўёқ сарф қилинса, 1000 челакни бўяшга неча килограмм бўёқ керак?

Такрорлашга доир топшириқлар

3.84. а) $ABCD$ трапециянинг AB асоси CD асосидан ва AD ён томонидан икки марта узун. AC диагонали a, BC ён томони b бўлса трапециянинг юзасини топинг.

б) $ABCD$ трапециянинг CD асоси, BD диагонали диагонали ва ён томонининг узунликлари p, BC ён томонининг узунлиги q бўлса, AC диагоналини топинг.

3.3 Сфера ва шар

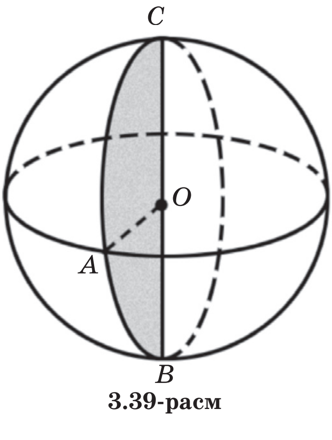
Бу бўлимда сфера, шар ва уларнинг элементлари билан танишиб, сфера сиртининг юзаси, сферага ўтказилган уринма текислигига тегишли амалий топшириқларни бажаришни ўрганасизлар. Бўлим сўнгида:

- **сфера, шарнинг таърифларини ўрганасизлар, уларни текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **сфера сиртини юзасини топишга доир масалалар ечасизлар;**
- **сфера билан текисликнинг ўзаро жойлашувини ўрганасизлар;**
- **координата текислигида сфера билан текисликнинг ўзаро жойлашувига доир масалалар ечасизлар;**
- **сферага уринма текислигининг таърифини ва хоссасини ўрганасизлар;**
- **шар билан сферанинг текислик билан кесимларига доир масалалар ечишни ўрганасизлар.**

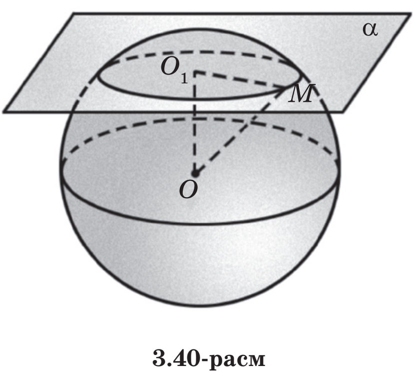
3.3.1. Шар ва сфера тушунчаси

Фазода берилган O нуқтасидан бирдай R узоқликда жойлашган нуқталар тўпламига ***сфера*** дейилади, фазонинг сфера билан чегараланган бўлагига ***шар*** дейилади.

Бу ерда O сфера (шар) ***маркази***, R сфера (шар) ***радиуси*** дейилади. Умуман олганда, шарнинг радиуси R ярим доирани уни чегаралайдиган диаметридан айлантириб ҳосил қилишга бўлади (3.39-расм). Сфера эса – ярим айлананинг айланишидан келиб чиқадиган сирт. Маркази O нуқтасида ётувчи, радиуси R га тенг сферани $\omega(O; R)$, унга мос шарни $\Omega(O; R)$ орқали белгилаймиз.



3.39-расм



3.40-расм

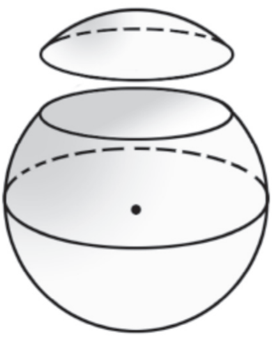
Сфера (шар) маркази орқали ўтувчи ихтиёрий текислик (тўғри чизиқ) унинг симметрия текислиги (ўқи) бўлади. Сфера (шар) маркази – унинг симметрия маркази. Сфера маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг сфера билан чегараланадиган кесмаси унинг ***диаметри*** дейилади.

Сферанинг текислик билан кесишганда айлана ҳосил бўлади. Бу айлананинг маркази сфера марказидан кесувчи текисликка туширилган перпендикулярнинг бир учи билан устма-уст тушади.

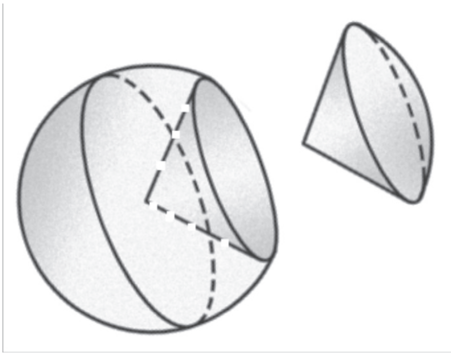
▲ $\omega(O;\ R)$ сфераси билан α текислиги кесишишсин: $\alpha \cap \omega(O;\ R) \neq \varnothing$. Шу кесимдан ихтиёрий M нуқтасини олайлик: $M \in \alpha$, $M \in \omega(O;\ R)$ ва O нуқтасидан α текислигига туширилган перпендикулярнинг бир учини O_1 орқали белгилайлик (3.40-расм). Бу ерда $OM = R$, $OO_1 = h$, $OO_1 \perp \alpha$, $O_1 \in \alpha$ бўлганлигидан, OO_1M – тўғри бурчакли учбурчак. Ундай бўлса, $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - h^2}$, яъни O_1M кесмасининг узунлиги M нуқтасига боғлиқ эмас ва ўзгармас $\sqrt{R^2 - h^2}$ сонига тенг. Шунинг учун $\alpha \cap \omega(O;\ R)$ – айлана ва O_1 – унинг маркази. ■

Сфера билан унинг маркази орқали ўтувчи текисликнинг кесишишидан ***диаметрал кесими***, баъзи ҳолларда бу айланани сферанинг ***диаметрал айланаси ёки катта айланаси*** деб ҳам атайди.

Шу каби, шар билан текисликнинг кесишишидан доира келиб чиқади ва бу кесим шарни икки бўлакка бўлади. Бу бўлакларни ҳар бири ***шар сегменти*** дейилади (3.41-расм).



3.41-расм



3.42-расм

Сфера билан текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган айлананинг ҳар бир нуқтасини сфера маркази билан бирлаштирайлик. Бу кесмалар тўплами конуснинг ён сиртини ифодалайди ва шу шарни икки бўлакка бўлади. Шу бўлакларнинг ҳар бири ***шар сектори*** дейилади (3.42-расм).

3.3.2. Сфера тенгламаси

$Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасида маркази $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада ётган, радиуси R сферанинг тенгламасини ёзиш керак.

$M(x;\ y;\ z)$ сфера сиртидаги ихтиёрий нуқта бўлса, сферанинг таърифи бўйича $CM=R$ (3.43-расм). Икки нуқта орасидаги масофа формуласи бўйича

$$CM=\sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2+\left(z_1-z_0\right)^2}\ .$$

У ҳолда M нуқтасининг координаталари

$$\sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2+\left(z_1-z_0\right)^2}=R$$

ёки

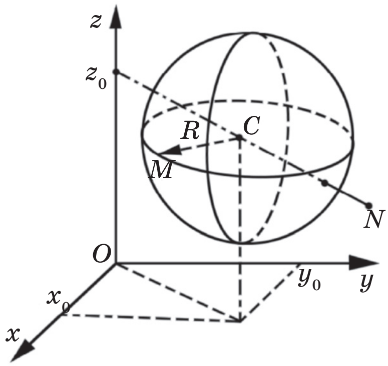
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (1)$$

Демак, сферанинг ихтиёрий нуқтаси (1) тенглигини қаноатлантиради. Энди аксинча, $\omega(C;\ R)$ сферада ётмайдиган ихтиёрий $N(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтасининг координаталари (1) тенгликни қаноатлантирмаслигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, $N\notin\omega(C;\ R)$ бўлганлигидан, $CN\neq R$:

$$\sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2+\left(z_1-z_0\right)^2}\neq R$$

ёки

$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2\neq R^2.$



3.43-расм

Шунинг билан, сфера сиртида ётмайдиган нуқтанинг координаталари (1) тенгликни қаноатлантирмайди. Ундай бўлса, (1) – сферанинг тенгламаси бўлади.

Сферанинг маркази C координаталар бош нуқтаси билан устма-уст тушса, $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$ ёки $C(0;\ 0;\ 0)$ бўлади ва (1) сферанинг тенгламаси

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (2)$$

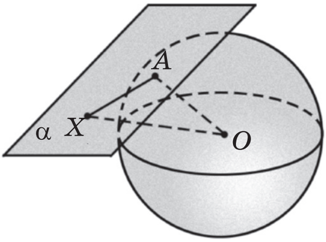
кўринишида ёзилади.

3.3.3. Сферанинг уринма текислиги

$(O;\ R)$ сфера билан α текислигининг ягона умумий нуқтаси бўлса, α текислигининг шу сферанинг уринма текислиги, уларнинг ягона умумий нуқтаси ***уриниш нуқтаси*** дейилади (3.44-расм)

Теорема

Уриниш нуқтасига ўтказилган радиус уринмага перпендикуляр ва аксинча, сферадаги радиуснинг учи орқали ўтувчи ва шу радиусга перпендикуляр текислик сферанинг уринмаси бўлади.



3.44-расм

▲ **Исботи.** α текислиги $\omega(O;\ R)$ сферани A нуқтасида уриниб ўтсин. $OA \perp \alpha$ эканлигини кўрсатиш керак (3.44-расм).

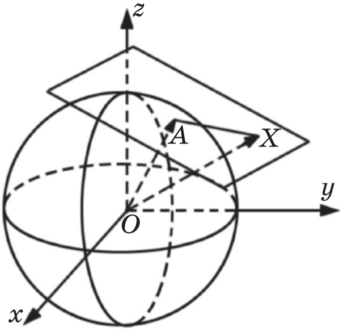
Ҳақиқатан ҳам, OA билан α перпендикуляр эмас, OA радиуси α текислигига ўтказилган оғма ва O нуқтасидан α текислигига ўтказилган перпендикулярнинг асоси A_1 дейлик. $OA_1 < OA = R$ бўлганлигидан, α текислиги, 3.3.1-бобда кўрсатганимиздай, сферани айлана бўйлаб кесиб ўтади. Ундай бўлиши мумкин эмас, чунки бу уринма билан сферанинг умумий нуқтасининг ягона эканлигига зид. Шунинг учун $OA \perp \alpha$ бўлиши шарт.

Энди аксинча, α текислиги OA радиусининг A учидан ўтиб, унга перпендикуляр бўлсин. α нинг сферага уринма текислик бўлишини кўрсатиш керак. Ҳақиқатан ҳам, X нуқтаси α текислигининг A-дан бошқа ихтиёрий нуқтаси бўлсин. OA перпендикуляр, OX оғма бўлганлигидан, $OX > OA = R$ тенгсизлиги бажарилади. Ундай бўлса, X нуқтаси $\omega(O;\ R)$ сферадан ташқарида жойлашган. α текислиги билан $\omega(O;\ R)$ сферасининг ягона (A) умумий нуқтаси бор. Шунинг учун α − уринма текислиги. ■

1-мисол. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ тенгламаси билан берилган сферанинг $A(a;\ b;\ c)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзиш керак.

▲ **Ечиш.** A нуқтаси сферада ётганлигидан, унинг координаталари сфера тенгламасини қаноатлантириши шарт:

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$



3.45-расм

Иккинчидан, уринма текислик $A(a;\ b;\ c)$ нуқтаси орқали ўтади ва $\overrightarrow{OA} = (a,\ b,\ c)$ векторига перпендикуляр (3.45-расм). У ҳолда уринма текисликнинг ихтиёрий $X(x;\ y;\ z)$ нуқтаси учун $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AX}$, яъни $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$ тенглиги бажарилади. Бу ерда $\overrightarrow{AX} = (x - a;\ y - b;\ z - c;)$ бўлганлигидан, охирги тенгликни

$$a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0$$

ёки

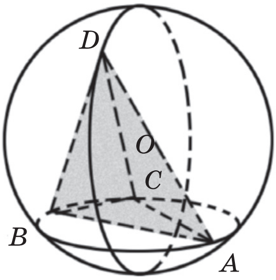
$$ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

кўринишида ёзамиз. $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$ тенглигини ҳисобга олсак, уринманинг тенгламаси

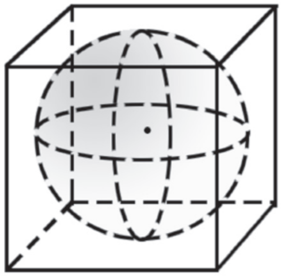
$$ax + by + cz = R^2$$

кўринишида ёзилади. ■

Агар кўпёқнинг барча учлари сферада ётса, бундай кўпёқни сферага ***ички чизилган кўпёқ*** деб атайди (3.46-расм). Кўпёқнинг барча ёқлари сферага уринса, бундай кўпёққа ***ташқи чизилган кўпёқ*** дейилади. 3.47-расмда сферага ташқи чизилган куб тасвирланган.



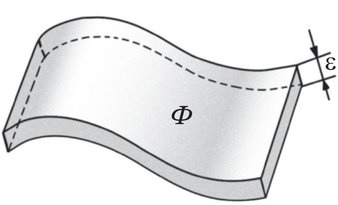
3.46-расм



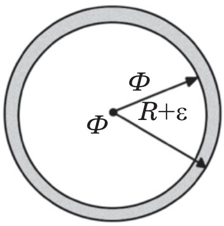
3.47-расм

3.3.4. Сферанинг юзаси

Бизга Φ сирти берилсин ва унинг сиртини бўяш керак. Бўёқ берилган сиртга қанчалик юқа суртилса ҳам, унинг маълум бир қалинлиги (баландлиги) бор бўлади. Демак, уни жисм ўрнида қараймиз. Шундай олинган жисм Φ сиртининг *қатлами* деб аталади. Шунинг билан, ***сирт қатлами*** деб *унинг ҳар бир нуқтасидаги уринма текислигига перпендикуляр бўлган узунлиги* ε *га тенг кесмалар тўпламидан ташкил топган жисмга* айтилади (3.48-расм).



3.48-расм



3.49-расм

Умуман олганда, сфера сиртининг юзаси $S = 4\pi R^2$ формуласи билан ифодаланишини кўрсатайлик. Бу ердаги R – сферанинг радиуси. Шарнинг ҳажми:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

формуласи билан ҳисобланади.

Φ сиртининг юзаси S бўлса, ε қалинлик билан бўялган бўёқнинг ҳажми (қатламининг ҳажми) тахминан олганда, $V_\varepsilon \approx S \cdot \varepsilon$ тенглиги билан ифодаланади. Бу ерда ε сони қанчалик кичик бўлган сари тенгликнинг исботи шунчалик юқори бўлади. Ундай бўлса, тақрибан $S \approx \dfrac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$ тенглиги бажарилади деб ҳисоблаймиз. Шунинг учун сирт юзасига бундай таъриф беришга бўлади: V_ε ўлчови қалинлиги ε га тенг қатлам ҳажми бўлса, *бу сиртнинг S юзаси $\varepsilon \to 0$ интилгандаги $\dfrac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$ нисбатига тенг*. Масалан, агар Φ – юзаси S га тенг ёйиқ сирт (кўпбурчак, доира ва т.б.) бўлса, $V_\varepsilon \approx S \cdot \varepsilon$ ва

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = S.$$

Шу формуладан фойдаланиб, сфера сиртининг юзасини ифодалайлик. Бизга радиуси R сфера берилсин. У ҳолда сфера қатламининг радиуслари $R + \varepsilon$ ва R га тенг концентрли сфералар билан чегараланган жисм бўлади (3.49-расм). Унинг ҳажми

$$V_\varepsilon = \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Ундай бўлса, сферанинг юзаси

$$S = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4}{3}\pi(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2) = 4\pi R^2.$$

Демак,

$$S = 4\pi R^2.$$

Таклиф қилинган электрон ресурслардан сфера юзасининг формуласини исботини кўрамиз:

• ***Қўшимча электронли ресурслар***
https://www.youtube.com/watch?v=GNcFjFmqEc8

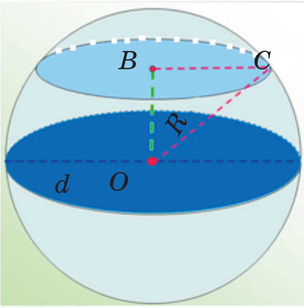
Ижодий иш:

«НУРЛИ ОЛАМ» – Нур-Султан шаҳридаги, ЭКСПО – 2017 нинг архитектуравий тимсолидир. Бу – оламдаги энг катта сфера шаклидаги бино. Унинг диаметри 80 м. Бу сфера шаклидаги бино 8 қаватдан ташкил топган. Бу бинонинг 7 қаватининг юзасини ҳисоблайлик (3.50-расм).

▲ Бино 8 қаватдан ташкил топганлигидан, сфера диаметрининг кесими унинг 5- қаватига мос келади, чунки унинг остида 4 ва устида 4 қават жойлашган. Диаметри 80 м бўлса, сферанинг радиуси 40 м. Энди ҳар бир қаватнинг баландлиги 10 м. Ундай бўлса, OB = 30 м. Пифагор теоремасига кўра

$$BC = \sqrt{40^2 - 30^2} = 10\sqrt{7} \text{ м}.$$

Энди, 7-қаватнинг юзаси $S = \pi \cdot \left(10\sqrt{7}\right)^2 = 700\pi \approx 2198$ м^2. ■



3.50-расм

1. Қандай сиртга сфера дейилади? Унинг қандай элементларини биласиз?
2. Шар деб нимага айтилади? Унинг сферадан қандай фарқи бор?
3. Сфера тенгламаси қандай ифодаланади?
4. Қандай текисликка уринма текислик дейилади? Унинг қандай хоссаларини биласиз?
5. Сфера уринмасининг тенгламаси қандай ифодаланади?
6. Қандай кўпёқни сферага ички (ташқи) чизилган деб атайди?
7. Сфера сиртининг юзасини қандай формула билан ифодалайди?

8*. Шар халқаси деб нимага айтилади?

9*. Сфера сирти юзасининг формуласини исботланг.

МАСАЛАЛАР

А

Амалий топшириқ

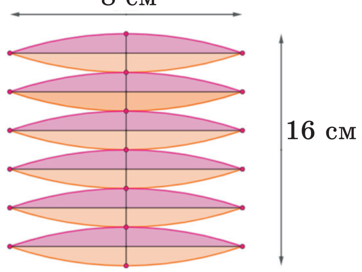
3.85. Чизмада сфера билан текисликнинг ўзаро жойлашишини кўрсатган. Бу ерда сфера марказидан текисликкача бўлган масофани сфера радиуси билан таққосланг.

3.86. Радиуси R шарнинг катта айланасининг узунлиги билан диаметрли кесимининг юзасини топинг: 1) $R=2$ дм; 2) $R=4$ см; 3) $R=7$ м; 4) $R=12$ мм.

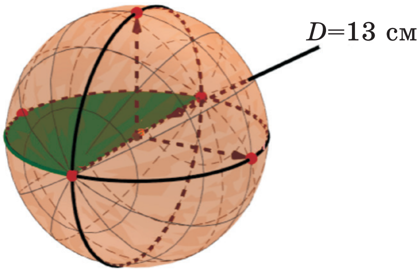
3.87. Радиуси R шар марказидан d га тенг масофада ўтказилган кесимнинг юзасини топинг: 1) $R=13$ см, $d=5$ см; 2) $R=5$ м, $d=3$ м; 3) $R=25$ мм, $d=24$ мм.

3.88. 3.51-расмда экватори 16 см бўлган сферанинг ёйилмаси берилган. Сферанинг юзаси $\dfrac{256}{\pi}$ см^2 бўлишини кўрсатинг.

3.89. Сферанинг диаметри 13 см. Унинг диаметрли доирасини ярмининг юзаси $\frac{169\pi}{8}$ см^2 бўлса, сферанинг юзаси 169π см^2 эканлигини исботланг (3.52-расм).



3.51-расм



3.52-расм

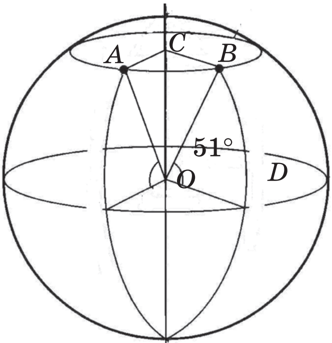
3.90. Диаметри 16 м бўлган сферага уринма текислигида ётувчи нуқтадан сфера марказигача бўлган масофа 10 м. Шу нуқтадан уриниш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

3.91. Маркази C нуқтаси ва радиуси R бўлган сферанинг тенгламасини ёзинг: 1) $C(2;\ -1;\ -3)$, $R = 7$; 2) $C(0;\ 4;\ -5)$, $R = 15$; 3) $C(3;\ -2;\ 3)$, $R = \sqrt{61}$.

3.92. Сферага берилган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг: 1) $x^2+y^2+z^2=14$, $A(1;\ -2;3)$; 2) $x^2+y^2+z^2=625$, $B(20;\ 0;\ -15)$; 3) $x^2+y^2+z^2=9$, $C(2;\ 2;-1)$. Аввал берилган нуқта сферада ётишини текшириб олинг.

3.93. Маркази C нуқтасида жойлашган сфера A нуқтаси орқали ўтиши учун унинг радиуси қандай бўлиши керак: 1) $A(1;\ 2;\ 3)$, $C(3;\ 4;\ 2)$; 2) $A(25;\ 6;\ -20)$, $C(-5;\ 6;\ -5)$; 3) $A(-5;\ 3;\ -4)$, $C(0;\ 5;\ 2)$?

3.94. Нур-Султан шаҳри 51° шимолий кенгликда жойлашган. Ернинг радиуси 6400 км. Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши давомида Нур-Султан шаҳрининг 3 соат ичида қандай йўл юришини ҳисоблаш керак (3.53-расм).



3.53-расм

▲ $\angle COB = 90° - 51° = 39° \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = BC = OB \cdot \sin 39° = 6400 \times$
$\times \sin 39° \approx 4028$ км.

Уч соатда Нур-Султан шаҳри радиуси 4028 бўлган айлана ёйининг $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ бўлагини юриб ўтади. Шунинг учун юрган йўл $S = 2\pi R \times$
$\times \frac{1}{8} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4028 \cdot \frac{1}{8} \approx 3162$ км.

Жавоб: 3162 км йўл юради. ■

Амалий топшириқ

3.95. Ўзинглар яшаб турган маконингларни географик координатасини интернетдан аниқлаб, 45 минутда қанча йўл юришини топинг.

3.96. Диагонали 24 см тўғри тўртбурчакнинг радиуси 13 см сферада жойлашган. Сфера марказидан тўғри тўртбурчак текислигигача масофани топинг.

3.97. Радиуси R га тенг сфера сиртининг юзасини топинг: 1) $R = 7$ см; 2) $R = 5$ м; 3) $R = 12$ мм; 4) $R = \sqrt{5}$ дм.

3.98. Радиуси R га тенг сферанинг юзасини топинг: 1) R=12 см; 2) R=6 м; 3) R=9 мм.

B

3.99. Радиуси 1 га тенг сферага ички чизилган кубнинг тўла сирт юзасини топинг.

3.100. Конус асосининг радиуси 1, ясовчиси 2 га тенг. Конусга ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

3.101. Радиуси 41 см бўлган шарни унинг марказидан 9 см узоқликда текислик кесиб ўтган. Ҳосил бўлган кесимнинг юзасини топинг.

▲ **Берилган:** радиуси $OA = 41$ см бўлган сфера. Сферанинг марказидан уни кесадиган текисликкача бўлган масофа

$$OB = 9 \text{ см}.$$

Топиш керак: маркази B нуқтасида бўлган $S_{\text{кесим}}$ – ?

Ечилиши: $S_{\text{кесим}} = \pi R^2 = \pi \cdot AB^2$.

1) Сфера ва уни кесувчи текисликни ташкил қилиш мабойнида биз AB нинг кесувчи текисликнинг радиусига тенг эканини кўрамиз ва уни Пифагор теоремаси орқали топамиз:

$AB^2 = AO^2 - OB^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$ см.

2) У ҳолда B радиуси мавжуд кесимнинг юзаси қуйидагига тенг: $S_{\text{кесим}} = \pi \cdot AB^2 = 1600\ \pi$ см^2.

3) 3D расмга сайт:

https://www.geogebra.org/classic/pvfegncza ■

3.102. Шар кесими унга перпендикуляр радиуснинг ўртаси орқали ўтади. Кесим юзасининг шарнинг катта доираси юзасига нисбатини топинг.

3.103. Сфера сиртидаги нуқта орқали ўзаро φ бурчак ясайдиган кесим билан диаметр ўтказилган. Сфера радиусини R га тенг деб, кесим айланасининг узунлигини топинг.

3.104. ABC учбурчагининг учлари радиуси 13 га тенг сферада жойлашган. $AB = 6$, $BC = 8$ ва $AC = 10$. Сфера марказидан учбурчак текислигигача бўлган масофани топинг.

3.105. Тўғри тўртбурчакнинг учлари радиуси 5 га тенг сферада жойлашган. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали 16. Сфера марказидан учбурчак текислигигача бўлган масофани топинг.

3.106. Маркази O нуқтаси бўлган сферада A ва B нуқталари олинган ва AB диаметр эмас. $C \in AB$ нуқтаси AB нинг ўртаси бўлиши учун $OC \perp AB$ шарти зарур ва етарли эканлигини исботланг.

3.107. Берилган тенглама билан сферанинг ифодаланишини кўрсатиб, унинг маркази билан радиусини топинг:

1) $x^2+y^2+z^2-6z=0$;
2) $x^2+y^2+z^2-4x+2y=0$;
3) $x^2+y^2+z^2+10x+4y-8z+3=0$.

✦ Амалий топшириқ

3.108. Ер шарининг радиуси 6400 км деб, ердан 1 км баландликдаги самолётдан кўринадиган майсазорнинг энг четки нуқтасидан шу самолётгача бўлган масофани топинг.

3.109. Бирининг маркази иккинчисида жойлашган ўзаро тенг икки сферанинг умумий айланаларининг радиуси r га тенг. Шу сфераларнинг радиусини топинг.

3.110. Диагоналлари 15 см ва 20 см бўлган ромбнинг барча томонлари радиуси 10 см бўлган сферага уринади. Сферанинг марказидан ромб текислигигача бўлган масофани топинг.

3.111. Радиуси $\sqrt{2}$ га тенг сферага 1) ички; 2) ташқи чизилган кубнинг тўла сирт юзасини топинг.

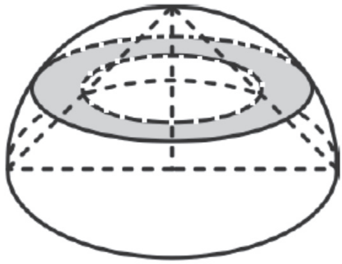
3.112. Радиуси R га тенг сферага 1) ички; 2) ташқи чизилган мунтазам тетраэдрнинг қиррасини узунлигини топинг.

3.113. Радиуслари R_1 га ва R_2 га тенг икки сферанинг ягона умумий нуқтаси мавжуд. Уларнинг марказларининг орасидаги масофа қандай бўлиши мумкин?

3.114. Радиуслари 25 см ва 29 см бўлган икки сферанинг марказларининг орасидаги масофа 36 см. Сфераларнинг умумий айланаларининг узунлигини топинг.

3.115. Жисм концентрли икки сфера билан чегараланган (ичи бўш шар). Жисмнинг диаметрли кесимининг юзаси кичик сферага ўтказилган уринма текислиги билан кесгандаги кесимнинг юзасига тенг эканлигини исботланг.

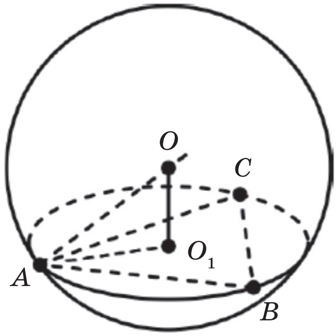
C



3.54-расм

3.116. Ярим шарга унинг катта диаметри билан асоси умумий бўлган конус ички чизилган. Конус баландлигининг ўртаси орқали асосига параллел кесим текислик ўтказилган. Кесимнинг сфера билан ва конус сирти билан чегараланган бўлагининг (халқанинг) юзаси асос юзасининг ярмига тенг эканлигини исботланг (3.54-расм).

3.117. Томонлари 12 см, 16 см ва 20 см бўлган учбурчакнинг учлари радиуси 26 см бўлган сферада ётади. Сфера марказидан учбурчак текислигигача бўлган масофани топинг (3.55-расм).



3.55-расм

Берилган: сфера ва унда ётувчи A, B, C нуқталари. $OA = 26$ см; $AB = 12$ см, $AC = 20$ см. O_1 нуқтаси – ABC га ташқи чизилган айлананинг маркази.

Топиш керак: OO_1 – ?

Ечилиши: $p = \dfrac{16+12+20}{2} = 24$ см.

$S_{ABC} = \sqrt{24 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 4} = 96$ см^2.

$AO_1 = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot S_{ABC}} = \dfrac{16 \cdot 20 \cdot 12}{4 \cdot 96} = 10$ см.

$\Delta AOO_1 : OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ см.

Жавоб: 24 см.

3.118. Ўқ кесими квадрат бўлган цилиндр сферага ички чизилган. Сфера юзасининг цилиндрнинг тўла сирт юзасига нисбатини топинг.

3.119. $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ 3)$, $C(1;\ 4;\ 0)$ ва $D(1;\ 2;\ 2)$ нуқталари орқали ўтувчи сферанинг маркази билан радиусини топинг.

Такрорлашга доир топшириқлар

***3.120.** 1) Юзаси 18 га тенг ABC учбурчагининг AB томонидан $AM:MN:NB=1:2:3$ каби нисбатлари бажариладигандек N ва M нуқталари олинган. M ва N нуқталаридан BC томонига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Шу тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзасини топинг.

2) A_1, B_1, C_1 нуқталари ABC учбурчагининг BC, AC ва AB томонларини қуйидаги нисбатларда бўлади: $BA_1:A_1C=3:7$, $AB_1:B_1C=1:3$, $AC_1:C_1B=1$. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларининг юзаларининг нисбатларини топинг.

Терминларнинг аталиш луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Цилиндр	Цилиндр	Цилиндр	Cylinder
Конус	Конус	Конус	Cone
Шар	Шар	Шар	Ball
Сфера	Сфера	Сфера	Sphere
Кесик конус	Қиық конус	Усеченный конус	Truncated cone
Ўқ кесим	Өстік қима	Осевое сечение	Axial section
Ички чизилган	Іштей сызылған	Вписанный	Inscribed
Ташқи чизилган	Сырттай сызылған	Описанный	Outscribed

«АЙЛАНМА ЖИСМЛАРИ» бўлимининг хулосаси

1) Айланма жисмнинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесгандаги кесими унинг **ўқ кесими** деб аталади.
2) **Цилиндр** деб, тўғри тўртбурчакнинг бир томони атрофида айлантирганда ҳосил бўладиган жисмга айтилади.
3) Агар цилиндрнинг асосларида жойлашган айланалар ва бир ясовчиси бўйлаб кесиб, ҳосил бўлган фигурани текисликка ёйиб жойлаштирсак, у ҳолда цилиндрнинг **ёйилмасини** оламиз.
4) Цилиндрнинг асос радиуси r бўлса, унинг ён сиртининг ёйилмаси ўлчовлари h (цилиндр баландлиги) ва $2\pi r$ га (цилиндр асо-

сидаги айлана узунлиги) тенг тўғри тўртбурчак бўлади. Ундай бўлса, бу цилиндрнинг ён сирт юзаси

$$S_{\text{ён.с.}} = 2\pi rh$$

формуласи билан, тўла сирт юзаси эса

$$S_{\text{т.с.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$$

формуласи билан ифодаланиши келиб чиқади.

5) Цилиндрнинг ясовчиси орқали ўтувчи ва цилиндр билан бошқа умумий нуқталари бўлмаган текисликка цилиндрга **уринма текислик** дейилади.
6) Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмга **конус** дейилади.
7) Конуснинг учи билан унинг асосидаги айлананинг ихтиёрий нуқтасини туташтирувчи кесма конуснинг **ясовчиси** дейилади.
8) Конуснинг ихтиёрий ясовчиси орқали ўтувчи ва конус билан бошқа умумий нуқталари бўлмаган текисликка унинг **уринма текислиги** дейилади.
9) Конуснинг тўла сирт юзаси қуйидагича ифодаланади:

$$S_{\text{т.с.}} = S_{\text{ён.с.}} + S_{\text{асос}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

10) Кесик конуснинг ён сирт юзаси қуйидагича ифодаланади:

$$S_{\text{ён.с.}} = \pi l(R + r).$$

11) Фазода берилган O нуқтасидан бирдек R масофада жойлашган нуқталар тўплами **сфера** дейилади. Фазонинг сфера билан чекланган бўлаги **шар** дейилади.
12) Сфера маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг сфера билан чекланган кесмаси унинг **диаметри** дейилади.
13) *Сферанинг текислик билан кесишиши айлана бўлади, бу айлананинг маркази сфера марказидан кесувчи текисликка туширилган перпендикулярнинг асоси билан устма-уст тушади.*
14) Сфера билан унинг маркази орқали ўтувчи текисликнинг кесишишини **диаметрли кесим,** баъзи ҳолларда бу айланани сферанинг **диаметрли айланаси ёки катта айланаси** деб ҳам аталади. Шу каби, шар билан текисликнинг кесишиши доира бўлади ва бу кесим шарни икки бўлакка бўлади. Бу бўлакларнинг ҳар бирини **шар сегменти** деб атайди.
15) Агар $M(x;\ y;\ z)$ сфера сиртидаги ихтиёрий нуқта бўлса, сферанинг таърифи бўйича $CM=R$ бўлиши керак. У ҳолда сферанинг тенгламаси қуйидагича чиқарилади:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

16) Уриниш нуқтасига ўтказилган радиус уринмага перпендикуляр бўлади ва аксинча, сферадаги радиуснинг учи орқали ўтувчи ва шу радиусга перпендикуляр текислик сферанинг уринмаси бўлади.
17) Сферанинг юзаси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\mathrm{S} = 4\pi R^2.$$

IV бўлим. ЖИСМЛАРНИНГ ҲАЖМЛАРИ

Бу бўлимда жисмларнинг ҳажмлари билан танишасизлар. Бўлим жараёнида жисм ҳажмларининг умумий хоссалари, фазовий фигураларнинг ўхшашлиги, кўпёқлар билан айланма жисмларнинг ҳажмларини, уларни амалиётда фойдаланишни ўрганасизлар.

Бўлимда кўриладиган мавзулар:

4.1. Ҳажм тушунчаси. Жисм ҳажмларининг умумий хоссалари. Фазовий фигураларнинг ўхшашлиги. Кўпёқларнинг ҳажми

4.2. Айланма жисмларнинг ҳажмлари

4.3. Геометрик жисмларнинг комбинацияларининг ҳажмлари

«Мангулик эл» триумфалли аркаси Нур-Султан шаҳрида 2011 йил 16 декабрда мамлакатнинг 20 йиллик мустақиллигининг рамзи сифатида очилди. Арканинг баландлиги 20 м, эни 13 м. Арканинг тепа қисмида шаҳарнинг кўринишини томоша қила оладиган алоҳида майдон мўлжалланган. Триумфалли арканинг олд қисмида «Мангулик эл» ёзуви мавжуд. Арка қозоқ нақшлари билан безатилган. Фасадларнинг тагида ўйчан мўйсафиднинг, онанинг, ўрта асрлардаги ботирнинг ва замонавий аскарнинг бронза ҳайкаллари ўрнатилган. Арканинг ён қисмида Хўжа Аҳмад Яссавий мавзолейидаги «Тойқозоннинг» нусқаси ўрнатилган. Арканинг олд қисми гранит ва мармар билан ясалган. Геометрик жисмлар комбинацияларининг ҳажмлари орқали ана шу триумфалли арканинг ҳажмини топишни ўрганасизлар.

4.1. Ҳажм тушунчаси. Жисм ҳажмларининг умумий хоссалари. Кўпёқларнинг ҳажми. Фазовий фигураларнинг ўхшашлиги

Бу бўлимда жисмларнинг ҳажмларининг умумий хоссалари, ўхшаш фигураларнинг ҳажмлари ва кўпёқ ҳажмларини топишни ўрганасизлар. Бўлим сўнгида:

- **жисмларнинг ҳажмларининг хоссаларини биласизлар ва фойдалана оласизлар;**
- **фазодаги ўхшаш фигуралар ҳажмларининг хоссаларини билиб, уни масалалар ечганда фойдаланасизлар;**
- **призма ҳажмини топиш формуласини билиб, уни масалалар ечганда фойдаланасизлар;**
- **пирамида ва кесик пирамиданинг ҳажмларини топиш формулаларини биласизлар ва уларни масалалар ечганда фойдаланасизлар.**

4.1.1. Ҳажм тушунчаси. Жисмларнинг ҳажмларининг умумий хоссалари

Ҳар бир фазовий жисмнинг текисликдаги фигуранинг юзаси каби, маълум бир сон қийматлари билан ифодаланадиган ўлчамлари мавжуд. Уни ***жисмнинг ҳажми*** деб атайди. Умуман олганда, бу ерда жисмнинг ҳажми тушунчасини қатъий математик йўналиш бўйича қараш кўзда тутилмаган. Бу тушунча юқори математиканинг ўлчамлар назарияси бўлимида кенг ёритилади. Лекин биз жисм ҳажми тушунчасининг қуйидаги хоссаларидан фойдаланамиз:

1°. Ҳар бир жисмнинг мусбат сон билан ифодаланадиган ҳажми мавжуд;

2°. Тенг жисмларнинг ҳажмлари ҳам тенг бўлади;

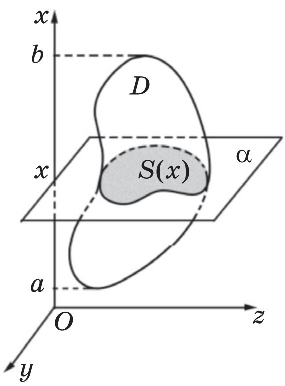
3°. Агар жисм содда жисмлар ҳосил қилувчи қисмларга бўлинса, бу жисмнинг ҳажми унинг қисмлари ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Жисм ҳажмининг сон қиймати олинган чизиқли ўлчов бирлигига, яъни олинган бирлик масштабга боғлиқ. Масалан, 1000 см^3 ҳажми 1 дм^3 ёки 0,001 м^3 ҳажмига тенг. Текисликда томони бирлик масштабли кесмага тенг квадрат юзасини ***юза бирлиги*** қаторида олганмиз. Шу каби, қирраси бирлик кесмага тенг куб ***ҳажм бирлиги*** қаторида олинади. Аввалам бор қандай ҳажм бирлиги олинадиганлиги маълум бўлса, ҳажмларни топиш жараёнида ўлчов бирликларини ёзмаса ҳам бўлади. Умуман олганда, ҳажми топилмайдиган жисмлар ҳам учрайди. Мактаб курсида бундай жисмлар қаралмайди. Аниқроқ айтсак, мактаб курсида қараладиган жисмлар маълум бир ҳажмга эга бўлади.

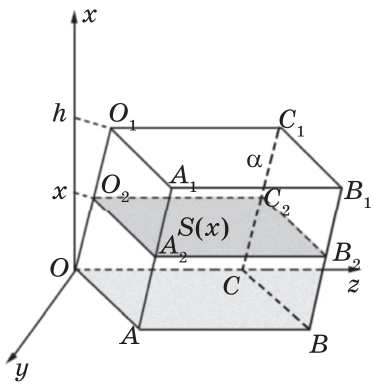
Энди алгебра ва анализ курсида қаралган жисм ҳажмларини интеграл ёрдамида топиш усулини эсга олайлик. D жисмининг жойлашишига кўра $Oxyz$ координаталар системасини 4.1-расмдаги каби жойлаштирайлик. Шунинг билан, D жисми Ox ўқи бўйича $[a; b]$ оралиғида жойлашган ва унинг ҳар бир $x \in [a; b]$ нуқтасида Ox ўқига перпендикуляр α текислиги билан ҳосил қиладиган кесимининг юзаси фақат x га боғлиқ $S(x)$ функцияси билан ифодалансин. У ҳолда D жисмининг ҳажми

$$V(D) = \int_a^b S(x)\,dx \qquad (1)$$

формуласи билан ифодаланади.



4.1-расм



4.2-расм

4.1.2. Параллелепипеднинг ва призманинг ҳажми

(1) формуланинг қўлланилишига мисол ўрнида $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипедининг ҳажмини топайлик. Бунинг учун $Oxyz$ координаталар системасини 4.2-расмдаги каби жойлаштириб, параллелепипеднинг Ox ўқига перпендикуляр кесимларининг юзасини топайлик. $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипедининг баландлиги h бўлса, бу жисм Ox ўқи бўйича $[0; h]$ оралиғида жойлашади, ҳар бир Ox ўқига перпендикуляр кесимлари асос текислигига параллел ва ўзаро тенг. Шунинг учун $S_{O_2A_2B_2C_2} = S_{OABC} = S$ – ўзгармас сон.

Ундай бўлса, (1) формула бўйича

$$V_{OABCO_1A_1B_1C_1} = \int_0^h S\ \cdot dx = S \cdot\ x\Big|_0^h = S \cdot h.$$

Шунинг билан параллелепипеднинг ҳажми асос юзасини унинг баландлигига кўпайтмасига тенг:

$$V = S_{\text{асос}} \cdot h. \qquad (2)$$

Бу ердаги h – параллелепипеднинг баландлиги, $S_{асос}$ – асосининг юзаси.

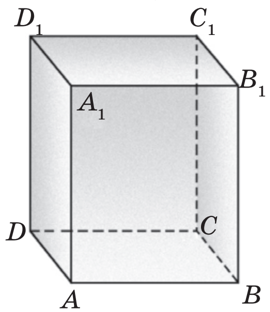
Агар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипед бўлса ва унинг ўлчамлари $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ деб олсак, унинг асос юзаси

$$S_{асос} = AB \cdot AD = a \cdot b,$$

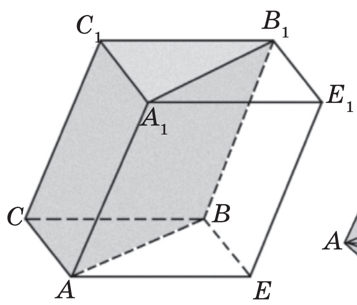
баландлиги эса $h = AA_1 = c$ (4.3-расм). У ҳолда бу тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми (2) формула бўйича

$$V = a \cdot b \cdot c \tag{3}$$

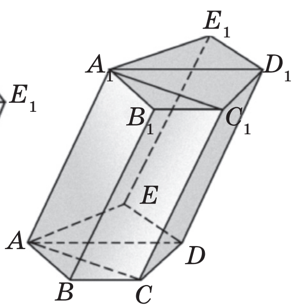
формула билан ифодаланади. Демак, ***тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми унинг уч ўлчамининг кўпайтмасига тенг.***



4.3-расм



4.4-расм



4.5-расм

Энди учбурчакли призманинг ҳажмини топайлик. Бунинг учун $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмасини $AEBCA_1E_1B_1C_1$ параллелепипедга тўлдирамиз (4.4-расм). У ҳолда бу параллелепипед ўзаро тенг $ABCA_1B_1C_1$ ва $AEBA_1E_1B_1$ учбурчакли призмаларнинг бирлашишидан ташкил топган. Бундан учбурчакли призманинг ҳажми $AEBCA_1E_1B_1C_1$ параллелепипедининг ҳажмининг ярмига тенг:

$$V = V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2} V_{AEBCA_1E_1B_1C_1} = \frac{1}{2} S_T \cdot h.$$

Бу ердаги $S_{асос} = S_{AEBC} = 2S_{ABC}$ ва призма билан параллепипеднинг баландликлари умумий бўлганлигидан,

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2S_{ABC} \cdot h = S_{ABC} \cdot h.$$

Учбурчакли призманинг ҳажми асос юзаси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.

Шу каби, ихтиёрий *призманинг ҳажми асос юзасини унинг баландлигига кўпайтмасига тенг*:

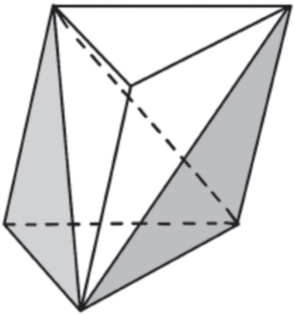
$$V = S_{асос} \cdot h. \tag{4}$$

Буни 4.5-расмда кўрсатилгандек, призмани бир қанча учбурчакли призмаларга бўлиш орқали асослаш қийинликка учрамайди.

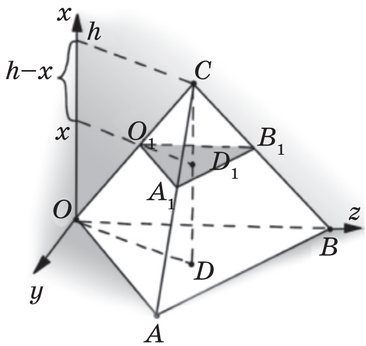
4.1.3. Пирамиданинг ҳажми

Учбурчакли призмани ён ёқларининг диагоналлари орқали 4.6-расмда тасвирлангандек, ҳажмлари бирдай бўлган учта пирамидага ажратишга бўлади. У ҳолда пирамиданинг ҳажми *асос юзаси билан баландлиги кўпайтмасининг* $\frac{1}{3}$ *қисмига тенг*:

$$V_{\text{асос}} = \frac{1}{3} S \cdot h. \qquad (5)$$



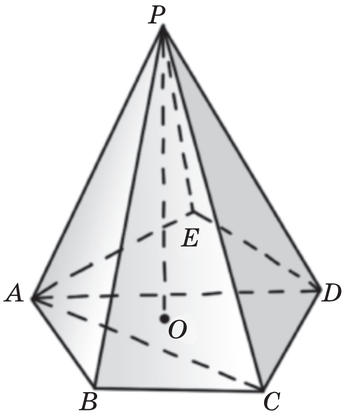
4.6-расм



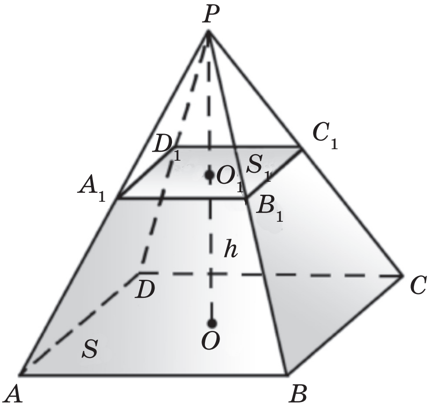
4.7-расм

Гуруҳ билан ишлаш

(5) формулани аниқ интеграл ёрдамида мустақил исботланглар (4.7-расм).



4.8-расм



4.9-расм

Ихтиёрий пирамиданинг (4.8-расм) ҳажмини ана шу формула орқали ҳисоблашга бўлади.

Асос юзалари S_1 ва S, баландлиги h га тенг кесик пирамиданинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3} h\left(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1\right) \qquad (6)$$

формуласи билан ифодаланадиганини кўрсатайлик (4.9-расм).

$S_{ABCD} = S$, $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_1$ ва $OO_1 = h$ бўлсин (4.9-расм). У ҳолда кесик пирамиданинг ҳажми $PABCD$ ва $PA_1B_1C_1D_1$ пирамидалари ҳажмларининг айирмасига тенг:

$$V = V_{PABCD} - V_{PA_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} S \cdot PO - \frac{1}{3} S_1 \cdot PO_1. \qquad (7)$$

$OO_1 = h$, $PO_1 = x$ деб олсак, $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ фигураларининг ўхшашлигидан

$$\frac{S}{S_1} = \frac{PO^2}{PO_1^2} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$$

тенглиги бажарилади. Бундан $x = \dfrac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$. (7) тенгликдан

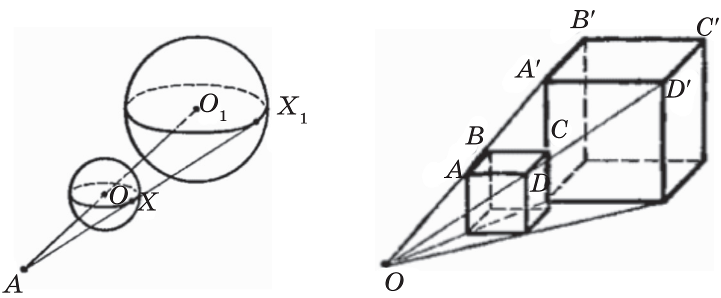
$$V = \frac{1}{3} S \cdot (h + x) - \frac{1}{3} S_1 \cdot x = \frac{1}{3}(hS + x(S - S_1)) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(hS + \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}\left(S - S_1\right)\right) = \frac{1}{3} h\left(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1\right)$$

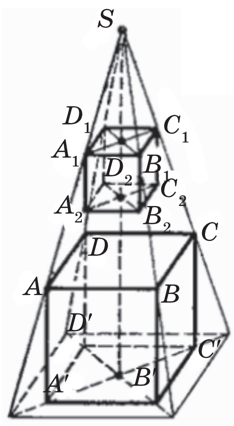
(6) формула тўлиқ исботланди.

4.1.4. Фазовий фигураларнинг ўхшашлиги. Ўхшаш фигураларнинг ҳажмлари

Фазода иккита жисм берилсин. Уларнинг бирининг чизиқли ўлчовларини бирдай коэффицентга кичирайтириш (ёки катталаштириш) орқали иккинчиси олинса, улар ***ўхшаш жисмлар*** дейилади (4.10-расм). Ўхшаш жисмларнинг мос чизиқли ва кўпёқли бурчаклари ўзаро тенг бўлади. Ихтиёрий икки шар бир-бирига ўхшаш, ана шу каби ихтиёрий куб бир-бирига ўхшаш.



4.10.1-расм



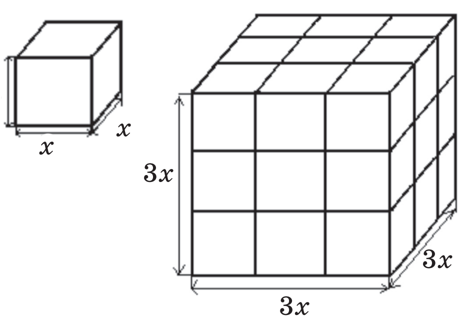
4.10.2-расм

Икки тетраэдрнинг мос қирралари ўзаро пропорционал бўлса, улар ўхшаш тетраэдрлар. Масалан, бизга ўзаро ўхшаш икки тетраэдр берилса ва биринчи тетраэдрнинг қирралари унга ўхшаш иккинчи тетраэдрнинг мос қирраларидан икки марта узун бўлса, унинг баландлиги, апофемаси, ташқи чизилган сферанинг радиуси ҳам иккинчи тетраэдрнинг мос элементларидан икки марта узун бўлади.

Ён ёқларининг сони ўзаро тенг икки мунтазам призманинг ёки пирамиданинг асос томони билан баландликлари ўзаро пропорционал бўлса, бу фигуралар ўхшаш. Икки цилиндр ёки икки конуснинг асос радиуслари билан баландликлари пропорционал бўлса, улар ўхшаш бўлади.

Ўхшаш ёйиқ фигураларнинг юзаларининг нисбати уларнинг чизиқли ўлчовлари (томонлари) нисбатининг квадратига тенг эканлигини биламиз. Ўзаро ўхшаш фазовий фигуралари ҳажмларининг нисбатини қарайлик.

4.11-расмда икки куб тасвирланган. Иккинчи кубнинг қирраси биринчи кубнинг қиррасидан уч марта узун. У ҳолда биринчи кубнинг ҳажми



4.11-расм

$$V_1 = x \cdot x \cdot x = x^3.$$

Иккинчи кубнинг ҳажми

$$V_2 = 3x \cdot 3x \cdot 3x = 27x^3.$$

Иккинчи кубнинг ҳажми биринчи кубнинг ҳажмидан $3^3 = 27$ марта катта.

Жисмни фазода катталаштирганда (ёки кичрайтирганда) унинг чизиқли ўлчовларининг барчасида (масалан, тўғри бурчакли параллелепипед учун – узунлиги, эни, баландлиги) катталашади (ёки кичраяди) . Шундай қилиб, агар жисмнинг барча чизиқли ўлчовлари n марта ўзгарса (ўсса ёки камайса), у ҳолда мос жисмнинг ҳажми n^3 марта ўзгаради (ўсади ёки камаяди). Демак, ***ўхшаш жисмларнинг ҳажмлари уларнинг чизиқли ўлчовларининг кубларига пропорционал.*** Ўхшаш жисмлар ҳажмларининг нисбати уларнинг мос чизиқли ўлчовлари нисбатининг кубига тенг. Масалан, қандайдир бир буюмнинг баландлиги бўйича 6 марта кичрайтирилган моделининг ҳажми ана шу буюм ҳажмидан $6^3 = 216$ марта кам. Хулоса қилиб айтганда, V_1 ва V_2 – ўхшаш жисмларнинг ҳажмлари ва h_1 билан h_2 уларнинг мос чизиқли ўлчовларининг бири (масалан, баландлиги) бўлса, қуйидаги тенглик бажарилади:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 .$$

1-масала. Баландлиги 55 см самоварга 42 пиёла чой сиғади. Ана шу самоварга ўхшаш узунлиги 44 см бўлган самаворга неча пиёла чой сиғади?

▲ Ўхшаш жисмларнинг ҳажмларининг нисбати уларнинг мос чизиқли ўлчовларининг нисбатининг кубига тенг бўлганлигидан,

$$\frac{V_{\text{катта}}}{V_{\text{кичик}}} = \left(\frac{55}{44}\right)^3 \Rightarrow \frac{42_{\text{пиёла}}}{V_{\text{кичик}}} = \frac{125}{64} \Rightarrow V_{\text{кичик}} = \frac{42 \cdot 64}{125} = 21{,}504 \approx 22.$$

Жавоб: 22 пиёла чой сиғади. ■

2-масала. Дўконда тухумнинг икки хил нави сотилади. Биринчи навли тухумнинг баландлиги 60 мм, нарҳи 400 тенге (10 донаси). Иккинчи навли тухумнинг баландлиги 55 мм, нарҳи 300 тенге. Қанақа навли тухумни олган афзал?

▲ Тухум ичидаги маҳсулотларнинг ҳажмини таққослаймиз:

$$\frac{V_{1\,\text{сорт}}}{V_{2\,\text{сорт}}} = \left(\frac{60}{55}\right)^3 \approx 1{,}3.$$

Энди нарҳларининг нисбати:

$$\frac{\text{нарҳ}_{1\,\text{сорт}}}{\text{нарҳ}_{2\,\text{сорт}}} = \frac{400}{300} \approx 1{,}33.$$

Нарҳларининг нисбати уларнинг ҳажмларининг нисбатидан катта ва

$$\text{Нарҳ}_{1\ \text{навли}} = 1{,}3 \cdot 300 = 390 < 400.$$

Демак, 2 навли тухумни олган афзал. ■

1. Геометрик жисмнинг ҳажми деганда нимани тушунасиз? Унинг қанақа хоссалари мавжуд?
2. Жисмнинг ҳажмини аниқ интеграл орқали қандай ҳисобланади?
3. Параллелепипеднинг ҳажми қандай формула орқали ифодаланади? Уни келтириб чиқаринг?
4. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг, призманинг ҳажми қандай формула орқали ифодаланади?
5. Пирамиданинг ҳажми қандай формула орқали ифодаланади? Уни келтириб чиқаринг?
6. Кесик пирамиданинг ҳажмини ифодалайдиган формулани келтириб чиқаринг.
7. 1 литр суюқликнинг ҳажми қандай?

МАСАЛАЛАР

A

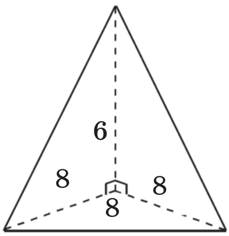
Амалий топшириқ

4.1. Синф хонасининг ҳажмини ҳисобланг.

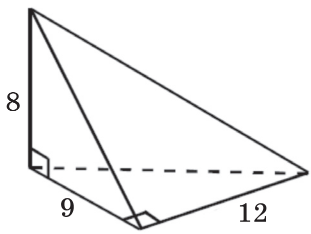
4.2. Ўзинглар ўтирган партанинг юзасини тайёрлашга кетадиган маҳсулотнинг ҳажми қандай?

4.3. Музлаткич тавсифларининг бири – унинг ичининг ҳажми ҳисобланади. Уйинглардаги музлаткичнинг ҳажмини ҳисобланг.

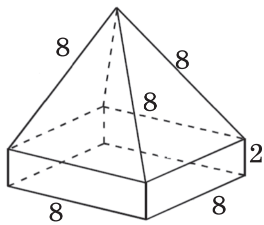
4.4. 4.12–4.13-расмдаги ўлчамлари берилган кўпёқларнинг ҳажмларини топинг:



4.12-расм



4.13-расм



4.14-расм

4.5. Қуйи ёқида ўлчамлари $8 \times 8 \times 2$ бўлган тўғри параллелепипед, устида мунтазам тўртбурчакли пирамидадан ташкил топган кўпёқнинг ҳажмини топинг (4.14-расм):

4.6. Ўлчамлари a, b ва c га тенг тўғри параллелепипеднинг ҳажмини топинг: 1) $a=2$ м, $b=4$ м, $c=7$ м; 2) $a=5$ см, $b=12$ см, $c=11$ см; 3) $a=3$ дм, $b=5$ дм, $c=6$ дм.

4.7. Кубнинг диагонали 12 см. Кубнинг ҳажмини топинг.

4.8. Кубнинг тўла сирти 96 см^2. Кубнинг ҳажмини топинг?

4.9. Агар кубнинг ҳар бир қиррасини 1 см-га орттирса, унинг ҳажми 91 см^3-га ортади. Кубнинг қиррасини топинг?

4.10. Баландлиги h га тенг параллелепипеднинг асосидаги параллелограммнинг томонлари a ва b, ўткир бурчаги φ га тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг: 1) $h = 7$ см, $a = 4$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 30°$; 2) $h = \sqrt{2}$ м, $a = 5$ м, $b = 10$ м, $\varphi = 45°$; 3) $h = 10$ мм, $a = 7$ мм, $b = 7\sqrt{3}$ мм, $\varphi = 60°$.

4.11. Олдинги масалани учбурчакли призма учун ҳисобланг. Бу ердаги h – призманинг баландлиги, a ва b – асосидаги учбурчакнинг томонлари, φ – уларнинг орасидаги бурчак.

4.12. Учбурчакли призманинг баландлиги h, асос томонлари a, b ва c га тенг. Призманинг ҳажмини топинг: 1) $a=15$ см, $b=14$ см, $c=13$ см, $h=12$ см; 2) $a=17$ дм, $b=65$ дм, $c=80$ дм, $h=100$ дм.

4.13. Диагонали d га тенг кубнинг ҳажмини топинг: 1) $d = 5\sqrt{3}$ мм; 2) $2\sqrt{3}$ м; 3) $d = 12$ см.

4.14. Баландлиги h ва асос томони a га тенг квадрат бўлган пирамиданинг ҳажмини топинг: 1) $h=12$ см, $a=5$ см; 2) $h=15$ м, $a=7$ м.

4.15. Баландлиги h га тенг пирамида асосидаги параллелограммнинг томонлари a ва b, ўткир бурчаги φ га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг: 1) $h = 7$ см, $a = 4$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 30°$; 2) $h = \sqrt{2}$ м, $a = 5$ м, $b = 10$ м, $\varphi = 45°$; 3) $h = 10$ мм, $a = 7$ мм, $b = 7\sqrt{3}$ мм, $\varphi = 60°$.

4.16. Учбурчакли пирамиданинг баландлиги h, асос томонлари a, b ва c га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг: 1) $a=15$ см, $b=14$ см, $c=13$ см, $h=12$ см; 2) $a=17$ дм, $b=65$ дм, $c=80$ дм, $h=100$ дм.

4.17. Кесик пирамиданинг асослари – томонлари a га ва a_1 га тенг квадратлар, баландлиги h. Унинг ҳажмини топинг: 1) $a=2$ м, $a_1=5$ м, $h=6$ м; 2) $a=15$ см, $a_1=20$ см, $h=10$ см.

4.18. Қирраларининг ҳар бири a га тенг мунтазам 1) тўртбурчакли; 2) учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.

4.19. b ён қирраси баландлиги билан φ бурчак ясайдиган мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг: 1) $b = 6$ м, $\varphi = 30°$; 2) $b = 12$ см, $\varphi = 60°$; 3) $b = \sqrt{2}$ дм, $\varphi = 45°$.

4.20. Кубнинг диагонал кесимининг юзаси $9\sqrt{2}$ см^2. Ҳажмини топинг.

4.21. Қирраси a га тенг мунтазам тетраэдрнинг ҳажмини топинг.

4.22. Параллелепипеднинг ён ёқларининг ҳар бири – томонлари 6 см бўлган квадрат, асосидаги ромбнинг ўткир бурчаги 60° га тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

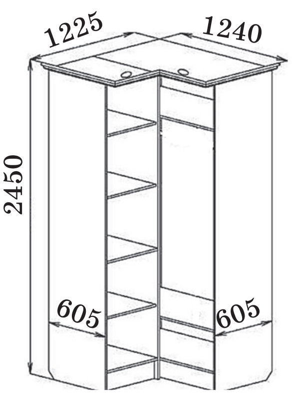
4.23. Қирраси 10 см бўлган октаэдрнинг ҳажмини топинг.

4.24. Учбурчакли тўғри призманинг асос томонлари 10 см, 17 см ва 21 см, призманинг баландлиги 20 см га тенг. Призма ҳажмининг 1680 см^3 бўлишини исботланг.

4.25. Кубнинг диагонал кесимининг юзаси $25\sqrt{2}$ см^2. Кубнинг ҳажми 125 см^3 бўлишини исботланг.

4.26. Учбурчакли тўғри призманинг барча қирралари $2\sqrt{3}$ га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

4.27. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг баландлиги $6\sqrt{3}$, асос томони 4 га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.



4.15-расм

✦Амалий топшириқ

4.28. 4.15-расмда тасвирланган бурчакли жиҳоз ўлчамлари миллиметрда берилган. Жиҳозни ясашга кетадиган маҳсулотнинг юзасини ва жиҳознинг ҳажмини топинг.

B

4.29. Мунтазам учбурчакли призманинг асос юзаси $12\sqrt{3}$ га тенг. Агар призманинг баландлиги асос томонидан 2 марта катта бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

4.30. Кубнинг ҳажми $16\sqrt{2}$ см^3 га тенг. Куб ёқига ташқи чизилган айлананинг радиуси 2 см бўлишини исботланг.

4.31. Мунтазам учбурчакли призманинг ҳажми $27\sqrt{3}$ см^3 га тенг. Унинг асосига ташқи чизилган айлананинг радиуси 2 га тенг. Призманинг баландлигини топинг.

4.32. Тўғри призманинг асосида ётган учбурчакнинг бир томони 2 м, қолганлари 3 м. Призманинг ён қирраси 4 м. Ҳажми призма ҳажмига тенг кубнинг қирраси $2\sqrt[6]{2}$ бўлишини исботланг.

4.33. Призманинг асоси – радиуси 6 бўлган доирага ички чизилган мунтазам учбурчак, ён ёқлари – квадратлар. Призманинг ҳажмини топинг?

4.34. Мунтазам учбурчакли призманинг ён қирраси асосидаги учбурчакнинг баландлигига тенг. Учбурчакнинг бир учидан чиққан баландлик билан ён қирраси орқали ўтувчи кесимнинг юзаси 75 см^2. Призманинг ҳажмини топинг.

4.35. Кубнинг қиррасини 2 марта орттирсак, унинг ҳажми неча марта ортади?

4.36. Учбурчакли оғма призманинг ён ёқларининг бири – ромб ва у асос текислигига перпендикуляр, ромбнинг диагоналлари 3 см ва 4 см. Агар призманинг асоси тенг томонли учбурчак бўлса, призманинг ҳажми қандай бўлади?

4.37. Икки куб қирраларининг нисбати 2:5 каби бўлса, уларнинг ҳажмларининг нисбатлари қандай бўлади?

4.38. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали d ва у асос текислигига φ бурчак остида оғиб турибди. Параллелепипед асосининг кичик томонини a деб, унинг ҳажмини топинг.

4.39. Асоси квадрат бўлган тўғри призманинг ҳажми V, асос юзаси S га тенг. Унинг ён сирт юзасини топинг.

4.40. Оғма тўртбурчакли призманинг асоси – квадрат ва ён қирраларининг бири асос томонлари билан ўзаро тенг ўткир бурчаклар ясайди ва асос текислигига φ бурчак остида оғиб турса, призманинг асос томонини a, ён қиррасини b деб олиб, ҳажмини топинг.

4.41. Учбурчакли призманинг асос томонлари 5 см, 6 см ва 9 см, ён қирраси 10 см ва асос текислигига 45° бурчак остида оғиб турса, призманинг ҳажмини топинг.

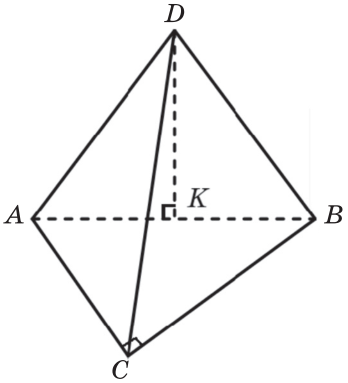
4.42. Оғма учбурчакли призманинг ён қирраси 15 см, ён қирраларининг орасидаги масофалар 26 см, 25 см ва 17 см. Призмани ҳажмини топинг.

4.43. Мунтазам учбурчакли призманинг асосига ташқи чизилган айлананинг радиуси R ва барча ён ёқлари – квадрат. Призманинг ҳажмини топинг.

4.44. Мунтазам олтибурчакли призманинг асос томони a, катта диагонал кесимининг юзаси S га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

4.45. Пирамида баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи асосига параллел текислик унинг ҳажмини қандай нисбатда бўлади?

4.46. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг 1) баландлиги h, асосидаги икки ёқли бурчаги φ; 2) асос томони a ва учидаги ёйиқ бурчаги φ га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.



4.16-расм

4.47. Учбурчакли пирамиданинг баландлиги асосига ташқи чизилган айлананинг маркази орқали ўтади, асоси – катетлари 8 см ва 6 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Пирамиданинг ён қирраси 13 см бўлса, ҳажмини топинг (4.16-расм).

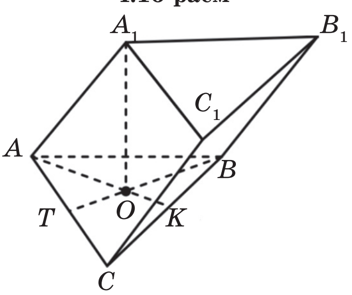
▲ **Берилган:** $DABC$ пирамида. $\angle ACB = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. $AD = BD = CD = 13$ см, DK – пирамида баландлиги.

Топиш керак: V_{DABC} – ?

Ечилиши: $AB = 10$ см, $AK = 5$ см, $\Delta ADK : DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} =$ $= 12$ см.

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 =$$

$= 96$ см^3. ■



4.17-расм

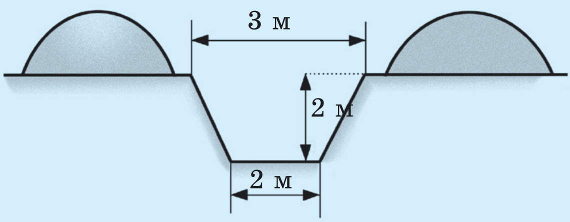
4.48. Учбурчакли призманинг асоси – мунтазам учбурчак. Унинг юқори асосининг учидан туширилган баландлик пастки асосининг марказидан ўтади. Призманинг ён қирралари асос текислиги билан 45° ли бурчак ясайди. Призманинг баландлиги 4 см бўлса, ҳажмини топинг (4.17-расм).

4.49. Пирамиданинг асоси – ўткир бурчаги 30° ва томони *a* га тенг ромб. Унинг бир ўткир бурчагининг учи орқали ўтувчи ён ёқлари асос текислигига перпендикуляр, бошқа икки ён ёқи асоси билан 60° ли бурчак ясайди. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

4.50. Мунтазам учбурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари мос равишда 1 см ва 2 см, ён қирралари асосига 45° остида оғиб турса, унинг ҳажмини топинг.

Амалий топшириқ

4.51. Бир қанча чорва хўжаликлари бирлашиб 4.18-расмда берилган ўлчамлари бўйича узунлиги 1 км ариқ қазишни мўлжаллашди. Агар улар ёллаган экскаватор соатига 10 м^3 ерни қазлаб, кунига 10 соат ишлашга келишилса, ариқ неча кунда қазлаб битказилади?



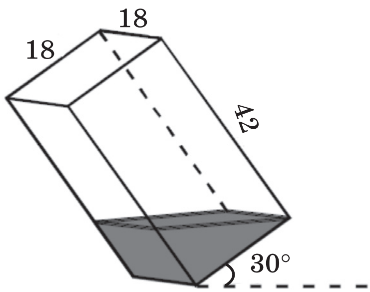
4.18-расм

4.52. Мунтазам тўртбурчакли призманинг диагонали билан ён ёқининг орасидаги бурчак 30°, асосининг томони *a* га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

4.53. Тўғри призманинг асоси – тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак. Унинг катети 3 см. Пастки асосининг катети ва юқориги асосининг ана шу катетга қарама-қарши ётган учи орқали ўтказилган кесимнинг юзаси 7,5 см^2 бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

4.54. Олтибурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми 6 см^3. Призманинг энг катта диагонали орқали ўтказилган кесимнинг юзаси 4 см^2. Призманинг асос томонининг ва ён қиррасининг узунликларини топинг.

4.55. Асоси квадрат бўлган тўғри параллелепипед шаклли бакнинг



4.19-расм

асос томони бўйлаб 30° бурчакка оғдирганда унинг ичидаги сув 4.19-расмда тасвирланган шаклга эга бўлади. Асос томони 18 га, ён қирраси 42 га тенг бўлса, бакдаги сув ҳажмини топинг.

C

***4.56.** Тўғри призманинг асоси – учидаги бурчаги α бўлган тенг ёнли учбурчак. Ана шу бурчакка қарама-қарши ётган ёқининг диагонали l ва у асос текислиги билан β бурчак ясайди. Призманинг ҳажми $\frac{1}{8}l^3\sin2\beta\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$ бўлишини исботланг.

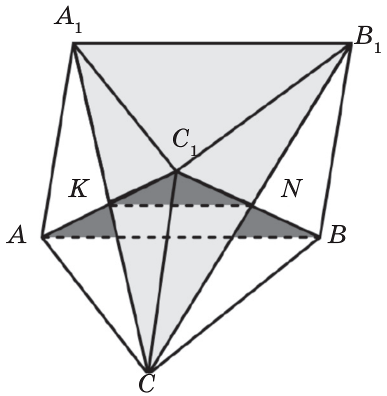
4.57. Ўзаро жуфт-жуфтдан перпендикуляр бўлган тўғри бурчакли параллелепипеднинг уч ёқининг юзалари S_1, S_2 ва S_3 га тенг бўлса, унинг ҳажми $V=\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$ формуласи билан ифодаланишини исботланг.

4.58. Ҳажми V, асосининг юзалари S_1 ва S_2 га тенг кесик пирамида берилган. Тўлиқ пирамиданинг ҳажмини топинг.

4.59. Тўртбурчакли пирамиданинг асоси – бир томони a га тенг тўғри тўртбурчак, ён қирралари b га тенг бўлган, шундай пирамида ҳажмларининг энг катта қийматини топинг.

4.60. Кесик пирамиданинг баландлиги h, ўрта кесимининг юзаси S. Кесик пирамиданинг ҳажми қандай ҳолатда ўзгаради?

4.61. Баландлиги h ва асосининг радиуси R га тенг конусга ички чизилган учбурчакли пирамидалар ҳажмининг энг катта қийматини топинг.



4.20-расм

4.62. Баландлиги h га тенг пирамиданинг асоси – тўғри тўртбурчак, пирамиданинг барча бешта ёқининг юзалари ўзаро тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

***4.63.** $ABCA_1B_1C_1$ призмада A, B, C_1 ва A_1, B_1, C нуқталари орқали ўтувчи иккита кесим ўтказилган. Бу кесимлар призмани тўртта қисмга ажратади ва уларнинг кичик қисмининг ҳажми V. Призманинг ҳажмини топинг (4.20-расм).

Такрорлашга доир топшириқлар

4.64. 1) *ABCD* трапецияда учлари *AB* ва *CD* ён томонларида ётувчи *MN* кесмаси диагоналларининг кесишиш нуқтасидан ўтади ва трапеция асосларига параллел. $AD=a$, $BC=b$ бўлса, *MN* кесмасини узунлигини топинг.

2) *ABCD* трапецияда учлари *AB* ва *CD* ён томонларида ётувчи, трапеция асосларига параллел *PQ* кесмаси ўтказилган. Бу кесма *AC* диагоналини *L* нуқтасида, *BD* диагоналини *R* нуқтасида кесиб ўтади. $AD=a$, $BC=b$ ва $PL=$LR бўлса, *PQ* кесмасини узунлигини топинг.

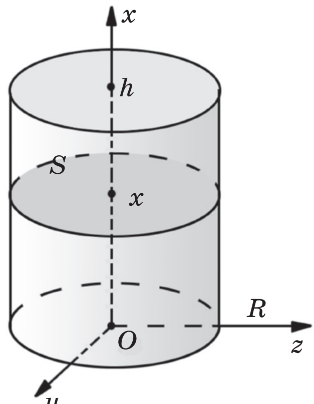
4.2. Айланма жисмларнинг ҳажми

Бу мавзуда айланма жисмларнинг ҳажмини, аниқроқ айтсак, цилиндр, конус ва кесик конуснинг ҳажмларини, шар ва унинг қисмларининг ҳажмларини ҳисоблашни ўрганасизлар. Мавзу сўнгида:

- **цилиндр ҳажмини ифодаловчи формуласини биласизлар ва уни масалалар ечишда фойдаланасизлар;**
- **конус ва кесик конус ҳажмларини ифодаловчи формулаларини биласизлар ва уларни масалалар ечишда фойдаланасизлар;**
- **шар ва унинг қисмлари ҳажмларини ифодаловчи формулаларини биласизлар ва уларни масалалар ечишда фойдаланасизлар;**
- **айланма жисмларнинг ҳажмларини амалий топшириқларни ечишда фойдаланасизлар.**

4.2.1. Цилиндрнинг ҳажми

Радиуси R ва баландлиги h цилиндрнинг ҳажмини ифодалаш учун $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасини 4.21-расмда тасвирлангандай оламиз. Унда цилиндрнинг $[0;\ h]$ оралиғидаги кўндаланг кесимининг юзаси $x \in [0;h]$ нуқтасини танлаб олишимизга боғлиқ эмас, ўзгармас бўлади, ана шу цилиндрнинг асосининг юзаси πR^2. Бундан цилиндрнинг ҳажми (1) формула бўйича қуйидагича ифодаланади:



4.21-расм

$$V = \int_0^h S \cdot dx = \pi R^2 \cdot \left. x \right|_0^h = \pi R^2 h.$$

Демак, *цилиндрнинг ҳажми асосининг юзаси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:*

$$V = \pi R^2 h. \quad (1)$$

4.2.2. Конуснинг ҳажми

Баландлиги h ва радиуси R конусни 4.22-расмда тасвирлангандек жойлаштирамиз. $x \in [0;\ h]$ нуқтасида ўтказилган асосига параллел кесимнинг юзаси $S(x)$ ни R, h ва x орқали ифодалайлик. $OA = R$, $OP = h$, $OO_1 = x$ бўлганлигидан, PO_1B ва POA тўғри бурчакли учбурчакларининг ўхшашлигидан

$$\frac{O_1B}{PO_1} = \frac{OA}{PO} \Rightarrow \frac{O_1B}{h-x} = \frac{R}{h} \Rightarrow O_1B = \frac{R}{h}(h-x)$$

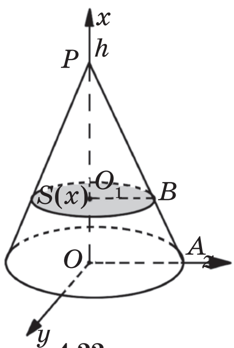
тенглигини оламиз. У ҳолда $S(x) = \pi \cdot (O_1B)^2 = \dfrac{\pi R^2}{h^2}(h - x)^2$.

Бундан

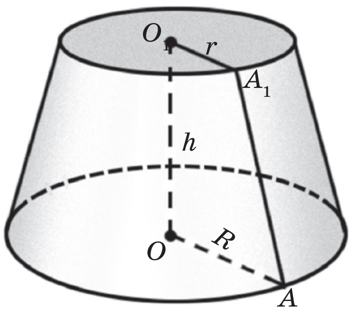
$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2 dx = -\frac{\pi R^2}{3h^2}(h-x)^3\Big|_0^h = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Демак, *конуснинг ҳажми асосининг юзаси билан баландлигининг кўпайтмасининг* $\dfrac{1}{3}$ *қисмига тенг*:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3} S \cdot h. \quad (2)$$



4.22-расм



4.23-расм

Асосининг радиуслари R ва r, , баландлиги h га тенг кесик конуснинг ҳажми (4.23-расм)

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2) \quad (3)$$

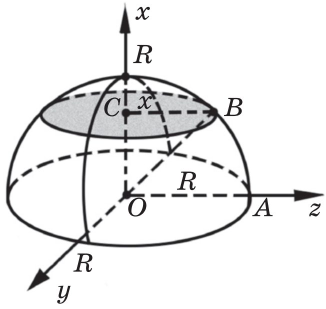
формуласи билан ифодаланади.

Мустақил исботланг!

3-формула кесик пирамида ҳажмининг формуласи каби исботланади. Уни ўзинглар келтириб чиқаринглар.

4.2.3. Шарнинг ва унинг қисмларининг ҳажмлари

Шарнинг маркази орқали ўтувчи текислик унинг симметрия текислиги бўлганлигидан, аввал ярим шарнинг ҳажмини топиб, уни икки марта орттирсак, шуни ўзи етарли. Радиуси R га тенг ярим шарни 4.24-расмда тасвирлангандек жойлаштирамиз.



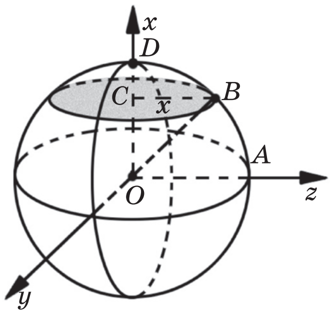
4.24-расм

Кесимнинг $S(x)$ юзаси – x га ($x \in [0; R]$) эрксиз функция. Ана шу функцияни топайлик. $OA = R = OB$, $OC = x$ бўлганлигидан, кесимнинг радиуси $CB = \sqrt{OB^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$ тенглиги билан ифодаланади. Бундан кесимнинг юзаси $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Ундай бўлса, ярим шарнинг ҳажми

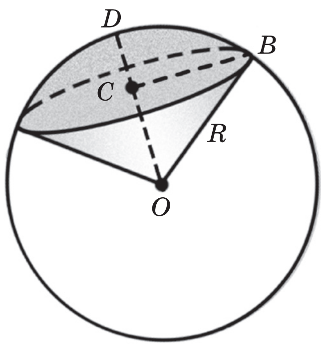
$$\frac{1}{2}V = \int_0^R \pi\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}. \qquad (4)$$

Шарнинг ҳажми

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (5)$$



4.25-расм



4.26-расм

Шар кесимининг ҳар бири уни икки қисмга бўлади. Ана шу қисмларга ***шар сегменти*** деб аталади (4.25-расм). Энди кичик шар сегментининг ҳажмини топайлик. $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасини 4.24-расмда тасвирлангандек жойлаштирайлик. У ҳолда CD кесмасига шар сегментининг *баландлиги* дейилади. Баландлиги $CD = h$ ва радиуси R бўйича ана шу сегментнинг ҳажмини топиш керак.

$OC = R - h$ бўлганлигидан, (4) интегралнинг чегаралари $(R - h)$ дан R гача ўзгаради:

$$V = \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Шар секторининг ҳажми шар сегменти билан конус ҳажмларининг йиғиндисига тенг (4.26-расм). $CD = h$ бўлса, $OC = R - h$ ва

$CB = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$.

Ундай бўлса,

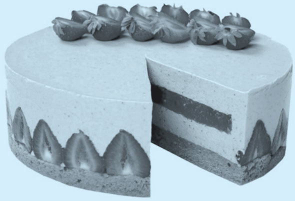
$$V_{сек} = V_{сег} + V_{к} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{1}{3}\pi \cdot CB^2 \cdot OC = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi}{3} \times$$
$$\times (2Rh - h^2) \cdot (Rh - h) = \frac{2\pi}{3}\pi R^2 h.$$

1. Цилиндрнинг ҳажми қандай формула орқали ифодаланади?
2. Конуснинг ҳажми формуласини ёзиб, уни келтириб чиқаринг. Кесик конуснинг ҳажми қандай формула орқали ифодаланади?
3. Шар ҳажмининг формуласини ёзиб, уни келтириб чиқаринг.
4. Шар сегменти (сектори) қандай формула орқали ифодаланади? Уни исботланг.

МАСАЛАЛАР

А

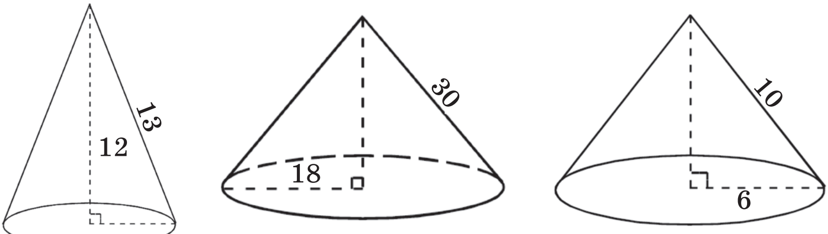
Амалий топшириқ



4.27-расм

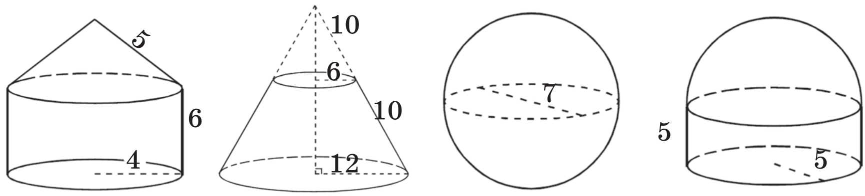
4.65. Тортнинг баландлиги 5 см, диаметри 30 см (4.27-расм). Учидаги бурчаги 30° бўлган ва доира секторини ташкил қилувчи тортнинг бир қисми кесиб олинди. Ана шу қисм ҳажмини топинг.

4.66. Ўлчамлари 4.28-расмда берилган конусларнинг ҳажмларини топинг:



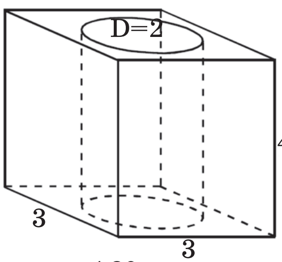
4.28-расм

4.67. 4.29-расмдаги ўлчамлари берилган айланма жисмларнинг ҳажмларини топинг:

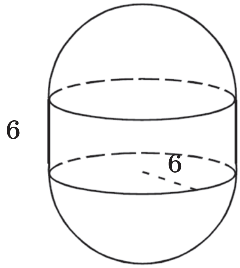


4.29-расм

4.68. Асосининг томони 3 га тенг квадрат, баландлиги 4 га тенг тўғри параллелепипеддан диаметри 2 га тенг цилиндр қирқиб олинган (4.30-расм). Ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг:



4.30-расм



4.31-расм

4.69. Радиуси 6, баландлиги 6 бўлган цилиндрнинг асос ёқлари ярим шарлар билан тўлдирилганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг (4.31-расм).

4.70. Радиуси R ва баландлиги h га тенг цилиндрнинг ҳажмини топинг: 1) R=3 м, h=5 м; 2) R=10 мм, h=12 мм; 3) R=4 дм, h=7 дм; 4) R=6 см, h=14 см.

4.71. 4.70-масалани радиуси R ва баландлиги h га тенг конус берилган деб ечинг.

4.72. Радиуси R га тенг шарнинг ҳажми билан сферанинг юзасини топинг: 1) R=12 см; 2) R=6 м; 3) R=9 мм.

4.73. Цилиндрнинг ўқ кесимининг юзаси S, радиуси R га тенг. Унинг ҳажмини топинг: 1) S=24 см^2, R=4 см; 2) S=70 м^2, R=5 м; 3) S=144 дм^2, R=6 дм.

4.74. Олдинги масалани ўқ кесимининг юзаси S, радиуси R га тенг конус деб ечинг.

Амалий топшириқ

4.32-расм

4.75. Сиёсий қувғин-сургин ва тоталитаризм қурбонларининг «АЛЖИР» мемориал-музей саройи кесик конус шаклида қурилган (4.32-расм). Унинг баландлиги 8 м, асосларининг диаметрлари 20 м ва 15 м. Ҳажмини топинг.

4.76. Асосининг радиуслари r ва R, баландлиги h га тенг кесик конуснинг ҳажмини топинг: 1) r=3 см, R=5 см, h=4 см; 2) r=7 мм, R=12 мм, h=10 мм; 3) r=1 м, R=8 м,

4.77. Цилиндрнинг ўқ кесимининг d диагонали ясовчиси билан φ бурчак ясайди. Цилиндрнинг ҳажмини топинг: 1) $d = 12$ см, $\varphi = 30°$; 2) $d = 2\sqrt{2}$ м, $\varphi = 45^\circ$; 3) $d = 18$ дм, $\varphi = 60^\circ$.

4.78. Конуснинг ясовчиси l, ўқ кесимининг учидаги бурчаги φ га тенг. Конуснинг ҳажмини топинг: 1) $l = 20$ см, $\varphi = 60°$; 2) $l = 5\sqrt{2}$ м, $\varphi = 90°$; 3) $l = 12$ дм, $\varphi = 120°$.

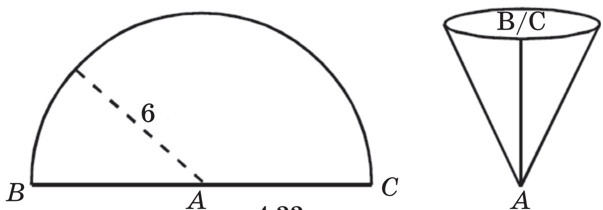
4.79. Кесик конуснинг ўқ кесими – томонлари 5 см, 10 см, 17 см, 10 см бўлган тенг ёнли трапеция. Унинг ҳажмини топинг.

4.80. Радиуси R га тенг шар сегментининг баландлиги h га тенг. Ана шу шар сегментининг ҳажми ва унга мос шар секторининг ҳажмини топинг: 1) R=10 см, h=5 см; 2) R=6 м, h=1 м.

B

4.81. Цилиндр ўқига параллел текислик ўқдан 15 см узоқликдан ўтади ва ҳосил бўлган кесим диагонали 20 см, цилиндр асосининг радиуси 17 см бўлса, цилиндр ҳажмини топинг.

4.82. Радиуси 6 см ярим доирани ўраб конус ясалди (4.33-расм). Конуснинг ҳажмини топинг.



4.33-расм

4.83. Радиуси 20 см бўлган доира шаклидаги тунукадан марказий бурчаги 240° бўлган сектор қирқиб олиниб, ундан конус ясалди. Ана шу конуснинг ҳажмини топинг.

4.84. Цилиндрнинг радиусини 40% га орттириб, баландлигининг ярми камайтирилса, унинг ҳажми қандай ўзгаради?

A. 2% га камаяди; C. 30% га ортади;

B. 30% га камаяди; D.2% га ортади.

4.85. Ҳажми V га тенг конуснинг баландлигини тенг уч қисмга бўлувчи нуқталар орқали асосига параллел текисликлар ўтказилиб, конус уч қисмга бўлинди. Ўртасидаги қисмининг ҳажмини топинг.

4.86. Кесик конус ўқ кесимининг юзаси унинг асослари юзаларининг йиғиндисига тенг, асосларининг радиуси r ва R га тенг. Кесик конуснинг ҳажмини топинг.

▲ **Ечилиши:** $V_{\text{кесик кон.}} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

1) Кесик конуснинг ўқ кесимининг юзаси:

$$S_{\text{кесим}} = \frac{2R+2r}{2} \cdot h = (R+r) \cdot h \cdot$$

2) Кесик конуснинг асослари юзаларининг йиғиндиси:

$S_{\text{юқ.ас.}} + S_{\text{паст.ас.}} = \pi R^2 + \pi r^2 = \pi(R^2 + r^2)$.

3) Кесик конуснинг баландлигини топайлик:

$$(R + r) \cdot h = \pi(R^2 + r^2),$$

$$h = \frac{\pi\left(R^2+r^2\right)}{(R+r)}.$$

4) Энди кесик конуснинг ҳажмини топайлик:

$$V_{\text{кесик кон.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\pi\left(R^2+r^2\right)}{(R+r)} \cdot \left(R^2+Rr+r^2\right) = \frac{\pi^2\left(R^2+r^2\right)\left(R^2+Rr+r^2\right)}{3(R+r)}.$$ ■

4.87. Ён сиртининг ёйилмаси радиуси 15 см ярим доира бўлган конуснинг ҳажмини топинг.

4.88. Конусга ички чизилган радиуси r га тенг сфера сиртининг юзаси конус асосининг юзасига тенг. Конуснинг ҳажмини топинг.

Амалий топшириқ

4.89. Диаметри 6 мм пўлат сим ўрамининг оғирлиги 30 кг. Пўлатнинг зичлиги 7600 кг/м^3 бўлса, ўрамдаги симнинг узунлигини топинг.

4.90. Пўлатдан ясалган қувурнинг диаметри 1,42 м, қалинлиги 2,2 см. Пўлатнинг зичлиги 7600 кг/м^3 бўлса, узунлиги 1 км қувурга неча тонна пўлат сарфланишини топинг.

4.91. Диаметри 3 мм бўлган шар шаклидаги учта қўрғошин ўқни овчи қайта эритиб, шар шаклидаги битта ўқ ясади. Ана шу ўқнинг диаметрини топинг.

4.92. Шар диаметрига перпендикуляр текислик шар диаметрини 4 см ва 10 смли икки қисмга ажратади. У ҳолда шар ҳажми қандай қисмларга ажралади?

4.93. Асосининг диаметри 4 см ва баландлиги 4 см бўлган метал цилиндр қайта эритилиб, ундан шар ясалди. Шарнинг радиусини топинг.

4.94. Радиуслари ўзаро тенг шар ва цилиндрнинг ҳажмлари ҳам тенг. Цилиндр баландлигининг шар радиусига нисбатини топинг.

C

4.95. Қирраси 1 га тенг кубнинг учлари, радиуслари ўзаро тенг шарларнинг марказлари бўлиб келади. Кубнинг ана шу шарлардан ташқарида жойлашган қисмининг ҳажми $\frac{1}{2}$ га тенг. Куб қиррасининг қандай қисми шарлардан ташқарида жойлашган?

***4.96.** Радиуси R шарнинг баландлиги h га тенг сегментининг юзасининг $S = 2\pi Rh$ формуласи орқали ифодаланишини исботланг.

Амалий топшириқ

4.97. Антарктидадагимуз ҳажми 30 млн. км^3. Ер шарининг радиуси тахминан 6 минг км, ер шарининг 70,8%-и сув бўлса, Антарктида музлари тўлиқ эриганда сув сатҳи неча метрга кўтарилишини топинг.

***4.98.** Конуснинг учи орқали юзаси энг катта бўлган кесим ўтказилган. Бу юза конуснинг ўқ кесими юзасидан икки марта катта. Конуснинг радиуси R бўлса, унинг ҳажмини топинг.

Такрорлашга доир топшириқлар

4.99. 1) ABC учбурчагининг B учидан ўтказилган биссектрисаси AC томонини узунликлари 28 ва 12 га тенг кесмаларга ажратади. $AB-BC=18$. ABC учбурчагининг периметрини топинг.

2) ABC учбурчагининг AB, BC, AC томонларининг нисбати 2:4:5 кабига тенг. Унинг биссектрисалари кесишиш нуқталарида қандай нисбатда бўлинади?

4.3. Геометрик жисмлар комбинацияларининг ҳажмлари

Бу мавзуда кўпёқлар ва айланма жисмларнинг комбинациясидан ташкил топган жисмларнинг ҳажмларини ҳисоблашни ўрганасизлар. Бўлим сўнгида:

- **кўпёқлар ва айланма жисмларнинг комбинацияларини текисликда тасвирлай оласизлар;**
- **кўпёқлар ва айланма жисмларнинг комбинацияларининг ҳажмини ҳисоблашни ўрганасизлар;**
- **геометрик жисмларнинг комбинациясига берилган амалий топшириқларни бажара оласизлар.**

Сизлар кўпёқлар билан айланма жисмларни ўқиб ўргандинглар. Энди ана шу жисмларнинг комбинацияларини қараймиз. Комбинацияларнинг қуйидаги турлари тез-тез учрайди:

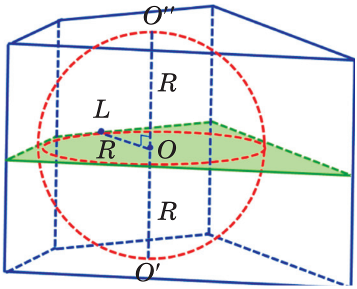
1) шар ва пирамида;
2) шар ва призма;
3) шар ва конус;
4) шар ва цилиндр;
5) конус ва пирамида;
6) конус ва призма;
7) конус ва цилиндр;
8) цилиндр ва пирамида;
9) цилиндр ва призма.

3.1-бобда цилиндр билан призманинг ва 3.2-бобда конус билан пирамиданинг комбинацияларини ўзлаштирдинглар. Комбинацияларнинг бир фигураси шар бўлган ҳолатини кўриб чиқайлик.

Шар билан призманинг комбинациялари

Агар шар призмага ички чизилса (4.34-расм):

1) призманинг баландлиги шар диаметрига тенг;



4.34-расм

2) призманинг ён ёқлари билан уринадиган шар нуқталари призма баландлигининг ўртаси орқали (шар маркази) ўтувчи ва ён қирраларига перпендикуляр кесимда ётади;

3) шар радиуси призма асосига ички чизилган айлананинг радиусига тенг.

Ихтиёрий призмага ҳар доим ҳам сферани ташқи (ички) чизиш мумкин эмас. Тўғри призмага сферани ташқи чизиш учун унинг асосларидаги кўпбурчакка айланани ташқи чизиш мумкинлигини бўлиши шарт ва етарли. Тўғри призмага шарни ички чизиш учун унинг асосларидаги кўпбурчакка айланани ички чизиш мумкинлигини бўлиши ва бу айлананинг диаметри призма баландлигига тенг бўлиши шарт ва етарли.

Гуруҳ билан ишлаш

Гуруҳ билан бирга юқоридаги мулоҳазаларни асосланг (мос келувчи тайёр расмлардан фойдаланинг).

1-мисол. Асоси бир катети 15 см ва гипотенузаси 17 см га тенг тўғри бурчакли учбурчак бўлган тўғри призмага шар ички чизилган. Призманинг ҳажмини топиш керак.

▲ Пифагор теоремасидан фойдаланиб, иккинчи катетини ҳисоблайлик:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ см}.$$

Шар радиуси тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусига тенг:

$$r = \frac{2S}{p} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8}{8 + 15 + 17} = \frac{120}{40} = 3 \text{ см}.$$

Бундан шар диаметри $d = 2r = 6$ см. Призманинг баландлиги шар диаметрига тенг бўлганлигидан,

$$V = S \cdot h = 60 \cdot 6 = 360 \text{ см}^2.$$

Жавоб: 360 см^2. ■

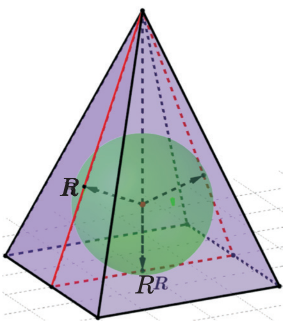
Шар билан пирамиданинг комбинацияси

Пирамидага ички чизилган шарнинг маркази пирамиданинг икки ёқли бурчакларининг биссектриса текисликларининг кесишиш нуқтаси бўлиб ҳисобланади. Пирамиданинг асосидаги икки ёқли бурчаклари ўзаро тенг бўлса, яъни ён ёқлари асоси билан ўзаро тенг бурчаклар ясаса, пирамиданинг баландлиги асосидаги кўпбурчакка ички чизилган айлананинг марказига тушади ва пирамиданинг ён ёқларининг баландликлари ўзаро тенг бўлади (4.35-расм).

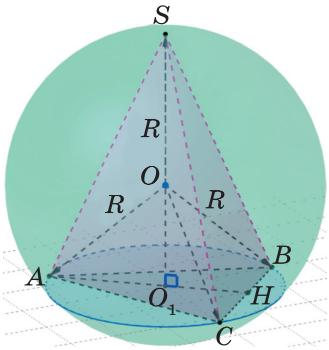
Пирамидага сфера ташқи чизилиши учун унинг асосидаги кўпбурчакка айлана ташқи чизилиши шарт ва етарли (4.36-расм).

Мустақил исботланг!

Гуруҳ билан бирга мулоҳазаларни асосланглар (мос келувчи тайёр расмлардан фойдаланинг).



4.35-расм



4.36-расм

2-мисол. Мунтазам тўртбурчакли пирамидага ҳажми $\frac{32\pi}{3}$ га тенг шар ички чизилган. Пирамиданинг баландлиги 6 га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг (4.37-расм).

▲ Шарнинг радиусини топамиз:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R = 2.$$

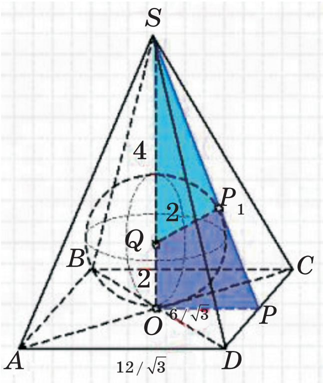
$$SQ = SO - OQ = 6 - 2 = 4.\ SP_1 = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}.$$

ΔSP_1Q ва ΔSOP ўхшаш учбурчаклар бўлганлигидан, $\frac{QP_1}{OP} = \frac{SP_1}{SO}$,

$$OP = \frac{QP_1 \cdot SO}{SP_1} = \frac{2\cdot 6}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot 6 = 96.$$

Жавоб: 96. ■

Шар билан цилиндрнинг комбинацияси



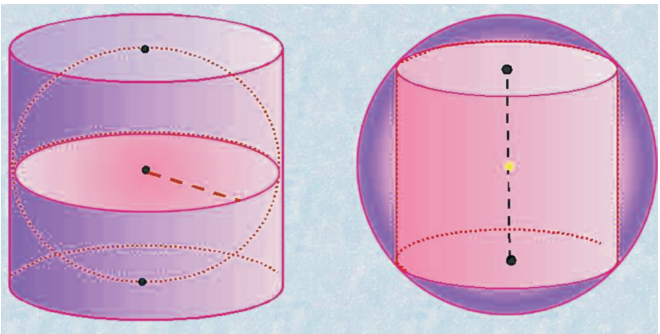
4.37-расм

Ихтиёрий цилиндрга сферани ташқи чизиш мумкин (4.38-расм). Сферанинг маркази цилиндр ўқи орқали ўтувчи баландлигининг ўртасида ётади. Сферанинг радиуси R, цилиндрнинг радиуси r, цилиндрнинг баландлиги H бўлса, Пифагор теоремаси бўйича:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2 .$$

Мустақил исботланг!

Бу тенгликни жуфтлашиб биргаликда исботланг.



4.38-расм

Диаметри билан баландлиги тенг бўлган цилиндргагина шар ички чизилади ва ички чизилган шар цилиндрнинг асосидаги айланаларни уларни марказларида уриниб ўтади. Цилиндрнинг ён сиртига диаметрли кесим бўйлаб уриниб ўтади. Шарнинг радиуси R, цилиндрнинг радиуси r, цилиндрнинг баландлиги H бўлса, $R = r$ ва $H = 2R$ бўлади.

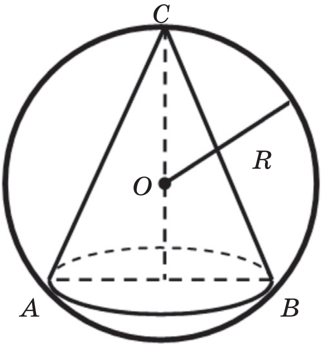
Шар билан конуснинг комбинацияси

Ихтиёрий конусга ички ва ташқи шар чизиш мумкин (4.39, 4.40-расмлар).

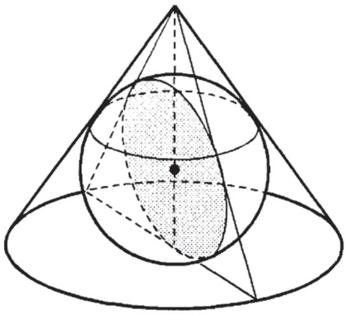
Сферага ички чизилган конуснинг (4.39-расм) учи билан асоси сферада ётади. Сферанинг маркази конуснинг ўқида ётади ва конуснинг ўқ кесими бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази билан устма-уст тушади. Сферанинг радиуси R, конуснинг радиуси r, конуснинг баландлиги H бўлса, Пифагор теоремаси бўйича $R^2 = (H - R)^2 + r^2$.

Мустақил исботланг!

Бу тенгликни жуфтлашиб биргаликда исботланг.



4.39-расм



4.40-расм

Конусга ички чизилган шар (4.40-расм) конуснинг асосини унинг марказида, ён ёқини конуснинг асосига параллел бўлган айлана бўйлаб уриниб ўтади. Шарнинг маркази конуснинг ўқида ётади ва конуснинг ўқ кесими бўлган учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази билан устма-уст тушади.

Шарнинг радиуси R, конуснинг радиуси r, конуснинг баландлиги H бўлса, қуйидаги тенглик бажарилади: $\dfrac{R}{H-R} = \dfrac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$.

Жуфт бўлиб ишлаш

Бу тенгликни жуфтлашиб биргаликда исботланг.

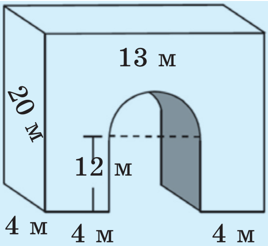
Ижодий масала

«Мангулик эл» триумфалли арканинг баландлиги 20 м, эни 13 м га тенг. 4.41-расмда кўрсатилган ўлчамлари бўйича арканинг ҳажмини ҳисоблаш керак.

▲ Ҳажмини ҳисоблаш учун аркани ташкил қилувчи тўғри параллелепипеднинг ҳажмидан кичик параллелепипеднинг ва ярим цилиндрнинг ҳажмини айирамиз:

Катта параллелепипеднинг ўлчовлари 20 м, 4 м, 13 м.

$V_{\text{катта парал}} = 20 \cdot 13 \cdot 4 = 1040$ м^3,



4.41-расм

$V_{\text{кич. парал}} = 12 \cdot 4 \cdot (13 - 4 - 4) = 240$ м^3,

Ярим цилиндрнинг радиуси

$$R = \frac{13-4-4}{2} = \frac{5}{2} \text{ м.}$$

$$V_{\text{ярим цикл}} = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 4 = \frac{25\pi}{2} \text{ м}^3,$$

$$V_{\text{арка}} = 1040 - 240 - \frac{25\pi}{2} \approx 761 \text{ м}^3.$$ ■

1. Призмага ички чизилган шарнинг қандай хоссаларини биласиз? Мисол келтиринг.
2. Шар билан цилиндрнинг комбинациялари ҳақида нима биласиз?
3. Шар билан конус комбинациялари ҳақида нима биласиз? Мисол келтиринг.
4. Пирамида билан шар комбинациясининг хоссаларини айтинг.

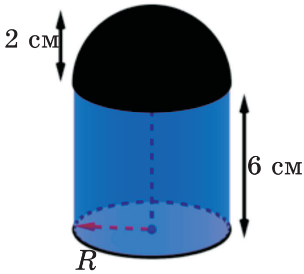
МАСАЛАЛАР

А

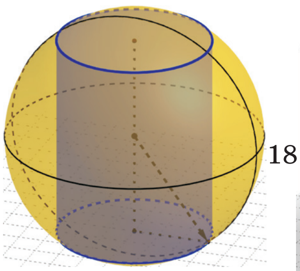
4.100. Цилиндрга барча учлари унинг асосларидаги айлана бўйлаб жойлашадиган, ҳажми 343 см^3 бўлган куб ички чизилган. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

4.101. Жисм цилиндр билан ярим шар комбинацияси дан ташкил топган (4.42-расм). Цилиндрнинг баландлиги 6 см, ярим шар радиуси 2 см га тенг. Жисмнинг ҳажмини топинг.

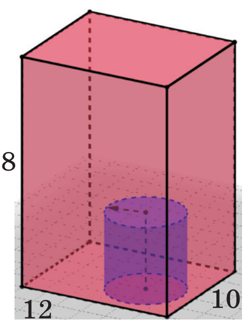
4.102. Ҳажми 216 м^3 бўлган кубга ички чизилган 1) цилиндрнинг; 2) учи юқори асосининг марказида жойлашган конуснинг ҳажмини топинг.



4.42-расм



4.43-расм



4.44-расм

4.103. Радиуси 5 см шарга баландлиги 6 смли цилиндр ички чизилган. Цилиндрнинг ҳажмини топинг (4.43-расм).

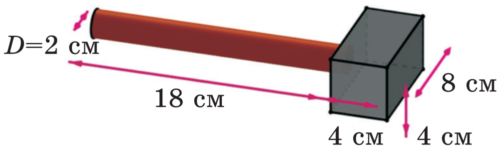
4.104. Асосининг томонлари 2 м ва 6 м, баландлиги 5 м бўлган мунтазам тўртбурчакли кесик пирамидага 1) ички; 2) ташқи чизилган кесик конуснинг ҳажмини топинг.

4.105. Баландлиги 6, радиуси 3 цилиндрнинг ўлчовлари 10, 12 ва 18 бўлган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ичига жойлашган. Тўғри параллелепипеднинг ичидан тасодифий олинган нуқтанинг цилиндрнинг ичида ётиш эҳтимоллигини ҳисобланг (4.44-расм).

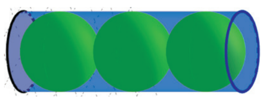
4.106. 4.104-масалани мунтазам тўрт бурчакли кесик пирамиданинг ўрнига мунтазам учбурчакли кесик пирамида берилган деб ҳисобланг.

4.107. Радиуси 12 см шарга 1) ички; 2) ташқи чизилган кубнинг ва мунтазам тетраэдрнинг ҳажмларини топинг.

4.108. Болғани цилиндр билан параллелепипеддан ташкил топган деб олсак бўлади. Расмда кўрсатилган ўлчовлари бўйича унинг ҳажмини ҳисобланг (4.45-расм).



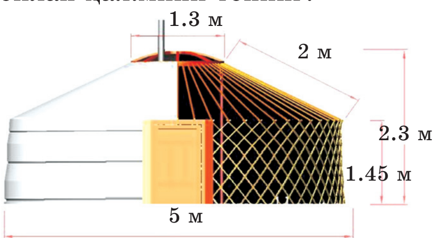
4.45-расм



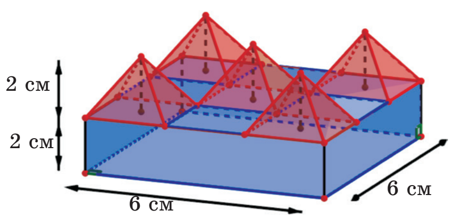
4.46-расм

4.109. Диаметри 6 см бўлган учта теннис шари худди шундай диаметрли цилиндрга солинди (4.46-расм). Цилиндрнинг баландлиги учта шар билан чекланса, унинг шарлардан бошқа қисмининг ҳажмини топинг.

4.110. Кигиз уйнинг (ўтов) геометрик шакли цилиндр билан кесик конуснинг комбинацияси бўлади (4.47-расм). Расмда кўрсатилган ўлчовлари бўйича кигиз уйнинг ён сиртининг юзаси билан ҳажмини топинг.



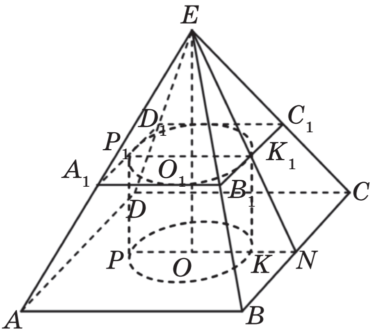
4.47-расм



4.48-расм

4.111. Бешта пирамида ва битта тўғри бурчакли параллелепипеднинг комбинациясидан ташкил топган жисм 4.48-расмда тасвирланган. Параллелепипеднинг асоси – қирраси 6 см бўлган квадрат. Параллелепипеднинг ва пирамиданинг баландликлари 2 см бўлса, ана шу жисмнинг ҳажмини топинг.

B



4.49-расм

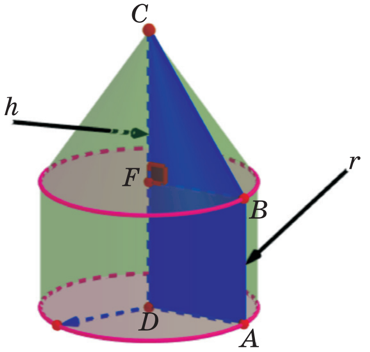
4.112. Мунтазам тўрт бурчакли пирамидага, ўқ кесими квадрат бўлган, юқори асосидаги айлана пирамида ёқларига уринувчи, пастки асоси пирамиданинг асосида жойлашган цилиндр ички чизилган (4.49-расм). Пирамида асосининг томони 10 см, ён ёқлари асоси билан 60° ли бурчак ясайди. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

4.113. Олдинги масаладаги пирамидага ички чизилган 1) конуснинг; 2) шарнинг ҳажмини топинг.

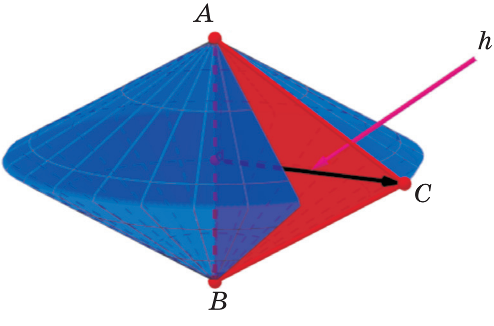
4.114. Конус асосига томони a га тенг квадрат ички чизилган. Квадратнинг бир томони билан конуснинг учи орқали ўтувчи учбурчакли кесимнинг учидаги бурчаги φ га тенг бўлса, конуснинг ҳажмини топинг.

4.115. $ABCD$ тўғри бурчакли трапецияни CD асоси атрофида айлантирганда 4.50-расмда тасвирланган жисм ҳосил бўлган. $ABFD$ – қирраси r га тенг квадрат, $CF=h$ га тенг. Жисмнинг ҳажмини топинг.

4.116. Тенг томонли ABC учбурчагининг баландлиги h га тенг. AB қирраси атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг (4.51-расм).



4.50-расм



4.51-расм

4.117. Конуснинг учи ярим шар асосидаги катта айлананинг маркази билан устма-уст тушади. Асоси ярим шарнинг сирти билан уринади ва ярим шарнинг асосига параллел. Конуснинг ясовчиси билан унинг ўқи орасидаги бурчаги φ га тенг бўлса, ярим шар билан конуснинг ҳажмларининг нисбатини топинг (4.52-расм).

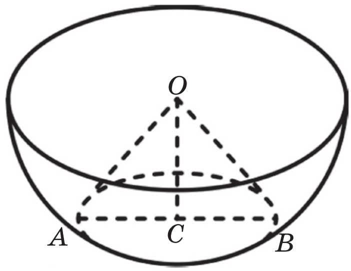
Берилган: ярим шарга ўқ кесими ΔOAB бўлган конус ички чизилган. $\angle AOC = \varphi$.

Топиш керак: $V_{\text{яр.ш}} : V_{\text{конус}}$ – ?

▲ Айтайлик, $AO = R$ бўлсин. У ҳолда

ΔAOC : $OC = AO \cdot \cos\varphi = R \cdot \cos\varphi$,

$AC = AO \cdot \sin\varphi = R \cdot \sin\varphi$,

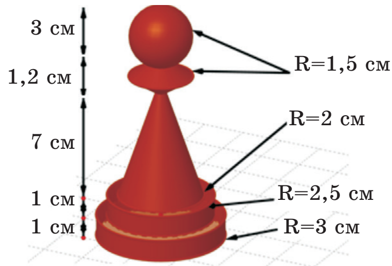


4.52-расм

$$V_{\text{конус}} = \frac{1}{3}\pi \cdot OC \cdot AC^2 = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi,$$

$$V_{\text{яр.ш}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_{\text{яр.ш}} : V_{\text{конус}} = \frac{2}{3}\pi R^3 : \left(\frac{\pi R^3}{3} \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi\right) = \frac{2}{\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi}. \blacksquare$$

4.118. Шахмат ўйинининг «пешка» фигурасининг шакли билан ўлчовлари 4.53-расмда тасвирланган. Ҳажмини ҳисобланг.



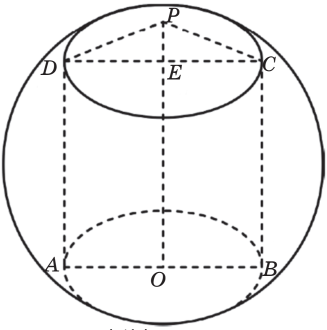
4.53-расм

4.119. Радиуси R га тенг конус ясовчиси асосига φ бурчак остида оғма ҳосил қилган. Ана шу конусга асоси ўткир бурчаги γ га тенг га тенг тўғри бурчакли учбурчак бўлган учбурчакли пирамида ташқи чизилган. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

4.120. Конус баландлигининг унга ташқи чизилган шарнинг радиусига нисбати k га тенг. Ана шу жисмлар ҳажмларининг нисбатини топинг.

C

4.121. Шарга умумий асосларининг икки ёқ қисмида жойлашган цилиндр билан конус ички чизилган. Цилиндрнинг ўқ кесимининг юзаси 75 м², цилиндр ҳажмининг конус ҳажмига нисбати 9:1 каби нисбатга тенг. Шарнинг радиусини топинг (4.54-расм).



4.54-расм

4.122. Конусга ички чизилган цилиндрнинг радиуси конус радиусидан 2 марта кичик. Конуснинг ҳажмининг цилиндрнинг ҳажмига нисбатини топинг.

4.123. Радиуси R га тенг шарга конус ички чизилган. Шар марказидан конуснинг ясовчиси φ бурчаги билан кўринади. Конуснинг ҳажмини топинг.

4.124. Баландлиги 5 га тенг учбурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 7-га, 8-га ва 9-га тенг. Қандайдир бир шар пирамиданинг ён ёқларини унинг асосининг томонларида ётган нуқталарда уринади. Шарнинг ҳажмини топинг.

4.125. Радиуси R ва баландлиги h га тенг цилиндрга ички чизилган учбурчакли пирамида ҳажмининг энг катта қийматини топинг. Бу ерда пирамиданинг қарама-қарши жойлашган икки қирраси цилиндрнинг асосларида жойлашган.

4.126. Радиуси R га тенг шар мунтазам тетраэдрнинг барча қирраларига уринади. Шар билан мунтазам тетраэдрдан ташкил топган жисм сиртининг юзасини топинг.

Такрорлашга доир топшириқлар

4.127. 1) ABC учбурчагининг AC томонидан $AN = \frac{2}{5}AC$ тенглиги бажариладиган қилиб N нуқтаси олинган. AE медианаси билан BN ўзаро перпендикуляр ва $AE = m$, $BN = n$. ABC учбурчагининг юзасини топинг.

2) ABC учбурчагининг AC томонидан $AK = \frac{3}{5}AC$ тенглиги бажариладиган қилиб K нуқтаси олинган. AP медианаси билан BK ўзаро перпендикуляр ва $AP = a$, $BK = b$. ABC учбурчагининг юзасини топинг.

Терминларнинг аталиш луғати

Ўзбек тилида	**Қозоқ тилида**	**Рус тилида**	**Инглиз тилида**
Ҳажм	Көлем	Объём	Volume
Шар сегменти	Шар сегменті	Сегмент шара	segment
Шар сектори	Шар секторы	Сектор шара	sector
Ички чизилган	Іштей сызылған	Вписанный	inscribed
Ташқи чизилган	Сырттай сызылған	Описанный	outscribed
Сиртининг юзаси	Бетінің ауданы	Площадь поверхности	Surface area

«ЖИСМЛАРНИНГ ҲАЖМЛАРИ» бўлимининг хулосаси

1) Параллелепипеднинг ҳажми асосининг юзаси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:

$$V = S_{\text{асос}} \cdot h.$$

2) Пирамиданинг ҳажми асосининг юзаси билан баландлигининг кўпайтмасининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{асос}} \cdot h.$$

3) Асосининг юзалари S_1 ва S_2, баландлиги h га тенг кесик пирамиданинг ҳажми қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right).$$

4) **Ўхшаш жисмларнинг ҳажмлари уларнинг мос чизиқли ўлчовларининг кубларига пропорционал.**

5) Цилиндрнинг ҳажми асосининг юзаси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:

$$V = \pi R^2 h.$$

6) Конуснинг ҳажми асосининг юзаси билан баландлиги кўпайтмасининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3} S_{\text{асос}} \cdot h.$$

7) Асосининг радиуслари R ва r, баландлиги h га тенг кесик конуснинг ҳажми қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right).$$

8) Шарнинг ҳажми қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

9) Шар сегментининг ҳажми қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$V_{\text{сег}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right).$$

10) Шар секторининг ҳажми шар сегменти билан конус ҳажмларининг йиғиндисига тенг:

$$V_{\text{сек}} = V_{\text{сег}} + V_{\text{к}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\left(2Rh - h^2\right) \cdot \left(R - h\right) = \frac{2\pi}{3} R^2 h.$$

V бўлим. МАКТАБ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИ

7-синф

1. Геометрия деганда нимани тушунасиз? Планиметрия деганда нимани тушунасиз?

2. «*B* нуқтаси *A* ва *C* нуқталарининг орасида ётади “ деганда нимани тушунасиз?

3. Нур, тўлдирувчи нур деб нимага айтилади?

4. Кесма, кесманинг учлари, кесманинг ички нуқталари деб нимага айтилади?

5. Кесманинг узунлигини нимада ўлчайди? Қандай ўлчов бирликларини биласиз?

6. Қандай фигурага бурчак деб аталади? Бурчакнинг қандай элементлари мавжуд ва уни қандай белгилайди?

7. Ёйиқ, тўғри, ўткир ва ўтмас бурчак деб нимага айтилади?

8. Бурчак ўлчовини нима орқали ва қандай бирликлар билан ўлчайди?

9. Қўшни бурчаклар деб нимага айтилади ва қўшни бурчакларнинг йиғиндиси нимага тенг?

10. Вертикал бурчак деб нимага айтилади ва уларнинг қандай хоссаларини биласиз?

11. Қандай тўғри чизиқларга ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар деб аталади?

12. Айқаш, мос ва ички алмашинувчи бурчак деб нимага айтилади?

13. Қандай тўғри чизиқларга параллел тўғри чизиқлар деб аталади?

14. Тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатларини айтинг ва исботланг.

15. Параллел тўғри чизиқларнинг қандай хоссасини (учунчи тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ ҳақидаги) биласиз?

16. Учбурчак деб нимага айтилади? Учбурчакнинг қандай турларини биласиз? Уларнинг қандай элементлари мавжуд?

17. Учбурчакнинг медианаси, биссектрисаси, баландлиги деб нимага айтилади?

18. Учбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси ҳақидаги теоремани исботланг.

19. Учбурчаклар тенглигининг аломатларини айтинг ва исботланг.

20. Тўғри бурчакли учбурчак деб нимага айтилади? Унинг қандай хоссаларини биласиз?

21. Тўғри бурчакли учбурчаклар тенглигининг аломатини исботланг.

22. Перпендикуляр, оғма, проекция деб нимага айтилади ва уларнинг қандай хоссаларини биласиз?

23. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа ўрнида қандай кесманинг узунлиги олинади?

24. Учбурчакнинг учта томони, иккита томони орқали ва уларнинг орасидаги бурчак, бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги орқали қандай ясалади?

25. Берилган бурчакка тенг бурчакни қандай ясайди?

26. Бурчакнинг биссектрисаси қандай ясалади?

27. Кесма ўртаси қандай топилади?

28. Берилган нуқтадан тўғри чизиққа тушурилган перпендикуляри қандай ясалади?

29. Кесманинг ўрта перпендикуляри деб нимага айтилади? У қандай ясалади?

30. Айлана деб нимага айтилади? Унинг қандай элементларини биласиз?

8-синф

1. Қандай фигурага кўпбурчак дейилади? Қаварик кўпбурчак деб нимага айтилади?

2. Қаварик кўпбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг? Ташқи бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?

3. Қандай фигурага тўртбурчак дейилади? Ички бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?

4. Параллелограмм деб нимага айтилади?

5. Параллелограммнинг хоссаларини исботланг.

6. Параллелограммнинг аломатларини исботланг.

7. Тўғри тўртбурчак деб нимага айтилади? Унинг хоссаларини айтинг.

8. Ромб, квадрат деб нимага айтилади? Уларнинг қандай хоссалари мавжуд?

9. Фалес теоремасини исботланг.

10. Учбурчакнинг ўрта чизиғи деб нимага айтилади? Унинг хоссаларини исботланг.

11. Трапеция, тенг ёнли трапеция, тўғри бурчакли трапеция деб нимага айтилади?

12. Трапециянинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремани исботланг.

13. Учбурчакнинг ажойиб нуқталари деб нимага айтилади?

14. Учбурчакка ички ва ташқи айланалар чизиш мумкинлигини исботланг.

15. Ички ва ташқи чизилган тўрт бурчакларнинг қандай хоссаларини биласиз?

16. Ўткир бурчакнинг косинуси қандай ифодаланади?

17. Пифагор теоремасини исботланг.

18. Ўткир бурчакнинг косинуси, синуси ва тангенси деб нимага айтилади?

19. Тўғри бурчакли учбурчаклардаги тригонометрик фунциялар орасидаги боғлиқликни топинг.

20. Баъзи бир бурчаклар учун (30°; 45°; 60°) синус, косинус ва тангенсининг қийматларини жадвал бўйича қандай топади?

21. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза билан ана шу катетнинг гипотенузадаги проекциясининг геометрик ўртаси бўлишини исботланг.

22. Тўғри бурчак учидан гипотенузага тушурилган баландликнинг қандай хоссаларини биласиз? Уни исботланг.

23. Қандай фигураларга тенг ўлчовли фигуралар дейилади?

24. Тўғри тўртбурчакнинг юзаси қандай топилади?

25. Параллелограмм, учбурчак ва трапеция юзалари қандай формулалар орқали ифодаланади? Уларни келтириб чиқаринг.

26. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси деб нимага айтилади? Нуқтанинг координатаси деб нимага айтилади?

27. Икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?

28. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласини келтириб чиқаринг. Кесманинг ўртаси қандай топилади?

29. Тўғри чизиқ билан айлананинг тенгламаларини ёзинг.

30. Тўғри чизиқнинг, айлананинг координаталар ўқларига нисбатан жойлашиш фарқлари қандай?

31. 0° дан 180° гача бўлган бурчакларнинг синуси, косинуси ва тангенси қандай ифодаланади?

32. Келтириш формулаларини ёзинг.

9-синф

1. Скаляр ва вектор ўлчов деб нимага айтилади? Коллинеар векторлар деб нимага айтилади? Вектор билан параллел кўчириш орасида қандай боғланиш мавжуд?

2. Векторнинг модули деб нимага айтилади? Қандай векторларга тенг векторлар дейилади?

3. Векторларнинг йиғиндиси деб нимага айтилади? Векторларни қўшишнинг учбурчак ва параллелограмм қоидаларини айтинг.

4. Векторларнинг айирмаси деб нимага айтилади? Векторларни сонга кўпайтириш амалини ифодаланг. Бу амалларнинг қандай хоссалари мавжуд?

5. Векторларнинг орасидаги бурчак, векторнинг ўқдаги проекцияси деб нимага айтилади?

6. Векторнинг базис бўйича ёйилишининг ягона бўлишини исботланг.

7. Векторнинг координаталари деб нимага айтилади? Координаталари билан берилган векторларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари қандай бажарилади? Унинг модули қандай топилади?

8. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб нимага айтилади? $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$ формуласини исботланг. Скаляр кўпайтмасини координаталари бўйича топинг.

9. Учбурчакнинг оғирлик марказининг координаталарини топинг.

10. Учбурчакларни ечиш деганда нимани тушунасиз?

11. Косинуслар теоремасини исботланг.

12. Синуслар теоремасини исботланг.

13. Учбурчакни икки томони билан уларнинг орасидаги бурчаги бўйича, бир томони билан икки бурчаги бўйича қандай ечишга бўлади?

14. Синиқ чизиқлар деб нимага айтилади? Қандай хоссалари мавжуд?

15. Қавариқ кўпбурчаклар деб нимага айтилади? Мунтазам кўпбурчаклар деб нимага айтилади?

16. Тўғри чизиқнинг нормал вектори деб нимага айтилади? Тўғри чизиқнинг мос тенгламаларини ёзинг.

17. Текисликни шакллантириш деганда нимани тушунасиз?

18. Ўқ ва марказий симметрия деб нимага айтилади?

19. Буриш ва параллел кўчириш деб нимага айтилади?

20. Силжиш (қўзғалиш) деб нимага айтилади? Унинг устма-уст тушуришлар билан қандай боғлиқлиги мавжуд?

21. Ўхшашлик алмаштириш деб нимага айтилади? Ўхшашлик коэффиценти деб нимага айтилади?

22. Гомотетия деб нимага айтилади? Унинг қандай хоссалари мавжуд? Гомотетия маркази, ўхшашлик коэффиценти деб нимага айтилади?

23. Учбурчакларнинг ўхшашлик аломатларини исботланг.

24. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўхшашлик аломатларини айтинг.

25. Учбурчак биссектрисасининг қандай хоссалари мавжуд?

26. Айланадаги пропорционал кесмалар деб нимага айтилади? Уларнинг қандай хоссалари мавжуд?

27. Айлана деб нимага айтилади? Айлананинг асосий элементларини айтинг.

28. Уринманинг қандай хоссаларини биласиз?

29. Айлана билан тўғри чизиқнинг жойлашишининг неча хил ҳолатлари мавжуд?

30. Айлананинг ватарлари ва уларга тиралган ёйларнинг қандай хоссаларини биласиз?

31. Айлананинг нечта симметрия ўқи, симметрия маркази мавжуд?

32. Айланага ички чизилган бурчак, марказий бурчак деб нимага айтилади? Қандай хоссаларини биласиз?

33. Икки айлана ўзаро қандай жойлашади? Айланаларнинг марказлари орасидаги масофа қандай топилади?

34. Уринма билан ватарнинг орасидаги бурчак нимага тенг?

35. Айлананинг икки кесувчисининг орасидаги бурчак қандай топилади?

36. Қавариқ кўпбурчакларнинг ички бурчакларининг йиғиндиси, ташқи бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?

37. Мунтазам кўпбурчакнинг маркази, апофемаси деб нимага айтилади? Мунтазам кўпбурчакнинг нечта симметрия ўқи мавжуд?

38. Айлана узунлигининг диаметрига нисбати ҳақидаги теоремани исботланг. Айлана узунлиги қандай формула орқали ҳисобланади?

39. Ўхшаш учбурчакларнинг юзаларининг нисбати нимага тенг? Ўхшаш кўпбурчакларники-чи?

40. Доира деб нимага айтилади? Унинг қандай элементларини биласиз?

41. Доиранинг юзаси қандай топилади? Унинг формуласини ёзинг.

42. Сектор, сегмент юзалари қандай топилади?

43. Мунтазам кўпбурчакнинг юзаси қандай топилади?

44. Доирадаги пропорционал кесмалар деб нимага айтилади? Уларнинг қандай хоссаларини биласиз?

45. Тўғри бурчакли учбурчакдаги қандай метрик нисбатларни биласиз?

46. Учбурчакнинг ўткир, ўтмас, тўғри бурчакли бўлишини қандай аниқлашга бўлади?

47. Учбурчак биссектрисаларининг қандай хоссаларини биласиз?

48. Чева ва Менелай теоремаларини исботланг.

49. Ички чизилган тўрт бурчакларнинг томонлари билан диагоналларининг орасида қандай боғлиқлик мавжуд?

50. Геометриянинг асосий тараққий этган даврларини айтинг.

МАСАЛАЛАР

5.1. Умумий томонлари мавжуд бўлган $\angle AOB=\alpha$ ва $\angle BOC=\beta$ бурчаклари берилган. Ана шу бурчакларнинг биссектрисалари орасидаги бурчакни топинг. Бу бурчаклар қўшни бўлган ҳолатда-да қаранг.

5.2. $\angle AOB = \alpha$ ва $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$ бурчаклари кетма-кет жойлашган. AOB ва COD бурчаклари биссектрисаларининг орасидаги бурчакни топинг.

5.3. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 18,3 м, ён томони асосидан 3 м кичик. Учбурчакнинг томонларини топинг.

5.4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ўтказилган медианаси m ва у тўғри бурчакни 1:2 каби нисбатда бўлади. Учбурчакнинг катетларини топинг.

5.5. Асосларининг узунлиги a ва b бўйича трапеция диагоналлари ўрталарининг орасидаги масофани топинг.

5.6. Айланага ички чизилган учбурчакнинг бурчаклари бўйича ана шу учбурчакнинг учларидан айланага ўтказилган уринмаларнинг орасидаги бурчакларни топинг.

5.7. Қандай шартлар бажарилганда учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчакнинг ичида, томонида, ташқарисида ётади?

5.8. Тенг ёнли ABC учбурчагининг BC асоси a га тенг. D, E нуқталари мос равишда AB ва AC томонларини $m{:}n$ каби нисбатда бўлади. DE нинг узунлигини топинг.

5.9. Тўғри бурчакли трапециянинг бир диагонали унинг ён томонига тенг ва уларнинг узунлиги 4 см. Трапециянинг баландлиги 2 см бўлса, унинг ўрта чизиғини топинг.

5.10. Трапециянинг катта асоси 24 см, унинг диагоналлари ўрталарининг масофаси 4 см. Унинг кичик асосини топинг.

5.11. Ромбнинг баландлиги унинг томонини узунликлари a га ва b га тенг кесмаларга бўлади. Ромбнинг диагоналларини топинг.

5.12. Параллелограммни тўғри тўртбурчак ҳосил қилиш мумкин бўлгандай икки қисмга бўлинг.

5.13. Учбурчакни тўғри тўртбурчак ҳосил қилиш мумкин бўлгандай учта қисмга бўлинг.

5.14. Трапеция ўзининг диагоналлари билан тўртта учбурчакка бўлинади. Унинг ён томонлари асослари бўладиган учбурчаклар тенг ўлчовли бўлишини исботланг.

5.15. Радиуслари R ва r бўлган ва ўзаро ташқи уринувчи айланаларнинг умумий уринмасини топинг.

5.16. Юзаси берилган учбурчак билан бирдай бўлган квадрат ясанг.

5.17. Томони $10\sqrt{3}$ см бўлган мунтазам олтибурчак айланага ташқи чизилган. Ана шу айланага ички чизилган квадратнинг томонини топинг.

5.19. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси $4\sqrt{2}$ м, ён томонига ўтказилган медиана 5 см. Учбурчакнинг ён томонини топинг.

5.20. a, b, c учбурчакнинг томонлари, R унга ташқи чизилган айлананинг радиуси бўлса, $S = \frac{abc}{4R}$ бўлишини исботланг.

5.21. h_1, h_2, h_3 – учбурчак баландликлари, r – унга ички чизилган айлананинг радиуси бўлса, $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$ бўлишини исботланг.

5.22. Учбурчакнинг a, b, c томонлари бўйича h_a баландлиги билан учбурчакнинг юзасини топинг.

5.23. Тўрт бурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиши учун унинг қарама-қарши томонлари квадратларининг йиғиндисининг тенг бўлиши шарт ва етарли эканлигини исботланг.

5.24. Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари диаметрлари бўлган учбурчакка ташқи ярим доиралар ясанг. Ана шу ярим доираларнинг каттасининг юзаси қолган икки ярим доиранинг юзаларининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

5.25. Периметри $2p$, диагоналларининг йиғиндиси m га тенг ромбнинг юзасини топинг.

5.26. Агар учбурчакнинг икки томони a ва b, юзаси $S = \frac{3}{10}ab$ бўлса, унинг учунчи томонини топинг.

5.27. Учбурчакнинг 4 см га тенг баландлиги унинг асосини 1:8 каби нисбатда бўлади. Учбурчакнинг икки тенг ўлчовли қисмларга бўлувчи ва берилган баландлигига параллел кесманинг узунлигини топинг.

5.28. Радиуси R га тенг айланага кичик томони $1{,}5R$ га тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Ана шу трапециянинг юзасини топинг.

5.29. Периметри $2p$, баландлиги h_1 га ва h_2 га тенг параллелограммнинг бурчакларини топинг.

5.30. Тўғри бурчакли трапециянинг асослари билан кичик ён томони мос равишда a, b ва c га тенг. Диагоналларининг кесишиш нуқтасидан асосларигача ва кичик ён томонигача бўлган масофани топинг.

5.31. Учбурчакнинг асоси билан унга тушурилган баландлиги, мос равишда a ва h га тенг. Ён томонларининг орасидаги бурчаги φ га тенг бўлса, ана шу томонларининг йиғиндисини топинг.

5.32. Тенг ёнли трапециянинг баландлиги h, диагоналлари орасидаги ўткир бурчаги 2φ га тенг. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

5.33. Катетлари a ва b га тенг тўғри бурчакли учбурчакка у билан бир тўғри бурчаги умумий бўлган квадрат ички чизилган. Квадратнинг томонини топинг.

5.34. Ўткир бурчаги φ, томонлари a ва b га тенг параллелограммнинг ўткир бурчагидан ўтказилган диагонали билан томонлари орасидаги бурчакларнинг тангенсини топинг.

5.35. Марказий бурчаги $140°$ га тенг секторнинг юзаси $31{,}5\pi$ см^2 га тенг. Унга мос доиранинг радиусини топинг.

5.36. Учлари $A(-5;\ 2;\ \sqrt{3}\ )$, $B(-4;\ 2)$, $C(-2;\ \sqrt{3}\ )$, $D(0;\ 2)$ нуқталарида жойлашган тўртбурчак диагоналлари орасидаги бурчакни топинг.

5.37. ABC учбурчагининг учлари берилган: $A(2;\ 0)$; $B(-3;\ 4)$; $C(0;\ 1)$. A бурчагининг биссектрисасига коллинеар векторни топинг.

5.38. $y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ формула орқали ифодаланишини кўрсатинг.

5.39. a ва b нинг қандай қийматларида $ax+8y+b=0$ ва $2x+ay-1=0$ тўғри чизиқлари: 1) устма-уст тушади; 2) параллел; 3) перпендикуляр бўлади?

5.40. Учбурчакнинг икки томонининг узунликлари a ва b га тенг, шу томонлар орасидаги бурчак биссектрисаси эса l га тенг. Учбурчакнинг шу бурчагини топинг.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

10-синф

1. Стереометрия деганда нимани тушунасиз? Унинг асосий учта аксиомасини мулоҳазаланг.

2. III аксиома бўйича кесишувчи икки тўғри чизиқ текисликни ифодалайди, яъни бу икки тўғри чизиқ орқали ягона текислик ўтади. Яна қандай ҳолатларда текислик бирқийматда ифодаланади?

3. Агар тўғри чизиқ билан текисликнинг: 1) Биттагина умумий нуқтаси мавжуд; 2) иккита умумий нуқтаси мавжуд; 3) умумий нуқталари йўқ бўлса, бу тўғри чизиқ билан текислик ўзаро қандай жойлашади?

4. Фазода кесишмайдиган икки тўғри чизиқнинг параллел бўлиши шартми? Улар параллел бўлиши учун қўшимча қандай шарт бажарилиши зарур?

5. Айқаш тўғри чизиқлар деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.

6. Агар икки текисликнинг умумий нуқталари 1) мавжуд; 2) йўқ бўлса, бу текисликлар ўзаро қандай жойлашади?

7. 1) тўғри чизиқ билан текисликнинг; 2) икки текисликнинг параллеллигининг аломатини исботланг.

8. Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деганда нимани тушунасиз? Қандай тўғри чизиқларга ўзаро перпендикуляр дейилади?

9. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади? Қандай тўғри чизиққа текисликка перпендикуляр дейилади?

10. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик аломатини исботланг.

11. Бир текисликка перпендикуляр икки тўғри чизиқнинг параллел бўлишини исботланг.

12. Нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр деб нимага айтилади? Нуқтадан текисликкача бўлган масофа қандай топилади?

13. Нуқтадан текисликка туширилган оғма, унинг проекцияси, асоси деб нимага айтилади?

14. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремани исботланг.

15. Қандай текисликлар ўзаро перпендикуляр деб аталади?

16. Икки текисликнинг перпендикулярлик аломатини исботланг.

17. Айқаш тўғри чизиқларнинг орасидаги масофа қандай топилади?

18. Параллел проекциялашнинг қандай хоссаларини биласиз?

19. Фазовий фигураларини текисликда тасвирлаш усулларини айтинг. Мисол келтиринг.

20. Ортогонал проекциялаш деб нимага айтилади? Кўпбурчакнинг ортогонал проекциясининг юзаси қандай топилади?

21. Фазодаги вектор деб нимага айтилади? Улар устида қандай амаллар бажарилади? Уч векторни қўшишнинг параллелепипед қоидасини айтинг.

22. Фазода нуқта билан вектор координаталари қандай ифодаланади? Учларининг координаталари бўйича вектор координаталарини топинг.

23. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси деб нимага айтилади? Векторларнинг орасидаги бурчак қандай ифодаланади?

24. Кесмани берилган нисбатда бўлиш формуласини ёзиб, унинг маъносини тушунтиринг.

11-синф

1. Икки ёқли, уч ёқли (кўп ёқли) бурчаклар деб нимага айтилади?

2. Икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги деб нимага айтилади?

3. Кўп ёқли бурчакларнинг қандай элементлари мавжуд? Унинг ёйиқ бурчакларининг йиғиндиси қандай бўлиши шарт?

4. Геометрик жисм деганда нимани тушунасиз? Қавариқ жисм деб нимага айтилади?

5. Қандай жисмларга кўпёқлар дейилади? Кўпёқнинг сирти деб нимага айтилади? Унинг қандай элементлари мавжуд?

6. Кўпёқнинг ёйилмаси деб нимага айтилади? Кўпёқнинг тўла сирти қандай топилади?

7. Қандай кўпёққа призма дейилади? Унинг қандай элементлари мавжуд? Призманинг қандай турлари мавжуд?

8. Қандай призмага параллелепипед деб аталади? Унинг қандай турлари мавжуд?

9. Параллелепипед диагоналларининг қандай хоссалари мавжуд? Пифагор теоремасининг умумий кўриниши қандай параллелепипед учун бажарилади?

10. Қандай кўпёққа пирамида дейилади? Унинг қандай элементлари ва турлари мавжуд?

11. Кесик пирамида деб нимага айтилади? Унинг элементларини айтинг.

12. Призманинг (пирамиданинг) ён сиртининг, тўла сиртининг юзаси қандай топилади?

13. Кўпёқнинг кесими деб, кесувчи текислик деб нимага айтилади? Кесувчи текисликнинг изи деб нимага айтилади?

14. Қандай кўпёқларга мунтазам кўпёқлар дейилади? Уларнинг турларини айтинг.

15. Фазодаги силжиш, шакл алмаштириш деб нимага айтилади? Параллел кўчириш, текисликка нисбатан симметрия деб нимага айтилади?

16. Фазода қандай фигураларга ўхшаш фигуралар дейилади? Ўхшашлик алмаштириш деб нимага айтилади?

17. Фазода тўғри чизиқ билан текислик тенгламалари қандай ёзилади?

18. Икки тўғри чизиқнинг (тўғри чизиқ билан текисликнинг, икки текисликнинг) параллеллик шартини ёзинг.

19. Икки тўғри чизиқнинг (тўғри чизиқ билан текисликнинг, икки текисликнинг) перпендикулярлик шартини ёзинг.

20. Фазодаги бурчаклар қандай ифодаланади? Уларнинг фарқи қандай?

21. Қандай жисмларга (сиртларга) айланма жисмлар (сиртлар) дейилади? Айланма жисмнинг ўқи, ўқ кесими деб нимага айтилади? Ясовчиси деб нимага айтилади?

22. Цилиндр деб, конус деб қандай жисмларга айтилади? Уларнинг қандай элементларини биласиз?

23. Цилиндр билан конуснинг ён сиртининг ва тўла сиртининг юзалари қандай топилади?

24. Кесик конус деб нимага айтилади? Унинг қандай элементларини биласиз? Кесик конуснинг ён ва тўла сиртининг юзаси қандай топилади?

25. Қандай сиртга (жисмга) сфера (шар) дейилади? Сферанинг юзаси қандай ифодаланади?

26. Сферанинг тенгламаси билан унинг уринма текислигининг тенгламасини ёзинг.

27. Айланма жисмларига ички ва ташқи чизилган кўпёқ деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.

28. Геометрик жисмнинг ҳажми деб нимага айтилади? Ҳажм тушунчасининг қандай хоссаларини биласиз?

29. Призманинг ҳажми қандай ифодаланади? Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми қандай формула орқали ифодаланади?

30. Пирамида билан кесик пирамиданинг ҳажмлари қандай формула орқали ифодаланади?

31. Цилиндрнинг, конуснинг ва кесик конуснинг ҳажмлари қандай формула орқали ифодаланади?

32. Шарнинг ҳажми қандай топилади?

33. Шар сегментининг (секторининг) ҳажми қандай формула орқали ифодаланади?

МАСАЛАЛАР

5.41. α текислиги ABC учбурчагининг AB томонига параллел ва унинг бошқа томонларини A_1, B_1 нуқталарида кесиб ўтади. AC=15 см, A_1B_1=4 см, AB=20 см бўлса, A_1C ни топинг.

5.42. Нуқта томони 4 см бўлган квадрат текислигидан 3 см узоқликда жойлашган ва бу нуқтадан квадратнинг томонларигача бўлган масофа бир хил. Ана шу нуқтадан квадратнинг учларигача бўлган масофаларнинг йиғиндисини топинг.

5.43. α текислигини кесиб ўтувчи AB кесмасининг ўртасидан α текислигигача масофа 6 см, B нуқтасидан α текислигигача масофа 24 см. A нуқтасидан α текислигигача масофани топинг. Бу ерда кесманинг ўртаси билан A нуқтаси α текислигининг икки қисмида жойлашган.

5.44. m-нинг қандай қийматида $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4\sqrt{3}$ тенглиги бажарилади? Бу ерда $A(4;\ m;\ 1)$, $B(8;\ 5;\ 5)$.

5.45. ABC ва ABD тенг ёнли учбурчакларининг асослари умумий ва улар турли текисликларда жойлашган. $AB = 2$ м, $AC = 2$ м, $AD = 4$ м, $CD = 3$ м бўлса, ABC ва ABD текисликларининг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

5.46. R нуқтаси PQ кесмасини 3:2 каби нисбатда бўлади. $P(4;-4;1)$, $Q(8;-2;7)$ бўлса, R нуқтасининг координаталарини топинг.

5.47. Учёқли бурчакнинг икки ёйиқ бурчаги 45° га тенг. Ана шу ёқларининг орасидаги икки ёқли бурчак – тўғри. Учинчи ёйиқ бурчакнинг ўлчовини топинг.

5.48. Нуқтадан текисликка узунликлари 10 м ва 17 м бўлган икки оғма тушурилган, проекцияларининг айирмаси 9 м га тенг. Проекцияларни топинг.

5.49. Узунлиги 10 дм кесма текисликни кесиб ўтади ва унинг учларидан текисликкача бўлган масофа 5 дм, 3 дм бўлса, кесманинг текисликдаги проекциясини топинг.

1.50. $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 60^\circ$, $\left|\vec{a}\right| = 2$ ва $\left|\vec{b}\right| = 1$ бўлса, $3\vec{a} - 2\vec{b}$ векторининг модулини топинг.

5.51. $A(-2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 3;\ 2)$, $C(1;\ 1;\ 4)$ нуқталари берилган. ABC учбурчаги медианаларининг кесишиш нуқтасини топинг.

5.52. $ABCA_1B_1C_1$ тўғри призмада $ABC = 90^\circ$, $CAB = 60^\circ$, $AB = 2$ см, $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см. 1) призманинг тўла сирт юзасини; 2) A_1BC текислиги билан ҳосил қилган кесимнинг юзасини топинг.

5.53. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 4$ ва $\left|\vec{c}\right| = 5$ шартини қаноатлантирувчи $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлари беррилган. $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ ифоданинг қийматини топинг.

5.54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедининг ўлчовлари m, $2m$ ва $3m$ га тенг. BD ва AB_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг.

5.55. Призманинг асоси – мунтазам учбурчак ва ана шу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси 6 см, призманинг ён ёқларининг ҳар бири – квадрат. Призманинг ҳажмини топинг.

5.56. Учбурчакли тўғри призманинг барча қирралари ўзаро тенг ва ён сиртининг юзаси 48 дм^2. Призманинг баландлигини топинг.

5.57. Тўғри параллелепипеднинг асоси – томонлари 6 см ва 8 см, ўткир бурчаги 30° бўлган параллелограмм. Параллелепипеднинг ён қирраси 5 см бўлса, ҳажмини топинг.

5.58. Ўлчовлари 14 см, 48 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонал кесимининг юзасини топинг.

5.59. Тўла сирт юзаси 150 м^2 бўлган кубнинг ҳажми қандай?

5.60. Ўлчовлари 15 см, 50 см, 36 см бўлган тўғри бурчакли параллелепипедга тенг ўлчовли кубнинг қиррасини топинг.

5.61. Асосининг томони a, ён қирраси b га тенг мунтазам учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.

5.62. Қирраси a га тенг кубга ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг.

5.63. Конуснинг ясовчиси билан асоси орасидаги бурчак φ га тенг. Конусга ички чизилган шар ҳажмининг конуснинг ҳажмига нисбатини топинг.

5.64. Цилиндрнинг ўқ кесими юзасининг асос юзасига нисбати $4:\pi$ каби. Ўқ кесимининг диагонали билан асоси орасидаги бурчакни топинг.

5.65. Ҳажми радиуслари 3 м, 4 м, 5 м бўлган шарлар ҳажмларининг ўрта арифметигига тенг шарнинг радиусини топинг.

5.66. Катетлари 4 см ва 3 см бўлган тўғри бурчакли учбурчакни кичик катети атрофида айлантирганда ҳосил бўладиган айланма жисмнинг ҳажмини топинг.

5.67. Кесик конус асосларининг радиуслари 3 м, 6 м, баландлиги 4 м га тенг. Ясовчисини топинг.

5.68. Конуснинг ясовчиси билан асосининг диаметри ўзаро тенг. Конуснинг ён сиртининг юзасининг унга ички чизилган мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг ён сиртининг юзасига нисбатини топинг.

5.69. Асосининг радиуслари r ва R га тенг кесик конуснинг ён сиртининг юзаси S га тенг. Тўлиқ конуснинг ён сиртининг юзасини топинг.

5.70. Кесик конус асосларининг радиуслари билан ясовчисининг нисбати 1:4:5 каби, унинг баландлиги 8 м га тенг. Кесик конуснинг ҳажмини топинг.

5.71. Кесик конус асосларининг юзаси Q_1 ва Q_2, ён сиртининг юзаси Q_3 бўлса, унинг ўқ кесимининг юзасини топинг.

5.72. Цилиндрга мунтазам учбурчакли призма ички чизилган, призмага эса цилиндр ички чизилган. Ана шу икки цилиндрнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

5.73. Қирраларининг ҳар бири a га тенг мунтазам олтибурчакли призмага ички чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.

5.74. Куб ёқларининг марказлари октаэдрнинг учлари бўлади. Куб ва октаэдр ҳажмларининг нисбатини топинг.

5.75. Пирамиданинг асоси – параллел томонлари 3 м ва 5 м, ён томони 7 м бўлган тенг ёнли трапеция. Пирамиданинг баландлиги асосидаги трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтади. Пирамиданинг катта ён қирраси 10 м бўлса, пирамиданинг ҳажмини топинг.

5.76. Конуснинг ҳажми V, унинг баландлиги тенг уч қисмга бўлиниб, бўлиниш нуқталари орқали асосига параллел текисликлар ўтказилган. Ўртадаги қисмининг ҳажмини топинг.

5.77. Шарга мунтазам учбурчакли призма ташқи чизилган ва ана шу призмага шар ташқи чизилган. Икки шарнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

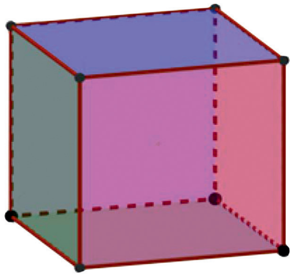
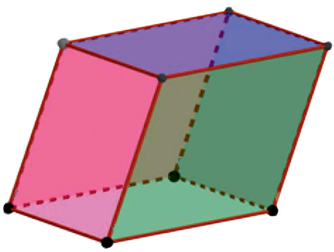
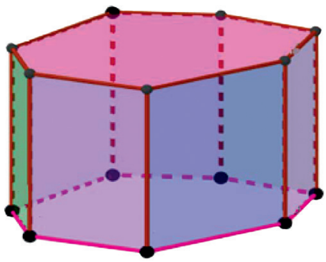
5.78. Берилган кубнинг барча ёқлари, барча қирраларига уринувчи ва барча учлари орқали ўтувчи уч шарнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

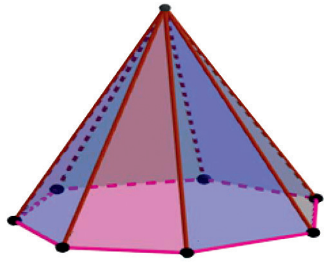
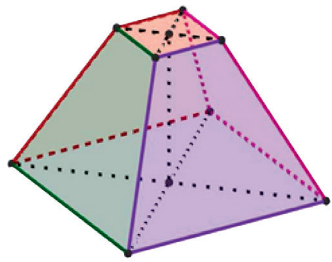
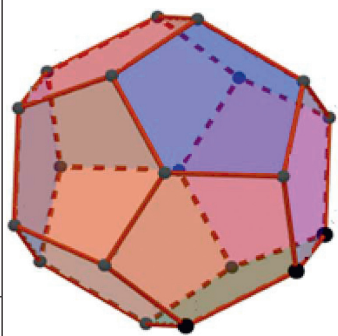
5.79. Ярим шарнинг асосига томонлари a ва b га тенг тўғри тўртбурчак ички чизилган ва тўғри тўртбурчакнинг томонлари орқали асосига перпендикуляр текисликлар ярим шардан тўртта ярим сегмент ажратиб олади. Ярим шарларнинг қолган қисмларининг ҳажмини топинг.

5.80. Баландлиги 8 см, асосининг радиуси 6 см га тенг конусга бир нечта шар ички чизилган. Биринчи шар конуснинг ён сирти билан асосига уринади, навбатдаги шарлар конуснинг ён сирти билан олдинги шарга уринади. Агар ана шу ички чизилган шарларнинг сонини чексиз орттирсак, уларнинг ҳажмларининг йиғиндиси қандай бўлади?

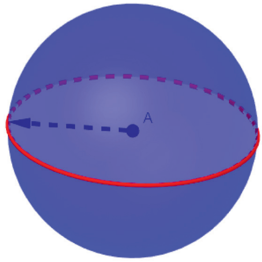
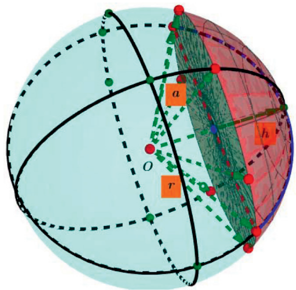
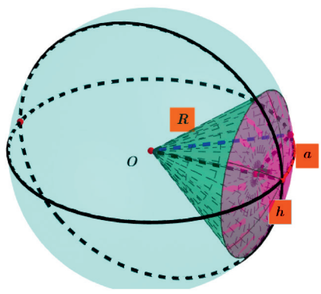
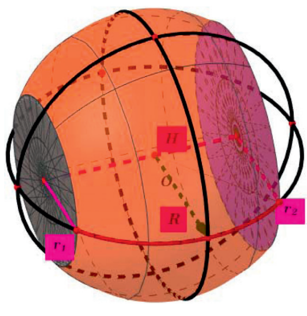
АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР ВА ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАРНИНГ ФАЗОДАГИ 3D ИЛЛЮСТРАЦИЯСИ

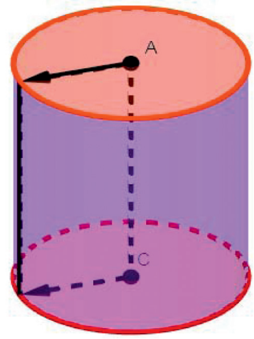
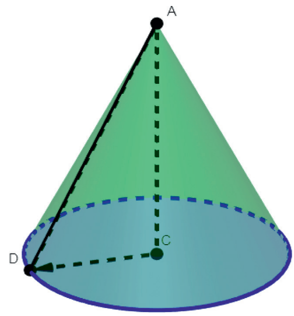
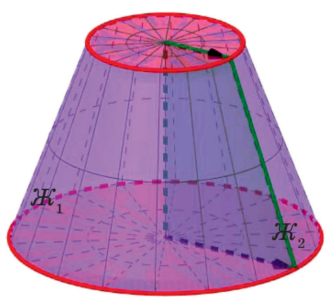
1. 1. Кўпёқлар билан уларнинг 3D иллюстрацияси

Формулалар билан иллюстрациялар		
1	**Куб** **Асосининг юзаси:** $S_{асос} = a^2$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{т.с.} = 6a^2$ **Кубнинг ҳажми:** $V_{Куб} = a^3$	
2	**Параллелепипед** **Асосининг юзаси:** $S_{асос} = ab\sin\alpha$ **Ён сирт юзаси:** $S_{ён.с.} = P_{асос}h$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{т.с.} = S_{ён.с.} + 2S_{асос}$ **Тўғри параллелепипеднинг ҳажми:** $V_{Параллел} = S_{асос}h$ **Оғма параллелепипеднинг ҳажми:** $V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\theta$	
3	**Призма** **Ён сирт юзаси:** $S_{ён.с.} = P_{асос}h$ **Ўзгача призманинг ён сирт юзаси:** $S_{ён.с.} = Pl$ ($P_{кесим}$ – перпендикуляр кесимнинг периметри, l – ён қиррасининг узунлиги) **Ён сирт юзаси:** $S_{т.с.} = S_{ён.с.} + 2S_{асос}$ **Призманинг ҳажми:** $V_{Призма} = S_{асос}h$	

4	**Пирамида** **Ён сирт юзаси:** $S_{ён.с} = \dfrac{1}{2} P_{асос} l$ (l – апофема). **Тўла сирт юзаси:** $S_{т.с.} = S_{ён.с.} + S_{асос}$ **Пирамиданинг ҳажми:** $V_{Пирамида} = S_{асос} h$	
5	**Кесик пирамида** **Ён сирт юзаси:** $S_{ён.с.} = \dfrac{P_1 + P_2}{2} l$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{т.с.} = S_{ён.с.} + S_{асос}$ **Кесик пирамиданинг ҳажми:** $S_{кесик\ Пир} = \dfrac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$	
6	**Қавариқ кўпёқ** **Кўпёқлар учун Эйлер теоремаси:** (*У* + *Ё* – *Қ*) = 2, бу ерда *У* – учлари сони, *Ё* – ёқлари сони, *Қ* – қирралари сони, Қирралари: $3n$ Учлари: $2n$ Ёқлари: $n + 2$ Диагоналлари: $n \cdot (n - 3)$ **Пирамида учун Эйлер теоремаси:** (*У* + *Ё* – *Қ*) = 2 Қирралари: $2n$ Учлари: $n + 1$ Ёқлари: $n + 1$	

Айланма жисмлари билан уларнинг элементлари, 3D иллюстрацияси

Формулалар билан иллюстрациялар		
1	**Сфера. Шар** **Сферанинг юзаси:** $S_{\text{Сфера}} = 4\pi R^2$ **Шарнинг ҳажми:** $V_{\text{Сфера}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	
2	**Шар сегменти** **Сегмент асосининг радиуси:** $a^2 = h(2r - h)$ **Шар сиртининг юзаси:** $S_{\text{Ш.П}} = 2\pi rh = \pi(a^2 + h^2)$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{\text{т.с.}} = \pi(h^2 + 2a^2)$ **Шар сегментининг ҳажми:** $V = \pi h^2\left(r - \dfrac{h}{3}\right)$	
3	**Шар сектори** **Тўла сирт юзаси:** $S_{\text{т.с.}} = \pi R(2h + a)$ **Шар секторининг ҳажми:** $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$	
4	**Шар ҳалқаси** **Ён сирт юзаси:** $S_{\text{ён.с.}} = 2\pi RH$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{m.c.} = \pi(r_1{}^2 + r_2{}^2 + 2RH)$ **Шар ҳалқасининг ҳажми:** $V = \dfrac{\pi}{6}H(3r_1{}^2 + 3r_2{}^2 + H^2)$	

5	**Цилиндр** **Асосининг юзаси:** $S_{асос} = 2\pi R^2$ **Ён сирт юзаси:** $S_{ён.с.} = 2\pi Rh$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{т.с.} = 2\pi R(h + R)$ **Цилиндрнинг ҳажми:** $V_{Цилиндр} = S_{асос}h$	
6	**Конус** **Асосининг юзаси:** $S_{асос} = \pi R^2$ **Ён сирт юзаси:** $S_{ён.с.} = \pi Rl$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{т.с.} = \pi R(l + R)$ **Конуснинг ҳажми:** $V_{Конус} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$	
7	**Кесик конус** **Асосининг юзаси:** $S_{асос} = \pi(R^2 + r^2)$ **Ён сирт юзаси:** $S_{ён.с.} = \pi l(R + r)$ **Тўла сирт юзаси:** $S_{т.с.} = \pi(R^2 + l(R + r) + r^2)$ **Кесик конуснинг ҳажми:** $V_{Кесик\ конус} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r \cdot R + r^2)$	

Тўғри чизиқ билан текисликнинг тенгламаси, фазодаги сфера тенгламаси ва уларнинг 3D иллюстрациялари

<table>
<tr><th colspan="3">Формулалар билан иллюстрациялар</th></tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>

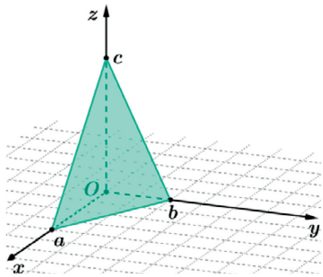
Сегментлардаги текисликнинг тенгламаси

Умумий кўринишдаги текисликнинг тенгламаси:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Сегментлардаги текисликнинг тенгламаси: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>

Уч нуқта орқали ўтувчи текисликнинг тенгламаси

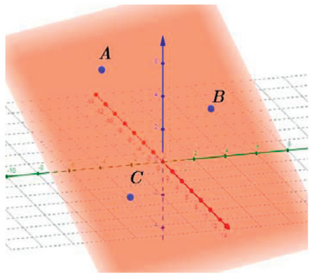
Фазодаги нуқталар:

$A\ (x_1,\ y_1,\ z_1),\ B\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ C\ (x_3,\ y_3,\ z_3)$

Уч нуқта орқали берилган текисликнинг тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>

Икки текислик орасидаги бурчак

Текисликларнинг тенгламалари:

$T_1:\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$T_2:\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Нормал векторлар:

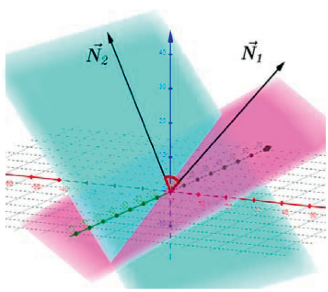
$\vec{N}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ ва $\vec{N}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$

Икки текислик орасидаги бурчак:

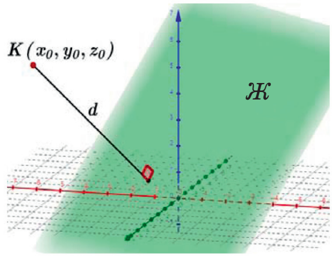
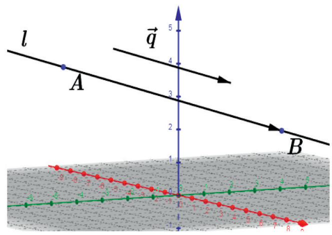
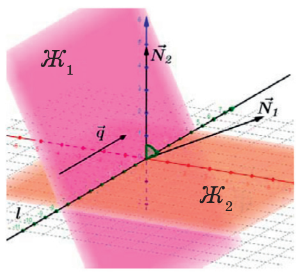
$$\cos\varphi \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} =$$

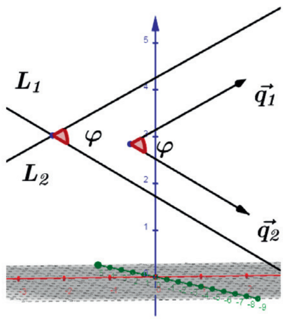
$$= \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

4	**Нуқтадан текисликкача бўлган масофа** **Нуқтадан текисликкача бўлган масофа:** $d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ **Текисликларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари:** $\overrightarrow{N}_1 \parallel \overrightarrow{N}_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, $\overrightarrow{N}_1 \parallel \overrightarrow{N}_2 \Rightarrow$ $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$	
5	**Берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси** **Фазодаги нуқталар:** $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ **Йўналтирувчи вектор:** $\vec{q} = \{m; n; p\}$ **Икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси:** $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	
6	**Тўғри чизиқнинг параметрли тенгламаси** **Фазодаги нуқта:** $A\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ **Йўналтирувчи вектор:** $\vec{q} = \{m; n; p\}$ **Тўғри чизиқнинг параметрли тенгламаси:** $l = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$	
7	**Кесишувчи икки текислик учун умумий тўғри чизиқнинг тенгламаси** **Текисликлар тенгламаси:** $Ж_1$: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $Ж_2$: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ **Нормал векторлар:** $\overrightarrow{N}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ ва $\overrightarrow{N}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$	

	Йўналтирувчи вектор: $\vec{q} = \{m; n; p\}$ **Кесишувчи икки текислик учун умумий тўғри чизиқнинг тенгламаси:** $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{q} \perp \overrightarrow{N}_1 \\ \vec{q} \perp \overrightarrow{N}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{q} = \overrightarrow{N}_1 \times \overrightarrow{N}_2$	
8	**Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак** **Тўғри чизиқларнинг тенгламаси:** $L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ ва $L_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$ **Йўналтирувчи векторлар:** $\vec{q}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ ва $\vec{q}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ **Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак:** $\cos\varphi \dfrac{\left\|\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right\|}{\left\|\vec{q}_1\right\| \cdot \left\|\vec{q}_2\right\|} =$ $= \dfrac{\|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2\|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ **Тўғри чизиқларнинг параллелик ва перпендикулярлик шартлари:** $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$, $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow$ $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$	
9	**Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак** **Текисликнинг тенгламаси:** $T: Ax + By + Cz + D = 0$	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Тўғри чизиқ тенгламаси:

$$L = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

Нормал вектор: $\overrightarrow{N} = \{A;\ B;\ C\}$

Йўналтирувчи вектор: $\vec{q} = \{m; n; p\}$

Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак:

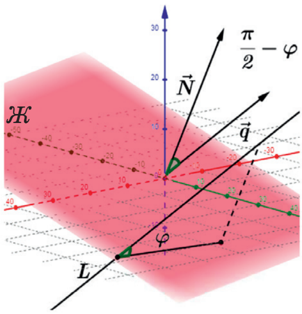
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\left|\vec{q} \cdot \overrightarrow{N}\right|}{\left|\vec{q}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N}\right|} =$$

$$= \frac{|m \cdot A + n \cdot B + p \cdot C|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари:

$$L \perp p \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}, \quad L \parallel p \Leftrightarrow$$
$$m \cdot A + B + p \cdot C = 0$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>

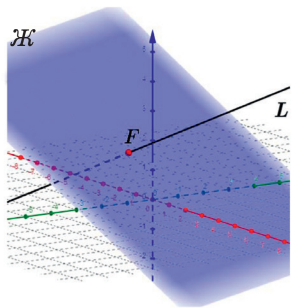
Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтаси

Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасини топиш алгоритми:

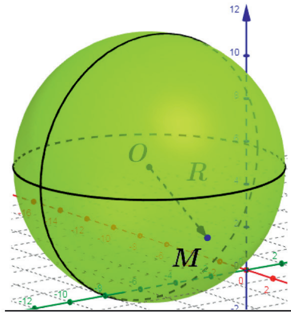
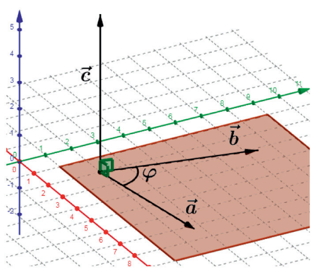
$$1. \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \begin{cases} x = m\lambda + x_0, \\ y = n\lambda + y_0, \\ z = p\lambda + z_0. \end{cases} \end{cases}$$

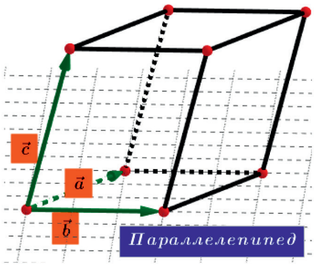
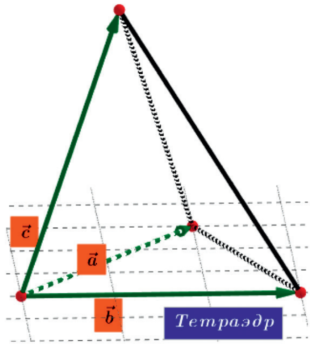
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

	2. $A(m\lambda + x_0) + B(n\lambda + y_0) + C(p\lambda + $ $+ z_0) + D = 0$ 3. $\lambda_0 = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0}{Am + Bn + Cp}$ 4. $\begin{cases} x_F = m\lambda_0 + x_0 \\ y_F = n\lambda_0 + y_0 \\ z_F = p\lambda_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow F(x_F; y_F; z_F)$	
11	**Сферанинг тенгламаси** **Шар марказининг координатаси:** $O\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ **Сферанинг тенгламаси:** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$	
12	**Векторларнинг векторлик кўпайтмаси** **Орт-векторнинг координатаси:** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ **Параллелограммнинг юзаси:** $S = \lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \left\lVert \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\rVert$ **Учбурчакнинг юзаси:** $S = \dfrac{1}{2}\lvert\vec{c}\rvert = \dfrac{1}{2}\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \dfrac{1}{2}\left\lVert \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\rVert$	

<table>
<tr><td>13</td><td>Векторларнинг аралаш кўпайтмаси

Параллелепипеднинг ҳажми:
$$V_{\text{паралл.}} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$$</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>Тетраэдрнинг ҳажми:
$$V_T = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$$</td><td></td></tr>
</table>

МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

0.1. 1) 6 см. **0.2.** 2) 20 см. **0.7.** 1) 4 см. **0.9.** 1) 5 см. **0.11.** 1) 8 м; 2) 26 см. **0.15.** 48 см. **0.16.** 36 см. **0.17.** 1) 5 м; 2) $a + c - b$. **0.18.** 2 см. **0.19.** $8\sqrt{3}$ см. **0.20.** 10 см ва $2{,}5\sqrt{3}$ см. **0.22.** 1,5. **0.23.** $-\frac{69}{2}$. **0.24.** $6a^2$. $6\sqrt{2}$. **0.30.** $x = 0$.

I бўлим.

п.1.1. **1.5.** 1) мумкин эмас; 2) мумкин; 3) мумкин эмас; 4) мумкин эмас. **1.6.** 1) мумкин эмас; 2) мумкин; 3) мумкин эмас; 4) мумкин эмас. **1.7.** 12. **1.8.** 1) $k = 4$. **1.9.** 3) 864 м^2. **1.11.** 4) 7 мм. **1.12.** 3) $25\sqrt{3}$ дм^2. **1.13.** 60°. **1.14.** 4) $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}5$. **1.15.** [40°; 100°] оралиғида ётади. **1.16.** 2) 760 см^2. **1.17.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; 2) 45°. **1.19.** $\sqrt{155}$ см. **1.20.** 4 см. **1.22.** 1) ўлчовлари a, a, $\sqrt{2}\,a$; 2) $2\left(2\sqrt{2}+1\right)a^2$. **1.24.** 17 см. **1.25.** 90°. **1.26.** $n \le 3$. **1.27.** $2S_1 + 2S_2 + \frac{2S_1S_2}{a^2}$; $\frac{1}{a}\sqrt{a^4 + S_1^2 + S_2^2}$. **1.29.** $\sqrt{\frac{S_1S_2}{S_3}}$; $\sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}}$; $\sqrt{\frac{S_2S_3}{S_1}}$.

п.1.2. **1.48.** 1) 3 м; 3) 26 дм. **1.49.** 1) 180 см^2; 2) 220 см^2; 3) $10\sqrt{41}$ см^2. **1.50.** 2) 3 м, 7 м, 11 м. **1.51.** 3) 260 мм^2 ва 300 мм^2. **1.53.** 520 см^2 ва 858 см^2. **1.54.** 1) $\frac{240+25\sqrt{3}}{2}$ м^2. **1.55.** 120°. **1.56.** 1) мумкин, 30 қирраси ва 12 ёқи мавжуд; 3) мумкин эмас. **1.57.** $d = a\sqrt{3}$. **1.60.** $d = \frac{\sqrt{6}}{2}d_1$. **1.61.** 490 см^2. **1.64.** 14 см, 48 см. **1.65.** 6 см, 14 см, 16 см. **1.66.** 4,5 м. **1.67.** $\frac{6+\sqrt{3}}{2}a^2$. **1.70.** $6\left(6+\sqrt{3}\right)r^2$. **1.71.** 906 см^2. **1.72.** 42 см^2.

п.1.3. **1.84.** 2) топилмайди. **1.86.** 2) 84 м^2. **1.87.** 1) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ см^2. **1.88.** 1) 24 см^2. **1.89.** 2) 32 м^2. **1.92.** 1) 64 см^2. **1.93.** 2) 150 м^2. **1.94.** 1) 16 см; 2) $96\sqrt{15}$ см^2. **1.101.** 1) 5 см; 2) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$; 3) $\sqrt{34}$ см; 4) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{102}}{17}$. **1.106.** Sт.б. = 48+ $27\sqrt{3}+4\sqrt{91}+5\sqrt{283}$, икки ёқли бурчаги 90° га тенг. **1.107.** 1) 5 см; 6 см; 2) $8\sqrt{10}+12\sqrt{6}+4\sqrt{14}$ см^2. **1.108.** 1) b sinφ; 2) b cosφ; 3) b cosφ; 4) $\frac{b}{2}\sqrt{4-\cos^2\varphi}$; 5) $\frac{3b^2}{2}\sqrt{4-\cos^2\varphi}$. **1.109.** $2a^2$. **1.110.** 2 см. **1.112.** 51 см, 39 см. **1.117.** $3\sqrt{5}\,a^2$. **1.118.** $(n-1)360°$. **1.119.** $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}\varphi\cos\frac{\pi}{n}$. **1.120.** $\left(\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$.

1.121. $\dfrac{a^2}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}-1}}$. **1.122.** $\dfrac{a^2}{2}\left(2+\sqrt{7}\right)$. **1.129.** 1) $25\sqrt{2}$ см². **1.130.** 60°. **1.134.** 2) 144 см². **1.137.** $3\sqrt{11}$ см². **1.142.** 10 см². **1.143.** 1) $\dfrac{h}{4}\left(b^2-h^2\right)$. **1.144.** $32\sqrt{5}$ см². **1.145.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **1.148.** $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$. **1.149.** $\cos\varphi=-\dfrac{1}{3}$. **1.150.** 8 см², 18 см². **1.153.** $\dfrac{h\cdot tg\varphi\sin\varphi}{\cos(\gamma-\varphi)}$. **1.154.** Пирамиданинг ёйилмасини ясаш керак. **1.155.** $\dfrac{\sqrt{19}}{6}b^2$. **1.156.** $\sqrt{-2\cos 2\varphi}\cdot ab$.

II бўлим.

п.2.1. **2.2.** 2) $\vec{p}(4;\ -2;\ 7)$; 3) $\vec{p}(4;\ 1;\ -1)$. **2.4.** 1) $\vec{n}(1;\ 2;\ -1)$; 4) $\vec{n}(0;\ 2;\ 1)$. **2.5.** 2) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ коллинеар эмас, чунки $\dfrac{0}{2}\neq\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{-4}{4}$. $\vec{n}(32;\ -8;\ -6)$ ёки $\vec{n}(16;\ -4;\ -3)$. **2.7.** 2) $16x-4y-3z+44=0$; 4) $11x+10y+3z-8=0$. **2.8.** 1) $\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$; 3) $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-3}{4}$. **2.9.** 1) $3x-2y-5z+16=0$; 4) $x+y-3=0$. **2.11.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-5}{5}$ ёки $\begin{cases}x-2y-5=0,\\5x-4z+15=0.\end{cases}$ **2.13.** 2) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{-2}=1$, $A(4;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;-2)$. **2.14.** 1) $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-7}{3}$; 3) $\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-7}{4}$. **2.15.** $7x+5y-49z+7=0$. **2.16.** $x+z-1=0$. **2.17.** $x+y+z-6=0$. **2.20.** $x-y+1=0$.

п.2.2. **2.21.** $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ бўлиши керак. A ва C нуқталари берилган тўғри чизиқда ётади, бошқалари ётмайди. **2.22.** $\dfrac{x_1-x_0}{m}=\dfrac{y_1-y_0}{n}=\dfrac{z_1-z_0}{k}$ бўлиши керак. **2.23.** 2) кесишади; 3) параллел. **2.24.** 2) ўзаро параллел. **2.25.** 1) айқаш тўғри чизиқлар. **2.26.** 2) $A(1{,}2;\ 1{,}6;\ 0{,}2)$. **2.27.** 4) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. **2.28.** 1) $z=0$; 2) $y=0$; 3) $x=0$. **2.29.** 2) $\begin{cases}x=0,\\z=0.\end{cases}$ **2.30.** 4) $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -2)$. **2.31.** 3) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{3}$. **2.32.** 2) $x-y-2z-1=0$. **2.33.** 1) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **2.35.** 4) $d=-3$. **2.36.** 2) $A(-15{,}8;\ -6{,}2;\ -6{,}8)$

нуқтасида кесишади; 3) $B(2;\ 3;\ 1)$ нуқтасида кесишади. **2.37.** $13x - 8y + 2z + 37 = 0$. **2.38.** 1) $M_1\left(-\frac{25}{77}; \frac{90}{77}; \frac{289}{77}\right)$. **2.39.** $2x + 3y - 8 = 0$. **2.40.** 1) $3x - 2z - 3 = 0$, $3x - 2z + 9 = 0$. **2.41.** $-y + 2z = 0$. **2.42.** 2) $O(2;\ -1,5;\ 2)$. **2.43.** 2) $A(-1;\ 1;\ -2)$. **2.44.** 1) $\frac{10}{13}$. **2.45.** 3) $\cos A = -\frac{1}{3}$, у ҳолда $\angle A$ ўтмас бурчак, ΔABC ўтмас бурчакли учбурчак.

п.2.3. 2.46. 2) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$. **2.47.** 4) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. **2.48.** $\frac{2}{7}\sqrt{42}$. **2.49.** 3) $\frac{1}{7}\sqrt{226}$. **2.50.** $\frac{\sqrt{169658}}{41}$. **2.51.** $m = -\frac{14}{3}$; $d = \frac{6\sqrt{29}}{29}$. **2.52.** 1) $\frac{\sqrt{714}}{17}$. **2.53.** 1) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$; 2) $\frac{13\sqrt{11}}{11}$. **2.56.** 2) $2x + z - 1 = 0$ ва $2x + z - 14 = 0$; 3) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$. **2.57.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **2.58.** $\cos A = \cos C = \frac{9\sqrt{130}}{130}$; $\cos B = \frac{8\sqrt{65}}{65}$. **2.59.** 80°; 100°. **2.60.** 9 см.

п.2.4. 2.63. 1) $\cos\varphi = \frac{5\sqrt{646}}{646}$. **2.64.** 4) $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{39}}{39}$. **2.65.** 3) $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{14}}{14}$. **2.67.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{6}$. **2.68.** 1) $\begin{cases} x = 2, \\ z = -2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = z, \\ y = 0. \end{cases}$ **2.69.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2227}}{2227}$. **2.70.** $4x + 4y + z - 6 = 0$. **2.71.** 1) $M\left(-\frac{2}{3}; -3; -\frac{8}{3}\right)$; 2) $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{34}}{17}$. **2.72.** 1) $\cos(\angle ABC) = \frac{\sqrt{6}}{9}$; 2) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{35}$; 3) $\cos\omega = \frac{16\sqrt{5}}{45}$. **2.73.** $\begin{cases} x + z = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$ **2.74.** $x + y + z = 0$. **2.75.** 3) $\cos(\angle ABC) = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

III бўлим.

п.3.1. 3.7. 1) 12π см^2. **3.8.** 2) 143π м^2. **3.11.** 16 см^2, 16π см^2. **3.12.** 13 см. **3.13.** б) 6 см; в) 27π см^2. **3.14.** $16\left(1+\sqrt{2}\right)\pi$ см^2. **3.15.** $\frac{5}{\pi}$ см. **3.23.** 48 см^2. **3.24.** 2) $\pi : 2\sqrt{3}$. **3.26.** $2a^2\pi$. **3.27.** $h = R$. **3.28.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}ah$. **3.31.** $S_{\text{ён.с.}} = \pi \cdot S$. **3.35.** $1 : \cos\varphi$. **3.42.** 21, 13, 7, 15 ва $S = 168$.

п.3.2. 3.51. 2) 16 м^2. **3.52.** 1) 3π м^2. **3.53.** 3) 24π м^2. **3.54.** 2) 10 м. **3.55.** 1) 36 см^2. **3.56.** 2) 256π см^2. **3.57.** 3) 300π см^2. **3.58.** 1) 30°.

3.59. 45°. **3.60.** 5 см². **3.63.** 1) l cosφ; 2) l sinφ. **3.64.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}h$. **3.67.** 3) $\frac{r}{4\sqrt{4l^2-r^2}}$. **3.68.** R^2. **3.69.** $\frac{128}{15\pi}$ см; $\frac{225\pi-64}{15\pi}$ см. **3.70.** 9 см², 16 см². **3.71.** $\pi\left[\left(1+\sqrt{2}\right)R^2+\left(1-\sqrt{2}\right)r^2\right]$. **3.72.** $\frac{\pi Q}{2}$. **3.73.** $\sqrt{2}\cdot r$. **3.74.** $\frac{25}{16}\pi h^2$. **3.75.** 2) $\frac{3\sqrt{39}}{16}l^2$. **3.81.** $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi Q$. **3.82.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$.

п.3.3. **3.86.** 2) 8π см, 16 см². **3.87.** 3) 49π мм². **3.90.** 6 м. **3.91.** 1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=49$. **3.92.** 2) $4x-3z-125=0$. **3.93.** 3) $\sqrt{65}$. **3.96.** 5 см. **3.97.** 2) 100π м². **3.101.** 1600π см². **3.102.** 3 : 4. **3.103.** $2\pi R\cos\varphi$. **3.107.** 2) $C(-5; -2; 4)$ – маркази, $R=\sqrt{42}$. **3.108.** ≈113,14 км. **3.109.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$. **3.110.** 8 см. **3.111.** 1) 16; 2) 48. **3.112.** 2) $a=2\sqrt{6}R$. **3.117.** 24 см. **3.118.** 3 : 4.

IV бўлим.

п.4.1. **4.6.** 1) 56 м³. **4.10.** 2) 50 м³. **4.11.** 2) 25 м³. **4.12.** 2) 28800 дм³. **4.13.** 1) 125 мм³. **4.14.** 2) 245 м³. **4.15.** 1) $\frac{112}{3}$ см³. **4.16.** 1) 336 см³. **4.17.** 2) $\frac{9250}{3}$ см³. **4.18.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **4.19.** 3) $\frac{b^3}{3}\sin2\varphi\sin\varphi$. **4.20.** 27 см³. **4.21.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **4.23.** $\frac{\sqrt{2}\cdot10^3}{3}$ см³. **4.37.** 8 : 125. **4.38.** $ad\sin\varphi\sqrt{d^2\cos^2\varphi-a^2}$. **4.39.** $\frac{4V}{\sqrt{S}}$. **4.40.** $a^2b\sin\varphi$. **4.41.** 100 см³. **4.42.** 3060 см³. **4.43.** $\frac{9}{4}R^3$. **4.44.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a\cdot S$. **4.46.** $\frac{4}{3}h^3\mathrm{ctg}^2\varphi$. **4.48.** $48\sqrt{3}$ см³. **4.49.** $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$. **4.51.** 50 кун. **4.58.** $\frac{V\sqrt{S_2^3}}{\sqrt{S_2^3}-\sqrt{S_1^3}}$, $S_2>S_1$. **4.59.** $\frac{a\left(4b^2-a^2\right)}{12}$. **4.60.** $\left(\frac{1}{3}Sh; \frac{4}{3}Sh\right)$. **4.61.** $\frac{2}{3}R^2h$. **4.62.** $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\cdot h$. **4.63.** $15V$.

п.4.2. **4.70.** 1) 45π м³. **4.71.** 2) 400π мм³. **4.72.** 3) 324π мм³, 972π мм³. **4.73.** 2) 175π м³. **4.74.** 1) 32π см³. **4.76.** 3) 73π м³. **4.78.** 2) $\frac{125}{3}\pi$ м³. **4.79.** 266π см³. **4.80.** 2) $\frac{17}{3}\pi$ м³. **4.81.** 3468π см³. **4.83.** $\frac{32000\pi\sqrt{5}}{81}$ см³. **4.85.** $\frac{7}{27}V$. **4.86.** $\frac{\pi^2\left(R^2+r^2\right)\left(R^2+rR+r^2\right)}{3(r+R)}$.

4.87. $\dfrac{1125\pi\sqrt{3}}{8}$ см³. **4.88.** $\dfrac{32\pi r^3}{9}$. **4.89.** ≈140 м. **4.90.** 148 т.
4.91. $3\sqrt[3]{3}$ мм. **4.92.** $\dfrac{272\pi}{3}$ см³ ва $\dfrac{1100\pi}{3}$ см³. **4.94.** 4 : 3.
4.95. $1-\sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi}}$. **4.97.** ≈94 м. **4.98.** $\dfrac{\pi\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}R^3$.

п.4.3. **4.100.** 171,5π см³. **4.102.** 1) 54π м³. **4.104.** 2) $\dfrac{130}{3}\pi$ м³.
4.107. 2) 13824 см³, $13824\sqrt{3}$ см³. **4.114.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\varphi}}{12\sin\dfrac{\varphi}{2}}$. **4.119.** $\dfrac{1}{6}R^2\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\right)^2\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\gamma$. **4.120.** 4 : $((2-k)k^2)$. **4.121.** 6,25 м.
4.122. 8 : 3. **4.124.** $8\sqrt{6}\cdot\pi$. **4.125.** $\dfrac{2}{3}\pi R^2h$.

V бўлим.

5.3. 5,1 м; 8,1 м; 5,1 м. **5.4.** m, $m\sqrt{3}$. **5.5.** $\dfrac{a-b}{2}$.
5.8. $\dfrac{ma}{m+n}$. **5.9.** $3\sqrt{3}$ см. **5.10.** 16 см. **5.11.** $\sqrt{2b(a+b)}$, $\sqrt{2(a+b)(2a+b)}$.
5.18. $\sqrt{10}$ см. **5.19.** 6 см. **5.30.** $\dfrac{ac}{a+b}$, $\dfrac{ab}{a+b}$, $\dfrac{bc}{a+b}$.
5.31. $\dfrac{\sqrt{a^2\sin\varphi+2ah\cos\varphi+2ah}}{\sqrt{\sin\varphi}}$. **5.32.** $h\cdot\operatorname{ctg}\varphi$. **5.33.** $\dfrac{ab}{a+b}$.
5.34. $\dfrac{a\sin\varphi}{b+a\cos\varphi}$; $\dfrac{b\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}$. **5.40.** $\cos\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{(a+b)l}{2ab}$. **5.41.** 3 см.
5.42. $4\sqrt{17}$ см. **5.43.** 12 см. **5.44.** 1; 9. **5.45.** $0,3\sqrt{5}$. **5.46.** $R(6,4;-2,8;4,6)$.
5.47. 60°. **5.48.** 6 м, 15 м. **5.49.** 6 дм. **5.50.** $\sqrt{28}$. **5.51.** $E(0;\ 1;\ 3)$.
5.52. 1) $12+16\sqrt{3}$ см². **5.53.** −21. **5.54.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$. **5.55.** 486 см³.
5.56. 4 дм. **5.57.** 60 см³. **5.58.** 400 см². **5.59.** 125 м³. **5.60.** 30 см.
5.61. $\dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$. **5.62.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **5.64.** 45°. **5.65.** $2\sqrt[3]{9}$ м.
5.66. 16π см³. **5.67.** 5 м. **5.68.** $\pi:\sqrt{7}$. **5.69.** $\dfrac{SR^2}{R^2-r^2}$. **5.70.** 224π м³.
5.71. $\dfrac{1}{\pi}\sqrt{Q_3^2-\left(Q_2-Q_1\right)^2}$. **5.72.** 4 : 1. **5.73.** πa^3. **5.74.** 6 : 1. **5.75.** 80 м³.
5.77. $1:5\sqrt{5}$. **5.79.** $\dfrac{\pi}{24}\left[(a+b)^2+a^2+b^2-\left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\right]$. **5.80.** $\dfrac{48\pi}{5}$.

МУНДАРИЖА

ГЕОМЕТРИЯ

(өзбек тілінде)

Умумтаълим мактабларининг
табиий-математика йўналишидаги
11-синфи учун дарслик