А.Н. Шинибеков, Д.А. Шинибеков, Р.Н. Жумабаев

Қозоғистон Республикаси
Таълим ва фан вазирлиги тасдиқлаган

АЛГЕБРА

Умумтаълим мактабларнинг
9-синфи учун дарслик

9

Алматы
«Атамұра» – «Жазушы»
2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14 я 72
Ш 97

Умумий редакцияга раҳбарлик қилган
физика-математика фанлари доктори профессор,
ҚР МФА академиги М.Отелбаев

Фойдаланилган шартли белгилар

– янги мавзуни мустаҳкамлаш саволлари
– амалий ва ижодий ишлар
– тарихга назар
– ижодий ёки юқори мураккабликдаги топшириқлар ва материаллар
– исботнинг (мисол ечишнинг) боши
– исботнинг (мисол ечишнинг) охири

Мисоллар

A – бошланғич даражали
B – ўртача даражали
C – юқори даражали

Шинибеков А.Н. ва бошқалар

Ш 97 Алгебра: Умумтаълим мактабларнинг 9-синфи учун дарслик / А.Н. Шинибеков, Д.А. Шинибеков, Р.Н. Жумабаев. – Алматы: «Атамұра» – «Жазушы», 2019. – 240 бет.

ISBN 978-601-200-663-6

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14 я 72

ISBN 978-601-200-663-6

КИРИШ

Дарслик умумтаълим мактабларнинг 9-синфи учун мўлжалланган, унинг бир қатор ўзига хосликлари бор. Бинобарин, авторнинг “Алгебра-8” дарслигига ўхшаш бунда ҳам дастурга кирган материаллар билан бир қаторда математикани чуқурлаштириб ўқитадиган синфлар учун мўлжалланган материаллар ҳам берилиб, **(*)** белгиси билан кўрсатилган. Шу билан бир қаторда С гуруҳининг топшириқлари ҳам аслида математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфлар учун мўлжалланган. Бироқ бу материаллардан синфдан ташқари вақтларда ўқиб ўрганишлари мумкин. Бу материаллар математик олимпиадаларга ва турли конкурсларга қатнашиб, муваффақиятли натижаларга эришишга имконият яратади.

Дарсликдан фойдаланиш давомида ўқувчининг умумтаълим мактабларида ёки математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфда ўқишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ушбу қоидага амал қилгани маъқул: янги мавзуни мустаҳкамлаш давомида аввал **A** гуруҳининг материалларини тўлиқ ўзлаштириб олиш лозим. Бусиз навбатдаги **B,C** гуруҳлари топшириқларини бажариш ва навбатдаги мавзуларни ўзлаштириш мумкин эмас. Дарсликда амалий, ижодий ва юқори мураккабликдаги топшириқлар берилган. Бу топшириқлар янги мавзуни кундалик ҳаётда фойдаланиш ва ўйлаш қобилиятини ривожлантиришга имконият яратади.

Ўқишларингизда муваффақият, ҳаётингизда омад ёр бўлсин!

Автор

8-СИНФДА ЎТИЛГАН МАТЕРИЛЛАРНИ ТАКРОРЛАШ

Бўлимни ўзлаштириш давомида сизлар:

- 8-синфда ўтилган материалларни ёдингизга туширасиз;
- 9-синфда ўтиладиган материалларни ўзлаштиришга тайёргарлик кўрасизлар.

8-синфда ўтилган материалларни такрорлаш саволлари

1) Квадрат илдиз деб нимага айтилади?

2) Арифметик квадрат илдиз деб нимага айтилади?

3) Иррационал сон деб нимага айтилади?

4) Ҳақиқий сон ва ҳақиқий сонлар тўплами деганда нимани тушунасиз?

5) Соннинг бутун (каср) қисми қандай аниқланади?

6) Сонлар ўқида нуқтанинг координатаси деганда нимани тушунасиз?

7) Қандай сон оралиқларини биласиз? Уларни тенгсизликлар орқали ифодаланг. Мисол келтиринг.

8) $y = \sqrt{x}$ функциянинг хоссаларини айтиб, графигини ясанг.

9) Квадрат функция қандай аниқланади? Коэффициентлар ва дискриминант бўйича функция графигининг жойлашувининг ўзига хосликларини атаб кўрсатинг.

10) Квадрат тенглама илдизларининг формулаларини ёзинг. Дискриминант деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.

11) Виет теоремаси билан унга тескари теоремани келтириб чиқаринг. Мисол келтиринг.

12) $a \pm b + c = 0$ бўлганда квадрат тенгламанинг илдизлари қандай аниқланади? Мисол келтиринг.

13) Квадрат тенглама, квадрат учҳадлар ва квадрат функция тушунчаларнинг умумий элементлари билан ўзига хосликларини атаб кўрсатинг. Мисол келтиринг.

14) Квадрат учҳад кўпайтувчиларга қандай ажратилади?

15) Квадрат тенгсизликлар қандай ечилади? Мисол келтиринг.

16) Тенгсизликларнинг асосий хоссаларини атанг. Уларни мисол ёрдамида кўрсатинг.

17) Тенгсизликларни исботлашнинг қандай усулларини биласиз? Мисол ёрдамида тушунтиринг.

18) Рационал тенгсизлик деб нимага айтилади? Интерваллар усулидан қандай фойдаланилади?

МАШҚЛАР

A

0.1. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $0,5\sqrt{256}$; 2) $-5\sqrt{0,64}$; 3) $0,3\sqrt{\dfrac{25}{9}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{0,16}}{2\sqrt{0,04}}$; 5) $\sqrt{4900}-\sqrt{289}$; 6) $0,07\sqrt{10000}-\sqrt{36}$;

7) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{361}}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}+\sqrt{\dfrac{121}{25}}$; 9) $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}-\dfrac{1}{\sqrt{36}}$.

9) $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}-\dfrac{1}{\sqrt{36}}=\sqrt{\dfrac{162+7}{81}}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{9}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{26-3}{18}=\dfrac{23}{18}$

0.2. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{360}\cdot\sqrt{2,5}$; 2) $\sqrt{90\cdot 4,9}$; 3) $\sqrt{72\cdot 32}$;

4) $\sqrt{3,6\cdot 12,1}$; 5) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; 6) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$;

7) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{8}}$; 8) $\sqrt{1,2}\cdot\sqrt{3\dfrac{1}{3}}$; 9) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}$.

0.3. Тенгсизликларнинг тўғрилигини кўрсатинг:

1) $3,4<\sqrt{12}<3,6$; 2) $5<\sqrt{30}<6$;

3) $5<\sqrt{26}<5,1$; 4) $7,9<\sqrt{63}<8$.

0.4. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x}=4$; 2) $\sqrt{y}=0,4$; 3) $3\sqrt{x}=7$; 4) $10\sqrt{z}=3$.

0.5. Квадрат тенгламаларнинг илдизларини топинг:

1) $2x^2-5x-3=0$; 2) $3x^2-3x+1=0$; 3) $3x^2-8x+5=0$;
4) $x^2+9x-22=0$; 5) $5x^2+9x+4=0$; 6) $7x^2-11x-6=0$;
7) $36x^2-12x+1=0$; 8) $3x^2+x-2=0$.

Алгебра ва мухандислик қурилиш

Алмати шаҳридаги Абай номидаги метро бекати – чуқурликда жойлашган бекатлардан бири. Асосий платформасининг эни 15,2 м ва бўйи 104 м. Бекатга тўрт йўлли эскалаторлар билан кириб, чиқиш мумкин. Эскалаторнинг кўтарилиш баландлиги 46 м, узунлиги 92 м. $x^2-75x-234=0$ тенгламани ечиб, бекатнинг чуқурлигини топинг.

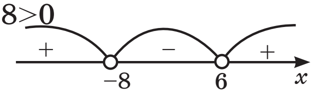
0.6. Виет теоремаси ёрдамида қуйидаги квадрат тенгламаларнинг илдизларини топинг:
1) $x^2-5x+6=0$; 2) $4x^2-12x+9=0$; 3) $x^2+2x-24=0$;
4) $x^2+9x+14=0$; 5) $x^2-7ax+12a^2=0$; 6) $x^2+5bx+6b^2=0$;
7) $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$; 8) $x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x+2\sqrt{3}=0$.

0.7. Тенгсизликни график усулда ечинг:
1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4>0$;
3) $2x^2+3x-50$; 4) $-6x^2+6x+360$.

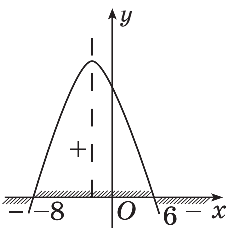
0.8. Тенгсизликни икки хил усулда ечинг:
1) $x^2-x-9<0$; 2) $6x^2-7x+2>0$; 3) $-x^2-2x+48<0$;
4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$; 5) $25x^2-10x+1\geqslant 0$; 6) $49x^2-28x+4<0$;
7) $-x^2-12x-100\leqslant 0$; 8) $4x^2-4x+15\leqslant 0$; 9) $5x^2+3x-8>0$.

1-усул: 3) $-x^2-2x+48<0 \Leftrightarrow x^2+2x-48>0$
$\Leftrightarrow (x+8)(x-6)>0$ (0.1-расм).

Жавоби: $x\in(-\infty;\ -8)\cup(6;\ +\infty)$.



0.1-расм



0.2-расм

2-усул: $y=-x^2-2x+48$ функциянинг графиги-тармоқлари пастга йўналган парабола. Бу Ox ўқини –8 ва 6 нуқталарда кесиб ўтади (0.2-расм).

Жавоби: $x\in(-\infty;\ -8)\cup(6;\ +\infty)$

0.9. 1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2>0$; 3) $x^2-4\leqslant 0$; 4) $5-x^2>0$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча бутун сонларни аниқланг.

0.10. Тенгсизлик ечимлари тўпламини аниқланг:
1) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$; 2) $9x^2-x+9\geqslant 3x^2+18x-6$;
3) $2x^2+8x-111<(3x-5)(2x+6)$; 4) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$;
5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$; 6) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

0.11. 1) $y=3(x-5)^2-2$; 2) $y=2x^2-1$;
3) $y=-2(x+1)^2+3$; 4) $y=(x-5)^2$
Параболанинг учи ва ўқини топиб, унинг графигини ясанг.

0.12. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:
1) $x^2-16x+48$; 2) x^2-x-12; 3) $x^2+5x-14$;
4) $x^2+6x-16$; 5) $x^2+12x+27$; 6) $2x^2-5x+2$.

0.13. Илдизлари бўйича квадрат тенглама тузинг:
1) 2 ва 5; 2) -3 ва 4; 3) -2 ва -7;
4) 0,5 ва 4; 5) $\frac{2}{3}$ ва $\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{1}{3}$ ва $-\frac{1}{9}$.

B

0.14. Ҳисобланг:

1) $6-\left(3\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{0,25}\right)$; 2) $11:\left(0,15\sqrt{1600}-0,29\sqrt{400}\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt{225}+3\sqrt{121}}{\frac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{324}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{0,16}}{0,2}-6\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right):\sqrt{25}$.

0.15. Ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $\sqrt{x-3}$; 2) $\sqrt{x+3}$; 3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-1}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$; 5) $\sqrt{x^2-9}$; 6) $\sqrt{|x|-3}$.

0.16. Сонларни таққосланг:

1) $\sqrt{14}$ ва $\sqrt{6}+\sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2}$ ва $5+\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{15}-2$ ва $\sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10}$ ва $\sqrt{20}-\sqrt{5}$.

1) $\left(\sqrt{14}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2=14-\left(6+2\sqrt{48}+8\right)=-2\sqrt{48}<0$

$\Rightarrow\left(\sqrt{14}\right)^2<\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2\Rightarrow\sqrt{14}<\sqrt{6}+\sqrt{8}$.

0.17. Ифодани квадратларнинг айирмаси кўринишига келтириб, кўпайтувчиларга ажратинг:

1) x^2-3; 2) $4a^2-5$; 3) $3y^2-2$; 4) $5b^2-6$;

5) $x-9$, $x>0$; 6) $y-5$, $y>0$; 7) $4-9b$, $b>0$; 8) $7c^2-3x^2$.

0.18. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутқаринг:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}}$.

0.19. $ax^2+2kx+p=0$ тенгламанинг илдизларини

$x_{1/2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ap}}{a}$ формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин эканлигини исботланг.

0.20. Квадрат тенгламанинг илдизларини 0.19- мисолда кўрсатилган формула ёрдамида аниқланг:

1) $3x^2-10x+3=0$; 2) $x^2+14x+33=0$;

3) $y^2-8y-84=0$; 4) $5y^2+26y+24=0$;

5) $16x^2+8x+1=0$; 6) $x^2-34x+289=0$.

0.21. Квадрат учҳаднинг илдизларини топиб, уни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $2x^2-5x+3$; 2) $2x^2-5x-7$; 3) $-y^2+6y-5$;

4) $5y^2+2y-3$; 5) $x^2-11x+30$; 6) $-x^2-5x+6$.

0.22. Агар мумкин бўлса, квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $4x^2-9x+5$; 2) $16a^2-24a+9$; 3) $3x^2-12x+12$;

4) $4b^2-9b+7$; 5) x^2-x-2; 6) $-48a^2-8a+1$;

7) $-3y^2+8y+11$; 8) $y^2-7y+11$; 9) $4x^2+x+0{,}04$.

0.23. Қаттиқ қоғоздан $y=0,5x^2$ параболанинг шаблонини (трафаретини) ясаб, функциянинг графигини ясанг:

1) $y=0,5(x-1)^2+2$; 2) $y=0,5x^2+4$;

3) $y=-0,5(x+2,5)^2-3$; 4) $y=0,5(x+4)^2$.

0.24. $y=2x^2$ параболанинг шаблонидан фойдаланиб,

1) $y=-2x^2$; 2) $y=2x^2-1$;

3) $y=-2(x-4)^2-4$; 4) $y=-2(x+3)^2$

функцияларнинг графикларини ясанг.

0.25. Функциянинг графигини ясанг. Унинг учи ва ўқини топинг:

1) $y=x^2-4$; 2) $y=(x-4)^2$; 3) $y=x^2-4x+4$; 4) $y=2x^2+x-3$.

0.26. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=\frac{x^2}{2}-4x+6$; 3) $y=-2x^2-5x-2$;

4) $y=-x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

0.27. Қуйидаги тенгламаларни бутун тенгламалар билан алмаштирганда чет илдизларнинг пайдо бўлишини кўрсатинг:

1) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$; 2) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$;

3) $\frac{1}{x-5}+6=\frac{6-x}{x-5}$; 4) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$.

0.28 – 0.34-мисолларда кўрсатилган тенгламаларни ечинг.

0.28. 1) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$; 2) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{1-3x}$;

3) $\frac{t^2-3}{1-t^2}+\frac{t+1}{t-1}=\frac{4}{1+t}$; 4) $\frac{y^2+17}{y^2-1}=\frac{y-2}{y+1}-\frac{5}{1-y}$.

0.29. 1) $x+2-\frac{3x+8}{x+2}=\frac{x}{x+2}$; 2) $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$;

3) $\dfrac{4}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{5}{x-1}=7;$ 4) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{4}{4-x^2}+1.$

0.30. 1) $x^4-29x^2+100=0;$ 2) $x^4+7x^2+10=0;$

3) $5y^4+2y^2-3=0;$ 4) $2y^4-5y^2-7=0;$

5) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0;$ 6) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0.$

0.31. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0;$ 2) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0;$

3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0;$ 4) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0.$

0.32. 1) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0;$ 2) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0;$

3) $x^3-3x^2-3x+1=0;$ 4) $3x^3-7x^2-7x+3=0;$

5) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0;$ 6) $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0.$

0.33. 1) $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2;$ 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2;$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2;$ 4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7;$

5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1;$ 6) $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2.$

2) Аниқланиш соҳаси: $x \leqslant 10.$

$\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x} \Rightarrow 22-x=4+4\sqrt{10-x}+10-x$

$\Rightarrow 8=4\sqrt{10-x} \Rightarrow 4=10-x \Rightarrow x=6 \in$ аниқланиш соҳаси.

Жавоби: $x=6$

0.34. 1) $|x-3|+2|x+1|=4;$ 2) $|5-2x|+|x+3|=2-3x;$

3) $|5-x|+|x-1|=10;$ 4) $|4-x|+|x-2|=2.$

0.35. a параметрнинг қандай қийматларида:

1) $ax^2-6x+9=0;$ 2) $x^2+ax+0{,}25=0;$

3) $4x^2-ax+a-3=0;$ 4) $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-2=0$

тенгламаларнинг илдизлари мавжуд бўлади?

0.36. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ 7x>0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-3x-4<0, \\ 3x-12>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+7x+10<0, \\ 4x-3,6>0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+7>0, \\ x^2+5x \geqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2+5x+20 \leqslant 0, \\ x-1,5 \geqslant 0. \end{cases}$

C

0.37. Касрни қисқартиринг:

1) $\dfrac{7x+x-8}{7x-7}$; 2) $\dfrac{5a+10}{2a^2+13a+18}$; 3) $\dfrac{b^2-8b+15}{b^2-25}$;

4) $\dfrac{y^2-5y-36}{81-y^2}$; 5) $\dfrac{c^2-10c-11}{22+9c-c^2}$; 6) $\dfrac{5a^2+8a+3}{14+3a-11a^2}$.

0.38. Агар $a>0$ ва $D=b^2-4ac<0$ бўлса, у ҳолда $y=ax^2+bx+c$ квадрат функциянинг фақатгина мусбат қийматлар қабул қилишини исботланг.

0.39. Агар $a<0$ ва $D=b^2-4ac<0$ бўлса, у ҳолда $y=ax^2+bx+c$ квадрат функциянинг фақатгина манфий қийматлар қабул қилишини исботланг.

0.40. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=|2-x^2|$; 2) $y=|x^2+x-2|$;

3) $y=5x^2-7|x|+2$; 4) $y=2x^2-5|x|-3$.

0.41. Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) x^3-4x; 2) x^3-10x^2+25x; 3) x^3+8; 4) y^3+12y^2+36y;

5) x^4-9; 6) x^3+10x^2-x-10; 7) z^5-1; 8) $z^3-8z^2-2z+16$.

0.42. Агар $a+b+c=0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг $\dfrac{c}{a}$ илдизлари 1 ва $\dfrac{c}{a}$ бўлишини исботланг.

0.43. Агар $a-b+c=0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг илдизлари -1 ва $-\frac{c}{a}$ бўлишини исботланг.

0.44. Функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини топинг:

1) $y=x-2$; 2) $y=2-3x$; 3) $y=x^2-3x+2$;

4) $y=-3x^2+5x-2$; 5) $y=(3x-10)(x+6)$; 6) $y=\frac{6-x}{x}$;

7) $y=\frac{4+2x}{5+x}$; 8) $y=\frac{6}{(x-1)(x+8)}$.

0.45. Функциянинг аниқланиш соҳасини, қийматлар тўпламини, нолларини (мавжуд бўлса), узилиш нуқталарини, ўзгармас ишорали оралиқларини, ўсиш ва камайиш оралиқларини, экстремумларини топинг ва грфигини ясанг:

1) $y=x^2+2$; 2) $y=3-4x^2$; 3) $y=3x^2-6x+1$;

4) $y=\frac{5}{x-2}$; 5) $y=\frac{x}{x+1}$; 6) $y=\frac{x+1}{x}$;

7) $y=\begin{cases} x-1, \text{ агар } x\geqslant 0, \\ -x^2, \text{ агар } x<0; \end{cases}$ 8) $y=\begin{cases} x^2, \text{ агар } x\geqslant 0, \\ \frac{1}{x-1}, \text{ агар } x<0. \end{cases}$

0.46. a нинг қандай қийматларида $x^2-(a^2-2a-3)x-a^3+3a+2\leqslant 0$ тенгсизликнинг ечимлари $[-2;\ 4]$ оралиқда бўлади?

0.47. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

0.48. Тенгсизликлар тенг кучли бўладими:

1) $\frac{x-3}{x+1}\geq 0$ ва $(x-3)(x+1)\geqslant 0$;

2) $\frac{x+5}{x-8}<0$ ва $(x+5)(x-8)<0$?

0.49 — 0.51-мисоллардаги тенгламаларни ечинг.

0.49. 1) $\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}$;

2) $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$;

3) $\dfrac{9}{4x^2+1}-\dfrac{8x+29}{16x^4-1}=\dfrac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$;

4) $\dfrac{\frac{1}{6}}{x^3+3x^2+x+3}+\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{\frac{1}{6}}{x^3-3x^2-x+3}$.

0.50. 1) $28x^3+3x^2+3x+1=0$;

2) $126x^3-3x^2+3x-1=0$;

3) $(x^2+4x)(x^2-6x+8)=(x^3-16x)(x^2+2x-8)$;

4) $(x^2+5x)(x^2-3x-28)=(x^3-16x)(x^2-2x-35)$.

0.51. 1) $|x-2|x^2=10-5x$; 2) $(x^2-5x+6)^2+3|x-3|=0$;

3) $(7x^2-3x-4)^2+|7x+4|(x^2-1)^2=0$; 4) $6x-12=x^2|x-2|$.

0.52. Илдизлари $\sqrt{2}$ ва $-\sqrt{3}$ сонларга тенг бўладиган қилиб, биквадрат тенглама тузинг.

0.53. a ва b параметрларнинг қандай қийматларида $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$ тенгламанинг учта бутун илдизлари ўзаро тенг бўлади?

0.54. a параметрнинг қандай қийматларида $(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$ тенгламанинг учта илдизи мавжуд бўлади?

0.55. $y=\dfrac{x-13}{x^2+x-6}$ функциянинг графиги x нинг қандай қайматларида $0 \le y \le 1$ оралиққа тегишли бўлади?

0.56. 100 дан кичик бўлувчилари бўлмайдиган тўрт хонали соннинг туб сон бўлишини исботланг.

0.57. а) $\underbrace{77\ldots7}_{2004}3$ сони; б) $100^{100}-1$ сони мураккаб сонлар бўлишини кўрсатинг.

0.58. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$;

3) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 4) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$;

5) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; 6) $2\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

0.59. Касрнинг махражидаги иррационалликдан халос этинг:

1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$; 3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

1-бўлим. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ТЕНГЛАМАЛАР, ТЕНГСИЗЛИКЛАР ВА УЛАРНИНГ СИСТЕМАЛАРИ

1.1. Икки ўзгарувчили тенгламалар ва уларнинг геометрик маъноси

Мавзуни ўрганиш давомида сизлар:

- Икки ўзгарувчили чизиқли ва чизиқли бўлмаган тенгламаларни фарқлашни биласиз;
- Икки ўзгарувчили тенгламаларнинг геометрик маъносини аниқлай оласиз.

Икки ўзгарувчили тенгламалар

Жадвални тўлдиринг:

Гуруҳларда ишлаш

Функция	Номи	Тенгламага келтириш	Тенгламанинг номи
1	2	3	4
$y=kx+n$	Чизиқли функция	$kx-y+n=0$	Икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар
	Квадрат функция		
		$ax^3-y=0$	

давоми

1	2	3	4
$y=\frac{k}{x}$			
			Радиуси R *ва* маркази (a,b) нуқтада жойлашган айлананинг тенгламаси

- Топилган тенгламаларнинг даражаларини аниқланг.
- Тенгламаларнинг ҳаммасини ҳам чизиқли тенглама деб аташ мумкинми? Улар орасидан чизиқли бўлмаган тенгламаларни кўрсатинг.
- Тенгламаларнинг ҳаммаси функционал боғланишни аниқлайдими?
- Даража кўрсаткичига боғлиқ бўлган қандай тенгламаларни чизиқли эмас деб аташ керак?

Жавобларингизни асослаб, синф билан таҳлил қилинг. Ҳулоса чиқаринг. Кўрсатилган функциялар билан тенгламаларга аниқ мисол келтириб, уларнинг графикларини ясанг.

Шундай қилиб, тенгламанинг таркибида битта эмас, бир нечта ўзгарувчи бўлса, бундай тенглама ***кўп (бир нечта) ўзгарувчили тенглама*** *деб аталади.* Масалан, $x^2+y^2+z^2-xy+xz+2yz+2=0$, $xyz+9=0$ тенгламаларнинг ҳар бири –уч ўзгарувчили тенгламалар. $x^2+2xy-x+2=0$, $3xy=4$, $2x+y^2-y=0$ – икки ўзгарувчили тенгламалар. Кўп ўзгарувчили тенгламаларнинг даражаларини аниқлаш учун таркибидаги ҳар бир қўшилувчидаги ўзгарувчиларнинг даражалари қўшилади. Ҳосил бўлган натижадаги сонлар таққосланиб, уларнинг энг каттаси аниқланади. Ушбу аниқланган сон **тенгламанинг даражаси** деб аталади. Масалан, $x^2+y^2+xyz+2z-2=0$ – уч ўзгарувчили учинчи даражали тенглама, $xy^2+x^2-4=0$ – икки ўзгарувчили учинчи даражали тенглама, $x^2+3xy-y+4=0$, $2xy=5$, $2x-y^2-y=0$ – икки ўзгарувчили иккинчи даражали тенгламалар.

Умуман, икки ўзгарувчили чизиқли тенглама

$$\boldsymbol{ax+by+c=0} \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади. Бунда a, b, c — берилган ҳақийқий сонлар ва a ва b коэффициентларнинг иккаласи бир вақтда нолга тенг эмас. Агар $b\neq0$ бўлса, (1) тенглама $y=kx+n$ кўринишга осонгина келтириш мумкин. Бунинг учун қуйидаги белгилашларни киритиш етарли:

$$k=-\frac{a}{b}; \quad n=-\frac{c}{b}.$$

Икки ўзгарувчили иккинчи даражали тенглама

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k=0 \qquad (2)$$

кўринишда ёзилади. Бунда a, b, c, d, e, k — берилган сонлар ва a, b, c сонларнинг ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмайди деб ҳисоблаймиз, чунки $a=b=c=0$ бўлганда (2) тенглама иккинчи даражали тенглама бўлмайди. Тенгламадаги k сони *озод ҳад* деб аталади.

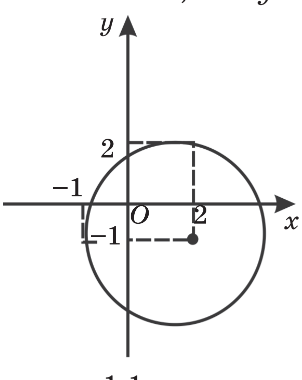
1.1.2. Икки ўзгарувчили тенгламаларнинг геометрик маъноси

Юқорида айтиб ўтганимиз каби, x ва y ўзгарувчилар орасида ўрнатилган ҳар бир функционал боғланишни икки ўзгарувчили тенглама деб қараш мумкин. Бундай боғланишларнинг геометрик маъноси мос функциянинг графиги билан аниқланишини яхши биламиз. Масалан, икки ўзгарувчили чизиқли тенгламанинг геометрик маъноси (графиги) тўғри чизиқ, $y=ax^2+bx+c$ тенгламанинг графиги- парабола $xy=k$ тенглама билан эса гипербола аниқланишини яхши биламиз. Шу билан бир қаторда функционал боғланишларни аниқламайдиган икки ўзгарувчили тенгламалар ҳам учрайди.

Масалан, $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ тенгламани кўриб чиқамиз. Тенгламанинг чап томонидаги ифодани шакл алмаштирсак, $x^2+y^2-4x+2y-4=x^2-4x+4+y^2+2y+1-9=(x-2)^2+(y+1)^2-9$. Берилган тенглама

$$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2 \qquad (3)$$

кўринишга келтирилиб соддалаштирилади. Oxy Декарт координаталар системасида (3) тенглама билан маркази $(2;-1)$ нуқта бўлган радиуси 3 га тенг айлана аниқланади (1.1-расм).



1.1-расм

Умуман олганда икки ўзгарувчили тенглама

$$F(x;\ y)=0 \qquad (4)$$

кўринишда ёзилади. Бунда $F(x;\ y)$ — x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган ифода. Масалан, агар $F(x;\ y)= x^2-2y$ бўлса, (4) тенглик билан $x^2-2y=0$ тенглама, $F(x;y)=\frac{2x-y}{x+y}-\frac{3-y}{x-y}$ бўлса, $\frac{2x-y}{x+y}=\frac{3-y}{x-y}$ тенглама аниқланади ва ҳоказо.

Агар x_0 ва y_0 сонлар (4) тенгламани сонли айниятга айлантирса, $(x_0;\ y_0)$ сонлар жуфти шу тенгламанинг ечими (илдизлари) деб аталади. (4) тенгламанинг барча ечимлар тўплами координаталар текислигида маълум бир фигурани аниқлайди. Бу фигура (4) тенгламанинг **графиги** деб аталади. Масалан, (2; 2) ва (−1;−1) сонлар жуфти (3) тенгламани сонли айниятга айлантиришини, айланада ётмайдиган (2; 0) сонлар жуфти эса (3) тенгламани қаноатлантирмаслигини текшириш осон. У ҳолда, (2; 2), (−1; −1) сонлар жуфти (3) тенгламанинг ечимлари. (2;0) сонлар жуфти унинг ечими бўлмайди. Тенгламанинг бу ечимлар тўплами координаталар текислигида маълум бир эгри чизиқни аниқлайди. Шу билан бир қаторда ечимлари саноқли бўлган ёки ҳақиқий сонлар тўпламида умуман ечимлари бўлмайдиган икки ўзгарувчили тенгламалар ҳам учрайди. Масалан, $(x-3)^2+(y+1)^2=0$ тенгламанинг ягона ечими мавжуд: $x=3$, $y=-1$, ал $x^2+y^2+9=0$ тенгламанинг эса ҳақиқий сонлар тўпламида ечимлари мавжуд эмас.

1. Қандай тенгламалар бир нечта ўзгарувчили тенгламалар деб аталади? Мисол келтиринг.
2. Тенгламанинг даражаси деганда нимани тушунасиз? Мисол келтиринг.
3. Икки ўзгарувчили чизиқли тенглама билан иккинчи даражали тенгламаларнинг умумий кўринишини ёзиб кўрсатинг.
4. Икки ўзгарувчили тенгламаларнинг геометрик маъноси қандай?
5. Икки ўзгарувчили тенгламанинг ечими деганда нимани тушунасиз?

АМАЛИЙ ИШ

$C(4;\ 3)$ нуқта берилган.
1. Маркази C нуқтада жойлашган ва координаталар бошидан ўтувчи айлана ясанг.
2. Айлананинг радиусини чизғич билан ўлчаб, аниқланг.
3. Ўлчов натижаларининг аниқлигини аналитик усулда текширинг, яъни айлананинг радиусини нуқталар орасидаги масофани топиш формуласи орқали ҳисобланг.
4. Айлана тенгламасини ёзинг.
5. Қавсларни очиб, айлананинг тенгламасини иккинчи тартибли тенгламаларнинг умумий кўринишига келтиринг. Ҳосил бўлган тенгламани озод ҳади ҳақида хулоса чиқаринг.

МАШҚЛАР

A

1.1. Тенгламанинг даражасини аниқланг:

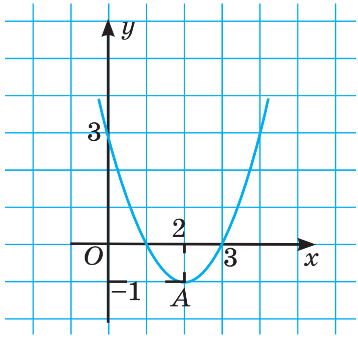
1) $4x^6-2x^7+x-1=0$; 2) $5y^2-y-2=0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y=0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2=11$;
5) $xy+xz+zy=1$; 6) $xyz-x^2-y^2-z^2=2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z=z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2=xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3=x^2y^3z^4+1$; 10) $xyz^2+x^3-3xy^2-2z+9=0$.

1.2. Маркази $(x_0;\ y_0)$ нуқтада ётган, радиуси R бўлган айлананинг тенгламасини ёзинг: 1)$(0;\ 0)$, $R=4$; 2) $(-1;\ 0)$, $R=2$; 3) $(2;\ 3)$, $R=3$.

1.3. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиб, графигини ясанг:
1) $y=3x-5$; 2) $y=-0,7x+1$; 3) $2x+y-4=0$;
4) $x-2y+2=0$; 5) $3x+2y-4=0$; 6) $-5x+3y+16=0$.

1.4. Тенгламанинг графигини ясанг:
1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$; 3) $(x+2)^2+y^2=4$;
4) $y=(x-2)^2-1$; 5) $y=x^2-4x+3$; 6) $y=x^2-2$.

▶ 5) $y=x^2-4x+3 \Rightarrow y=x^2-4x+4-1 \Rightarrow y=(x-2)^2-1$. Бу тенглама орқали текисликда учи $A(2;-1)$ нуқтада бўлган ва тармоқлари юқорига йўналган парабола аниқланади (1.2-расм). ◀



1.2-расм

1.5. $A(1;\ 4)$, $B(-1;\ 4)$, $C\left(\frac{1}{2};-8\right)$ нуқталардан қайсилари $xy=4$ тенгламанинг графигига тегишли бўлади?

1.6. Абсциссаси 3 га тенг ва
1) $x^2-2xy+2y^2+x-6y+6=0$; 2) $2xy=9$;
3) $3x-2y+4=0$; 4) $x^2-3x-y+2=0$ тенгламанинг графигига тегишли нуқтанинг ординатасини топинг.

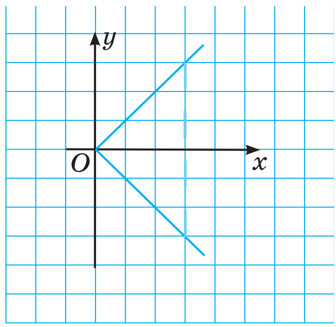
B

1.7. Тенгламанинг графигини ясанг:
1) $y-|x|=0$; 2) $|x|+y=5$; 3) $|y|-x=0$; 4) $x+|y|=5$.

▶ 3) $|y|-x=0 \Rightarrow |y|=x \Rightarrow x \geq 0$.

Агар $y \geqslant 0$ бўлса, $y=x$, $y<0$ бўлса, $-y=x$. Бундан берилган тенглама қуйидаги тенгламалар тўпламига тенг кучли:

$|y|=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x, x \geq 0 \\ y=-x, x \geq 0 \end{array}\right]$. Унинг графиги 1.3-расмда тасвирланган. ◀



1.3-расм

1.8. Айлананинг радиуси билан марказининг координаталарини топинг:
1) $x^2+y^2-6x+8y+9=0$; 2) $x^2+y^2+3x-4y=0$;
3) $x^2+y^2+7y=0$; 4) $x^2+y^2-x-y-3=0$.

1.9. Тенгламанинг геометрик маъносини аниқланг:

1) $x^2+3x-y+7=0$; 2) $y^2+3y-x+7=0$;
3) $x^2+y^2-8x+7=0$; 4) $xy=2$.

1.10. Тенгламанинг графигини ясанг:

1) $2x^2-4x-y+5=0$; 2) $x^2+y^2-x+5y+\frac{1}{4}=0$;

3) $x^2+y^2-\frac{8}{3}y-\frac{20}{9}=0$; 4) $x^2-8x-y+13=0$.

1.11. Тенгламанинг графигини ясанг:

1) $xy=3$; 2) $xy=-3$; 3) $x(y-2)=-3$; 4) $(x+1)(y-2)=3$.

1.12. Параболанинг учини топинг:

1) $3x^2-2x+y-5=0$; 2) $2x^2+3x-y+5=0$.

1.13. Гиперболанинг асимптоталарининг тенгламасини ёзинг:

1) $xy-x+y=2$; 2) $xy+3x-2y=8$.

C

1.14–1.18-машқларда берилган тенгламаларнинг графикларини ясанг.

1.14. 1) $|x|=y$; 2) $x=|y|$; 3) $|x|=|y|$.

1.15. 1) $x^2+y^2-3x-3y+2=0$; 2) $|x^2+y^2-3x-3y+4{,}5|=2{,}5$;
3) $x^2+y^2-3|x|-3|y|+2=0$; 4) $|x^2+y^2-3|x|-3|y|+4{,}5|=2{,}5$.

1.16. 1) $y=x^2-4x+3$; 2) $y=|x^2-4x+3|$;
3) $y=x^2-4|x|+3$; 4) $y=|x^2-4|x|+3|$.

1.17. 1) $y=x^2-1$; 2) $|y|=x^2-1$; 3) $|y|=|x^2-1|$.

1.18. 1) $xy=2$; 2) $|x|y=2$; 3) $x|y|=2$; 4) $|x|\cdot|y|=2$.

1.19. n ва m параметрларнинг қандай қийматларида $y=nx^2+mx$ параболанинг учи (2; 3) нуқтада жойлашади?

Такрорлашга доир машқлар

1.20. $y=\frac{2}{x}$ функциянинг графигини ясанг. Шу графикнинг $y=2x$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини топинг.

1.21. Агар $3<a<4$ ва $4<b<5$ бўлса, 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a\cdot b$;

4) $\dfrac{a}{b}$ ифодани баҳоланг.

1.22. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3y - x = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + y = 5, \\ x + 4y = 5. \end{cases}$

1.2. Икки ўзгарувчили чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ечиш

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Икки ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасини ечиш усулларини такрорлаб, ёдингизга туширасиз;
- Икки ўзгарувчили чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ечиш усулларини ўзлаштирасиз.

1.2.1. Чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллари

Сиз 6-синфда икки ўзгарувчили иккита чизиқли тенгламалар системасини ечишни тўлиқ кўриб чиқдингиз. Энди шу ўтган материалларни такрорлаб, ёдимизга туширамиз.

1-мисол (ўрнига қўйиш усули). $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ системани ечамиз.

Бу *усулнинг маъноси: системанинг битта тенгламасидан ўзгарувчилардан бирини иккинчиси орқали ифодалаб, уни системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, ўзгарувчиларнинг қийматларини топиш.* Берилган системанинг биринчи тенгламасидан, хни у орқали ифодаласак, $x=2y+3$ тенгликка эга бўламиз. Шу системанинг иккинчи тенгламасидаги x нинг ўрнига қўямиз: $2(2y+3)+y=1$. Бундан $5y+6=1 \Rightarrow y=-1$. Энди $x=2y+3$ тенгламадаги y нинг ўрнига -1 ни қўйиб, x нинг қийматини топамиз: $x=1$.

Жавоби: $x=1$, $y=-1$.

Умуман амалда тенг кучлилик белгиларидан фойдаланиб, мисол қуйидагича ечилади:

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ 2(2y + 3) + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ 5y + 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Жавоби: $(1; -1)$.

2-мисол (алгебраик қўшиш усули). Энди шу системани бошқа усул билан ечиб кўрамиз. *Алгебраик қўшиш усулининг асосий мазмуни: системанинг тенгламаларини маълум бир сонларга кўпайтириб, уларни қўшиш (ёки айириш) орқали ўзгарувчиларнинг биридан қутилади. Ҳосил бўлган тенгламадан битта ўзгарувчини аниқлаб, кейин ундан фойдаланиб, берилган системанинг битта тенгламасидан иккинчи ўзгарувчининг қиймати аниқланади.*

$$\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=3, \\ 4x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 2\cdot 1+y=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-1.$$

Жавоби: (1; –1).

Бошқа икки ўзгарувчили тенгламалар системасини исталган кўрсатилган иккита усулдан биридан фойдалансак, осон ечилади. Бу усуллардан чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ечишда ҳам фойдаланилади.

1.2.2. Иккинчи даражали тенгламалар системасини ечиш

Агар тенгламалар системасининг битта тенгламасининг даражаси 2, иккинчи тенгламасининг даражаси 2 дан ортиқ бўлмаса, бу тенгламалар системаси иккинчи даражали тенгламалар системаси деб аталади, Масалан

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x^2+3y^2+xy=4, \\ 2x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Бу иккинчи даражали тенгламалар системалари. Тенгламалар системасининг ***ечими*** деб шу системанинг ҳар бир тенгламани айниятга айлантирадиган x билан y нинг қийматларига айтилади. Масалан,

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=1 \end{cases}$$

Тенгламалар системасининг иккита ечими мавжуд: 1) $x_1=-1$, $y_1=-2$; 2) $x_2=2$, $y_2=1$. Бу сонларнинг берилган системасининг ечими бўлишини текшириб, ишонч хосил қиламиз:

$$1)\quad \begin{cases} (-1)^2+(-2)^2=5, \\ (-1)-(-2)=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 1=1; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 2^2+1^2=5, \\ 2-1=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 1=1. \end{cases}$$

Иккинчи даражали тенгламалар системасини ечишнинг бир нечта усули мавжуд. Энди шу усулларни мисоллар ёрдамида тушунтирамиз.

3-мисол. Бир ўзгарувчини иккинчиси орқали ифодалаш.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$ системани ечамиз.

Иккинчи тенгламада y ни x орқали ифодаласак, $y=3x-1$. Уни биринчи тенгламага олиб бориб қўйсак,

$$x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0 \text{ ёки } x^2-1=0.$$

Бу тенгламанинг иккита илдизи мавжуд: $x_1=-1$, $x_2=1$. y нинг мос қийматларини $y=3x-1$ тенгламадан топамиз: $y_1=-4$, $y_2=2$.

Шундай қилиб, $x_1=-1$, $y_1=-4$ ва $x_2=1$, $y_2=2$.

Баъзи бир ҳолларда бир ўзгарувчини иккинчиси орқали ифодалашнинг ўрнига тенгламалар системасини ечишнинг бошқа усулларидан фойдаланган маъқул. Шундай усуллардан бири Виет теоремасидан фойдаланиш. Бунга бир мисол мисол келтирамиз.

4-мисол. Тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Виет теоремасига кўра берилган системани қаноатлантирувчи x ва y сонлар $z^2-5z+6=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади. Бу тенгламанинг илдизлари эса $z_1=2$, $z_2=3$ ва берилган системада x билан y тенг имкониятли (симметрик) бўлгани учун уларни z_1 билан z_2 нинг исталгани билан тенглаштирамиз. Бундан системанинг иккита ечими мавжуд бўлади: $x_1=2$, $y_1=3$ ва $x_2=3$, $y_2=2$.

5-мисол. Тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10. \end{cases}$$

Берилган системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = 10. \end{cases}$$

У ҳолда x билан $(-y)$ сонлар $z^2-7z+10=0$ тенгламанинг илдизлари бўлади. Бундан мисолнинг жавоби қуйидагича: $x_1=2$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=-2$.

6-мисол. Тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

1-усул. Бу системанинг иккинчи тенгламасини 2 га кўпайтириб ҳосил бўлган тенгламани биринчисига қўшсак, $(x+y)^2=36$ ёки $x+y=\pm6$ тенгламаларни оламиз. У ҳолда берилган тенгламалар системасини қуйидаги иккита системага ажратиш мумкин:

$$1) \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Буларнинг ҳар бири 2-мисолдаги система каби ечилади. Шундай қилиб, мисонинг 4 та ечими мавжуд: $x_1=-4$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=4$.

2-усул. $x^2=u$, $y^2=v$ деб белгиласак, берилган системани қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} u + v = 20, \\ uv = 64. \end{cases}$$

2-мисолда кўрсатилган усул бўйича $u_1=16$ бўлса, $x_1=\pm4$; $v_1=4$ бўлса, $y_1=\pm2$; $u_2=4$ бўлса, $x_2=\pm2$; $v_2=16$ бўлса, $y_2=\pm4$ илдизларга эга бўламиз.

7-мисол. Ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгламасини 5 га, иккинчисини 3 га кўпайтириб, уларнинг иккинчисидан биринчисини айирсак, $x^2+2xy-8y^2=0$ тенгламани оламиз. $y=0$ қиймат системанинг ечими бўла олмайди.

Бундан $y \neq 0$ деб олиб, бу тенгламани y^2 га бўлсак, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 8 = 0$. Бундан $\frac{x}{y} = z$ белгилашлар киритиб, $z^2+2z-8=0$ тенгламани оламиз. Унинг илдизлари $z_1=-4$, $z_2=2$ эканлигидан, $\frac{x}{y} = -4$, $\frac{x}{y} = 2$ ёки $x=-4y$, $x=2y$. У ҳолда берилган система қуйидаги иккита системага ажратилади:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = -4y \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Бу системаларни 3-мисол каби ечсак, мисолнинг 4 та ечимини оламиз:

$$x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}}, \quad x_{3,4} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad y_{3,4} = \pm 1.$$

1. Тенгламалар системасини ечишда фойдаланиладиган ўрнига қўйиш ва алгебраик қўшиш усулларининг маъноси қандай?
2. Қандай тенгламалар системаси иккинчи даражали тенгламалар системаси деб аталади?
3. Квадрат тенгламалар системасини ечишда қандай усуллардан фойдаланилади?
4. Виет теоремаси орқали ечиладиган тенгламалар системасининг умумий кўриниши қандай? Уни ўрнига қўйиш усули билан ечиш мумкинми?

АМАЛИЙ ИШ

Битта координаталар системасида $y=x+2$ тўғри чизиқ билан $y=4-x^2$ параболани ясанг ва уларнинг кесишиш нуқталарининг координаталарини тақрибан аниқланг.

Олинган жавобларда $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ y = x + 2 \end{cases}$ системанинг ечимларини аналитик усул билан ечиш орқали текширинг.

МАШҚЛАР

А

1.23–1.38-мисолларда кўрсатилган тенгламалар системасини ечинг.

1.23. 1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 39, \\ x + y = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y = -12, \\ 3x + 4y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ -x + 7y = 13. \end{cases}$

1.24. 1) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=4, \\ xy=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=16, \\ x-y=6. \end{cases}$

1.25. 1) $\begin{cases} x^2-y^2=-21, \\ x+y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ x-y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+4y^2=34, \\ x+y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1, \\ x+y=2. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2-y^2=-21, \\ x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=-21, \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=7, \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-5. \end{cases}$

Жавоби: $x=2$, $y=-5$.

1.26. 1) $\begin{cases} x+2y=13, \\ xy=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=2, \\ xy=12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y, \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$

1.27. 1) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64, \\ x-y=-7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0, \\ x-y+1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2+5y^2=16, \\ x^2+5y^2=25; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10. \end{cases}$

1.28. 1) $\begin{cases} 2x-3y=-18, \\ xy=-12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=-19, \\ xy=-6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=65, \\ xy=28. \end{cases}$

1.29. 1) $\begin{cases} y-x=1, \\ x+|y|=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-1|+y=4, \\ x+y=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=-1. \end{cases}$

1.30. 1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ x+y-3\sqrt{xy}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-9=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ (x+y)^2-3xy=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ 25-3xy=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=3, \\ x=3, y=2. \end{array} \right.$

Жавоби: (2;3), (3;2).

1.31. 1) $\begin{cases} 2x^2-3xy-19y^2=25, \\ x^2-6y^2=250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2-6xy+12y^2=108, \\ x^2-\frac{5}{6}xy+\frac{7}{8}y^2=18. \end{cases}$

1.32. 1) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=3, \\ x+y=2. \end{cases}$

1.33. 1) $\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1, \\ x+y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x=2, \\ \frac{10x+y}{xy}=3. \end{cases}$

1.34. 1) $\begin{cases} xy=36, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}, \\ x+y=20. \end{cases}$

C

1.35. 1) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x+y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+xy=12, \\ xy-y^2=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3-y^3=8, \\ x-y=2. \end{cases}$

1.36. 1) $\begin{cases} \frac{5}{x^2+xy}+\frac{4}{y^2+xy}=\frac{13}{6}, \\ \frac{8}{x^2+xy}-\frac{1}{y^2+xy}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2}{x^2+3xy}+\frac{3}{y^2-xy}=\frac{25}{14}, \\ \frac{3}{x^2+3xy}-\frac{2}{y^2-xy}=-\frac{4}{7}. \end{cases}$

1.37. 1) $\begin{cases} \frac{x+2y}{x-y}+\frac{x-2y}{x+y}=4, \\ x^2+xy+y^2=21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x-9y}{x+y}+\frac{2x+y}{x-y}=4, \\ x^2-y^2=48. \end{cases}$

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}+\dfrac{x-2y}{x+y}=4, \\ x^2+xy+y^2=21; \end{cases} \left| \begin{matrix} x \neq y \\ x \neq -y \end{matrix} \right| \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(x+y)+(x-2y)(x-y)=4(x^2-y^2), \\ x^2+xy+y^2=21, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4y^2, \\ x^2+xy+y^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2y, \\ x^2+xy+y^2=21, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2y, \\ x^2+xy+y^2=21 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 2\sqrt{3}, \\ y=\pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm 2\sqrt{7}, \\ y=\mp\sqrt{7}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Жавоби: $\left(\pm 2\sqrt{3};\pm\sqrt{3}\right),\left(\pm 2\sqrt{7};\mp\sqrt{7}\right)$

1.38. 1) $\begin{cases} x+y+xy=-1, \\ x^2+xy+y^2=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2-x^2y^3=36, \\ 2x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

1.39*. a нинг қандай қийматларида 1) $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ системанинг ягона илдизи мавжуд бўлади?

1.40*. a параметрнинг қандай қийматларида $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a \end{cases}$ тенгламалар системасининг ягона ечими мавжуд?

Такрорлашга доир машқлар

1.41. $y=x^2-4x+3$ функциянинг графиги 1) $A(2;-1)$; 2) $B(2;1)$ нуқта орқали ўтади?

1.42. Ясашларни бажармасдан, 1) $y=x^2+4$; 2) $xy=-4$ функциянинг графиги қайси координаталар чоракларида жойлашганини айтинг.

1.3. Тенгламалар системаси тузиш ёрдамида ечиладиган матнли масалалар

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Матнли масалаларни тенгламалар системаси ёрдамида ечишни ўрганасизлар;
- Масала шарти бўйича математик модель тузиш малакаларини мустаҳкамлайсизлар.

Кўпгина матнли масалаларда номаълумлар сони бир нечта бўлади. Бундай масалаларни ечишда номаълум катталикларни ўзгарувчилар орқали белгилаб, масала шартини қаноатлантирувчи бир нечта ўзгарувчили (кўп ҳолларда иккита ўзгарувчи) тенгламалар системаси тузилади. Тузилган тенгламалар системасини ечиб, берилган мисолнинг жавоби олинади. Энди ушбу айтилганларни мисоллар орқали кўриб чиқамиз.

1-мисол. Икки хонали соннинг биринчи рақами иккинчисидан икки марта кичик. Уларнинг йиғиндиси 9 га тенг. Шу икки хонали сонни топиш керак.

Бизга керак бўлган икки хонали соннинг биринчи рақами x, иккинчи рақамини y десак, масала шартига кўра $y=2x$ ва $x+y=9$ бўлиши керак. Шундай қилиб, биз қуйидаги икки ўзгарувчили тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Бу система берилган матнли масаланинг математик модели бўлиб ҳисобланади. Унинг ечами: $x=3$, $y=6$.

Жавоби: 36.

2-мисол. Хиёбон учун ажратилган ер майдонининг юзи 600 $м^2$. Уни уч марта айлантириб ўраб чиқиш учун 420 м сим керак бўлади. Шу ер майдонининг эни ва бўйини топиш керак.

x ва y орқали ер майдонининг мос равишда эни билан бўйини белгиласак, масала шарти бўйича $x \cdot y=600$ тенгликнинг бажарилиши шарт. Бу ерда сим билан уч марта ўраб чиқиш учун 420 м сим керак. Қўршовни бир марта айлантириб ўраш учун 420:3=140 м сим керак. Демак, ер майдонининг периметри 140 м. У ҳолда, $2x+2y=140$, яъни $x+y=70$ тенглик бажарилиши керак. Шундай қилиб, масаланинг математик модели сифатида икки ўзгарувчили тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} xy = 600, \\ x + y = 70. \end{cases}$$

Виет теоремасига кўра $x=10$, $y=60$.

Жавоби: 10 м, 60 м.

3-мисол. Иккита тракторчи экин майдонини биргаликда ҳайдаса, биринчи тракторчи ёлғиз ўзи ҳайдаган вақтдан 18 соат тезроқ, иккинчи тракторчи ёлғиз ўзи ҳайдаган вақтдан 32 соат тезроқ ҳайдаб бўлган бўлар эди. Шу ерни тракторчиларнинг ҳар бири алоҳида қанча вақтда ҳайдаб бўлар эди?

Масалани ечиш учун ўзгарувчи киритамиз: ер майдонини 1-тракторчи t_1 соатда, иккинчиси t_2 соатда, иккаласи биргаликда t соатда ҳайдаб бўлсин. Масала шартига кўра қуйидаги математик модель олинади:

$$\begin{cases} t_1 - t = 18, \\ t_2 - t = 32, \\ \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Бундан $t_1=t+18$, $t_2=t+32$ эканлигидан, учинчи тенгламадан $\dfrac{1}{t+18} + \dfrac{1}{t+32} = \dfrac{1}{t} \Rightarrow t^2 + 32t + t^2 + 18t = t^2 + 50t + 576 \Rightarrow$ $t^2 = 576 \Rightarrow t = \pm 24$.

Бу математик моделнинг ечими. Масала шартига кўра $t=24$ соат. Бундан: $t_1=42$ соат, $t_2=56$ соат.

Жавоби: 42 соат; 56 соат.

Бу масалада $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t}$ тенгламанинг қандай тузилганини тушунтирайлик. Бундай тенгламалар иш унумдорлиги билан бевосита боғланган. Масалан, 3-мисолда берилган ер майдонининг умумий майдони S бўлса, у ҳолда биринчи тракторчининг шу ерни ҳайдаб чиқиш “тезлиги” (иш унумдорлиги) $\frac{S}{t_1}$, иккинчисиники $\frac{S}{t_2}$. Иккаласи биргаликда ишлагандаги иш унумдорлиги $\frac{S}{t}$. Биргаликда ишлаганда уларнинг иш унумдорлиги қўшилади:

$\frac{S}{t_1}+\frac{S}{t_2}=\frac{S}{t}$. Бу тенгламани S га қисқартирсак, $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}$.

АМАЛИЙ ИШ

1) $\begin{cases} m+n=11, \\ mn=28, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3t_1=2t_2, \\ \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{3} \end{cases}$

тенгламалар системаси ёрдамида ечиладиган матнли масалалар тузинг ва уни ечинг.

МАШҚЛАР

А

1.43. Тўғри тўртбурчакнинг эни бўйидан 3 см қисқа, уларнинг йиғиндиси 27 см. Тўғри тўртбурчакнинг юзасини топинг.

1.44. Боғда ишлаб юрган Нурлан ва Самат чўнтакларига олма солиб чиқишди. Улар кўчада Берикни учратиб, Нурлан унга битта олмасини, Самат 2 та олмасини берди. Натижада уччаласининг олмалар сони бир хил бўлди. Нурлан билан Саматнинг ҳар бири боғдан нечта олмадан олиб чиқди?

1.45. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 10 см, катетларининг йиғиндиси 14 см. Шу учбурчакнинг юзини топинг.

1.46. Икки хонали сonнинг биринчи рақами унинг иккинчи рақамидан 4 та ортиқ. Рақамларининг кўпайтмаси 21 га тенг. Шу икки хонали сонни топинг.

Дастлаб масаланинг математик моделини тузамиз. $\overline{xy}$ бизга керак бўлган икки хонали сон десак, масала шартига кўра $x=y+4$ ва $x \cdot y=21$ бўлиши керак. Масаланинг математик модели система кўринишида ёзилади:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Энди шу системани ечамиз:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ (y + 4)y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4, \\ y^2 + 4y - 21 = 0. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламанинг илдизлари: $y_1=3$, $y_2=-7$. У ҳолда $x_1=7$, $x_2=-3$. Бунда $x_2=-3$, $y_2=-7$. Бу масала шартига зид, чунки рақам манфий бўлмайди.

Жавоби: 73.

1.47. Учта қўй билан битта сигир кунига 11 кг ем ейди, битта қўй билан учта сигир кунига 17 кг ем ейди. Кунига битта қўй неча килограмм ва битта сигир неча килограмм ем ейди?

1.48. Ўқувчи дўкондан 20 та дафтар ва битта кундалик сотиб олиб, унга 125 тенге тўлади. Агар битта дафтар билан битта кундаликни сотиб олиш учун 30 тенге тўлаш керак бўлса, кундалик билан дафтарнинг ҳар бирининг баҳоси қандай?

1.49. 24 та ишчидан тузилган бригада топшириқни 6 кунда бажаради.Шу топшириқни 36 та ишчидан тузилган бригада неча кунда бажаради?

В

1.50. Катер дарё оқими бўйлаб 15 км ва турғун сувда 4 км сузиб ўтган йўлига 1 соат вақт сарфлади. Агар дарё оқимининг тезлиги катернинг тезлигидан 4 марта кам бўлса, дарё оқимининг тезлигини топинг?

1.51. Чорва хўжалиги экин майдонини уч кунда шудгор қилди. Биринчи куни иккинчи кун билан таққослаганда 2310 га ортиқ ер шудгор қилинди. Учинчи куни қолган 330 га ер шудгор қилинди, бу бутун экин майдонининг 2% ини ташкил этади. Биринчи ва иккинчи кунларнинг ҳар бирида неча гектар ер шудгор қилинди?

1.52. Ҳовлида юрган товуқлар ва қўйларнинг оёқлари сони 40, бошларининг сони 15. Ҳовлида нечта товуқ билан нечта қўй юрибди?

1.53. Турбазага дам олишга келган 83 киши жами 25 та уй ва чодирларга жойлаштирилди. Агар ҳар бир уйга 5 кишидан, ҳар бир чодирга 2 кишидан жойлаштирилган бўлса, турбазада нечта уй бор? Нечта чодир бор?

1.54. Бир вақтда иккита аҳоли пунктидан бир-бирларига қарама-қарши йўналишда йўлга чиққан иккита велосипедчи бир-бирлари билан 3 соатдан кейин учрашди. Бир велосипедчи иккинчисига қараганда соатига 2 км йўл ортиқ йўл юргани ва бу аҳоли пунктлари орасидаги масофа 66 км эканлиги маълум. Ҳар бир велосипедчининг тезлигини топинг.

1.55. Катернинг тезлиги дарё оқимининг тезлигидан 16 км/соат ортиқ. Агар катер дарё оқими бўйлаб 18 км, дарё оқимига қарши 20 км юрган йўлига 2 соат сарфласа, дарё оқимининг тезлигини топинг?

x — катернинг турғун сувдаги тезлиги, y – дарё оқимининг тезлиги бўлса, масала шартига кўра $x=y+16$ бўлиши керак. Шу билан бир қаторда катер дарё оқими бўйлаб 18 км йўлни $\frac{18}{x+y}$ соатда, дарё оқимига қарши 20 км масофани $\frac{20}{x-y}$ соатда босиб ўтади. Масала шартига кўра $\frac{18}{x+y}+\frac{20}{x-y}=2$ соат. У ҳолда масаланинг математик модели система кўринишида ёзилади:

$$\begin{cases} x = y + 16, \\ \dfrac{18}{x+y} + \dfrac{20}{x-y} = 2. \end{cases}$$ Унинг ечими: $x=20$, $y=4$.

Жавоби: $x=20$ км/соат; $y=4$ км/соат.

1.56. Учта ер майдонининг юзаси 60 га. Биринчи майдоннинг юзаси жами юзанинг 25% га тенг. Иккинчи ва учинчи майдонлар юзаларининг нисбати 4:5. Майдонларнинг ҳар бирининг юзини топинг?

1.57. Турғун сувдаги тезлиги 25км/соат бўлган катер 2 соат ичида дарё оқими бўйлаб 30 км ва оқимга қарши 20 км йўл юрди. Дарё оқимининг тезлигини топинг?

1.58. A ва B темир йўл бекатлари орасидаги масофа 120 км. A дан B га қараб йўлга чиққан поезднинг ортидан 3 соат ўтгандан кейин тезлиги 10 км/соат ортиқ иккинчи поезд йўлга чиқди. Агар иккинчи поезд B бекатга биринчисига қараганда 2 соат кеч келса, иккинчи поезд A билан B бекатлар орасига қанча вақт сарфлаган?

C

1.59. Икки ишчи бир хил 134 та детал ясади ва унинг 65 тасини биринчи ишчи ясаб, бу ишга иккинчисига қараганда 1 кун кам вақт сарфлади. Агар биринчи ишчи иккинчи ишчидан ҳар куни иккита детал ортиқ тайёрлаган бўлса, улар биргаликда кунига нечта детал тайёрлаган?

1.60. Иккита бригада маҳсулотни 12 кунда йиғиб олади. Улар биргаликда 8 кун ишлагандан кейин биринчи бригада бошқа ишга ўтиб, қолган ишни иккинчи бригада 7 кунда тугатди. Шу бригадаларнинг ҳар бири алоҳида ишлаганда неча кунда йиғиб олар эди?

1.61. Иккита ишчи маълум бир деталларни ясаш топширилди. Биринчи ишчи 7 соат, иккинчиси 4 соат ишлагандан кейин ҳамма ишнинг $\frac{5}{9}$ қисми бажарилганлиги маълум бўлди. Улар биргаликда яна 4 соат ишлагандан кейин ҳамма ишнинг $\frac{1}{18}$ қисми қолди. Ҳамма топшириқни ҳар бир ишчи алоҳида бажарганда неча соатда бажариб бўлар эди?

1.62. Бир экин майдонидан 2880 ц буғдой, юзаси ундан кичик ер майдонидан 2160 ц буғдой йиғилди. Биринчи майдоннинг ҳар гектаридан иккинчисига қараганда 4 ц буғдой ортиқ йиғилди ва биринчи майдоннинг юзи иккинчисидан 12 га ортиқ. Ҳар бир майдоннинг юзини топинг.

1.63. Алюминий билан магнийнинг аралашмасида 22 кг алюминий бор. Бу аралашмага 15 кг магний қўшилиб, қайтадан эритилди. Бундан хосил бўлган аралашмадаги магнийнинг улуши 45% га ортди. Дастлабки аралашманинг массаси қандай бўлган?

1.64. Айлана бўйлаб ҳаракатланувчи иккита жисмдан биттаси иккинчисидан 2 с тезроқ ҳаракатланади. Агар иккита жисм бир хил йўналишда ҳаракатланиб, ҳар 60 с ўтган сайин учрашиб турса, уларнинг ҳар бири 1 с да айлананинг қандай қисмини босиб ўтади?

Такрорлашга доир машқлар

1.65. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

1.66. Тенгсизликни ечинг:

1) $|x-2| < 3$; 2) $x^2-5x+60 \geqslant 0$.

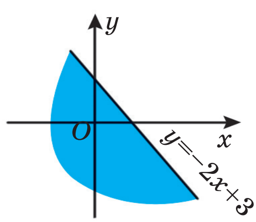
1.4. Икки ўзгарувчили тенгсизликлар

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Икки ўзгарувчили тенгсизликларни ечиш усули билан танишасизлар;
- Икки ўзгарувчили чизиқли бўлмаган тенгсизликлар системасини еча оласизлар.

1.4.1. Икки ўзгарувчили тенгсизликларни ечиш тушунчаси

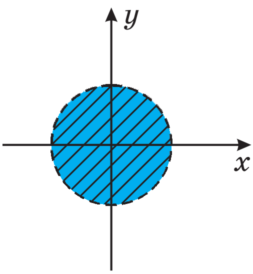
Энди икки ўзгарувчили тенгсизликларнинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Масалан, $2x+y-3 \leqslant 0$ тенгсизликни кўриб чиқамиз. $2x+y-3=0$ ёки $y=-2x+3$ тенглама билан тўғри чизиқ аниқланади (1.4-расм). Ал $2x+y-3 \leqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x;y)$ нуқталар тўплами эса шу тўғри чизиқдан пастда ёки шу тўғри чизиқда жойлашади. Масалан, (0;0) нуқта тенгсизликни қаноатлантиради: $2 \cdot 0+0-3<0$. ОУ ҳолда берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами – шу текисликдаги $y=-2x+3$ тўғри чизиқдан қуйида жойлашган ярим текислик.



1.4-расм

Шундай қилиб, икки ўзгарувчили тенгсизликларни ечиш деб, ўзгарувчиларнинг шу тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларнинг тўпламини аниқлашга айтилади. Масалан, тенгсизлик *x ва y* ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, $(x;y)$ сонлар жуфти координаталар текислигида нуқтани аниқлайди. *x ва y* ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган тенгсизликни ечиш деб координаталари шу тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x;y)$ нуқталар тўпламини текисликда тасвирлаб кўрсатишга айтилади. Энди $x^2+y^2<4$ тенгсизликни кўриб чиқамиз. $x^2+y^2=4$ тенглама билан радиуси 2 га тенг, маркази координаталар бошида жойлашган айлана аниқланади.

$(x_0;y_0)$ нуқта учун $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}<4$ тенгсизлик бажарилса, $(x_0;y_0)$ нуқтадан $(0;0)$ нуқтагача бўлган масофа 2 дан кичик дегани бўлади. У ҳолда, $(x_0;\ y_0)$ нуқта шу айлана билан чегараланган айлана ичида жойлашади. Шундай қилиб, $x^2+y^2<4$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами маркази координаталар бошида жойлашган, радиуси 2 га тенг бўлган доирани (доирани чегараловчи айлананинг нуқталари кирмайди, чунки тенгсизликнинг ишораси қатъий) аниқлайди (1.5-расм). У ҳолда $x^2+y^2<4$ тенгсизлик билан шу айлананинг ташқи қисми аниқланади. Яна бр нечта мисол кўриб чиқайлик.



1.5-расм

1.4.2. Икки ўзгарувчили тенгсизликлар системасини ечиш

Дастлаб қуйидаги мисолни кўриб чиқамиз.

1-мисол. Учлари $A(-1;0)$, $B(1;3)$, $C(4,-2)$ нуқталарда жойлашган учбурчакни тенгсизлик орқали аниқлаш керак.

Учбурчакнинг *AB*, *AC*, ва *BC* томонлари орқали ўтувчи тўғри чизиқларнинг формулаларини ёзамиз:

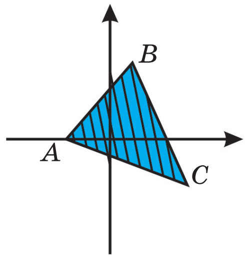
$$AB \text{ тўғри чизиқ: } 3x-2y+3=0 \Rightarrow y=\frac{3x+3}{2};$$

$$AC \text{ тўғри чизиқ: } 2x+5y+2=0 \Rightarrow y=\frac{-2x-2}{5};$$

$$BC \text{ тўғри чизиқ: } 5x+3y-14=0 \Rightarrow y=\frac{-5x+14}{3}.$$

Учбурчак *AB* ва BC тўғри чизиқлардан пастда, AC тўғри чизиқдан юқорида жойлашган,

$$\begin{cases} y \geq \dfrac{1}{2}(3x+3), \\ y \geq \dfrac{1}{5}(-2x-2), \\ y \leq \dfrac{1}{3}(-5x+14) \end{cases}$$ ёки $$\begin{cases} 3x-2y+3 \geq 0, \\ 2x+5y+2 \geq 0, \\ 5x+3y-14 \leq 0. \end{cases}$$

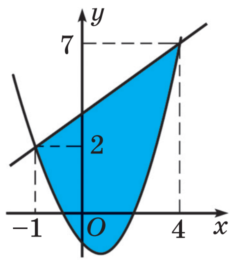


1.6-расм

тенгсизликлар системаси билан аниқлаймиз (1.6-расм).

2-мисол. $\begin{cases} x^2-y-2x-1 \leq 0 \\ x-y+3 \geq 0. \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан аниқланадиган фигуранинг графигини (тасвирини) ясаш керак.

$x^2-y-2x-1\leqslant 0$ тенгсизликни $y\geqslant x^2-2x-1$ ёки $y\geqslant (x-1)^2-2$ кўринишда ёзсак, бизга керак бўлган фигура $y=(x-1)^2-2$ параболадан юқорида жойлашади. $x-y+3\geqslant 0$ ёки $y\leqslant x+3$ эканлигидан фигура $y=x+3$ тўғри чизиқдан пастда жойлашади. У ҳолда фигура $y=(x-1)^2-2$ парабола билан ва $y\leqslant x+3$ тўғри чизиқ билан чегараланган (1.7-расм).



1.7-расм

ИЖОДИЙ ИШ

Бир аграр ишлаб чиқариш корхонасиги тегишли бўлган иккита сут комбинати бир-биридан 120 км масофада жойлашган. Уларнинг маҳсулот турлари, сифати ва тайёр маҳсулотларнинг нархлари ҳам бир хил. Комбинатлар жойлашган ер рельефи ўзига хосликларига боғлиқ равишда тайёр маҳсулотнинг истеъмолчиларга таклиф қилинадиган оҳирги нархига фақатгина ташиш ҳаражатингина таъсир қила олади. Биринчи комбинат маҳсулотининг бир бирлигини (масалан, битта қутининг) ташишга 6тг/км сарфланса, у ҳолда иккинчи комбинат шундай маҳсулот бирлигини ташиш учун 12 тг/км сарфлайди. Бу икки комбинат корхонага фойда келтирадиган қилиб, истеъмолчилар бозорни қандай бўлиб олганлари маъқул?

1. Биринчи комбинат А нуқтада, иккинчиси В нуқтада жойлашган, Оx ўқи $\overrightarrow{AB}$ вектор билан йўналишдош, координаталар, боши AB кесманинг ўртаси деб олиб, A ва B нуқталарнинг координаталарини топинг.

2. $P(x, y)$ нуқтада жойлашган дўкон учун иккита комбинатнинг маҳсулотлари бир хил нархда етказилади деб олиб, шундай барча P нуқталарнинг координаталари $(x-100)^2+y^2=80^2$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.
3. Иккинчи комбинатга тегишли соҳа қандай тенгсизлик билан аниқланади? Бу соҳа чизмада штрих чизиқлар билан кўрсатилган.
4. Математик йўл билан олинган жавобни (корхона маъмуриятига берилган таклифни) ҳаммага тушунарли қилиб тушунтириб беринг.

МАШҚЛАР

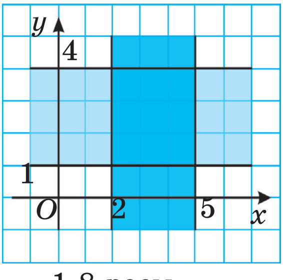
А

1.67 Тенгсизликларнинг даражасини ва ўзгарувчилар сонинини аниқланг:

1) $4x^6-2x^7+x-1<0$; 2) $5y^2-y-2>0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y\leqslant 0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2\geqslant 11$;
5) $xy+xz+zy>1$; 6) $xyz-x^2-y^2-z^2>2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z\geqslant z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2\leqslant xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3<x^2y^3z^4+1$.

1.68. Маркази $(x_0;\ y_0)$ нуқтада, радиуси R бўлган айлананинг тенгламасини, унинг ташқи ва ички қисмларини аниқлайдиган тенгсизликларни ёзинг: 1) (0;0), $R=4$; 2) (−1; 0), $R=2$; 3) (2;3), $R=3$.

1.69. Координаталар текислигида 1) $y>3x-4$; 2) $y\leqslant 5-x$; 3) $x+y\geqslant 2$; 4) $0{,}5y-x<3$ тенгсизликлар билан аниқланадиган фигурани тасвирланг.



1.8-расм

1.70. Тенгсизликнинг графигини ясанг:
1) $x^2+y^2\leqslant 81$; 2) $x^2+y^2>9$;
3) $(x-3)^2+(y+1)^2<25$.

1.71. Координаталар текислигида

1) $\begin{cases} y \le x+3, \\ y \ge 5-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 1 \le y \le 4 \end{cases}$ (1.8-расм);

3) $\begin{cases} -1 < x \leq 2, \\ -5 \leq y < -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 2x + 4 \geq 0, \\ 3y - 9x + 6 < 0 \end{cases}$

тенгсизликлар билан аниқланадиган фигурани тасвирланг.

B

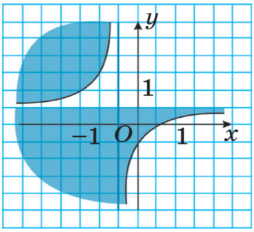
1.72. Маркази координаталар бошида жойлашган ва радиуси 3 га тенг бўлган доирага 1) $A(-1;\ 2)$; 2) $B(0;-5)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 4) $D(2;\ 2)$ нуқта тегишли бўладими?

1.73. Тенгсизликнинг графигини ясанг:

1) $y \leqslant 3x^2$; 2) $y \geqslant 2x^2-3$; 3) $y<x^2-3x+2$;

4) $x^2+y^2-2x+4y \geqslant 4$; 5) $xy<5$; 6) $y \geq \frac{x-1}{x+1}$.

6) Берилган ифодани шакл алмаштириб, уни $y \geq 1 - \frac{2}{x+1}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи соҳа 1.9-расмда бўялиб кўрсатилган.



1.9-расм

1.74. Тенгсизликлар системасининг графигини ясанг:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 64, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ y \geq 5 - x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \\ x \leq y. \end{cases}$

Қуйидаги тенгламалар билан аниқланган фигураларнинг графикларини ясанг **(1.75–1.76):**

1.75. 1) $2x-y=3$; 2) $x+y-2=0$; 3) $2|x|-y=3$;

4) $|x|+y-2=0$; 5) $2x-y=3,\ -1 \leqslant x \leqslant 3$;

6) $x+y=2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$; 7) $|x|+y=2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$.

1.76. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+(y+1)^2=9$;

3) $x^2+y^2-4x+6y=12$; 4) $x^2+y^2-x-y=\frac{7}{4}$;

5) $x^2+2x+y=0$; 6) $2x^2-4x-y=5$.

1.77. Қуйидаги тенгсизликлар билан аниқланган фигураларни координаталар текислигида тасвирланг:

1) $x-2y+1\geqslant 0$; 2) $2x+y\leqslant 4$; 3) $|x|-2y+1<0$;

4) $2|x|+y>4$; 5) $y+x^2\leqslant 2x$; 6) $y-x^2+x>1$;

7) $x^2+y^2-2x+4y\leqslant 4$; 8) $(x+1)^2+(y-1)^2>4$;

9) $xy\leqslant 2$; 10) $(x-2)y>1$.

C

1.78*. Учлари 1) $A(-3;4)$, $B(2;1)$, $C(4;-2)$; 2) $A(-4;0)$, $B(0;5)$, $C(4;0)$, $D(0;-5)$; 3) $A(-4;-1)$, $B(-2;2)$, $C(2;3)$, $D(4;0)$, $E(1;-4)$ нуқталарда жойлашган кўпбурчакларни тенгсизликлар орқали аниқланг.

Координаталар текислигида қуйидаги тенгсизликлар билан аниқланадиган фигурани тасвирланг **(1.79–1.82)**:

1.79. 1) $(x-2)(|y|-3)\le 0$; 2) $(|x|-1)(y+3)\le 0$;

3) $|y|<2|x|-3$.

1.80. 1) $xy\le 1$; 2) $|x|y\le 1$; 3) $x|y|\le 1$; 4) $|xy|\le 1$.

1.81. 1) $y\ge x^2-5|x|+6$; 2) $y<|x^2-5x+6|$.

1.82. 1) $\begin{cases} x^2+y^2\le 4(x+y-1), \\ y\ge |x-2|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-y|\le 2, \\ (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\le 0. \end{cases}$

Агар $y=\frac{1}{x}$ функциянинг графиги $\vec{a}=(-2;3)$ векторга параллел жойлашса, олинган график $y=\frac{1}{x+2}+3$ функциянинг графиги бўлади. Бу функциянинг графиги $M_0(-1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ёки ўтмаслигини текшириш осон: $3=\frac{1}{-1+2}+3\Rightarrow 3=1+3\Rightarrow 3\neq 4$ – ўтмайди.

Такрорлашга доир машқлар

1.83. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \dfrac{4}{3}x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96, \\ x - y = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96, \\ x - y = 8. \end{cases}$

1.84. Тенгсизликларни ечинг:

1) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2x-1} \leq 0;$ 2) $\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4+5x} > 0;$ 3) $\dfrac{2x+1}{x-2} < 2.$

Атамалар луғати

Ўзбек тилидаги варианти	Қозоқ тилидаги варианти	Рус тилидаги варианти	Инглиз тилидаги варианти
Икки ўзгарувчили тенгламалар	Екі айнымалысы бар теңдеулер	Уравнения с двумя переменными	Equations with two variables
Икки ўзгарувчили тенгсизликлар	Екі айнымалысы бар теңсіздіктер	Неравенства с двумя переменными	Inequations with two variables
Икки ўзгарувчили тенгламалар (тенгсизликлар) системаси	Екі айнымалысы бар теңдеулер (теңсіздіктер) жүйесі	Система уравнений (неравенств) с двумя переменными	Systems of equations (inequations) with two variables
Икки ўзгарувчили тенгламаларнинг (тенгсизликларнинг) геометрик маъноси	Екі айнымалысы бар теңдеудің (теңсіздіктің) геометриялық мағынасы	Геометрический смысл уравнения (неравенства) с двумя переменными	Geometric value of equations (inequations) with two variables

2-бўлим. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

2.1. Қўшиш қоидаси
2.2. Кўпайтириш қоидаси
2.3. Такрорланувчи ўринлаштиришлар
2.4. Такрорланмайдиган ўринлаштиришлар
2.5. Такрорланмайдиган группалашлар
2.6. Ньютон биноми ва унинг хоссалари

Бўлимни ўзлаштириш давомида сиз ушбу мақсадларга эришасиз:

- Комбинаториканинг қоидаларини билиш (қўшиш ва кўпайтириш қоидалари);
- Соннинг факториали таърифини билиш;
- Такрорланувчи ва такрорланмайдиган ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар ва группалашларнинг таърифларини билиш;
- Такрорланмайдиган ўрналаштиришлар, ўрин алмаштиришлар ва группалашларни ҳисоблаш учун комбинаторика формулаларини билиш;
- Ньютон биноми формуласини ва унинг хоссаларини билиш ва қўлланиш;
- Такрорланмайдиган ўрналаштиришлар, ўрин алмаштиришлар ва группалашларни ҳисоблаш учун комбинаторикадан фойдаланиш.

2.1. Қўшиш қоидаси

Ҳаётда инсониятга нарсаларнинг ўзаро жойлашувининг барча мумкин бўлган холларини ҳисоблашга ёки маълум бир фаолиятнинг барча мумкин бўлган натижаларини ва уни бажариш учун керак бўлган усуллар сонини ҳисоблаш керак бўлади.

ФИКР УЙҒОТИШ!

1. Ҳар хил 5 та китобни иккита ўқувчига неча усул билан бўлиб бериш мумкин?
2. Футболдан дунё биринчилигида ярим финалга чиққан 4 та команда орасида олтин, кумуш ва бронза медаллари неча усул билан олади? Масалани ечиш усулини таклиф қилиб кўринг.

Бу масалаларда нарсаларнинг ўзаро жойлашувининг ёки фаолияти барча мумкин бўлган комбинациялар кўриб чиқилади. Шу сабабли бундай масалаларни комбинаторика масалалари деб аталади. Комбинаторика масалаларини ечишни ўргатадиган математиканинг бўлимини *эса комбинаторика* деб аталади. Комбинаторика масалаларини ечишда фойдаланиладиган ўзига хос қонуниятлар ва формулалар мавжуд.

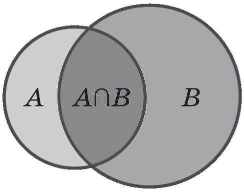
A тўпламнинг элементлар сони $n(A)$ орқали белгиланади. Қуйидаги қонуниятлар бажарилади:

1-теорема. ***Исталган саноқли элементлари бўлган A ва B тўпламлар учун***

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{1}$$

тенглик бажарилади.

Исботи. $n(A)+n(B)$ йиғинди A ва B тўпламларнинг элементларини алоҳида ҳисоблаб қўшганга тенг бўлади. Шу сабабли бу йиғинди таркибига AB кесишмага тегишли элементлар сони икки марта кирди: биринчи марта $n(A)$ таркибида, иккинчи марта $n(B)$ таркибида (2.1-расм). У ҳолда,



2.1-расм

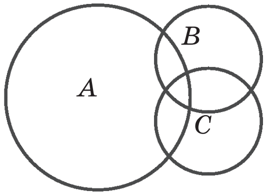
$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

тенглик бажарилади. Бундан (1) формула келиб чиқади.
2.1-расм.

Агар m=3 бўлса, (1) формула қуйидагича ёзилади:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \tag{2}$$

1-мисол. Синфдаги 32 та ўқувчининг 14 таси мактабда ўтказилган футбол турнирига, 10 таси баскетбол турнирига ва 8 таси волейбол ўйини бўйича мусобақага қатнашган. Бунда 6 та ўқувчи ҳам футбол, ҳам баскетбол мусобақасига, 5 та ўқувчи ҳам футбол, ҳам волейбол мусобақасига, 4 та ўқувчи ҳам баскетбол, ҳам волейбол мусобақасига, 3 та ўқувчи эса ҳамма учта мусобақага ҳам қатнашган. Синф ўқувчиларининг нечтаси шу турнирларнинг бирортасига ҳам қатнашмаган?



2.2-расм

Кўргазмалилик учун Эйлер-Венн диаграммасидан фойдаланамиз (2.2-расм). А-футболга қатнашган ўқувчилар сони. В-баскетболга қатнашган ўқувчилар; С-волейболга қатнашган ўқувчилар тўплами; U — синфдаги барча ўқувчилар тўплами бўлсин. Масала шартига кўра. $n(U)=32$, $n(A)=14$, $n(B)=10$, $n(C)=8$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cap C)=5$, $n(B\cap C)=4$, $n(A\cap B\cap C)=3$. (2) формулага кўра синфдаги ўқувчиларнинг ярми маълум бир бир турнирга қатнашганларининг сони $n(A\cup B\cup C)=14+$ $+10+8-6-5-4+3=20$. Демак, синфда $n(U)-n(A\cup B\cup C)=32-$ $-20=12$ ўқувчи мусобақанинг бирорта турига қатнашмаган.

Жавоби: 12 ўқувчи.

Натижа. *Агар $A\cap B=\varnothing$ бўлса, у ҳолда $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$ тенглик бажарилади.*

Исботи. $A\cap B=\varnothing$ эканлигидан, $n(A\cap B)=0$. У ҳолда (1) формулада кўрсатилган тенглик келиб чиқади.

2.2. Кўпайтириш қоидаси

Дастлаб қуйидаги мисолни кўриб чиқамиз.

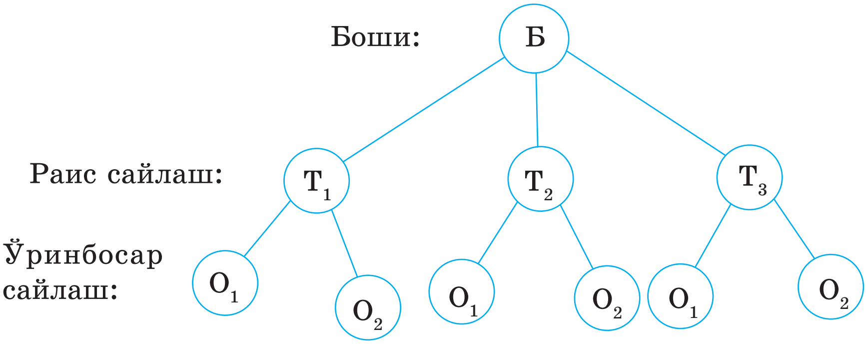
2-мисол. Ташкилотнинг директорлар кенгашининг аъзолари орасидан учтаси кенгаш раислигига, иккитаси унинг ўринбосарлигига сайланишга умидвор. Улардан неча усул билан раислик билан унинг ўринбосарлигига сайлаш мумкин?

Раисликка умидворларни T_1, T_2, T_3 ҳарфлар билан, ўринбосарликка умидворларни O_1, O_2 орқали белгилаймиз. Исталган раисликка умидвор киши исталган ўринбосарликка умидвор киши билан бирлашиб, раис-ўринбосар жуфтини туза олади. Уни жадвалга туширамиз (2.1-жадвал):

O \ T	T_1	T_2	T_3
O_1	$(T_1;O_1)$	$(T_2;O_1)$	$(T_3;O_3)$
O_2	$(T_1;O_2)$	$(T_2;O_2)$	$(T_3;O_2)$

Бундан раис билан унинг ўринбосарини $3 \cdot 2 = 6$ усул билан сайлаш мумкин.

2.3-расмда бу ечим график усулда тасвирланган. Ушбу расмдаги схема *таҳлил дарахти* деб аталади. Уни бошидан бошлаб исталган шохи бўйича юриб ўтсак, маълум бир раис-ўринбосар жуфтига эга бўламиз.



2.3-расм

Ушбу мисолдан келиб чиқадиган ҳулоса умумий ҳолда қуйидагича таърифланади.

2-теорема. *Исталган саноқли элементлари бўлган A ва B тўпламлар учун барча* $(a; b)$, $(a \in A)$, $(b \in B)$ *жуфт элементлар сони m шу тўпламларнинг элементлари сонларининг кўпайтмасига тенг:*

$$m = n(A) \cdot n(B). \qquad (4)$$

Исботи. Фараз қилайлик, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ тўпламлар берилсин $(n(A) = p,\ n(B) = k)$. У ҳолда (4) формуланинг бажарилишини кўрсатиш учун 2-мисолдаги каби жадвал тузиш етарли:

$b \backslash a$	a_1	a_2	...	a_p
b_1	$(a_1;b_1)$	$(a_2;b_1)$	...	$(a_p;b_1)$
b_2	$(a_1;b_2)$	$(a_2;b_2)$	...	$(a_p;b_2)$
...	...	...	...	...
b_k	(a_1b_k)	$(a_2;b_k)$	...	$(a_p;b_k)$

2.2-жадвалдан $m = p \cdot k = n(A) \cdot n(B)$ тенглик бажарилишини кўрамиз.

2.3. Такрорланувчи ўринлаштиришлар

Фараз қилайлик, бизга бўш бўлмаган X тўплам берилсин. Шу тўпламнинг элементларидан тузилган қуйидаги кетма-кетликни кўриб чиқамиз:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k), \ (x_i \in X). \tag{5}$$

Бунда баъзи бир элементлар такрорланиб жойлашиши мумкин. (5) кўринишдаги ҳар бир элементлар кетма-кетлигини X тўпламнинг элементларидан тузилган узунлиги k га тенг бўлган кортеж деб аталади.

Таъриф. *Агар $n(X)=n$ бўлса, у ҳолда X тўпламнинг элементларидан тузилган узунлиги k га тенг бўлган ҳар бир кортежни n дан k бўйича олинган такрорланувчи* ***ўринлаштиришлар*** *деб аталади.*

Барча n дан k бўйича олинган такрорланувчи кортежлар сони $\widetilde{A}_n^k$ орқали белгиланади. Бу сон қуйидаги формула билан аниқланади:

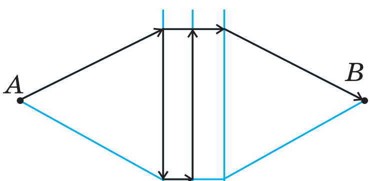
$$\widetilde{A}_n^k = n^k. \tag{6}$$

Исботи. Ҳақиқатан, (5) кортежнинг ҳар бир ўринда X тўпламнинг исталган элементи жойлаша олади. У ҳолда кўпайтириш қоидасига кўра

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots \cdot n(X)}_{k \text{ марта}} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ марта}} = n^k.$$

Шуни исботлаш керак эди.

3-мисол. A ва B пунктлари 2.4-расмда кўрсатилгани каби икки хил усул билан бирлаштирилган (пастки ва юқоридаги йўл билан). A ва B оралиқда бу йўлларни ўзаро параллел учта кўча кесиб ўтади. Бир юриб ўтган йўлдан қайта юрмайдиган қилиб, A пунктдан B пунктга неча усул билан етиш мумкин?



2.4-расм

Ўзаро параллел бўлган учта кўча билан юқориги ва пастки кўчалар 4 бўлакка бўлинади. A дан B га етиш учун йўловчи шу бўлаклардан бири билан юриши лозим. Масалан, 2.4-расмда юрилган йўлни қисқача (ю, п, ю,ю,ю) кортеж билан ёзиш мумкин. Бунда ю-юқориги йўл, п-пастки йўл бўлагини билдиради. У ҳолда A дан B га 48 хил етиш усуллари (ю;п) тўпламнинг элементларидан узунлиги 4 га тенг бўлган такрорланувчи ўринлаштиришлар деб тушуниш керак. (6) формулага кўра $\widetilde{A}_2^4=2^4=16$. А пунктдан В пунктга 16 хил усул билан етиш мумкин.

4-мисол. Қиймати турли хил бўлган 5 та монетани иккита чўнтакка неча усул билан бўлиб солиш мумкин

Иккита чўнтакни ўнг ва чап чўнтаклар деб иккига ажратамиз. У ҳолда ҳар бир монетани қайси чўнтакка тушишига боғлиқ равишда "ў" ёки "ч" ҳарфлар билан белгилаб чиқиш мумкин, яъни узунлиги 5 га тенг бўлган иккита элементдан тузилган кортеж монеталарни чўнтакларга жойлаштиришнинг битта усулини аниқлайди. Масалан, (ў,ч,ч,ч,ў) кортеж биринчи ва бешинчи тангалар ўнг чўнтакка, қолганлари чап чўнтакка солинганини билдиради. (6) формула бўйича 5 та тангани иккита чўнтакка $\widetilde{A}_2^5=2^5=32$ хил усул билан бўлиб солиш мумкин.

2.4. Такрорланмайдиган ўринлаштиришлар. Ўрин алмаштиришлар

Комбинаторикада дастлабки бир нечта натурал сонларнинг кўпайтмаси кўп қўлланилади. У соннинг факториали деб аталади. Масалан, 1 дан, n гача бўлган натурал сонларнинг кўпайтмаси қисқача $n!$ орқали белгиланади ва у "эн факториал" деб ўқилади. Бундан,

$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n \tag{7}$$

Масалан, $3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$, $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 =120$ ва ҳоказо. Таърифга кўра $\mathbf{0! = 1}$ деб ҳисобланади.

X тўплам n элементдан тузилган тўплам бўлсин. У ҳолда X нинг элеметларидан тузилган, узунлиги k га тенг ва элементлари такрорланмайдиган ҳар бир кортежни ***n* дан *k*** бўйича олинган такрорланмайдиган ***ўринлаштиришлар деб аталади***. Такрорланувчи ўринлаштиришларда n ва k кисталган натурал сонлар бўлиши мумкин. Такрорланмайдиган ўринлаштиришларда $n\geqslant k$ бўлиши керак. X тўпламнинг элементларидан тузилган барча n дан k бўйича олинган такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сонини A_n^k орқали белгиланади ва қуйидаги формула бажарилади:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) \tag{8}$$

ёки

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (8')$$

Ҳақиқатан, узунлиги k га тенг бўлган кортежнинг биринчи ўринда X тўпламнинг n хил элементларининг исталгани жойлаша олади. Иккинчи ўринда элементлари такрорланмагани учун қолган $n-1$ хил элементлардан исталгани жойлаша олади ва ҳоказо. k ўринда турли хил элементлар жойлаша олади. Шу сабабли кўпайтириш қоидасига кўра $n-k+1$ тенглик бажарилади. У ҳолда кўпайтириш қоидаси бўйича $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ тенглик бажарилади.

Бундан $A_n^k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(7) ва (8′) формулалар тўлиқ исботланди.

Агар $n=k$ бўлса, у ҳолда такрорланмайдиган ўринлаштиришларни n элементнинг *ўрин алмаштириши* деб аталади. Барча n элементдан олинган ўрин алмаштиришлар сони P_n орқали белгиланади ва

$$P_n = n! \qquad (9)$$

формула бажарилади. Ҳақиқатан, $0!=1$ эканлигини ҳисобга олсак, (8′) формуладан

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

5-мисол. 4 та ўқувчини 7 та стулга неча хил усул билан ўтқазиш мумкин?

Бунда тўплам 7 та элементдан (стуллардан) ташкил топган. Бунда бизга керак бўлган сон 7 дан 4 бўйича такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сонига тенг. Чунки бир неча ўқувчи битта стулга ўтира олмайди деб ҳисоблаш керак. У ҳолда

$$A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

6-мисол. Беш киши навбатга неча усул билан туриши мумкин?

Бизга керак бўлган сон 5 та элементдан олинган барча ўрин алмаштиришлар сонига тенг: $P_5=5!=120$.

7-мисол. 7 та ўқувчини бир қаторда жойлашган 7 та стулга учта дўст ёнма-ён ўтирадиган қилиб неча усул билан ўтқазиш мумкин?

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: A_1, A_2, A_3 орқали масала шартидаги учта дўстни, B, C, D, E орқали бошқа ўқувчиларни белгилаймиз ва $A=\{A_1, A_2, A_3\}$ бўлсин. У ҳолда A, B, C, D, E элементларни барча алмаштиришлар давомида учта дўст ёнма-ён ўтиради. Бу алмаштиришлар сони $P_5=5!=120$ га тенг. Иккинчидан, дўстлар ўзаро алмашиб ўтиришлари мумкин, яъни дўстлар A, B, C, D, E элементларни ҳар бир алмаштиришлар джавомида $P_3=3!=6$ хил усул билан ўзаро алмашиб ўтира олади. Шу сабабли учта дўст ёнма-ён ўтирадиган қилиб 7 та ўқувчини $P_5 \cdot P_3=120 \cdot 6 = 720$ хил усул билан ўтқаза оламиз.

2.5. Такрорланмайдиган группалашлар

Таъриф. *n элементи бўлган X тўпламнинг ҳар бир k элементдан тузилган иккита тўплам n дан k бўйича олинган такрорланмайдиган группалашлар деб аталади. Барча n дан k бўйича олинган такрорланмайдиган группалашлар сони C_n^k орқали белгиланади.*

3-теорема.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{10}$$

формула бажарилади. Бунда C_n^k сони группалаш коэффициенти дейилади.

Исботи. $A_n^k = P_k\ C_n^k$ тенглик бажарилади. Ҳақиқатан, ҳар бир n дан k бўйича олинган такрорланмайдиган группалашлар (ҳар бир k элементдан тузилган ички тўпламда) $P_k=k!$ хил усул билан алмаштириш орқали барча n дан k бўйича олинган такрорланмайдиган ўринлаштиришларни оламиз. У ҳолда бу тенгликни (10) формулани ҳосил қилиш қийин эмас.

8-мисол. Шахмат турнирига 12 та ўйинчи қатнашди ва шахматчиларнинг ҳар бири бошқалари билан биттадан ўйин ўйнади. Турнирда жами нечта партия ўйналди?

Ҳар партияга иккита ўйинчи қатнашди. Бунда барча ўтказилган партиялар сони 12 дан 2 бўйича олинган группалашлар сонига тенг: $C_{12}^2 = \dfrac{12!}{2!10!} = \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66.$

2.6. Ньютон биноми ва унинг хоссалари

БУНИ СИЗ БИЛАСИЗ

Қисқа кўпайтириш формулалари:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2+b^3$$

Группалаш коэффициентларининг хоссаларига кўра $C_2^0 = \frac{2!}{0!2!} = 1$, $C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2$, $C_2^2 = \frac{2!}{2!0!} = 1$ ва $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3;$ $C_3^2 = 3;$ $C_3^3 = 1$ эканлигини эътиборга олган ҳолда берилган қисқа кўпайтириш формулаларини группалаш коэффициентлари ёрдамида қуйидагича ёзамиз:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 \cdot b^0 + C_2^1 a^1 \cdot b^1 + C_2^2 \cdot a^0 \cdot b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 \cdot b^0 + C_3^1 a^2 \cdot b^1 + C_3^2 a^1 \cdot b^2 + C_3^3 b^3.$$

ЖУФТЛИКДА ИШЛАШ

Кўрсатилган қонуниятлар бўйича $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ ифодаларни очиб ёзинг ва унинг тўғрилигини $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$, $(a+b)^5 = (a+b)^4 \cdot (a+b)$ тенгликдан фойдаланиб текширинг.

Ҳудди шундай исталган $n \in N$ учун

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + C_n^n b^n \quad (11)$$

формула бажарилишини кўрамиз. Бу формула **Ньютон биноми** дейилади.

$(a+b)^0 = 1$ ва $(a+b)^1 = (a+b)$ эканлигини эътиборга олсак, биномнинг коэффициентларини қуйидаги усул билан аниқлаш мумкин:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Бу Паскаль учбурчаги дейилади ва бундан

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

тенглик хосил бўлади.

9-мисол. n та элементдан тузилган тўпламнинг барча қисм тўпламлари сонини топинг.

Тўпламнинг битта элементдан тузилган қисм тўпламлари сони C_n^1 га, иккита элементдан тузилган қисм тўпламлари сони C_n^k га ва ҳоказо k элементдан тузилган қисм тўпламларининг сони C_n^k га тенг. Бунда k=1, 2, ..., n. Бўш тўплам-исталган тўпламнинг қисм тўплами. У ҳолда бизга керак бўлган m сони қуйидагича топилади:

$$m = 1 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ... + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

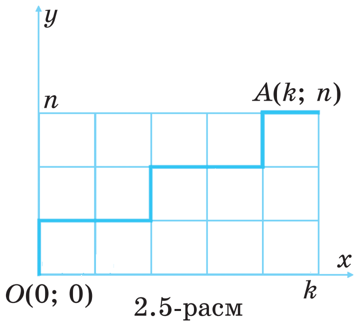
$1 = C_n^0 = \dfrac{n!}{0!n!}$ бўлишини эътиборга олсак, $m = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.

Ньютон биноми формуласидан a=1, b=1 деб олсак,

$$m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Шундай қилиб, n элементли тўпламнинг қисм тўпламларнинг сони 2^n га тенг.

10-мисол. 2.5-расмда кўрсатилган “бутун” нуқталар орқали ўтувчи катакларнинг томонлари орқали O(0; 0) нуқтадан A(k; n) нуқтага ўнг томонга ва юқорига силжитиб, неча усул билан етиш мумкин?



2.5-расм

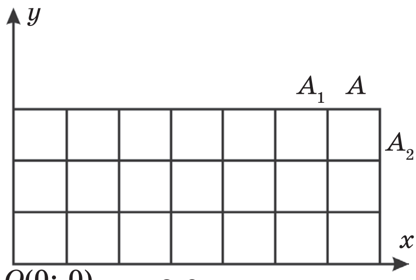
O(0; 0) нуқтадан A(k; n) нуқтагача кўрсатилган усул билан етиш учун биз n ввертикал кесмалар билан k горизонтал кемаларни босиб ўтишимиз керак.

Шу сабабли ҳар бир юришни $k + n$ кесмалар орқали ўтамиз. Бу юришлар бир-бирларидан вертикал ва горизонтал кесмаларнинг ўзаро навбатма-навбат жойлашиш тартиби билангина фарқланади. Агар n вертикал кесмаларни танлаб олсак, у ҳолда маълум бир йўлни кўрсатамиз. Бунда барча шу каби йўллар сони $k + n$ кесмалардан n кесмани танлаб олишлар сони C_{k+n}^k га тенг.

Эслатма. Бу масалани таҳлил қилишни такрорлаб, $k+n$ кесмалар ичидан k горизонтал кесмани танлаб олиш мумкин эди. У ҳолда C_{k+n}^{k} сонини оламиз. $C_{k+n}^{k}=C_{k+n}^{n}$ тенглик (10) формуладан келиб чиқади.

Биз C_n^k сонини Бином коэффициенти деб атаганмиз. Энди ушбу C_n^k соннинг бир нечта хоссаларини кўриб чиқамиз:

$$1^\circ.\ C_n^k=C_n^{n-k};\qquad 2^\circ.\ \sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n;\qquad 3^\circ.\ C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}.$$



2.6-расм

1°-хоссанинг исботи (10) формуладан келиб чиқади. 2°-хосса 9-мисолда кўрсатилди. Энди 3°-хоссани исботлаймиз. 2.6-расмда $O(0;0)$ нуқтадан $A(k;\ n-k)$ нуқтагача ўнг томонга ва юқорига катак томонлари бўйича силжитиш орқали етиш усуллари 10-мисол бўйича $C_{k+(n-k)}^{k}=C_n^k$-га тенг. О нуқтадан А нуқтага етиш усулларини иккита гуруҳга бўлиш мумкин: бири A_1 нуқта орқали, иккинчиси A_2 орқали ўтувчи йўллар (2.6-расм). A_1 орқали ўтувчи йўллар сони 10-мисол бўйича $C_{k+(n-1-k)}^{k}=C_{n-1}^{k}$; A_2 орқали ўтадиган йўллар сони $C_{k-1+(n-1)}^{k-1}=C_{n-1}^{k-1}$.

Шундай қилиб, $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}$.

МАШҚЛАР

А

2.1. Дўконда шоколаднинг 6 тури ва карамелнинг 10 тури бор. Конфетларнинг:1) бир туридан; 2) шоколаднинг бир тури ва карамелнинг бир туридан неча усул билан конфет сотиб олиш мумкин?

2.2. Ошхона менюсида 3 та биринчи, 4 та иккинчи ва 5 та учинчи таомлар бор. Булардан жами нечта “тушлик” олиш мумкин?

2.3. Китоб жавонига комбинаторикадан 2 та китоб, эҳтимоллар назариясидан 5 та китоб, алгебрадан 4 та китоб, тарихдан 3 та китоб ва адабиётдан 6 та китоб қўйилган. Неча хил усул билан 1) математикадан битта китоб, 2) математикадан битта китоб ёки адабиётдан битта китоб танлаб олиш мумкин?

2.4. Ҳам 3 га, ҳам 4 га бўлинадиган нечта икки хонали натурал сон мавжуд?

2.5. Почтада уч хил конверт билан 5 хил марка бор. Хат йўллаш учун битта конверт билан битта маркани неча усул билан танлаб олиш мумкин?

2.6. Иккита ўқувчи 5 хил китобни неча усул билан бўлиша олади?

2.7. Почтада маркаларнинг 5 хили бор. Улардан 3 хил маркани неча хил усул билан танлаб олиш мумкин?

2.8. 1, 2, 3, 4, 5, 6 рақамлар ёрдамида нечта 1) уч хонали; 2) рақамлари такрорланмайдиган уч хонали сонлар тузиш мумкин?

2.9. “Логарифм” сўзининг ҳарфларидан 1) 5 та ҳарфдан; 2) 8 та ҳафдан тузилган нечта “сўз” тузиш мумкин?

1) Логарфм сўзида 8 та ҳарф бор ва улар такрорланмайди. Бунда 5 та ҳарфдан тузилган “сўзлар” сони A_8^5 сонига тенг, яъни 8 та ҳарф ичидан 5 та ҳарфни олиб, уларни 5 та жойга ҳарфлари такрорланмайдиган қилиб жойлаштириш керак.

Жавоби: $A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ хил “сўз” тузиш мумкин.

2.10. 6 кишини 1) бир қаторга; 2) айлана стол атрофига неча усул билан ўтқазиш мумкин?

2.11. 225 та ўқувчидан иккита навбатчини неча усул билан танлаб олиш мумкин?

2.12. Учлари айланада бўлган 10 та нуқтада жойлашган нечта ватар ўтказиш мумкин?

2.13. Учлари аввалги масаладаги нуқталарда жойлашган нечта учбурчак мавжуд?

2.14. Шахмат тахтасининг қора рангли катакларига бешта шашка тошларини неча усул билан қўйиб чиқиш мумкин?

2.15. Иккита ўқувчининг бирида 7 та китоб, иккинчисида 8 та китоб бор. Улар иккита китобни иккита китобга алмаштиришни неча усулда бажара олади?

Биринчи ўқувчи ўзининг 7 та китобидан алмаштиришга 2 та китобни $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ хил усул билан, иккинчи ўқувчи 8 та китобдан 2 та китобни $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ хил усул билан танлаб олди.

Бир ўқувчининг танлови иккинчисининг танловига таъсир этмаганлигидан (боғлиқ эмас), улар 2 та китобни 2 та китобга жами 21·28=588 турли хил усул билан алмаштиради.

2.16. Қиймати ҳар хил бўлган 6 та тангани иккита чўнтакка неча усул билан бўлиб солиш мумкин?

B

2.17. 2,5 ёки 7 га бўлинмайдиган нечта уч хонали натурал сон мавжуд?

2.18. 2,5 ва 7 сонлардан фақат иккитасигагина бўлинадиган ва учинчисига бўлинмайдиган нечта уч хонали натурал сон мавжуд?

2.19. Синфдаги 35 та ўқувчининг 15 таси қиз бола. Шу ўқувчилардан 1) битта қиз бола билан битта ўғил болани; 2) иккита ўғил болани; 3) иккита қиз болани неча хил усул билан танлаб олиш мумкин?

2.20. Шахмат тахтасидан неча усул билан 1) битта оқ ва битта қора рангли квадратни; 2) битта вертикал ва битта горизонтал жойлашмайдиган қилиб, битта оқ ва битта қора рангли квадратни танлаб олиш мумкин?

2.21. Ташқи ишлар министрлигининг бир бўлимидаги ходимларнинг ҳар бири камида битта чет тилини ўзлаштирган(инглиз, немис ва француз). Улардан 10 таси инглиз, 6 таси немис, 4 таси француз, 4 таси ҳам инглиз, ҳам немис, 3 таси ҳам инглиз, ҳам француз, 2 таси ҳам немис,ҳам француз ва биттаси ҳамма уч тилни ҳам ўзлаштирган. Бўлимда 1) нечта ходим бор; 2) нечтаси фақат битта тилни билади?

2.22. Синфдаги 35 та ўқувчидан синф сардорини, унинг ўринбосарини, редколлегия ва спорт ишлари бўйича жавобгар 4 та ўқувчини неча усул билан сайлаш мумкин?

2.23. 1) Рақамлари такрорланиши мумкин; 2) рақамлари такрорланмайдиган қилиб 4 хонали нечта сон тузиш мумкин?

2.24. Иккинчи, тўртинчи ва олтинчи ўринларда унли товушлар турадиган қилиб, **логарифм** сўзидаги товушларни неча усул билан алмаштириш мумкин?

2.25. Агар рақамлар ёзилган қоғозни 180° га бурсак, у ҳолда 0, 1, 8 рақамлар ўзгармайди, 6 ва 9 рақамлари эса бир-бирига кўчади. Қоғозни 180° га бурганда ўзгармайдиган нечта 5 хонали сон бор?

5 хонали соннинг ўртадаги рақами 0,1,8 рақамлардан биригина бўлиши мумкин, уни $C_3^1=3$ хил усул билан танлай оламиз. Биринчи ўринга 1,8,6,9 рақамларининг исталганини жойлаштирамиз ва бу $C_4^1=4$ хил усул билан бажарилади. Иккинчи ўринга 0,1,8,6,9 нинг исталганини қўя оламиз, уни $C_5^1=5$ хил усул билан бажара оламиз. Оҳирги иккита рақам оҳирги иккита рақамни такрорлайди (0,1,8 рақамлар ўзгармайди) ёки 6 сонининг ўргига 9 ни, 9 сонининг ўрнига 6 ни ёзиш керак. Бунда беш хонали соннинг хона ўринларига қўйиладиган рақам бир-бирига боғлиқ эмаслигидан юқорида аниқланган имкониятлар сонини кўпайтириш керак.

Жавоби: жами $3\cdot4\cdot5=60$ хил сон ёзилади.

2.26. Йўловчилар поездида 15 та вагон бор. Маълум бир учта йўловчини турли вагонларга неча усул билан жойлаштириш мумкин?

2.27. Баскетбол ўйинидан мусобақага қатнашиш учун тренер 14 та боладан таркибида 5 та ўйинчиси бўлган команда тузилди. Агар танлаб олинган иккита боланинг командага шартли равишда кирадиган бўлса, у ҳолда тренер командани неча усул билан туза олади?

2.28. n та параллел тўғри чизиқ бошқа m та параллел тўғри чизиқ билан кесишади. Бунинг натижасида нечта параллелограмм пайдо бўлади?

2.29. Китоб жавонида математикадан 8 та китоб ва физикадан 5 та китоб қўйилган. Бундан 3 та математика ва 2 та физика китобларини неча усул билан олиш мумкин?

2.30. Ҳар бирида 3 кишидан кам бўлмайдиган қилиб, 8 кишини иккита енгил машинага неча усул билан ўтқазиш мумкин?

2.31. "Логарифм" сўзининг таркибида иккита ундош ва битта унли товушларни неча усул билан танлаб олиш мумкин?

C

2.32. 0, 4, 5 рақамлари ёрдамида 10^4 сондан кичик нечта жуфт сон ёзиш мумкин?

2.33 Синфда 35 та ўқувчи бор. Синф сардори директорнинг ўринбосарига мактабда ўтказилган спорт мусобақасига синф ўқувчиларининг қатнашиши ҳақида қуйидагича маълумот берди: 16 та ўқувчи футбол, 15 та ўқувчи волейбол,14 та ўқувчи баскетбол, 4 та ўқувчи ҳам футбол, ҳам волейбол, 3 та ўқувчи ҳам волейбол, ҳам баскетбол мусобақасига ва 2 та ўқувчи мусобақанинг ҳамма турларига қатнашди. Директорнинг ўринбосари берилган маълумотни нима учун яроқсиз деб топди?

2.34. Синфдаги ўқувчиларнинг ҳар қайсиси ёки қиз бола, ёки бўйлари 165 см дан баланд, ёки математикани яхши кўради. Синфдаги 18 та қиз боладан 14 тасининг бўйлари 165 см дан баланд. Жами 165 см дан баланд 22 та ўқувчи бор ва улардан 12 таси математикани яхши кўради. Синфда математикани яхши кўрадиган 18 та ўқувчидан 8 таси қиз бола. Бўйлари 165 см дан баланд бўлмаган қиз болалардан олтитаси математикани яхши кўради. Синфда нечта ўқувчи бор?

2.35. Айлана шаклидаги стол атрофида n та киши ўтирибди. Шу кишиларни айлана бўйлаб силжитадиган барча ўрин алмаштиришлар сони $\frac{P_n}{n} = (n-1)!$ формула билан аниқланишини кўрсатинг.

2.36. Темир йўл бекатида m та светофор бор. Агар ҳар бир светофор "қизил", "сариқ"ва "яшил" рангли уч хил белги бера олса, у ҳолда ўша m та светофор ёрдамида жами нечта белги бериш мумкин?

2.37. Доира шаклидаги стол атрофида 5 та қиз бола билан 5 та ўғил болани, 2 та қиз бола билан 2 та ўғил болани ёнма-ён ўтирмайдиган қилиб, неча усул билан ўтқазиш мумкин?

2.38. 2, 4, 5 рақамлари ёрдамида 10^4 дан кичик бўлган нечта 1) тоқ сон; 2) жуфт сон ёзиш мумкин?

2.39. Дарс давомида 5 та ўқувчи тахтага олдига чиқди. Агар уларнинг ҳар бири “икки” олмаслиги маълум бўлса, у ҳолда бу ўқувчиларга неча усул билан баҳо қўйиб чиқиш мумкин?

2.40. 4 та ўқувчига 12 та китобни неча усул билан тенг бўлиб бериш мумкин?

2.41. 30 та ўқувчини инглиз, немис ва француз тилларини ўқитиш учун ўнтадан учта гуруҳга бўлиш керак. Буни неча усул билан бажариш мумкин?

2.42. Тўққизқумалоқ ўйини турнирига қатнашувчиларнинг ҳар бири қолганлари билан биттадан партия ўйнаб чиқиши керак эди. Турнирга қватнашувчиларнинг иккитаси ҳар бир учтадан партия ўйнагандан кейин саломатлигига боғлиқ равишда турнирдан чиқиб кетишди. Агар бу мусобақада жами 16 партия ўйналган бўлса, у ҳолда дастлаб турнирга неча ўйинчи қатнашган?

2.43. Айниятни исботланг:

1) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

2) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

3) $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$.

2.44. Йиғиндини топинг:

1) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n$;

2) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$;

3) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^5 + \ldots$;

2.45. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{C_x^3 + C_x^4}{C_{x+1}^2} = 11$; 2) $\frac{C_{x+1}^3 - C_x^2}{C_x^2} = 11$.

2.46. $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$ тенглик бажарилишини исботланг.

Такрорлашга доир машқлар

2.47. 10 сони $y=\sqrt{x^2-2x+12}$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишлими?

2.48. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$ 2) $y=\sqrt{x(x-4)}$.

2.49. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x\le 3-\dfrac{1}{x-1}, \\ |x+1|<4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\ge 0, \\ |5-x|\le 2. \end{cases}$

2.50. $\dfrac{x^2-4x}{x-1}\le 0$ тенгсизликнинг $(x^2-1)(3-x)\geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

АТАМАЛАР ЛУҒАТИ

1	2	3	4	5
Формуласи	Ўзбек тилидаги варианти	Қозоқ тилидаги варианти	Рус тилидаги варианти	Инглиз тилидаги варианти
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	Қўшиш қоидаси	Қосу ережесі	Правило суммы	Addition rules
$n(A x B) = n(A) \cdot n(B)$	Кўпайтириш қоидаси	Көбейту ережесі	Правило произведения	Multiplication rules
$A_n^k = n^k$	Барча *n* дан *k* бўйича олинган такрорланувчи ўринлаштиришлар сони	Барлық *n*-нен *k* бойынша алынған қайталанбалы орналастырулар саны	Количество всех размещении из *n* по *k* с повторениями	Humber of all repetitive placements of elements from *n* by *k*
$A_n^k = \frac{n}{(n-k)!}$	Барча *n* дан *k* бўйича олинган такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сони	Барлық *n*-нен *k* бойынша алынған қайталанбайтын орналастырулар саны	Количество всех размещении из *n* по *k* без повторений	Humber of all none repetitive placements of elements from *n* by *k*
$P_n = n!$	*n* элементнинг барча ўрин алмаштиришлар сони	*n* элементтің барлық алмастырулар саны	Количество всех перестановок из *n* элементов	Humber of rearrangements of *n* elements
$C_n^k = \frac{n!}{k(n-k)!}$	Барча *n* дан *k* бўйича олинган группалашлар сони (группалаш коэффициенти)	Барлық *n*-нен *k* бойынша алынған терулер саны (теру коэффициенті)	Количество всех сочетании из *n* по *k* без повторении (коэффициент сочетание)	Humber of combinations out of all elements from *n* by *k* (combination coefficient)
$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + \ldots + C_n^k a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + C_n^n \cdot b^n$	Ньютон биноми	Ньютон биномы	Бином Ньютона	Binominal theorem

3-бўлим. КЕТМА-КЕТЛИКЛАР

3.1. Сонлар кетма-кетлиги ҳақида тушунча

3.2. Математик индукция методи

3.3. Арифметик прогрессия. Арифметик прогрессиянинг *n*-ҳади формуласи

3.4. Геометрик прогрессия. Геометрик прогрессиянинг *n*-ҳади формуласи

3.5. Арифметик ва геометрик прогрессияларнинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формулалари

3.6. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия

ТАРИХГА НАЗАР

“Негизлар” (лотинча Elementa) –Евклиднинг эрамиздан аввалги 300 йилларда ёзган ва геометрияни системали равишда тушунтирадиган асари. Евклид бу асарида геометрик прогрессия мавзусини ҳам кўриб чиқиб, бир нечта теоремаларни исботлайди.

3.1. Сонлар кетма-кетлиги ҳақида тушунча

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси билан танишасизлар;
- Сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳади формуласини ёза оласизлар;
- Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликларни фарқлай оладиган бўласиз.

3.1.1. Сонлар кетма-кетлигининг таърифи

Шу кунга қадар биз кўплаб сонлар кетма-кетликларини кўриб чиқдик. Бинобарин, ҳақиқий сонлар тушунчасидаги чексиз ўнли касрларнинг ўзи сонлар кетма-кетликлари билан бевосита боғланган. Масалан, $\sqrt{2}$ сонини ками билан турли хил аниқликларда яхлитлаш учун

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлигини кўриб чиқамиз. Мусбат жуфт сонларни ўсиш тартибида жойлаштирсак,

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ \ldots$$

кетма-кетликни оламиз. Бу кетма-кетликнинг биринчи ҳади 2 га, иккинчи ҳади 4 га, учинчи ҳади 6 га, 25-ҳади 50 га, 100-ҳади 200 га тенг ва ҳакозо.

Шундай қилиб, *ҳадларини номерлаб чиқиш мумкин бўлган чексиз сонлар тўплами-сонлар* ***кетма-кетлиги*** *деб аталади. Кетма-кетликни ташкил этувчи сонлар тартиб билан кетма-кетликнинг биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи ва* ***ҳакозо ҳадлари*** *деб аталади. Кетма-кетликнинг ҳадлари, одатда унинг тартиб номерлари кўрсатилган индекслар ёзилган ҳарфлар билан белгиланади*:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Кетма-кетликнинг n-ҳади ***унинг умумий ҳади*** деб аталади ва у a_n, кетма-кетликнинг ўзи эса қисқача $\{a_n\}$ каби белгиланади. Масалан, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетликнинг ҳадларини тартиб билан $1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ кўринишда ёзиш мумкин.

1-мисол. $\frac{1}{2\cdot 3}; \frac{1}{3\cdot 4}; \frac{1}{4\cdot 5}; \frac{1}{5\cdot 6}; \ldots$ кетма-кетликнинг умумий ҳадини топиш керак.

Кетма-кетликнинг ҳар бир ҳадининг махражида кетма-кет жойлашган натурал сонлар жойлашган ва $a_1 = \frac{1}{2\cdot 3}$. $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ деб олсак, кетма-кетликнинг исталган ҳадини топа оламиз:

Жавоби: $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Агар кетма-кетликнинг исталган ҳадини ёзиб кўрсатиш мумкин бўлса, бу кетма-кетлик берилган деб ҳисобланади.

3.1.2. Сонлар кетма-кетлигининг берилиш усуллари

Умуман сонлар кетма-кетликларини турли хил усуллар билан аниқлаш мумкин. Бу усуллардан энг қулайи ва кўп қўлланиладигани – кетма-кетликни *n - ҳади формуласи билан аниқлаш*. Масалан, $a_m = n^2$ формула орқали $n=1$ бўлганда $a_1=1$; $n=2$ бўлганда $a_2=4$; $n=3$ бўлганда $a_3=9$; $n=4$ бўлганда $a_4=16$ ва ҳоказо кетма-кетликнинг исталган ҳадини топа оламиз. У ҳолда $a_n = n^2$ формула билан 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ... кетма-кетликни аниқлаймиз. $a_n = \frac{n}{n+1}$ формула билан $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ кетма-кетликни аниқлаймиз.

Баъзида кетма-кетликни ***унинг ҳадларини тавсифлаш*** орқали топиш мумкин. Масалан, $\sqrt{2}$ сонини ками билан олинган яхлитлаш 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... кетма-кетликни сонлар кетма-кетлиги деб аниқладик.

Шу билан бир қаторда кетма-кетликнинг дастлабки ҳадлари берилиб, қолган ҳадлари унинг олдинги ҳадлари орқали аниқланади. Масалан, $a_1=1$, $a_2=1$ бўлсин. Кетма-кетликнинг қолган ҳадлари унинг олдинги иккита ҳадининг йиғиндиси орқали аниқлансин: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $(n \geqslant 3)$. У ҳолда 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... кетма-кетлик аниқланади. Бу кетма-кетлик Фибоначчи сонлари деб аталади. (Фибоначчи (Пизанлик Леонардо) 1170-1250, италиялик математик). Кетма-кетликларнинг шундай усул билан аниқланишини, яъни унинг исталган ҳади (маълум бир номердан бошлаб) олдинги ҳадлари орқали аниқланадиган усул ***рекуррент усул*** (лотинча қайтиб келиш деган сўздан олинган), мос равишда формула ***рекуррент формула*** дейилади.

3.1.3. Монотон кетма-кетликлар

Агар $\{a_n\}$ сонлар кетма-кетлиги учун $a_{n+1} > a_n$ тенгсизлик бажарилса, яъни унинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади олдинги ҳадидан катта бўлса, у ҳолда бундай кетма-кетлик ***ўсувчи кетма-кетлик*** дейилади. Агар $a_{n+1} < a_n$ $(n \in N)$ тенгсизлик бажарилса, яъни ҳар бир ҳади кейинги ҳадидан катта бўлса, у ҳолда бундай кетма-кетлик камаювчи кетма-кетлик дейилади.

Агар юқорида келтирилган $a_{n+1} > a_n$($a_{n+1} < a_n$) тенгсизликларнинг ўрнига $a_{n+1} \geqslant a_n$ ($a_{n+1} \leqslant a_n$) тенгсизликлар бажарилса, бу кетма-кетликлар *камаймайдиган (ўсмайдиган) кетма-кетликлар* дейилади. Умуман ўсувчи ва камаювчи, камаймайдиган ва *ўсмайдиган кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар* деб аталади. Масалан,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...,\ 2n,\ ...$$

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; ...; \frac{n}{n+1}; ...$$

кетма-кетликлар –ўсувчи кетма-кетликлар.

$$1,\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{n};\ldots;\quad 2;\frac{4}{5};\frac{5}{7};\frac{6}{9};\ldots,\frac{n+1}{2n-1};\ldots$$

кетма-кетликлар-камаювчи кетма-кетликлар. Бунда $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ кетма-кетликнинг камаювчи бўлишига ишонч хосил қилинмаса, $\frac{n+1}{2n-1}$ кетма-кетликнинг камаювчи бўлишини исботлаш керак.

$$a_n=\frac{n+1}{2n-1},\quad a_{n+1}=\frac{n+2}{2n+1}$$

эканлигидан, $a_{n-1}-a_n$ айирманинг ишорасини аниқлаймиз:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+2}{2n+1}-\frac{n+1}{2n-1}=$$

$$=\frac{2n^2+3n-2-2n^2-3n-1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{-3}{(2n+1)(2n-1)}<0.$$

У ҳолда, $a_{n+1}<a_n$. Демак, $\left\{a_n=\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ кетма-кетлик камаювчи.

Худди шундай 1; 1; $\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{3};\ldots$ кетма-кетлик – ўсмайдиган кетма-кетлик.

Чунки бу кетма-кетликнинг баъзи бир ҳадлари ўзаро тенг ва унинг ҳар бир ҳади олдинги ҳадидан катта эмас.

Кетма-кетликнинг ҳаммаси ҳам монотон бўлавермайди. Масалан, –1; 1; –1; ..., $(-1)^n$; ... кетма-кетлик (тебранма) монотон бўлмайди.

Агар A сони топилиб, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади учун $a_n>A$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\{a_n\}$ кетма-кетлик қуйидан чегараланган деб аталади. Иҳтиёрий B сони топилиб, $a_n<B$ тенгсизлик бажарилса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган деб аталади. Агар кетма-кетлик ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, яъни A ва B сонлари топилиб, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади учун $A<a_n<B$ тенгсизлик бажарилса, бу кетма-кетлик чегараланган кетма-кетлик дейилади. Масалан,

1) 1; 2; 3; ...; n; ...;
2) $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{n};\ldots$
3) 1; 1,4; 1,41; 1, 414; ...;
4) –1; –2; –3; ...; $-n$; ...
5) –1; 2; –3; ...; $(-1)^n n$; ...

кетма-кетликларни кўриб чиқамиз. Бунда 1), 2) ва 3) кетма-кетликлар қуйидан чегараланган, чунки бу кетма-кетликларнинг ҳар бир ҳади нолдан катта. 2), 3) ва 4) кетма-кетликлар юқоридан чегараланган, чунки кетма-кетликларнинг ҳар бир ҳади 2 дан кичик. У ҳолда 2) ва кетма-кетликлар ҳам қуйидан. Ҳам юқоридан чегараланганлигидан улар чегараланган кетма-кетликлар бўлади. 5)-кетма-кетлик қуйидан ҳам, юқоридан ҳам чегараланмаган.

1. Сонлар кетма-кетлиги нима?
2. Сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳади деганда нимани тушунасиз?
3. Сонлар кетма-кетлигининг берилишининг қандай усулларини биласиз?
4. Қандай кетма-кетлик ўсувчи(камаювчи) деб аталади?
5.Юқоридан(қуйидан) чегараланган кетма-кетлик деганда нимани тушунасиз?
6. Қандай кетма-кетлик монотон кетма-кетлик дейилади?

АМАЛИЙ ИШ

$\{a_n\}$ сонлар кетма-кетлигининг биринчи ҳади $a_1 = \frac{1}{5}$.

Кетма-кетликнинг кейинги ҳадлари олдинги ҳадининг сурат ва махражига бир хил 2 сонини қўшиш орқали хосил қилинади.

Топшириқ

1) $\{a_n\}$ кетма-кетлик ўсувчими ёки камаювчими?

2) Кетма-кетликнинг умумий ҳади формуласини ёзинг.

3) Кетма-кетликнинг биринчи ҳади $a_1 = \frac{P}{q} > 0$ кўринишдаги тўғри (нотўғри) каср. Унинг сурати ва махражига қўшиладиган сонларни $r>0$ деб олиб, 1) ва 2) саволларга умумий кўринишда жавоб беринг ва жавобларингизни асосланг.

МАШҚЛАР

А

3.1. Қуйидаги кетма-кетликларнинг дастлабки бешта ҳадини ёзинг:

1) $x_n=2n-1$; 2) $x_n=n^2+1$; 3) $x_n = \frac{1}{n+1}$; 4) $y_n=(-1)^n$;

5) $y_n = 2^{n-3}$; 6) $a_n = 0{,}5 \cdot 4^n$; 7) $b_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$; 8) $c_n = \dfrac{1}{2^n}$.

3.2. Қуйидаги кетма-кетликларнинг дастлабки бешта ҳадини ёзинг:

1) $a_n = 2^n + \dfrac{1}{2^n}$;

2) $x_n = 3n^2 + 2n + 1$;

3) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса} \\ \dfrac{n-1}{n}, & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса} \end{cases}$

4) $c_n = \dfrac{2n-1}{2n+3}$;

5) $b_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$;

6) $y_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$;

7) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

8) $d_n = \dfrac{2}{(-1)^n} + 2$;

9) $b_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$.

3) Кетма-кетлик ҳади тартиб рақамининг жуфт ёки тоқ бўлишига боғлиқ бўлган биринчи ёки иккинчи формуладан фойдаланамиз:

$a_1 = \dfrac{1-1}{1} = 0$; $a_2 = \dfrac{1}{2}$; $a_3 = \dfrac{3-1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $a_4 = \dfrac{1}{4}$; $a_5 = \dfrac{5-1}{5} = \dfrac{4}{5}$;...

Жавоби: $0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{5}$.

B

3.3. 3 га каррали бўлган натурал сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳадининг формуласини ёзинг.

3.4. 7 га каррали бўлган натурал сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳади формуласини ёзинг.

3.5. 4 га бўлганда қолдиқда 1 қоладиган натурал сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳади формуласини ёзинг.

4 га каррали бўлган сонлар $4n(n \in N)$ кўринишда ёзилади. 4 га бўлганда қолдиғи $r=1$ га тенг бўлган натурал сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳади $a_n = 4n+1$ кўринишда ёзилади.

3.6. 5 га бўлганда қолдиғи 2 га тенг бўладиган натурал сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳади формуласини ёзинг.

3.7. Қуйидаги кетма-кетликларнинг умумий ҳади формуласини ёзинг:

1) $1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \ldots,$ 2) $2;\ -2;\ 2;\ -2;\ \ldots;$

3) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \ldots,$ 4) $\frac{1}{4}; \frac{1}{7}; \frac{1}{10}; \frac{1}{13}; \ldots;$

5) $3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48;\ \ldots;$ 6) $1;\ -2;\ 3;\ -4;\ \ldots;$

7) $\frac{1}{3}; \frac{4}{9}; \frac{9}{27}; \frac{16}{81}; \ldots;$ 8) $\frac{1}{3}; \left(\frac{2}{5}\right)^2; \left(\frac{3}{7}\right)^3; \left(\frac{4}{9}\right)^4; \ldots$

3.8. Агар $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ бўлса, у ҳолда a_{10}, a_{n+1}, a_{2n} ҳадларни топинг.

3.9. Агар $x_n = \dfrac{1}{2^n+1}$ бўлса, у ҳолда x_3, x_5, x_{n+1}, x_{2n+1} ҳадларни ёзинг.

3.10. Қуйидаги кетма-кетликларнинг ўсувчи ёки камаювчилигини, юқоридан ёки қуйидан чегараланганлигини аниқланг:

1) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1};$ 2) $x_n = \dfrac{2^n-1}{2^n};$ 3) $y_n=(-0,5)^n;$

4) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2};$ 5) $b_n = \dfrac{n^2-1}{2n};$ 6) $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n};$

7) $x_n = \dfrac{2n^2+1}{4n^2+5};$ 8) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2};$ 9) $y_n = \dfrac{n^2}{n^2+1};$

10) $b_n = \dfrac{2n+1}{2^n};$ 11) $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$ 12) $p_n=1+(-1)^n.$

7) $x_n = \dfrac{2n^2+1}{4n^2+5}; x_{n+1} = \dfrac{2(n+1)^2+1}{4(n+1)^2+5} = \dfrac{2^n+4n+3}{4^n+8n+9} \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \dfrac{2n^2+1}{4n^2+5} -$

$$-\frac{2n^2+4n+3}{4n^2+8n+9} = \frac{(2n^2+1)(4n^2+8n+9)-(4n^2+5)(2n^2+4n+3)}{(4n^2+5)(4n^2+8n)+9} =$$

$$= \frac{8n^4+16n^3+22n^2+8n+9-(8n^2+16n^3+22n^2+20n+15)}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} =$$

$$= \frac{-12n-6}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} < 0 \Rightarrow x_n - x_{n+1} < 0 \Rightarrow x_n < x_{n+1}.$$

У ҳолда кетма-кетлик ўсувчи.

C

3.11. Агар $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ бўлса, a_1, a_2, a_{n+1}, a_{2n} ҳадларини ёзинг.

3.12. $\{x_n\}$ кетма-кетлик рекуррент формула билан берилган. 1) $x_1=3$, $x_{n+1}=2x_n$, $n\geqslant 1$; 2) $x_1=1$, $x_{n+1}=1-x_n$, $n\geqslant 1$ кетма-кетликнинг умумий ҳади формуласини ёзиб, кетма-кетликнинг дастлабки 4 та ҳадини кўрсатинг.

3.13. $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ кетма-кетликнинг a_1, a_{n+1}, a_{n-1} ҳадларини ёзинг.

3.14. Умумий ҳади $x_n = \frac{3n-1}{5n+2}$ формула билан берилган кетма-кетликнинг ўсувчи бўлишини исботланг.

3.15. Умумий ҳади $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ формула билан берилган кетма-кетликнинг камаювчи бўлишини исботланг.

3.16. Умумий ҳади $x_n = \frac{an+2}{bn+1}$ формула билан берилган кетма-кетлик a нинг ва b нинг қандай қийматларида ўсувчи ёки камаювчи бўлади?

Такрорлашга доир машқлар

3.17. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{ap+aq-bp-bq}{ap-aq-bp+bq}$; 2) $\frac{mc-nc+md-nd}{mc+nc+md+nd}$.

3.18. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ x^2-y^2=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} - \frac{x-y}{2} = 5, \\ 7x+3y=38. \end{cases}$

3.19. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \frac{4}{\sqrt{18x^2-3x-1}}$; 2) $y = \sqrt{(x+4)(7-x)}$.

3.20. Графиги $A(3;-6)$ нуқта орқали ўтувчи тескари пропорционал функция ёзинг.

3.2*. Математик индукция методи

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Математик индукция методини билиб, улардан мисоллар ечишда фойдаланишни ўрганасизлар.

Хусусий мулоҳазалардан умумий хулоса чиқариш усули ***индукция деб*** *аталади.* Масалан, кетма-кет жойлашган дастлабки тоқ натурал сонларнинг йиғиндисини кўриб чиқамиз:

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Бунда биринчи қаторни битта қўшилувчидан тузилган йиғинди деб кўриш керак. Шундай “йиғиндилардан” математик анализда кўп фойдаланилади. Ушбу хусусий мисоллардан қўшилувчиларнинг дастлабки тоқ сонлар йиғиндиси қўшилувчилар сонининг квадратига тенг деган тахмин (гипотеза) айтиш мумкин, яъни ҳар бир натурал n учун $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ тенглик бажарилади деб ҳисоблаймиз. Албатта, бу исботланмаган гипотеза. Унинг тўғрилигини кейинроқ исботлаймиз.

Яна бир мисол кўриб чиқамиз. Ҳар бир натурал n учун аниқланган $P(n)=n^2+n+41$ квадрат учҳад берилсин. Бу квадрат учҳаднинг n сонининг 1, 2, 3, 4, 5 га тенг бўлгандаги қийматлари туб сонлар эканлигини текшириш қийин эмас: $P(1)=43$; $P(2)=47$; $P(3)=53$; $P(4)=61$; $P(5)=71$ ва ҳоказо. Бундан $P(n)$ квадрат учҳаднинг қиймати ҳар бир натурал n сони учун туб сон бўлади деган тахмин айтиш мумкин. Бироқ бу тахминимиз нотўғри. Чунки $n=41$ ҳолда

$$P(41)=41^2+41+41=41\cdot 43$$

ифоданинг қиймати туб сон бўлмайди.

Ушбу иккита мисолдан бир хил таҳлил усулларидан фойдаланиб ҳар хил натижалар чиқишини кўрамиз. Агар биринчи мисолнинг натижаси тўғри бўлса, иккинчи мисолнинг натижаси нотўғри бўлиб чиқди. Бундан тахминнинг бу усули исбот эмас. Бироқ, бу усул кўп ҳолларда ростлигини бошқа усуллар билан исботланадиган гипотезалар айтишга таъсир кўрсатади. Ушбу усул билан олинадиган тахминлар бир нечта хусусий мисолларнинг натижаси бўлганлиги сабабли у тўла ***бўлмаган индукция*** дейилади.

Агар натижа барча мумкин бўлган хусусий холларни таҳлил қилиш натижасида олинса, бундай тахминлар ***усули тўла индукция*** деб аталади. Албатта, бундай усулдан мумкин бўлган холлар сони кам бўлганда фойдаланган маъқул. Энди тўла индукциядан фойдаланишга доир мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. $2 \leqslant n \leqslant 15$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар бир натурал n сони учун унинг туб кўпайтувчилари сони 3 дан катта бўлмаслигини исботлаймиз.

Ҳақиқатан, 2, 3, 5, 7, 11, 13 — берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи туб сонлар. Бундан уларни битта кўпайтувчидан ташкил топади деб ҳисоблаймиз 4, 6, 9, 10, 14, 15 сонлар эса иккита туб кўпайтувчиларга ажратилади. Оҳирида 8 ва 12 сонлари учта туб кўпайтувчиларга ажратилади. Шундай қилиб, биз барча мумкин бўлган холларни тўлиқ қараб чиқдик. У ҳолда берилган мулоҳаза рост.

2-мисол. $3m^2-4n^2=13$ тенглик m ва n нинг ҳеч бир бутун қийматларида бажарилмаслигини исботлаймиз.

Икки холни кўриб чиқамиз:

1) m — исталган жуфт сон, n исталган бутун сон десак, $m=2k$, k бутун сон эканлигидан, $12k^2-4n^2=13$. Бу тенгликнинг бажарилиши мумкин эмас, чунки тенгликнинг чап томони 4 га бўлинади, ўнг томони эса 4 га бўлинмайди.

2) $m=2k+1$ — исталган тоқ сон, n исталган бутун сон бўлсин. У ҳолда $3(2k+1)^2-4n^2=13$ ёки $12k^2+12k-4n^2=10$ ёки $6k^2+6k-2n^2=5$ тенглик хосил бўлади. Бу тенгликнинг ҳам бажарилиши мумкин эмас, чунки чап томонида жуфт сон, ўнг томонида тоқ сон туради.

Шундай қилиб, $3m^2-4n^2=13$ тенглик n — исталган бутун сон, m— исталган тоқ ёки жуфт сон бўлса ҳам бажарилмаслигини кўрамиз. Бундан, $3m^2-4n^2=13$ тенглик m ва n нинг ҳеч бир бутун қийматлари учун бажарилмайди. Шуни исбот этиш керак эди.

Энди

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \tag{1}$$

тенгликнинг исталган натурал n сони учун бажарилишини исботлаймиз.

Юқорида айтилгани каби (1) тенглик орқали гипотеза аниқланади ва бу гипотеза n га боғлиқ. Қулай бўлиши учун (1) тенглик билан аниқланадиган гипотезани $A(n)$ орқали белгилаймиз. $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$ мулоҳазалар юқорида текширилган. $A(5)$ мулоҳазани ёзамиз: $1+3+5+7+9=5^2$. Ушбу мулоҳаза исботланди деб ҳисоблаб, унинг натижаси сифатида $A(6)$ мулоҳазанинг ростлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$1+3+5+7+9+11=5^2+11=5^2+2\cdot5+1=(5+1)^2=6^2.$$

Умуман, агар $A(k)$ мулоҳаза рост бўлиб,

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2$$

тенглик бажарилади деб ҳисоблаб, $A(k+1)$ мулоҳазанинг ростлигини осон текшириш мумкин:

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Бундан қуйидагича кетма-кетлик келиб чиқади:

$$A(5)\Rightarrow A(6)\Rightarrow A(7)\Rightarrow A(8)\Rightarrow A(9)...$$

Бу ёзув “агар $A(5)$ рост бўлса, у ҳолда $A(6)$ рост; агар $A(6)$ рост бўлса $A(7)$ рост ва ҳоказо..” деб ўқилади. Шундай қилиб, ушбу кетма-кетликни давом эттириб, $A(1)$ мулоҳазанинг ростлигидан бошлаб, исталган $A(n)$ натурал сон учун мулоҳазанинг ростлигига ишонч хосил қилиш қийин эмас.

Ушбу фойдаланилган исботлаш усули математик ***индукция методи*** дейилади. Энди ушбу метод қоидасини келтириб чиқарамиз:

Агар $A(n)$ мулоҳаза $n=1$ учун рост бўлса ва унинг $n=k$ учун ҳам рост эканлигидан (k — исталган натурал сон) бу мулоҳазанинг навбатдаги $n=k+1$ сони учун ҳам ростлиги келиб чиқса, $A(n)$ мулоҳаза исталган натурал сон учун рост бўлади.

Бу математик индукция методи –натурал сонлар назариясининг асосий аксиомаларидан бири ва ундан математик мулоҳазаларни исботлашда кўп қўлланилади.

Шундай қилиб, математик индукция методи аслида қуйидаги иккита босқичдан ташкил топади:

1-босқич: $A(1)$ мулоҳазанинг ростлигини текшириш;

2-босқич: $n=k$ бўлганда $A(k)$ мулоҳазани рост деб қабул қилиб, $n=k+1$ бўлганда $A(k+1)$ мулоҳазанинг ростлигини исботлаб, $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ бўлишини кўрсатиш керак.

Агар босқичларнинг иккаласи ҳам исботланса, $A(n)$ мулоҳаза математик индукция методи бўйича исталган натурал n сони учун бажарилади.

Энди (1) тенгликнинг ростлигига қайтиб келамиз. Исботга кўра $A(1)$ рост ва $A(k)$ нинг ростлигидан $A(k+1)$ нинг ростлигига ишонч хосил қилдик. У ҳолда (1) тенглик исталган натурал n сони учун бажарилади.

3-мисол. Исталган натурал n сони учун

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} \qquad (2)$$

йиғиндини топиш керак.

Дастлаб тўлиқ бўлмаган индукция усулидан фойдаланиб, хусусий холларда келиб чиқадиган йиғиндиларнинг қонуниятини аниқлаймиз. Бунинг учун (2) йиғиндини S_n орқали белгилайлик:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

Бундан ҳар бир йиғиндининг сурати қўшилувчилар сонига тенг, махражи суратидан 1 га ортиқ бўлишини кўрамиз.

У ҳолда исталган n натурал сон учун

$$S_n=\frac{n}{n+1} \qquad (3)$$

тенглик бажарилади деган гипотеза чиқади. Энди ушбу гипотезани математик индукция методи бўйича исботлайлик:

1) $n=1$ бўлганда $S_1=\frac{1}{2}$. У ҳолда, $A(1)$ мулоҳаза рост.

2) Энди $A(k)$ мулоҳазани рост деб қабул қилиб, $A(k+1)$-нинг ростлигини, яъни $S_k=\frac{k}{k+1}\Rightarrow S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ бўлишини исботлаш керак.

Фараз қилайлик, $S_k=\dfrac{k}{k+1}$ тенглик тўғри бўлсин,

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}\Rightarrow S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Шуни исбот этиш керак эди.

Шундай қилиб, математик индукция методи бўйича $S_n=\dfrac{n}{n+1}$ формула исталган натурал n учун бажарилади.

Эслатма. Баъзида берилган $A(n)$ мулоҳаза $n=1$, $n=2$, ..., $n=m-1$ учун бажарилмасада, $n=m$ қийматдан бошлаб бажарилиши мумкин. Математик индукция методи $A(m)$ мулоҳазани исботлашдан бошлаб, $A(k)$, $(k\geqslant m)$ мулоҳазанинг ростлигидан $A(k+1)$ мулоҳазанинг ростлиги келиб чиқишини исботлайди.

4-мисол. Ҳар бир натурал $n\geqslant5$ учун $2^n>n^2$ тенгсизликнинг бажарилишини исботлаймиз.

1) $n=5$ бўлганда $2^n=2^5=32$ ва $n^2=5^2=25$. берилган тенгсизлик бажарилади.

2) $n=k$, $k\geqslant5$ бўлганда $2^k>k^2$ тенгсизлик бажарилсин. Биз $2^{k+1}>(k+1)^2$ тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатишимиз керак.

Бунинг учун $2^k>k^2$ тенгсизликни 2 га кўпайтириб, $2^{k+1}>2k^2$ тенгсизликка эга бўламиз. Энди $k\geqslant5$ бўлганда $2k^2>(k+1)^2$ ёки $2k^2-(k+1)^2>0$ тенгсизлик бажарилишини исботлаш, етарли.

Ҳақиқатан, $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2$. $k\geqslant5$ эканлигидан, $(k-1)^2\geqslant4^2$ ёки $(k-1)^2-2>0$ тенгсизлик бажарилиб, $2k^2-(k+1)^2>0$ тенгсизликнинг тўғрилиги келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган тенгсизлик исталган натурал $n\geqslant5$ учун исботланди.

1. Индукция нима?
2. Тўлиқ (тўлиқ бўлмаган) индукция деганда нимани тушунасиз?
3. Математик индукция методини келтириб чиқаринг.

МАШҚЛАР

B

3.21. Математик индукцияси методидан фойдаланиб, қуйидаги мулоҳазаларни исботланг:

1) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

5) $1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

6) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

7) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

8) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

9) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$;

10) $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

7) агар $n=1$ бўлса, $1\cdot4=1\cdot(1+1)^2=1\cdot4$ мулоҳаза рост. Энди $n=k$ бўлганда $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)=k(k+1)^2$ айният бажарилади деб олиб, $n=k+1$ у ҳолда $1\cdot4+2\cdot7+ +\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k+2)^2$ айният бажарилишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=k(k+1)^2\times \times(k+1)(3k+4)=(k+1)[k(k+1)+3k+4]=(k+1)(k^2+4k+4)-(k+1)\times \times(k+2)^2$.

Шуни исбот этиш керак эди.

3.22. Ҳар бир n сони учун қуйидаги мулоҳазаларни исботланг:

1) $n^3+5n \vdots 6$; 2) $7^n+3n-1 \vdots 9$; 3) $8^n+6 \vdots 7$;
4) $10^n+18n-28 \vdots 27$; 5) $9^n-8n-9 \vdots 8$, $n>1$;
6) $n^4+6n^3+11n^2+6n \vdots 24$.

C

3.23. Исталган натурал $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ сони учун йиғиндини топинг

3.24. Ораларида ўзаро параллел тўғри чизиқлар бўлмайдиган ва уларнинг ҳеч қандай учта тўғри чизиғи битта нуқта орқали ўтмайдиган, битта текисликда жойлашган n тўғри чизиқ ушбу текисликни $\frac{n^2+n+2}{2}$ қисмларга бўлишини исботланг.

3.25. $\{a_n\}$ кетма-кетлик рекуррент формула билан берилган: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+8n$. Кетма-кетликнинг исталган ҳади бутун соннинг тўла квадратини аниқлашини кўрсатинг.

3.26. $\{b_n\}$ кетма-кетлик рекуррент формула билан берилган: $b_1=3$, $b_{n+1}=7b_n+3$. Бу кетма-кетликнинг умумий ҳади $b_n=\frac{7^n-1}{2}$ формула билан аниқланишини кўрсатинг.

$n=1$ бўлса, $b_1=\frac{7^1-1}{2}=3$ мулоҳаза рост. Энди $n=k$ бўлганда $b_{k+1}=\frac{7^k-1}{2}$ тенглик бажарилади деб олиб, $b_{k+1}=\frac{7^{k+1}-1}{2}$ тенглик бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$b_{k+1}=7\cdot b_k+3=7\cdot\frac{7^k-1}{2}+3=\frac{7^{k+1}-7+6}{2}=\frac{7^{k+1}-1}{2}.$$

3.27. Қуйидаги мулоҳазаларнинг n нинг исталган натурал қийматида бажарилишини кўрсатинг:

1) $6^n+20n+24$ сони 25 га каррали;
2) агар $0<a<b$ бўлса, у ҳолда $a^n<b^n$.

3.28. Натурал n соннинг кўрсатилган қийматлари учун қуйидаги тенгсизликни исботланг:

1) $2^n > n$, $n \geqslant 0$;
2) $2^n > 2n+1$, $n \geqslant 3$;
3) $2^n > n^3$, $n \geqslant 10$;
4) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \geq 2$.

3.29. Агар $h > -1$, $h \neq 0$ бўлса, у ҳолда $(1+h)n > 1+nh$ тенгсизликнинг ҳар бир натурал $n > 2$ учун бажарилишини исботланг. Бу Бернулли тенгсизлиги деб аталади.

Такрорлашга доир машқлар

3.30. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=7-3x-x^2$;
2) $y=\frac{2x+3}{x+1}$.

3.31. $f(x)=\frac{\sqrt{x-x^2+2}}{x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

3.3. Арифметик прогрессия. Арифметик прогрессиянинг n-ҳади формуласи

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Кетма-кетликлар ичидан арифметик прогрессияларни ажрата олишни ўрганасизлар:
- Арифметик прогрессиянинг n-ҳадини топишни ўрганасизлар.

3.3.1. Арифметик прогрессия тушунчаси

3 га бўлганда қолдиғи 1 га тенг бўладиган натурал сонлар кетма-кетлигини кўриб чиқамиз: 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... Бу кетма-кетликнинг иккинчи ҳадидан бошлаб, ҳар бир ҳади ўзидан олдинги қўшни ҳадга 3 ни қўшиш билан хосил қилиняпти. Бу кетма-кетлик арифметик прогрессияга мисол бўлади. Прогрессия атамаси лотинча *progressio* деган сўздан олинган. У "олдинга қараб интилиш" деган маънони билдиради. Энди арифметик прогрессиянинг таърифини келтирамиз.

Таъриф. *Агар a_2, a_2, ..., a_n, ... кетма-кетликнинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади олдинги қўшни ҳадига ўзгармас сонни қўшганга тенг бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик **арифметик прогрессия** деб аталади.*

Бошқача айтганда исталган натурал сон учун

$$a_{n+1}=a_n+d \qquad (1)$$

тенглик бажарилса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик арифметик прогрессия, d сони арифметик прогрессиянинг айирмаси деб аталади.

Шундай қилиб, арифметик прогрессиянинг айирмаси учун

$$d=a_{n+1}-a_n \qquad (2)$$

тенглик бажарилади. Юқорида келтирилган мисолда $a_n=3n-2$, $a_{n+1}=3n+1$ эканлигидан, $d=a_{n+1}-a_n=3n+1-(3n-2)=3$.

3.3.2. Арифметик прогрессиянинг n-ҳади формуласи

Энди арифметик прогрессияни биринчи ҳади a_1 билан айирмаси d орқали тўла аниқлаш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун n ҳади a_n ни d *ва* a_1 орқали ифодалаш, етарли, Арифметик прогрессиянинг таърифига кўра

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Бундан қуйидаги гипотеза келиб чиқади: $a_n=a_1+(n-1)d$.

Бу формулани математик индукция методидан фойдаланиб, исботлаймиз:

1) $n=2$ бўлганда $a_2=a_1+d$.

2) $n=k$ бўлганда $a_k=a_1+(k-1)d$ формулани тўғри деб қабул қилиб, $n=k+1$ бўлганда $a_{k+1}=a_1+kd$ тенгликнинг бажарилишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, таърифга кўра

$a_{k+1}=a_k+d=(a_1+(k-1)d)+d=a_1+((k-1)d+d)=a_1+kd$.

Шуни исботлаш керак эди.

Шундай қилиб, арифметик прогрессиянинг n-ҳади формуласи

$$a_n=a_1+(n-1)d \qquad (3)$$

кўринишда ёзилади. Бир нечта мисол кўриб чиқамиз.

1-мисол. $a_1=-2$, $d=0,5$ бўлган $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг 25-ҳадини топиш керак.

(3) формула бўйича $a_{25}=a_1+24d=-2+24\cdot0,5=10$.

2-мисол. 9 ва 5 сонлари орасига шу сонлар билан биргаликда арифметик прогрессия ташкил этадиган қилиб еттита сон ёзиш керак.

Агар 9 ва 5 сонлари биз қидираётган еттита сон билан биргаликда арифметик прогрессия ташкил этса, $a_1=9$, $a_9=5$ бўлади. Биз a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 сонларни топишимиз керак. (3) формулага кўра. (3) формуладан $5=a_9=a_1+8d=9+8d\Rightarrow8d=-4 \Rightarrow d=-0,5$. $a_2=a_1+$ $+d=9-0,5=8,5$; $a_3=8$; $a_4=7,5$; $a_5=7$; $a_6=6,5$; $a_7=6$; $a_8=5,5$.

(3) формуладан $a_n=dn+(a_1-d)$ тенгликни оламиз. У ҳолда, $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг n-ҳадини $a_n= kn+b$ кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрамиз. Бунда k ва b — берилган сонлар. Бунга тескари мулоҳаза ҳам бажарилади. Ҳар бир берилган k ва b сонлар учун

$$a_n=kn+b \qquad (4)$$

формула билан аниқланадиган $\{a_n\}$ кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлади.

Ҳақиқатан, $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг $n+1$ ва n-ҳадларининг айирмасини кўриб чиқамиз:

$$a_{n+1}-a_n=k(n+1)+b-(kn+b)=k.$$

Демак, исталган n натурал сон учун $a_{n+1}-a_n=k$ тенглик бажарилади. Таърифга кўра $\{a_n\}$ — арифметик прогрессия. Унинг айирмаси k га тенг.

Шу билан бир қаторда арифметик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб, унинг ҳар бир ҳади ўзи билан қўшни бўлган ***иккита ҳадининг*** ўрта арифметигига тенг бўлади:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \tag{5}$$

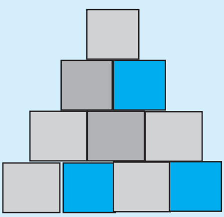
Ҳақиқатан, таърифга кўра $a_n=a_{n-1}+d$, $a_n=a_{n+1}-d$. Ушбу иккита тенгликни ҳадма-ҳад қўшсак,

$$2a_n=(a_{n-1}+d)+(a_{n+1}-d) = a_{n-1}+a_{n+1}$$

ёки $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

1. Қандай сонлар кетма-кетлиги арифметик прогрессия деб аталади?
2. Арифметик прогрессиянинг айирмаси деб қандай сонга айтилади?
3. Арифметик прогрессиянинг n-ҳадининг формуласини ёзинг.

АМАЛИЙ ИШ


3.1-расм

Болалар боғчасида ўйнаб юрган болалар қирралари 8 см бўлган кублардан учбурчаксимон 3.1-расмда кўрсатилгани каби зинапоя "девор" қуришди ва унинг баландлиги 56 см бўлди. "Деворнинг" асосида нечта куб жойлашган? Агар асосида 11 та куб жойлашса, деворнинг баландлиги қандай бўлар эди?

МАШҚЛАР

А

3.32. 1) 19, 15, 11, ...; 2) –1, 3, 7, ... арифметик прогрессиянинг бешинчи ҳадини топинг.

3.33. $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг дастлабки тўртта ҳадини ёзинг:

1) $a_1=10$; $d=4$; 2) $a_1=1,7$; $d=-0,2$;

3) $a_1=-3,5$; $d=0,6$; 4) $a_1=\frac{4}{3}$; $d=\frac{1}{6}$.

3.34. 1) $a_1=-3$, $d=0,7$ бўлса, a_{11}-ни; 2) $a_1=18$, $d=-0,5$ бўлса, a_{20} -ни; 3) $a_1=20$, $d=3$ бўлса, a_5-ни; 4) $b_1=5,8$, $d=-1,5$ бўлса, b_{21}-ни ни топинг.

3.35. 1) $\frac{1}{3}$, –1, ...; 2) 2,3, 1, ...; 3) –8, –6,5, ...; 4) 11, 7, ...

арифметик прогрессиянинг бешинчи ва n ҳадларини топинг.

1) $a_1=\frac{1}{3}$; $a_2=-1 \Rightarrow d=a_2-a_1=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$.

$$a_n=a_1+(n-1)d=\frac{1}{3}+(n-1)(-\frac{4}{3})=\frac{1-4n+4}{3}=\frac{5-4n}{3}.$$

Жавоби: $a_n=\frac{5-4n}{3}$.

3.36. $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг a_1 биринчи ҳади билан d айирмаси берилган. a_n-ни топинг:

1) $a_1=2$; $d=0,1$; $n=5$; 2) $a_1=2,3$; $d=-1$; $n=10$;

3) $a_1=-3$; $d=0,8$; $n=16$; 4) $a_1=-1\frac{5}{6}$; $d=\frac{1}{3}$; $n=61$.

3.37. 1) $a_1=2$, $a_{10}=92$; 2) $a_1=-7$, $a_{16}=2$; 3) $a_1=0$, $a_{66}=-92$ бўлса, d-ни топинг.

B

3.38. 1) 6 га қолдиқсиз бўлинадиган; 2) 13 га қолдиқсиз бўлинадиган нечта икки хонали натурал сон мавжуд?

3.39. Олтитаси ҳам арифметик прогрессиянинг кетма-кет жойлашган ҳадлари бўладиган қилиб, 1) 5 ва 1; 2) 2,5 ва 4 сонларнинг орасига тўртта сон жойлаштиринг.

2) $a_1=2{,}5$; $a_6=4$. (3) формулага кўра $a_6=a_1+5d \Rightarrow 4=2{,}5+5d \Rightarrow 5d=1{,}5 \Rightarrow d=0{,}3$. У ҳолда $a_2=a_1+d=2{,}8$; $a_3=a_2+d=3{,}1$; $a_4=a_3+d=3{,}4$; $a_5=a_4+d=3{,}7$.
Жавоби: 2,5 билан 4 нинг орасига 2,8; 3,1; 3,4; 3,7 сонларни жойлаштириш керак.

3.40. 1) $c_5=27$, $c_{27}=60$; 2) $c_{20}=0$, $c_{66}=-92$ бўлса, у ҳолда $\{c_n\}$ арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади билан айирмасини топинг.

3.41. Агар $a_1=32$; $d=-1{,}5$ бўлса, 1) 0; 2) -28 сони шу $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг ҳади бўладими?

3.42. 1 ва 16 сонларнинг орасига шу сонлар билан биргаликда арифметик прогрессия ташкил этадиган қилиб қандай 8 та сонни жойлаштириш керак?

3.43. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади билан айирмасини топинг:

1) $\begin{cases} a_1 + a_{10} = 12, \\ a_8 - a_5 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_5 + a_{11} = -0{,}2, \\ a_4 + a_{10} = 2{,}6. \end{cases}$

3.44. 1) 156; 2) 295 сони 2, 9, ... арифметик прогрессиянинг ҳади бўладими?

3.45. $x_1=8{,}7$; $d=-0{,}3$ бўлса, n нинг қандай қийматида $\{x_n\}$ арифметик прогрессиянинг ҳадлари учун $x_n \geqslant 0$ ва $x_{n+1}<0$ тенгсизликлар бажарилади?

$\begin{cases} x_n = 8{,}7 - (n-1)0{,}3 \geq 0, \\ x_{n+1} = 8{,}7 - 0{,}3n < 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси бажарилиши керак. Бундан $\begin{cases} 9 - 0{,}3n \geq 0, \\ 8{,}7 - 0{,}3n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8{,}7<0{,}3n\leqslant 9 \Leftrightarrow$

$29<n\leqslant 30$.

Шундай қилиб, $x_{31}=-0{,}3<0$, $x_{30}=0$.

Жавоби: $n=30$.

3.46. 1) $a_n=3n+1$; 2) $a_n=n^2-5$; 3) $a_n=4+n$; 4) $a_n=\dfrac{1}{n+4}$; 5) $a_n=-0{,}5n+1$; 6) $a_n=6n$ формула билан аниқланган $\{a_n\}$ кетма-кетлик арифметик прогрессия бўладими?

C

3.47. $a_p=q$, $a_q=p$ бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ аарифметик прогрессиянинг n-ҳадини n, p ва q орқали ифодаланг.

3.48. 5, 8, 11, ... ва 3, 7, 11, ... арифметик прогрессияларнинг $n=100$ бўлганда нечта умумий ҳади мавжуд бўлади?

3.49. $\{a_n\}$ ўсувчи арифметик прогрессия учун $a_2a_5=52$ ва $a_2+a_3+a_4+a_5=34$ тенгликлар бажарилади. Прогрессиянинг йигирманчи ҳадини топинг.

3.50. $(a+x)^2$, a^2+x^2, $(a-x)^2$, ... кетма-кетлик арифметик прогрессия ташкил этишини исботланг.

3.51. a_1, a_2, ..., a_n сонлар арифметик прогрессиянинг кетма-кет жойлашган ҳадлари бўлса, $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$ формула бажарилишини кўрсатинг. Бунда $a_1\neq0$, $a_2\neq0$, ..., $a_n\neq0$.

3.52. 1) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 1; $\dfrac{1+4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+2}$ сонлар арифметик прогрессиянинг кетма-кет жойлашган ҳадлари бўлиши мумкинми?

3.53. Барча ҳадлари натурал сонлар бўлган арифметик прогрессиянинг таркибида натурал соннинг квадратига тенг бўладиган роппа-роса 2004 та ҳади бўлиши мумкинми?

Такрорлашга доир машқлар

3.54. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\dfrac{x+c}{2x+y}$; 2) $\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\dfrac{x+z}{(1-y)^2}$.

3.55. Тенгламани ечинг:

1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $3x^4+x^2-4=0$.

3.4. Геометрик прогрессия. Геометрик прогрессиянинг n-ҳади формуласи

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Кетма-кетликлар орасидан геометрик прогрессияни фарқлашни ўрганасизлар;
- Геометрик прогрессиянинг n-ҳадини топишни ўрганасизлар.

3.4.1. Геометрик прогрессия тушунчаси

Фараз қилайлик, бизга $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ кетма-кетлик берилсин.

Таъриф. *Агар $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади олдинги қўшни ҳадига ўзгармас, нолдан фарқли сонни кўпайтириш билан хосил қилинса, бу кетма-кетлик **геометрик прогрессия** дейилади.*

Бошқача айтганда агар исталган натурал сони учун

$$a_{n+1}=a_n \cdot q, \ q \neq 0, \ a_1 \neq 0 \qquad (1)$$

*тенглик бажарилса, $\{a_n\}$ кетма-кетлик геометрик прогрессия, q сони унинг **махражи** дейилади.*

Масалан, ҳадлари 2 нинг натурал кўрсаткичли даражалари бўлган кетма-кетликни кўриб чиқамиз: $2; 2^2; 2^3; \ldots, 2^n; \ldots$. Бу кетма-кетликнинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади ўзидан олдинги ҳадини 2 га кўпайтирганда ҳосил бўлади: $a_{n+1}=a_n \cdot 2$. Бу кетма-кетлик-геометрик прогрессия. Махражи $q=2$. Бунда $a_1=2, a_2=2^2, \ldots, a_n=2^n, \ldots$ *геометрик прогрессиянинг ҳадлари деб аталади.* Албатта, ҳар бир $\{a_n\}$ геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади нолдан фарқли: $a_1 \neq 0$. Чунки, агар $a_1=0$ бўлса, кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари нолга айланади.

Агар $a_1=1$ ва $q=0,1$ бўлса, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 … кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлади.

$a_1=-3$ ва $q=3$ бўлса, $-3, -9, -27, -81$ … кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлади.

$a_1=2$ ва $q=-5$ бўлса, $2, -10, 50, -250, \ldots$ кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлади.

$a_1=4$ ва $q=1$ бўлса, 4, 4, 4, 4,… кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлмайди.

3.4.2. Геометрик прогрессиянинг n-ҳади формуласи

Энди геометрик прогрессиянинг n-ҳади формуласини аниқлаймиз. Таърифга кўра

$$a_2=a_1q;$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2;$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3;$$
$$a_5=a_4q=(a_1q^3)q=a_1q^4;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Бундан

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \qquad (2)$$

формула бажарилади деган тахмин қиламиз.

Энди ушбу тахминни математик индукция методидан фойдаланиб исботлаймиз.

Ҳақиқатан, $n=2$ бўлганда $a_2=a_1q$ тенгликнинг бажарилиши таърифдан келиб чиқади. $n=k$ бўлганда $a_k=a_1q^{k-1}$ тенглик тўғри бўлади дейлик. У ҳолда $n=k+1$ учун $a_{k+1}=a_1q^k$ тенглик бажарилишини исботлаш керак. Ҳақиқатан, таърифга кўра $a_{k+1}=a_kq=(a_1q^{k-1})q=a_1q^k$. Шуни исбот этиш керак эди.

Шундай қилиб, геометрик прогрессиянинг n-ҳади (2) формула билан аниқланади.

1-мисол. $\{a_n\}$ геометрик прогрессиянинг 8-ҳадини топиш керак: $a_1=27,\ q=\frac{1}{3}$.

(2) формулага кўра $a_8=a_1q^7=27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{1}{81}$.

2-мисол. 12,24,... геометрик прогрессиянинг тўртинчи ва n-ҳадини топиш керак.

$a_1=12;\ a_2=24$ эканлигидан, $q=\frac{24}{12}=2$.

$a_4=a_1q^3=12\cdot2^3=96;\ a_n=a_1\cdot q^{n-1}=12\cdot2^{n-1}=3\cdot2^{n+1}$.

Энди қуйидаги мулоҳазани исботлаймиз.

Теорема. ***Мусбат ҳадли геометрик прогрессиянинг иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади ўзига қўшни бўлган иккита ҳадининг ўрта геометригига тенг:***

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}.$$

Исботи. Ҳақиқатан, $a_n = a_{n-1}q$, $a_n = a_{n+1}\dfrac{1}{q}$. Бундан $a_n^2 = (a_{n-1}q)\cdot\left(a_{n+1}\dfrac{1}{q}\right) = a_{n-1}a_{n+1}$. У ҳолда $a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$.

Эслатма: Геометрик прогрессиянинг махражи манфий сон (q<0) бўлганда $a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ тенглик бажарилади.

1. Қандай сонлар кетма-кетлиги геометрик прогрессия дейилади?
2. Геометрик прогрессиянинг махражи нима?
3. Геометрик прогрессиянинг n - ҳади формуласини ёзинг

Амалий иш

Даъвогар фирмага шартнома бўйича ишга жойлашади. Шартномага кўра ишчи дастлабки кварталда (3 ойда) 1000000 тенге миқдорида маош олади. Кейинги кварталда яхши ишласа, олдинги кварталдаги маоши 1,3 га кўпайтирилади. Иши талабга жавоб бермаганда унинг маоши 0,75 га кўпайтирилади. Ишчининг иши дастлабки кварталда талабга жавоб бермаса ҳам кейинги кварталда жуда яхши ишлади. Оҳирги 4 кварталда ишчининг маоши қандай бўлган? Бу маош ҳамма вақт яхши(ночор) ишлаганда қандай бўлар эди?

МАШҚЛАР

А

3.56. $\{a_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки тўртта ҳадини топинг: 1) $a_1=6$, $q=2$; 2) $a_1=-16$, $q=0,5$; 3) $a_1=24$, $q=-1,5$; 4) $a_1=0,4$, $q=\sqrt{2}$.

3.57. $\{x_n\}$ геометрик прогресссия учун 1) $x_1=16$, $q=0,5$ бўлса, x_7 ни; 2) $x_1=-810$, $q=\dfrac{1}{3}$ бўлса, x_8 ни; 3) $x_1=\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$ бўлса, x_{10} ни; 4) $x_1=125$, $q=0,2$ бўлса, x_6 ни топинг.

3.58. 1) 2, −6, …; 2) −0,125, 0,25, …; 3) −40, −20, …; 4) −10, 10, −10, … геометрик прогрессиянинг еттинчи ва n-ҳадларини топинг.

2) $b_1=-0,125$; $b_2=0,25$. (1) формулага кўра

$$b_2=b_1\cdot q\Rightarrow 0,25=-0,125\cdot q \Rightarrow q=-\frac{0,25}{0,125}=-2.$$

$b_7=b_1\cdot q^6=-0,125\cdot(-2)^6=0,125\cdot 64=-8.$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^3\cdot(-2)^{n-4}=-(-2)^{n-4}.$

Жавоби: $b_7=-8$; $b_n=(-2)^{n-4}$.

3.59. 1) 48, 12, ...; 2) $\frac{64}{9}, \frac{32}{3}, \ldots$; 3) $-0{,}001$, $-0{,}01$, ...; 4) -100, 10, ... геометрик прогрессиянинг олтинчи ва n ҳадларини топинг.

3.60. Умумий ҳади формуласи билан берилган геометрик прогрессиянинг q махражини, b_1, b_6, b_{n+3} ҳадларини ёзинг:

1) $b_n=2\cdot 7^{n-1}$; 2) $b_n=\frac{3}{5^n}$;

3) $b_n=5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

3.61. $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг махражини топинг:

1) $b_1=1$; $b_4=64$; 2) $b_6=25$; $b_8=9$; 3) $b_2=25$; $b_4=1$.

B

3.62. $\{b_n\}$ — геометрик прогрессия. 1) $b_6=3$, $q=3$ бўлса, b_1 ни; 2) $b_5=17{,}5$, $q=-2{,}5$ бўлса, b_1 ни; 3) $b_5=-6$, $b_7=-54$ бўлса, q ни; 4) $b_6=25$, $b_8=9$ бўлса, q ни; 5) $b_1=125$, $b_3=5$ бўлса, b_6 ни; 6) $b_4=-1$, $b_6=100$ бўлса, b_1 ни топинг.

3.63. Агар 2, c_2, c_3, $0{,}25c_2$ геометрик прогрессиянинг дастлабки тўртта ҳади бўлса, c_2, c_3 ни топинг.

3.64. $\{b_n\}$ геометрик прогрессия учун 1) $q=3$, $b_1=2$, $b_n=162$; 2) $q=\frac{1}{2}$, $b_1=128$, $b_n=1$; 3) $q=-\frac{2}{3}$, $b_1=\frac{81}{4}$, $b_n=4$; 4) $q=0{,}1$, $b_1=2$, $b_n=0{,}002$ бўлса, n ни топинг.

3.65. 10, 13, 14 сонлари (қўшни бўлиши шарт эмас) битта геометрик прогрессиянинг ҳадлари бўлиши мумкинми?

3.66. Бештаси ҳам геометрик прогрессиянинг кетма-кет жойлашган ҳадлари бўладиган қилиб, 1 ва 256 сонларининг орасига учта сон жойлаштиринг.

3.67. Биринчи ва учинчи ҳадларининг йиғиндиси 52 га, иккинчи ҳадининг квадрати 100 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг дастлабки учта ҳадини топинг.

3.68. Учинчи ва биринчи ҳадларининг айирмаси 9 га, бешинчи ва учинчи ҳадларининг айирмаси 36 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг дастлабки бир нечта ҳадларини ёзинг.

$b_3=b_1\cdot q^2,\ b_5=b_1\cdot q^4 \Rightarrow \begin{cases} b_3-b_1=9, \\ b_5-b_3=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(q^2-1)=9, \\ b_1(q^4-q^2)=36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1(q^2-1)=9, \\ q^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=3, \\ q=\pm 2. \end{cases}$

Жавоби: $q=2$ бўлса, $b_1=3$, $b_2=6$, $b_3=12,\ldots$;
$q=-2$ бўлса, $b_1=3$, $b_2=-6$, $b_3=12,\ldots$

3.69. $a_1+a_4=27$ ва $a_2a_3=72$ бўлса, $\{a_n\}$ геометрик прогрессиянинг махражини топинг.

3.70. $a_1+a_4=35$ ва $a_2+a_3=30$ бўлса, $\{a_n\}$ геометрик прогресссиянинг дастлабки бир нечта ҳадини ёзинг.

C

3.71. 195 сонини геометрик прогрессия ташкил этадиган қилиб учта бутун қўшилувчиларга ажратинг. Бунда биринчи қўшилувчи учинчисидан 120 га кам бўлсин.

3.72. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$ кетма-кетлик геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг.

3.73. Учта сон геометрик прогрессия ташкил этади. Агар учинчи сонни 4 га камайтирсак, у ҳолда бу уччаласидан арифметик прогрессия олиш мумкин. Арифметик пргрессиянинг 2 - ва 3 - ҳадлари мос равишда 1 га ва 5 га камайтирилса, қайтадан геометрик прогрессия хосил бўлади. Берилган сонларни топинг.

3.74. x, y, z геометрик пргрессиянинг кетма-кет жойлашган ҳадлари бўлса, $\dfrac{x^2+y^2}{x}=\dfrac{y^2+z^2}{z}$ тенглик бажариладими?

Такрорлашга доир машқлар

3.75. Касрни қисқартиринг:

1) $\dfrac{7^n-3\cdot 7^{n-1}}{4}$; 2) $\dfrac{5^{2n+1}-5^{2n-1}}{12\cdot 5^{n-1}}$.

3.76. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$; 2) $\dfrac{b^2+2b+1}{b^2+8b+7}$.

3.5. Арифметик ва геометрик прогрессияларнинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формулалари

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласининг хоссаларини ўзлаштириб, фойдаланишни ўрганасиз;
- Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласининг хоссаларини ўзлаштириб, ундан фойдаланасиз;
- Прогрессияларга доир матнли масалаларни ечишни ўрганасизлар.

3.5.1. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси

Арифметик прогрессиянинг яна бир хоссасини кўриб чиқамиз. *Агар* a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n *сонлар арифме-*

тик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади бўлса, бу кетма-кетликнинг оҳирларидан бир хил “узоқликда” жойлашган ҳадларининг йиғиндиси унинг четки ҳадларининг йиғиндисига тенг бўлади. $1 \leqslant k \leqslant n$ *учун*

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n \tag{1}$$

тенглик бажарилади.

Ҳақиқатан, $a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)d+a_1+(n-k)d=2a_1+(n-1)d=$ $=a_1+(a_1+(n-1)d)=a_1+a_n$. Шуни исбот қилиш керак эди.

Энди арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топамиз. Уни S_n орқали белгилайлик.

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

ёки

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1.$$

Ушбу иккита тенгликни ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$2S_n=\left(a_1+a_n\right)+\left(a_2+a_{n-1}\right)+\ldots+\left(a_{n-1}+a_2\right)+\left(a_n+a_1\right).$$

(1) (1) формуладан фойдалансак,

$$2\cdot S_n=\underbrace{\left(a_1+a_n\right)+\left(a_1+a_n\right)+\ldots+\left(a_1+a_n\right)}_{n}=n\cdot\left(a_1+a_n\right).$$

Бундан

$$S_n=\frac{\left(a_1+a_n\right)\cdot n}{2}. \tag{2}$$

ёки $a_n=a_1+(n-1)d$ тенгликни эътиборга олсак,

$$S_n=\frac{2a_1+\left(n-1\right)d}{2}\cdot n. \tag{3}$$

1-мисол. 3 га каррали барча икки хонали сонларнинг йиғиндисини топиш керак.

$a_1=12$ ва $a_n=99$ бўлиши маълум. n ни топиш керак. $a_n=a_1+(n-1)d$ формулага кўра

$99=12+(n-1)3\Rightarrow n=30$. Бундан $S_{30}=\frac{1}{2}(12+99)\cdot 30=1665$.

3.5.2. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси

Энди геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси формуласини келтириб чиқарамиз.

$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади, q унинг махражи бўлсин. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини S_n орқали белгиласак,

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

тенгликдан $a_k=a_1q^{k-1}$ формулани инобатга олиб,

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1} \tag{4}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликни q га кўпайтирсак,

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \tag{5}$$

(4) тенгликдан (5) тенгликни айириб,

$$S_n qS_n=a_1-a_1q^n \quad \text{ёки} \quad S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \tag{6}$$

формулани оламиз. Бунда $q\neq1$.

2-мисол. Геометрик прогрессия учун $S_3=9$, $S_6=-63$ бўлса, S_{10} ни топиш керак.

(6) формулага кўра

$$\left.\begin{aligned} S_3&=a_1\frac{1-q^3}{1-q}=9,\\ S_6&=a_1\frac{1-q^6}{1-q}=-63\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3}=-7\Rightarrow 1+q^3=-7\Rightarrow q^3=-8;$$

$$q=-2;\ a_1=3.$$

Энди (6) формуладан фойдалансак,

$$S_{10}=\frac{3\left(1-(-2)^{10}\right)}{1-(-2)}=\frac{3\left(1-2^{10}\right)}{3}=-1023.$$

Жавоби: -1023.

1. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндисининг формуласини ёзиб, исботланг.
2. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндисининг формуласини ёзиб, исботланг.

Амалий иш

Олдинги мавзудаги амалий ишнинг ҳар бир ҳолатида (зинапоянинг баландлиги 56 см ва зинапоянинг асосидан I0 та куб жойлашган холда) жами нечта куб фойдаланилганини топинг.

МАШҚЛАР

А

3.77. Арифметик прогрессиянинг дастлабки 10 та ҳадининг йиғиндисини топинг:

1) $-23;\ -20;\ \ldots;$ 2) $14,2;\ 9,6;\ \ldots;$ 3) $b_1=-17,\ d=6;$
4) $b_1=6,4;\ d=0,8;$ 5) $a_1=3,\ a_{10}=17;$ 6) $a_1=-10,5;\ a_{10}=12.$

3.78. Геометрик прогрессиянинг дастлабки 5 та ҳадининг йиғиндисини топинг:

1) $b_1=8,\ q=\frac{1}{2};$ 2) $b_1=500,\ q=\frac{1}{5};$ 3) $3,\ -6;\ \ldots;$
4) $54;\ 36;\ \ldots;$ 5) $-32;\ 16;\ \ldots;$ 6) $1;\ -\frac{1}{2};\ \ldots;$
7) $c_1=-4;\ q=3;$ 8) $c_1=1;\ q=-2;$ 9) $u_1=3;\ q=2.$

3,79. $\{a_n\}$ арифметик прогрессиянинг дастлабки 15 та ҳадининг йиғиндисини топинг:

1) $a_5=27,\ a_{27}=60;$ 2) $a_{20}=0,\ a_{66}=-92;$
3) $a_1=-3,\ a_{61}=57;$ 4) $a_1=-10,5,\ a_{63}=51,5.$

3.80. $\{b_n\}$ геометрик прогрессиянинг дастлабки 6 та ҳадининг йиғиндисини топинг:

1) $b_5=-6,\ b_7=-54;$ 2) $b_6=25,\ b_8=9;$
3) $b_1=125,\ b_3=5;$ 4) $b_4=-1,\ b_6=-100.$

3.81. Умумий ҳадли формуласи билан берилган кетма-кетликнинг арифметик прогрессия бўлишини кўрсатиб, S_{10} ни топинг:

1) $a_n=5n+3;$ 2) $a_n=5-\frac{n}{2}.$

3.82. Умумий ҳадли формуласи билан берилган кетма-кетликнинг геометрик прогрессия бўлишини кўрсатиб, S_{10} ни топинг:

1) $b_n=2\cdot3^{n+1};$ 2) $b_n=-\frac{3}{2^n}.$

1) $b_n=2\cdot3^{n+1} \Rightarrow b_{n+1}=2\cdot3^{n+2} \Rightarrow b_{n+1} : b_n=2\cdot3^{n+2} : 2\cdot3^{n+1}=3.$ Кетма кетликнинг ҳар бир ҳадининг олдинги ҳадига нисбати ўзгармас сон 3 га тенг. У ҳолда, $\{b_n\}$ махражи $q=3$-га тенг бўлган геометрик прогрессия бўлади. $b_1=18$ ва (6) формулага кўра $S_{10}=\frac{18(1-3^{10})}{1-3}=9(3^{10}-1)=9(531441-1)=4\ 782\ 960.$

Жавоби: 4 782 960.

3.83. 1) 100 гача бўлган барча натурал сонларнинг; 2) 16 дан 160 гача бўлган барча натурал сонларнинг йиғиндисини топинг.

B

3.84. 1) $2+4+6+...+2n$; 2) $1+3+5+...+(2n-1)$ йиғиндини топинг.

3.85. Агар $a_1=2$, $d=2$ бўлса, у ҳолда $\{a_n\}$ аарифметик прогрессиянинг 20-ҳадидан бошлаб 25-ҳадигача бўлган ҳадларининг йиғиндисини топинг.

3.86. 1) 200 дан катта бўлмаган, 3 га каррали бўлган натурал сонларнинг;
2) 250 дан катта бўлмаган, 9 га каррали бўлган натурал сонларнинг йиғиндисини топинг.

1) 3 га каррали бўлган натурал сонлар кетма-кетлигининг умумий ҳади $a_n=3n$ кўринишда ёзилади ва $a_n=3n<200$ бўлиши керак $\Rightarrow$ $n<\frac{200}{3}=66\frac{2}{3}$. Бундан $n=66$. Ушбу $\{3n\}$ арифметик прогрессиянинг айирмаси $d=3$. Бундан $3+6+9+...+198==\frac{2\cdot 3+(66-1)\cdot 3}{2}\cdot 66=(6+195)\cdot 33=6633$.

Жавоби: 6633.

3.87. Геометрик прогресссиянинг дастлабки 8 та ҳадининг йиғиндиси $\frac{85}{64}$ га, махражи $q=-\frac{1}{2}$ га тенг. Унинг биринчи ҳадини топинг.

3.88. Агар геометрик прогрессия учун $S_2=4$ ва $S_3=13$ бўлса, S_5 ни топинг.

3.89. Агар арифметик прогрессия учун $S_4=-28$, $S_6=58$ бўлса, S_{16} ни топинг.

3.90. Агар арифметик прогрессия учун $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$ тенглик бажарилса, S_{20} ни топинг.

3.91. 1) $1, 3, 3^2, ...$; 2) $2, 2^2, 2^3, ...$; 3) $1, -x, x^2, ...; x\neq\pm1$;

4) $1, x^2, x^4, \ldots; x\neq\pm1$; 5) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$; 6) $1, -x^3, x^6, \ldots; x\neq-1$

Геометрик прогрессияларнинг n та ҳади йиғиндисини топинг.

3.92. 1) $a_n=3n+1$; 2) $a_n=n+4$; 3) $a_n=-0,5n+1$; 4) $b_n=0,2\cdot5^n$; 5) $b_n=3\cdot2^{n-1}$; 6) $b_n=3^{1+n}$ формулалар билан берилган кетма-кетликнинг бешта ҳадининг йиғиндисини топинг.

C

3.93. Арифметик прогрессия ташкил этувчи учта соннинг йиғиндиси 15 га тенг. Агар шу сонларга мос равишда 1, 4 ва 19 сонларини қўшсак, геометрик прогрессиянинг дастлабки учта ҳади хосил бўлади. Шу учта сонни топинг.

3.94. Айирмаси нолдан фарқли бўлган арифметик прогрессиянинг иккинчи, биринчи ва учинчи ҳадлари шу тартиб билан олинган геометрик прогрессиянинг дастлабки учта ҳади бўлади. Геометрик прогрессиянинг махражини топинг.

3.95. x; y; z сонлар геометрик прогрессия, x; $2y$; $3z$ сонлар арифметик прогрессияни ташкил этади. Геометрик прогрессиянинг 1 дан фарқли махражини топинг.

3.96. Биринчи ҳади a га, махражи q га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг n та ҳадининг квадратларинг йиғиндисини топинг.

3.97. Геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг кўпайтмасини a_1 ва a_n ҳадлари орқали ифодаланг.

3.98. $\{u_n\}$ геометрик прогрессия учун $u_1+u_5=51$ ва $u_2+u_6=102$ тенгликлар бажарилади. n нинг қандай қийматида $S_n=3069$ бўлади?

3.99. 1; 11; 111; 1111; ... кетма-кетликнинг n та ҳади йиғиндисини топинг.

3.100. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия учун $d = 2a_1$ бўлса, $\frac{S_n - S_k}{S_{n+k}} = \frac{n-k}{n+k}$ тенгликнинг бажарилишини исботланг.

3.101. Ўткир бурчакка бир-бирларига ташқи уринадиган бир нечта айлана ички чизилган. Айланаларнинг радиуслари геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг.

3.102. $a_n=2(n+3^{n-1})-3$ кетма-кетликнинг дастлабки n кетма-кетликнинг дастлабки та ҳади йиғиндисини топинг

Такрорлашга доир машқлар

3.103. Кетма-кетликнинг умумий ҳадини ёзинг:

1) 1; 4; 9; 25; 36; ...; 2) $-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; \ldots$.

3.104. $\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}+\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$ ифоданинг қиймати бутун сон бўлишини кўрсатинг.

3.105. $x^2-x-2=0$ тенгламани график усулда ечинг.

Тарихга назар

Қадим замонлардан инсоният арифметик ва геометрик прогрессиялар қонуниятларидан фойдалана олган. Масалан, бизнинг давримизгача бўлган вавилонликларнинг миххатлар ёзиш жадвалларида, қадимги мисрликлар ва грекларнинг папирусларида арифметик ва геометрик прогрессияларга доир кўпгина мисоллар учрайди. Қадимги грек олимлари прогрессияларнинг баъзи бир хоссаларини ва уларнинг йиғиндисини топа олишган. Архимед (э.а. III аср) фигураларнинг юзалари билан жисмларнинг ҳажмларини топишда сонлар кетма-кетлигининг бир нечта ҳадларининг йиғиндисини топган. У 1^2+2^2+ $+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\,n(n+1)\ (2n+1)$ тенгликни келтириб чиқарган. Қадим замонлардан геометрик прогрессиянинг махражи 1 дан катта бўлганда ($q>1$) жуда катта тезлик билан ўсиши ҳақида ушбу афсона сақланиб қолган. Қадимги ҳинд подшоси Шерам шахмат ўйинини ўйлаб топган кишини (унинг исми Сета) тақдирлаш мақсадида унга хохлаганини олишни таклиф қилади. Шунда Сета шахмат тахтасидаги 64 та квадратнинг биринчисига 1 та дон, иккинчисига 2 та дон, учинчисига 4 та дон, тўртинчисига 8 та дон ва ҳоказо., ҳар бир квадратга олдингисидан 2 марта кўп дон беришни сўрайди. Дастлаб подшох ихтирочининг бу “бўлмайдиган” истагига хайрон қолиб, рози бўлади. Сўнгра бу тилакни бажаришга ўз хазинасининг етмаслигига ишонч хосил қилади. Ихтирочи сўраган донлар сони $1+$ $+2+2^2+..+2^{63}$ йиғиндига тенг. Бу йиғинди 18 446 744 073 709 551 615 сонига тенг. Агар бир пуд буғдойда 40000 та дон бор деб олсак, бу вазифани бажариш учун 230 584 300 921 369 пут буғдой керак бўлар экан. Қозоғистонда бир йилда йиғиладиган буғдой миқдори ўрта ҳисобда 1 000 000 000 путга тенг десак, бу истакни бажариш учун юртимиз ҳормай-толмай 230584 йил меҳнат қилиши керак.

Умуман арифметик прогрессиянинг номланиши сонларнинг ўрта арифметиги $\left(a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\right)$ тушунчасидан, геометрик прогрессия номи кесмаларнинг геометрик пропорционаллигидан $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b} = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)$ дан келиб чиққан.

Арифметик прогрессия ҳадлари йиғиндисининг формуласини грек олими Диофант (III аср) исботлаган. Геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси формуласи Евклиднинг “Негизларида” (э.а. III аср) шу билан бир қаторда баъзи маълумотлар италиялик математик Л.Фибоначчининг “Абак китобида” (1202) учрайди. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндисини топиш формулалари француз математиги Никола Шюкенинг “Уч қисмдан ташкил топган сонлар ҳақидаги илм” (1484) номли асарида берилган. Арифметик прогрессиялар учун ёзилган $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ формулага доир немис математиги Карл Фридрих Гаусс ҳаётининг қизиқарли эпизодлари афсонага айланган.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Ўқитувчи бошқа синф ўқувчиларининг ишларини текшириш мақсадида олдинги ўқувчиларига 1 дан 40 гача бўлган сонларнинг йиғиндисини топишни топширади. Бу топшириқни 9 ёшли Гаусс бир минутда ечиб, жавобини айтган. Унинг ишлаб чиқариш усули қуйидагича эди:

$$\begin{array}{r} 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ldots,20 \\ +\ \ 40,\ 39,\ 38,\ldots,21 \\ \hline 41,\ 41,\ 41,\ldots,41 \end{array}$$

Бундай сонлар жуфти 20 та бўлганлигидан, берилган йиғинди 41·20=820-га тенг. Гаусс арифметик прогрессиянинг қонуниятидан фойдаланган.

Амалий иш

5 та доннинг массасини 1 грамм деб олиб, Сета сўраган буғдойнинг массасини топинг. Жавобини тонналарда соннинг стандарт шаклида ёзинг. Битта вагонга тахминан 50 т буғдой ортиш мумкин деб олсак, Сетанинг сўраган буғдойини ортиш учун нечта вагон керак бўлади? Агар битта вагоннинг узунлиги 12 м деб олсак, шунча буғдой ортилган вагонлар кетма-кетлиги қандай узоқликка чўзилган бўлар эди?

3.6. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Чексиз камаювчи геометрик прогрессия тушунчаси билан танишасизлар;
- Камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси формуласидан фойдаланишни ўрганасизлар;
- Чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндиси формуласидан даврий ўнли касрни оддий касрга айлантириш учун фойдаланасизлар;
- Арифметик ва геометрик прогрессияларга доир матнли масалаларни ечасизлар.

3.6.1. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия тушунчаси

Жадвал билан ишлаш

Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади b_1 га тенг, махражи q бўлсин. Жуфтларда ёки гуруҳларда калькулятор ёрдамида берилган жадвални тўлдиринг. Хулоса чиқариб, уни синф билан биргаликда таҳлил қилинг.

q	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_{10}	b_{15}	b_{20}	...	b_n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$...	$\frac{1}{512}$...	$\frac{1}{32768}$...	$\frac{1}{1048576}$	...	$\frac{1}{2^{n-1}}$
$-\frac{1}{3}$	3								...	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$								...	

Давоми

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$-\frac{3}{5}$	2								...	

Топширик

- Берилган геометрик прогрессиялар қандай умумий хоссага эга? Модули бўйича махражлари қандай сонлар?
- Кетма-кетлик ҳадларининг модулларини таққосланг.
- n тартиб рақами ортган сайин $|b_n|$ ссонининг қиймати қандай сонга “чексиз яқинлашишини” баҳоланг.

Таъриф. $|q|<1$ *бўлганда*

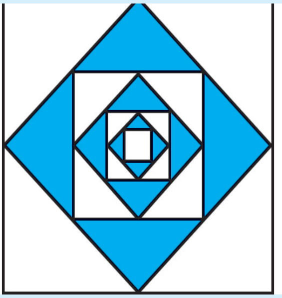
$$b,\ b_n,\ b\cdot q^2,\ b\cdot q^3,\ \dots\ bq^{n-1},\ \dots \qquad (1)$$

сонлар кетма-кетлиги чексиз камаючи ***геометрик прогрессия*** *дейилади.*

Шундай қилиб, агар $|q|<1$ бўлса, у ҳолда q^n соннинг чексиз нолга яқинлашишини кўрдик. Уни қуйидагича ёзиш мумкин: $n\to\infty$ бўлганда $q^n\to 0$.

Бундан чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг умумий ҳади $n\to\infty$ интилганда $b_n=b\cdot q^{n-1}\to 0$ нолга интилади.

5.6.2. Чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси



3.2-расм

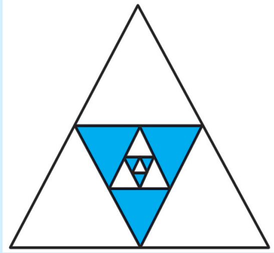
Гуруҳларда ишлаш

Топшириқни иккита гуруҳга бўлиниб бажаринг.

1-гуруҳнинг топшириғи: 3.2-расмда кўрсатилгани каби бир-бирларига ички чизилган чексиз кўп квадратларнинг юзаларининг йиғиндисини топинг.Бунда катта квадрат томонининг узунлиги 1 га тенг.

Давоми

2-гуруҳнинг топшириғи: 3.3-расмда кўрсатилгани каби бирининг томони иккинчисининг ўрта чизиғи бўладиган қилиб бир-бирларига ички чизилган чексиз кўп тенг томонли учбурчаклар юзаларининг йиғиндисини топинг. Бунда энг катта учбурчак томонининг узунлиги 1 га тенг.



3.3-расм

$|q|<1$ бўлганда ҳар бир чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг умумий кўриниши (1) кўринишда ёзилади. Энди шу прогрессиянинг ҳамма ҳадларининг йиғиндисини топамиз:

$$S=b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}+\ldots=b(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots).$$

Бунинг учун прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топамиз:

$$S_n=\frac{b\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{b}{1-q}\left(1-q^n\right).$$

$|q|<1$ эканлигидан юқорида таъкидлаганимиз каби, $n\to\infty$ эканлигидан $q^n\to 0$.

Бундан $S_n \Rightarrow \dfrac{b}{1-q}(1-0)=\dfrac{b}{1-q}$ ва $S_n\to S$.

У ҳолда , $S=\dfrac{b}{1-q}$. (2)

Шундай қилиб, биз қуйидаги теореманинг бажарилишини кўрдик.

Теорема. ***Чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси унинг биринчи ҳадини 1 сони билан махражининг айирмасига нисбатига тенг.***

Энди (2) формула ёрдамида юқорида келтирилган квадратлар ва учбурчаклар кетма-кетлиги юзаларининг йиғиндисини топамиз.

1) Квадрат юзаларининг кетма-кетлиги $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ кўринишда ёзилади.

Бунда $b=1$, $q=\dfrac{1}{2}$ эканлигидан (2) формула бўйича

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Барча квадратлар юзаларининг йиғиндиси 2 га тенг.

2) Худди шундай учбурчаклар юзаларининг кетма-кетлиги $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{8}$; $\frac{\sqrt{3}}{16}$; ... кўринишда ёзилади. Бунда $S = \frac{\sqrt{3}}{4} : \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ҳамма учбурчаклар юзаларининг йиғиндиси $\frac{\sqrt{3}}{3}$ га тенг.

3-мисол.

$$1)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1;$$

$$2)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3};$$

$$3)\ \frac{4}{5}+\frac{8}{15}+\frac{16}{45} + \ldots + \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{12}{5}.$$

Даврий ўнли касрларни оддий касрларга айлантириш. Бунда чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси формуласидан фойдаланиб, даврий ўнли касрларни оддий касрларга айлантиришни мисоллар орқали кўриб чиқамиз.

4-мисол. $2,7(31)$ сонни оддий каср кўринишида ёзиш керак.

$$2,7(31) = 2 + \frac{7}{10} + \left(\frac{3}{10^2}+\frac{1}{10^3}\right) + \left(\frac{3}{10^4}+\frac{1}{10^5}\right) + \ldots =$$

$$= 2 + \frac{2}{7} + \frac{31}{10^3} + \frac{31}{10^5} \ldots = \frac{27}{10} + \frac{31}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right).$$

$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots$ қатор-махражи $\frac{1}{10^2}$ бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндиси. (2) формулага кўра $1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots=\frac{1}{1-0,01}=\frac{100}{99}$.

Бундан $2,7(31)=\frac{27}{10}+\frac{31}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{27}{10}+\frac{31}{990}=\frac{2704}{990}=\frac{1352}{495}$.

5-мисол. 0,2(3) сонини оддий каср кўринишида ёзамиз.

$$0,2(3)=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\cdot\frac{1}{1-0,1}=\frac{2}{10}+\frac{3}{90}=\frac{18+3}{90}=\frac{7}{30}.$$

1. Ушбу мулоҳазалар тўғрими: а) ҳар бир монотон кетма-кетликнинг чегараси мавжуд; б) ҳар бир чегараланган кетма-кетликнинг чегараси мавжуд? Мисол келтиринг.
2. Сонли қатор, чексиз камаювчи геометрик прогрессия нима?
3. Сонли қаторнинг йиғиндиси деганни қандай тушунасиз?
4. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси формуласини ёзиб, уни исботланг.

МАШҚЛАР

А

3.106. Қуйидаги кетма-кетликларнинг қайсилари чексиз камаювчи геометрик прогрессия бўлади:

1) $x_n=\frac{1}{3^n}$; 2) $y_n=\frac{3^n-2}{3^n}$; 3) $z_n=\frac{64}{2^n}$?

3.107. 1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) –2,3(9); 4) 0,(1); 5) 0,(6); 6) 0,(36) сонларни оддий касрларга айлантиринг.

3.108. 1) 0,2(3); 2) 1,(81); 3) 0,32(45); 4) 1,6(3201) сонларни оддий касрларга айлантиринг.

3.109. 1) 0,9(285714); 2) 0,(04109589) сонларни оддий касрларга айлантиринг.

B

3.110. Агар $\{a_n\}$ геометрик прогрессия ва

1) $a_1=1;\ a_2=\frac{1}{2};$ 2) $a_1=3;\ a_2=-1;$

3) $a_2=1;\ a_3=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};$ 4) $a_1=\sqrt{2}; a_2-a_1=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{2};$

5) $a_1=\frac{1}{\sqrt{3}};\ a_3=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}};\ a_1>0;$ 6) $\begin{cases} a_1+a_4=\frac{7}{16}, \\ a_1-a_2+a_3=\frac{7}{8} \end{cases}$

бўлса, унинг махражи қандай? У чексиз камаювчи геометрик прогрессия бўладими?

3.111. Берилган қаторнинг йиғиндисини топинг:

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots;$ 2) $\frac{4}{25}-\frac{8}{125}+\ldots+\left(-\frac{2}{5}\right)^n+\ldots;$

3) $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}+\ldots;$ 4) $\frac{5}{7}-\frac{25}{49}+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots$.

3.112. x нинг қандай қийматларида берилган қаторларнинг чекли йиғиндиси мавжуд бўлади:

1) $1+x^4+x^8+\ldots+x^{4(n-1)}+\ldots;$

2) $1-x^3+x^6-\ldots+(-1)^{(n-1)}x^{3(n-1)}+\ldots;$

3) $\frac{1-x}{x}+\frac{(1-x)^2}{x^2}+\ldots+\left(\frac{1-x}{x}\right)^n+\ldots?$

3) Қўшилувчилар кетма-кетлигининг умумий ҳади $b_n=\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$ ва у геометрик прогрессия бўлади. Унинг йиғиндиси мавжуд бўлиши учун берилган қатор чексиз камаювчи геометрик прогрессия бўлиши керак: $|q|=\left|\frac{1-x}{x}\right|<1$. Энди ушбу тенгсизликнинг ечимларини топамиз:

$$\frac{|x-1|}{x}<1 \text{ ва } x \neq 0 \Rightarrow |x-1| < |x|.$$

Агар $x<0\Rightarrow-(x-1)<-x \Rightarrow +1<0$. Бу мумкин эмас, $x\in\varnothing$;

Агар $0 < x < 1 \Rightarrow -(x-1) < x \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}:1\right)$.

Агар $x>1\Rightarrow x-1<x\Rightarrow-1<0$. Тўғри тенгсизлик, $x \in (1;+\infty)$.
Агар $x=1\Rightarrow b_n=0$ болса, $\{b_n\}$ прогрессия бўлмайди.

Жавоби: $x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$.

C

3.113. 1)Чегараси иррационал сон бўладиган рационал сонлар кетма-кетлигига мисоллар келтиринг. 2) Барча ҳадлари иррационал сон, чегараси рационал сон бўлган кетма-кетликка мисол келтиринг.

2) $C_n = \frac{2\cdot\pi^n + 7}{\pi^n} \Rightarrow C_n = 2 + \frac{7}{\pi^n}$ — ушбу кетма-кетликнинг ҳамма ҳадлари иррационал сонлар. n сони ўсган сайин $\frac{7}{\pi^n}$ сони чексиз камайиб, чегараси 0 га тенг бўлади. Демак, $C_n\to2$.

3.114. $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\underset{\text{илдиз}}{\ldots}+\sqrt{2}}}}_{n}$ кетма-кетликнинг чегараси мавжуд эканлигини исботлаб, унинг чегарасини топинг.

3.115. Тенгламани ечинг:

1) $x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{3}{7}$;

2) $x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^{n-1}+x^n+\ldots=-4$.

3.116. 1) $a-a^2+a^3-a^4+\ldots+(-1)^{n-1}a^n+\ldots$ қаторнинг йиғиндиси a нинг қандай қийматларида 1) 0,25-га; 2) –0,6-га; 3) 0,5-га тенг бўлиши мумикин?

3.117. $\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right)$

йиғиндини топинг.

3.118. Мусбат ҳадли чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади 4 га, учинчи ва бешинчи ҳадларининг айирмаси $\frac{32}{81}$ га тенг. Ушбу прогрессиянинг йиғиндисини топинг.

3.119. $\{a_n\}$ чексиз камаювчи геометрик прогрессия учун $a_1+a_4=54$, $a_2+a_3=36$ бўлса, ушбу прогрессиянинг йиғиндисини топинг.

3.120. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг тоқ ўринлардаги ҳадларининг йиғиндиси 36 га, жуфт ўринлардаги ҳадларининг йиғиндиси 12 га тенг. Ушбу прогрессиянинг умумий ҳадини топинг.

3.121. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 56 га, унинг ҳадлари квадратларининг йиғиндиси 12 га тенг. Ушбу прогрессиянинг умумий ҳадини топинг.

3.122. Биринчи ҳади 3 га, йиғиндиси $\frac{7}{2}$ тенг бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессияни ёзинг.

3.123. Ҳар бир ҳади ўзидан кейинги ҳадларининг йиғиндисидан 10 марта катта бўлган чексиз камаювчи геометрик прогрессияни ёзинг.

3.124. Махражи 0,5 га тенг бўлган ҳар бир чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси унинг 4 га кўпайтирилган иккинчи ҳадига тенг бўлишини исботланг.

3.125. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси 3 га, унинг ҳадлари кубларининг йиғиндиси $\frac{108}{13}$ га тенг. Ушбу прогрессияни ёзинг..

3-БЎЛИМГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

3.126. $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг дастлабки 5 та ҳадини ёзинг:

1) $a_n = \frac{n-1}{3n+2}$; 2) $a_n = (-1)^{n-1}$; 3) $a_n = \cos\frac{\pi n}{4}$.

3.127. Кетма-кетликнинг умумий ҳади формуласини ёзинг:

1) 1, 4, 7, 10, ...; 2) 4, 16, 36, 64, ...; 3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$.

3.128. Берилган кетма-кетликларнинг ўсувчи(камаювчи) бўлишини, қуйидан (юқоридан) чегараланган ёки чегараланмаганлигини аниқланг:

1) 2, 4, 6, 8, ...; 2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;

3) 1, –0,5, 0,05, –0,005, ...

3.129. $a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n$, $a > 0$ кетма-кетликнинг монотон ўсувчи бўлишини исботланг.

3.130. $b_n = \frac{2n+3}{6n-5}$ кетма-кетликнинг монотон камаювчи бўлишини исботланг.

3.131. 1) юқоридан чегараланган, бироқ қуйидан чегараланмаган; 2) қуйидан чегараланган, бироқ юқоридан чегараланмаган; 3) юқоридан ҳам, қуйидан ҳам чегараланмаган сонлар кетма-кетликларига мисол келтиринг.

3.132. Арифметик прогрессиянинг умумий ҳади формуласини ёзинг:

1) $a_1=6$; $a_4=0$; 2) $a_1=5$; $a_2=-5$;
3) $a_4=-4$; $a_{17}=-17$; 4) $a_{10}=0$; $a_{40}=-30$.

3.133. Геометрик прогрессиянинг умумий ҳади формуласини ёзинг:

1) $a_1=7$; $a_2=8$; 2) $a_1=3$; $a_3=\frac{1}{3}$; 3) $a_4=a_6=-1$;

3.134. Берилган маълумотлар асосида арифметик прогрессия тузинг:

1) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 16, \\ a_1 \cdot a_5 = 28; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_2 + a_{10} = 24, \\ a_1 \cdot a_{11} = 44. \end{cases}$

3.135. Берилган маълумотлар асосида геометрик прогрессия тузинг:

1) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 0,4375, \\ a_3 - a_2 + a_1 = 0,875. \end{cases}$

3.136. Айирмаси нолга тенг бўлмаган, мусбат ҳадли $\{a_n\}$ арифметик прогрессия учун $a_1a_n < a_2a_{n-1} < a_3a_{n-1} < \ldots$ тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатинг.

3.137. $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ сонлар арифметик прогрессиянинг ҳадлари бўлиши учун x^2, y^2, z^2 сонлар ҳам арифметик прогрессиянинг ҳадлари бўлиши етарли ва шарт эканлигини исботланг.

3.138. Ҳар бир натурал n сони учун $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = n$ шарт бажариладиган қилиб, $\{a_n\}$ арифметик прогрессия топинг.

3.139. Ҳадларининг сони жуфт бўладиган геометрик прогрессиянинг жуфт ўринлардаги ҳадлари йиғиндисининг тоқ ўринлардаги ҳадлари йиғиндисига нисбати унинг махражига тенг бўлишини исботланг.

3.140. Агар x_1, x_2 сонлар $x^2+ax+4=0$ тенгламанинг илдизлари, x_3, x_4 сонлар $x^2+bx+16=0$ тенгламанинг илдизлари ва x_1, x_3, x_2, x_4 сонлар шу тартибда геометрик прогрессия ташкил этса, a ва b ни топинг.

3.141. Тўғри бурчакли учбурчак томонларининг узунлиги: 1) арифметик прогрессия; 2) геометрик прогрессия ташкил этиши мумкинми?

3.142. $\frac{0,1(2) + 0,3(4)}{0,4(5) - 0,2(3)}$ ифоданинг қийматини топинг.

3.143. Агар $\{a_n\}$ чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади a, махражи q бўлса, қуйидаги қаторнинг йиғиндисини топинг:

1) $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}+\ldots$; 2) $a_1^{\,3}+a_2^{\,3}+a_3^{\,3}+\ldots$;

3) $(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2+(a_5+a_6)^2+\ldots$;

4) $(a_1-a_2)^3+(a_3-a_4)^2+(a_5a_6)^2+\ldots$;

5) $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{4}a_3+\ldots$; 6) $\left(a_1-\frac{1}{2}\right)+\left(a_2-\frac{1}{4}\right)+\ldots$;

7) $\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_6}{a_3}+\ldots$; 8) $(a_1+a_2+a_3)^2+(a_4+a_5+a_6)^2+\ldots$.

3.144. Тенгламани ечинг:

1) $1+x+x^2+\ldots+x^9=0$; 2) $1+x+x^2+\ldots+x^{10}=0$.

3.145. Йиғиндини топинг:

1) $\left(c+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)^2+\ldots+\left(c^n+\frac{1}{c^n}\right)$;

2) $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$;

3) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$

3.146. Агар $\{a_n\}$ мусбат ҳадли арифметик прогрессия бўлса, қуйидаги айниятни исботланг:

1) $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

3.147. Йиғиндини топинг:

1) $\frac{1}{4\cdot11}+\frac{1}{11\cdot18}+\ldots+\frac{1}{(7n-3)(7n+4)}$;

2) $\frac{1}{3\cdot7}+\frac{1}{7\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

3.148. 1) $y = x + \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + \ldots;$

2) $y = x^2 + \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} + \ldots$ функциянинг графигини ясанг.

3.149. $\{a_n\}$ арифметик прогрессия бўлса, $\{|a_n|\}$ кетма-кетлик арифметик прогрессия бўладими?

3.150. $\{a_n\}$ геометрик прогрессия бўлса, $\{|a_n|\}$ кетма-кетлик геометрик прогрессия бўладими?

3.151. Йиғиндини топинг:

1) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1) \cdot n} + \ldots$

2) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)n(n+1)} + \ldots$

АТАМАЛАР ЛУҒАТИ

Ўзбек тилидаги варианти	Қозоқ тилидаги варианти	Рус тилидаги варианти	Инглиз тилидаги варианти
Сонлар кетма-кетлиги	Сан тізбегі	Числовая последовательность	Sequence of numbers
Умумий ҳади	Жалпы мүшесі	Общий член	General term
Арифметик (геометрик) прогрессия	Арифметикалық (геометриялық прогрессия)	Арифметическая (геометрическая) прогрессия	Arithmetig-geometrical progression
Умумий ҳади формуласи	Жалпы мүшесі формуласы	Формула общего члена	Formula of common member
Арифметик прогрессиянинг айирмаси	Арифметикалық прогрессияның айырымы	Разность арифметической прогрессии	Remainder of arithmetic progression
Геометрик прогрессиянинг махражи	Геометриялық прогрессияның еселігі	Знаменатель геометрической прогресии	Denominator of geometric progression
Арифметик (геометрик) прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндиси	Арифметикалық (геометриялық) прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы	Формула суммы первых n членов арифметической (геометрической) прогресии	Addition of n members of arithmetic-geometrical progression
Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси	Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы	Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	Addition of infinite decreasing geometrical progression

4-бўлим. ТРИГОНОМЕТРИЯ

4.1. Бурчак ва ёйнинг градус ва радиан ўлчовлари;
4.2. Тригонометрик функцияларни аниқлаш;
4.3. Тригонометрик функцияларнинг хоссалари;
4.4. Келтириш формулалари;
4.5. Тригонометрия формулалари

4.1. Бурчак ва ёйнинг градус ва радиан ўлчовлари

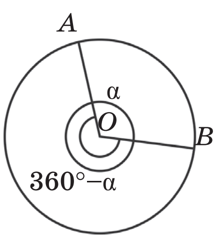
Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Бурчакнинг радиан ўлчовини ўрганасизлар;;
- Градусни радианга, радианни градусга айлантиришни ўрганасизлар;
- Бирлик айланада $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ сонларнинг белгиланишини ўрганасизлар.

4.1.1. Бурчаклар ва ёйлар

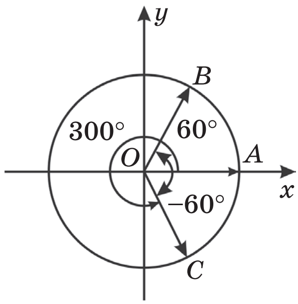
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ тригонометрик функциялар билан сиз 8-синф геометрия курсида қисқача танишгансиз. Энди биз тригонометрик фуннкцияларни системали равишда ўрганамиз. Бунинг учун дастлаб бурчак тушунчаси билан чуқурроқ танишамиз.

Сиз геометрия курсида асосан, 360° гача бўлган бурчакларни, тригонометрик функцияларни эса 180° гача бўлган бурчаклар учунгина кўриб чиқдингиз. Шу билан бир қаторда 360° дан катта бурчакларни ҳам ўрганган вақтларимиз бўлди. Масалан, қавариқ n бурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси $(n-2)\cdot180°$ ифоданинг қийматига тенг. Бинобарин, қавариқ бешбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $3\cdot180°=540°$ бўлади. Сиз градус ўлчови 360°-дан катта бўлмаган бурчакларнинг геометрик маъносини яхши биласиз: агар $\alpha\leqslant360°$ бўлса, бу бурчакнинг катталиги 4.1-расмда кўрсатилгани каби бўлади. Бундан масалан, 540° га тенг бўлган бурчакни қандай тушуниш мумкин? Унинг геометрик маъноси қандай деган саволлар юзага келади. Ушбу саволларга жавоб бериш учун



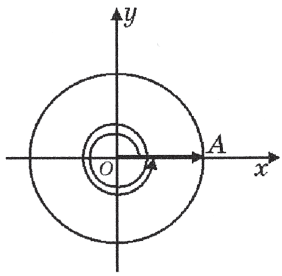
4.1-расм

маркази координаталар бошида ва радиуси R га тенг бўлган айланани кўриб чиқамиз (4.2-расм). Координаталар боши билан шу айлананинг А нуқтасини туташтирувчи вектор А нуқтанинг ***радиус-вектори*** деб атаб, уни $\overrightarrow{OA}$ орқали белгилайлик. У ҳолда исталган бурчак $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторини O нуқта атрофида айлантирганда хосил бўладиган фигура деб ҳисоблаш мумкин. $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторни иккита йўналишда айлантириш мумкин: соат стрелкасининг йўналишига қарама-қарши ва соат стрелкасининг йўналиши бўйича. Соат стрелкасига қарама-қарши йўналишни мусбат йўналиш, соат стелкасининг йўналишини ***эса манфий*** йўналиш деб аталади. Агар $\overrightarrow{OA}$ векторни мусбат йўналишда айлантирсак, у ҳолда мусбат қийматли бурчаклар, манфий йўналиш бўйича айлантирсак, манфий қийматли бурчаклар хосил бўлади. Масалан, 4.2-расмда 60° ва – 60° га тенг бўлган бурчаклар тасвирланган. Бунда $\angle AOB$=60°, $\angle AOC$=–60°.

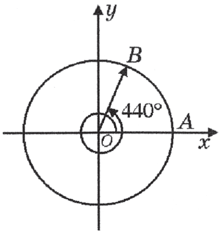


4.2-расм

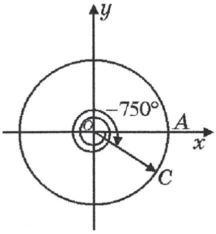
$\overrightarrow{OA}$ вектор билан Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ясайдиган бурчакни (4.3-расм), яъни радиус-векторни айлантирмай, ўрнида қолдирсак, биз 0° га тенг бурчак олдик деб ҳисоблаймиз. Бироқ, $\overrightarrow{OA}$ вектор ўз ўрнида айланани соат стрелкасига қарама-қарши йўналишда бир ёки бир неча марта айлантириб, қайтиб келиши мумкин. Бундай холларда, яъни $\overrightarrow{OA}$ радиус-вектори соат стрелкасига қарама-қарши йўналишда айланани n марта айланиб, ўрнига қайтиб келса, у ҳолда $\overrightarrow{OA}$ радиус-вектор Ox ўқининг мусбат йўналиши билан n·360° га тенг бўлган бурчак ясайди деб ҳисоблаймиз. Масалан, 4.3-расмда $\overrightarrow{OA}$ вектор Ox ўқи билан 2·360°=720° га тенг бўлган бурчак ясайди. Ал $\overrightarrow{OA}$ вектор эса қарама-қарши йўналишда айланани m марта айланиб, қайтиб келса, $\overrightarrow{OA}$ вектор Ox ўқи билан $-m$·360° га тенг бурчак ясайди деб ҳисоблаймиз. Худди шундай исталган бурчакнинг геометрик маъносини кўриб чиқиш мумкин. Масалан, 440° га тенг бурчакни 440°=80°+360° кўринишда



4.3-расм



4.4-расм



4.5-расм

ёзамиз. Бунда *Ox* ўқининг мусбат йўналиши билан 80° бурчак ясайдиган $\overrightarrow{OB}$ вектор ўз жойига айланани тўлиқ бир марта айланиб қайта келди деб ҳисоблаш керак (соат стрелкасига қарама-қарши йўналишда, 4.4-расм). $-750°=-30°-2\cdot360°$ бўлганда эса 4.5-расмда кўрсатилгани каби $\overrightarrow{OC}$ вектор соат стрелкаси билан бир хил йўналишда айлана бўйича тўлиқ икки марта айланиб, *Ox* ўқи билан –30° бурчак ясайдиган бўлиб жойлашган.

4.1.2. Бурчакнинг радиан ўлчови

Шундай қилиб,биз шу вақтгача исталган бурчакнинг катталигини градус ўлчов бирлигида ўлчаб келдик ва катталиги исталган градусга тенг бўлган бурчакни тасвирлай оладиган бўлдик.

Энди биз бурчакларни яна бир радиан деб аталувчи ўлчов бирлигини кўриб чиқамиз

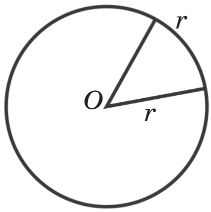
Таъриф. *Узунлиги радиусга тенг бўлган ёйга тиралган марказий бурчакнинг* ***катталиги бир радиан*** *деб аталади.*

Радиан айлана радиуси орқали аниқланади. Биз бурчакнинг радиан ўлчови айланани танлаб олишга боғлиқ эмаслигини кўрсатишимиз керак. Ҳақиқатан, радиуси r га тенг бўлган айлананинг узунлиги $2\pi r$. Бу айлананинг узунлиги r га тенг бўлган ёйи шу айлананинг $\frac{1}{2\pi}$ қисмини ташкил этади. Бундан шу ёйга тиралган марказий бурчак 360° нинг $\frac{1}{2\pi}$ қисмига тенг бўлиши керак:

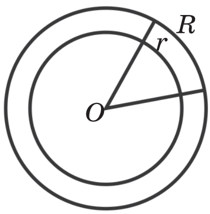
$$\frac{1}{2\pi}\ 360°\approx57°17'45''\ (4.6,\ 4.7\text{-расмлар}).$$

Бундай бурчак айлананинг радиусига боғлиқ эмас.

Шундай қилиб,



4.6-расм



4.7-расм

$$1 \text{ радиан} \sim \frac{1}{2\pi} 360^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''. \qquad (1)$$

Бундан $$\mathbf{1^\circ \sim \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017} \textbf{ радиан.} \qquad (2)$$

Одатда α=1 радиан, α=–0,5 радиан, α=$\frac{4}{3}$радиан, ва ҳоказо. деб ёзишнинг ўрнига α=1; α=–0,5; α=$\frac{4}{3}$ деб ёзиш мумкин.

Бурчакнинг градус ўлчовлари кўрсатилмаса, бундай бурчаклар радиан ўлчов бирликларида берилган деб ҳисоблаш керак. Бурчакнинг градус ўлчовини радианга ва аксинча, унинг радиан ўлчовини градусга айлантириш учун (1) ва (2) формулалардан фойдаланилади.

Умуман олганда бурчакнинг градус ўлчовидан радиан ўлчовига ва аксинча унинг радиан ўлчовидан градус ўлчовига ўтиш формулаларини жадвал кўринишида ёдда сақлаб қолиш осон.

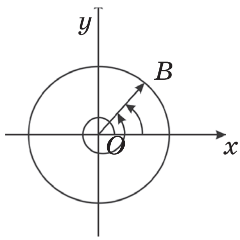
Бурчакнинг градус ўлчови	Ўтиш йўналиши	Бурчакнинг радиан ўлчови
n°	→	$\frac{\boldsymbol{n}^\circ}{\mathbf{360^\circ}} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{\mathbf{180}} \cdot \pi$
$\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \mathbf{360^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \mathbf{180^\circ}$	←	α радиан

Жадвал билан ишлаш

Жуфтларда юқоридаги жадвал ёрдамида қуйидаги жадвални тўлдиринг

Бурчакнинг градус ўлчови	30°		60°		180°	
Бурчакнинг радиан ўлчови	$\frac{30}{180} \cdot \pi = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$

Юқорида кўрсатилгани каби исталган радиан ўлчовда берилган бурчакни расмда тасвирлаб кўрсатиш мумкин. 4.8-расмда $\overrightarrow{OB}$ вектор $\frac{\pi}{4}$ ва $\frac{\pi}{4}+2\pi$ бурчакларни аниқлагани билан, бу бурчаклар ўзаро тенг эмас.



4.8-расм

Эслатма. Ушбу мавзуда қўрилган айлана ***тригонометрик айлана*** дейилади. Бу айлананинг радиуси 1 га тенг деб олиш келишилган.

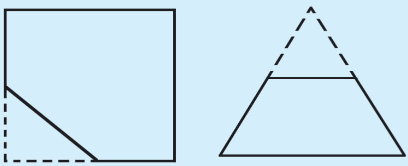
Гуруҳларда ишлаш

Жуфтларда (гуруҳларда) бирлик айланада радиан ўлчовлари $0, \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ га мос келадиган ёйни чегараловчи нуқталарни белгилаб кўрсатинг.

1. Нуқтанинг радиус-вектори нима?
2. Бурчакнинг мусбат ва манфий йўналишлардаги ўлчовлари қандай аниқланади?
3. Қандай ёйга тиралган марказий бурчак бир радианга тенг деб аталади? Бурчакнинг радиан ўлчови деганда нимани тушунасизр?
4. Бурчакнинг градус ўлчовидан радиан ўлчовига ва аксинча, радиан ўлчовидан унинг градус ўлчовига қандай ўтилади?

Амалий иш

4.9-расмда кўрсатилган квадрат билан тенг томонли учбурчакнинг учлари умумий томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма билан кесилган. Ҳосил бўлган бешбурчак билан тўртбурчак бурчакларининг градус ва радиан ўлчовларини топинг.



4.9-расм

МАШҚЛАР

А

4.1. Тригонометрик айлана ёрдамида 150°, 210°, 540°, –45°, –135°, –720° га тенг бўлган бурчакларни тасвирланг.

4.2. Қуйидаги бурчакларнинг радиус вектори қайси чоракда ётади:

1) 179°; 2) 325°; 3) –150°; 4) –10; 5) 800°; 6) 10000°?

4.3. Қуйидаги бурчакларга мос радиус-вектор қайси чоракка тегишли:

1) 289°; 2) 190°; 3) 100°; 4) –20°; 5) –110°; 6) 4200°?

4.4. 40°, 150°, 315°, 1000°, –20°, –120, –300° га тенг бўлган бурчакларни радиан орқали ифодаланг.

4.5. $\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{21\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; 3; 100; 0,8; \frac{5\pi}{2}$ га тенг бўлган бурчакларни градус орқали ифодаланг.

B

4.6. Бирлик айлана ёйининг радиан ўлчови $\frac{3\pi}{4}$ га тенг. Ушбу ёйнинг узунлигини топинг?

4.7. Ёй тиралган марказий бурчакнинг катталиги $\frac{3\pi}{2}$. Айлананинг радиуси 8. Ушбу ёйнинг узунлигини топинг.

4.8. Учбурчак бурчаклари катталикларининг нисбати 3:4:5. каби. Шу бурчакларнинг градус ва радиан ўлчовини топинг.

Учбурчакнинг бурчаклари α, β, γ бўлса, $\alpha:\beta:\gamma=3:4:5$. Бундан $\alpha=3k$, $\beta=4k$, $\gamma=5k$.

а) Градус ўлчов бўйича:

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow 3k+4k+5k=180° \Rightarrow 12k=180° \Rightarrow k=15°.$$

Бунда $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=75°$.

б) Радиан ўлчов бўйича $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлиши керак.

$3k+4k+5k=\pi \Rightarrow k=\frac{\pi}{12}$. Бундан $\alpha=\frac{\pi}{4}; \beta=\frac{\pi}{3}; \gamma=\frac{5\pi}{12}$.

Жавоби: 45°, 60°, 75° ёки $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}$.

4.9. а) катетлари ўзаро тенг; б) битта катети гипотенузасининг ярмига тенг тўғри бурчакли учбурчак бурчакларининг градус ва радиан ўлчовларини топинг.

4.10. Мунтазам n бурчакнинг бурчакларини радианларда ифодаланг:

1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=5$; 4) $n=6$; 5) $n=9$; 6) $n=18$.

4.11. Бирлик тригонометрик айлана билан координаталар ўқларининг кесишиш нуқталарига мос келадиган энг кичик номанфий радиан бурчакни кўрсатинг. Шу нуқталарга мос келувчи радиан бурчакларнинг умумий кўринишини ёзинг.

C

4.12. Сонлар ўқида ва тригонометрик айланада қуйидаги сонларга мос келувчи нуқталар қандай жойлашган:

1) x ва $-x$; 2) x ва $x+\pi$;

3) x ва $x+2n\pi$; 4) $x-\pi$ ва $x+\pi$?

4.13. Тригонометрик айланада координаталари

1) $y=\frac{1}{2}$, $x>0$; 2) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y>0$;

3) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x<0$; 4) $x=-\frac{1}{2}$, $y<0$

шартларни қаноатлантирувчи нуқталарни кўрсатинг. Бу нуқталарга мос келувчи сонлар тўпламини ёзинг.

4.14. 1) Абсциссалар ўқининг мусбат томонида; 2) абсциссалар ўқининг манфий томонида; 3) ординаталар ўқининг мусбат томонида; 4) ординаталар ўқининг манфий томонида; 5) координаталар ўқларидан бирида; 6) учинчи чоракнинг биссектрисасида; 7) биринчи ёки учинчи чоракнинг биссектрисасида; 8) тўртинчи чоракнинг биссектрисасида жойлашган бурчакнинг градус ва радиан ўлчовларининг умумий кўринишини ёзиб кўрсатинг.

4.15. Минутига тўлиқ 300 марта айланиб чиқадиган дискнинг рад/с лардаги бурчак тезлигини топинг.

Такрорлашга доир машқлар

4.16. Тенгламани ечинг:

1) $x^2-7x+6=0$; 2) $4x^2+5x+1=0$;
3) $3x^2-8x+5=0$; 4) $2x^2+x+1=0$.

4.17. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=(x-2)^2+3$; 2) $y=x^2-4x$.

4.18. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $5x^3-3x^2-2x$; 2) $3x^2+2x-2$.

4.19. x нинг қандай қийматларида $y=\dfrac{x^2+1}{2x+1}$ функция 1 га тенг қиймат қабул қилади?

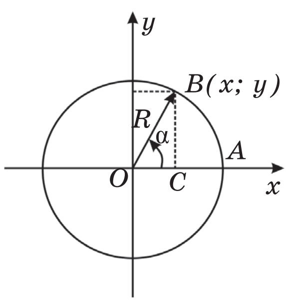
4.2. Тригонометрик функцияларни аниқлаш

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Тригонометрик функцияларнинг таърифларини биласиз;
- Бирлик айланадаги нуқтанинг координаталари (cosα, sinα) кўринишда ёзилишини ва тригонометрик функцияларнинг боғланишини ўрганасиз;
- Тригонометрик функцияларнинг баъзи бир бурчаклардаги қийматларини топишни ўрганасиз.

4.2.1. Тригонометрик функцияларнинг исталган бурчак учун таърифи

Энди исталган α бурчакнинг синус, косинус, тангенс ва котангенсини аниқлайлик. Бунинг учун маркази координаталар бошида, радиуси R га тенг бўлган айлана оламиз. $\overrightarrow{OB}$ вектор билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак α га тенг бўладиган қилиб, шу айланада B нуқта оламиз. B нуқтанинг координаталари $(x;\ y)$ бўлсин: $B(x;\ y)$ (4.10-расм).



4.10-расм

Таъриф. 1) *B нуқтанинг ординатасининг радиусга нисбати α бурчакнинг синуси деб аталади*:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}. \quad (1)$$

2) *B нуқтанинг абсциссасининг радиусга нисбати α бурчакнинг косинуси дейилади*:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}. \quad (2)$$

3) *α бурчак синусининг шу бурчак косинусига нисбати α бурчакнинг тангенси деб аталади*:

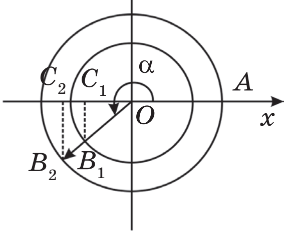
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \quad (3)$$

4) *α бурчак косинусининг шу бурчак синусига нисбати α бурчакнинг котангенси деб аталади*:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (4)$$

$0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ бўлганда геометрия курсида α бурчакнинг синуси, косинуси, таенгенси ва котангенси тўғри бурчакли учбурчакнинг танлаб олинишига боғлиқ эмас, фақатгина α га боғлиқ эканлигини кўрсатганмиз. Худди шундай исталган α учун юқорида аниқланган синус, косинус, таенгенс ва котангенслар қийматларининг айлана радиуси R га боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ қийматлари танлаб олинган айланага боғлиқ эмас.

4.11-расмда кўрсатилгани каби маркази O нуқтада, радиуслари R_1 ва R_2 бўлган иккита айлана оламиз. $\overrightarrow{OB_2}$ вектор Ox ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ясасин. OB_2 нурнинг радиуси R_1 бўлган айлана билан кесишиш нуқтасини B_1 орқали белгилайлик. $B_1(x_1;\ y_1)$ ва $B_2(x_2;\ y_2)$ бўлсин. B_1 ва B_2 нуқталардан абсциссалар ўқига туширилган перпендикулярнинг асосларини мос равишда C_1 ва C_2 орқали белгилайлик. B_1C_1O ва B_2C_2O тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{B_1C_1}{B_1O} = \frac{B_2C_2}{B_2O}$ тенгликни оламиз.



4.11-расм

$B_1C_1 = |y_1|$, $B_2C_2 = |y_2|$, $B_1O = R_1$ ва $B_2O = R_2$

бўлишини эътиборга олсак, $\frac{|y_1|}{R_1} = \frac{|y_2|}{R_2}\cdot$ B_1 ва B_2 нуқталар битта координаталар чорагида жойлашганлиги сабабли, y_1 ва y_2 сонларнинг ишоралари бир хил. Бундан $\frac{y_1}{R_1} = \frac{y_2}{R_2}$ тенглик бажарилиши керак. У ҳолда, $\frac{y}{R}$ нисбат айлана радиуси R га боғлиқ эмас.

Шундай қилиб, $\frac{y}{R}$ нисбат исталган α бурчак учун аниқланганлигидан, sinα ифода ҳам исталган α бурчак учун аниқланган. Худди шундай cosα ифода ҳам исталган α бурчак учун аниқланган. Аксинча, tgα ва ctgα ифодалар исталган α бурчак учун аниқланмайди. Масалан, tgα ифода cosα≠0 тенгсизликни қаноатлантирувчи α бурчаклар учунгина аниқланган.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{R} : \frac{x}{R} = \frac{y}{x},\ x \neq 0.$$ У ҳолда, $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$.

Бунда n — исталган бутун сон. Бундан, tgα ифода ±90°; ±270°; ±450°; ... бурчаклар учун аниқланмайди, чунки $\frac{y}{x}$ ифода маънога эга бўлмайди. Худди шундай, ctg α ифода 0°; ±180°; ±360°; ... бурчаклар учун аниқланмайди. У $\alpha = n \cdot 180°$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ қийматлардан бошқа бурчаклар учунгина аниқланади.

Исталган x сонини маълум бир бурчакнинг радиан ўлчови сифатида қараб, шу сонга мос келувчи $\sin x$, $\cos x$ нинг қийматларини топиш мумкин. Исталган x ҳақиқий сон учун $\sin x$, $\cos x$ ифодалар аниқланади. Шу сабабли $\sin x$ ва $\cos x$ ифодаларни x аргументга боғлиқ бўлган функциялар деб қараймиз. Худди шундай, агар $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ бўлса, $\mathrm{tg}\,x$ функцияни, ал $x \neq n\pi$, $n \in Z$ бўлса, $\mathrm{ctg}\,x$ функцияни топамиз (бунда Z — бутун сонлар тўплами). Умуман $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$ ва $y=\mathrm{ctg}\,x$ функциялар ***тригонометрик функциялар*** деб аталади. Юқорида айтилганлар асосида y=sin$x$ ва y=cos$x$ функцияларнинг аниқланиш соҳалари барча ҳақиқий сонлар тўплами бўлиши келиб чиқади. $-1 \le \frac{x}{R} \le 1$ ва $-1 \le \frac{y}{R} \le 1$ тенгсизликлардан $|\cos x| \le 1$ ва $|\sin x| \leqslant 1$. У ҳолда, $[-1;1]$ кесма $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг қийматлар тўплами бўлади.

y =tg$x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ тенгсизлик билан аниқланади; y=ctg$x$ функциянинг аниқланиш соҳаси $x \ne n\pi$, $n \in Z$ тенгсизлик билан берилади. Шу билан бир қаторда $-\infty < \frac{y}{x} < +\infty$ ва $-\infty < \frac{x}{y} < +\infty$ тенгсизликлардан tg$x$ ва ctg$x$ функцияларнинг қийматлар тўплами барча ҳақиқий сонлар тўплами бўлишини кўрамиз.

4.10-расмдан $OC^2+BC^2=OB^2$ тенглик бажарилишини кўрамиз. $x^2+y^2=R^2$ ёки $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1$ тенгликлар бажарилади. Бундан тригонометрик функцияларнинг таърифига кўра исталган x учун

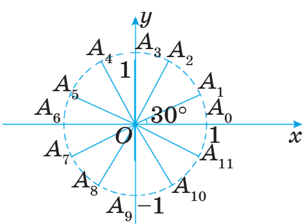
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{5}$$

айният тўғри. Бу айният асосий ***тригонометрик айният*** деб аталади.

Эслатма. Баъзида таърифда кўрилган радиуси R га тенг бўлган айлананинг ўрнига радиуси 1 га тенг бўлган айлана олинади. OB=1 эканлигидан, sinα ни B нуқтанинг ординатасига тенг, cosα шу нуқтанинг абсциссасига тенг деб қаралади. Шу сабабли бу бирлик айлана ***тригонометрик айлана*** деб аталади.

4.2.2. Тригонометрик функцияларнинг баъзи бир бурчакларининг қийматлари

1-мисол. Маркази координаталар бошида, радиуси 1 га тенг бўлган айлана $A_0(1;\ 0)$ нуқтадан бошлаб A_1, A_2, ..., A_{11} нуқталар орқали ўзаро тенг 12 бўлакка бўлинган. Нуқталар айланада кетма-кет соат стрелкаси йўналишига қарама-қаши йўналишда жойлашган. Тригонометрик функцияларнинг шу нуқталарга мос келадиган бурчаклардаги қийматларининг жадвалини тузиш керак.



4.12-расм

A_0, A_1, A_2, …, A_{11} нуқталарга 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330° га ёки $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$ радианга тенг бурчаклар мос келади (4.12-расм).

$A_0(1;0)$; $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $A_2\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A_3(0;1)$, $A_4\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$A_5\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $A_7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $A_8\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_9(0;-1)$,

$A_{10}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ эканлигидан,

$\sin 0°=0, \sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90°=1$, … ва $\cos 0°=1$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\cos 90°=0$, … . эканлигини эътибога олсак $\sin 45°=\sin 135°=\cos 45°=\cos 315°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\sin 225°=\sin 315°=\cos 135°=\cos 225°=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

жадвалга эга бўламиз.

4.1-*жадвал*

α	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Давоми

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

4.1-*давоми*

α	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
sinα	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosα	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

1. Тригонометрик функцияларнинг исталган бурчак учун берилган таърифини келтириб чиқаринг.
2. Тригонометрик функциялар таърифи тригонометрик айлананинг радиусига боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.
3. Асосий тригонометрик айниятларни ёзиб, уларнинг тўғрилигини исботланг.

Амалий иш

Тригонометрик функцияларнинг 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° бурчакдаги қийматларини ёзиб кўрсатинг.

МАШҚЛАР

A

4.20. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$ сонининг синуси ва косинусини топинг.

4.21. 1) $\sin\alpha=\frac{21}{29}$, $\cos\alpha=\frac{20}{29}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{12}{37}$, $\cos\alpha=\frac{35}{37}$;

3) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{2}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

тенгликлар бажариладиган α бурчак мавжудми?

> **3)** Шундай α бурчак топилса, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ бўлиши керак. Ушбу айниятнинг бажарилишини текширамиз:
>
> $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{25}=\frac{61}{225}\neq 1.$ У ҳолда,
>
> $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ва $\cos\alpha=\frac{2}{5}$ бўладиган α бурчак топилмайди.

4.22. α нинг қандайдир бир қийматида sinα нинг қиймати
1) 0,67;
2) $\frac{12}{11}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ сонлар тенг бўлиши мумкинми?

4.23. cosα нинг қиймати 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

сонларга тенг бўладиган α топиладими?

4.24. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $2\cos60°+\sqrt{3}\cos30°$; 2) $5\sin30°-\mathrm{ctg}45°$;
3) $2\sin45°-4\cos30°$; 4) $6\mathrm{ctg}60°-2\sin60°$.

4.25. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ айниятдан фойдаланиб, қуйидаги ифодани соддалаштиринг:

1) $\sin^2\alpha-1$; 2) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;
3) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; 4) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$.

B

4.26. $-1<m<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи исталган m сонини танлаб олиб, 1) $\sin\varphi=m$; 2) $\cos\varphi=m$ тенгликларни қаноатлантирувчи бурчак ясанг. Бундай нечта бурчак бўлиши мумкин? Жавобларингизни асосланг.

4.27. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

4.28. Ҳисобланг:

1) $2\cos\dfrac{\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 2) $7\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$; 3) $2\sin\dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

4) $3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 5) $4\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}$; 6) $12\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}$.

4.29. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos\dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+1{,}5\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{10}{3}\sin^2\dfrac{2\pi}{3}+\cos^2\dfrac{2\pi}{3}$;

3) $4\cos\dfrac{5\pi}{6}\sin\dfrac{5\pi}{6}+3\operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{6}$; 4) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{3\pi}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}$.

4.30. Ифодани соддалаштиринг:

1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 3) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

4.31. 1) $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$; 2) $\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$; 3) $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$; 4) $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$

деб олиб, $\sin^2\varphi-\cos\varphi+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi$ ифоданинг қийматини топинг.

4.32. 1) $x=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $x=\dfrac{3\pi}{4}$ деб олиб,

$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+4\cos x+2\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ифоданинг қийматини топинг.

C

4.33. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=1.$

4.34. 1) $\mathrm{tg}\varphi=2$; 2) $\mathrm{ctg}\varphi=0,5$ бўлса, $\dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}$ ифоданинг қийматини топинг.

2) $\mathrm{ctg}\varphi=0,5\Rightarrow\dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}=\dfrac{\sin\varphi\left(4\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-3\right)}{\sin\varphi\left(1+2\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)}=$

$=\dfrac{4\mathrm{ctg}\varphi-3}{1+2\mathrm{ctg}\varphi}=\dfrac{2-3}{1+1}=-0,5.$

Жавоби: $-0,5$.

4.35. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin\gamma-\cos\gamma}+\dfrac{\sin\gamma+\cos\gamma}{1-\mathrm{tg}^2\gamma}=\sin\gamma+\cos\gamma;$

2) $\dfrac{1-4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2}=1-2\sin\varphi\cos\varphi;$

3) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}\beta+1}{\mathrm{ctg}^2\beta+\mathrm{ctg}\beta+1}=\mathrm{tg}^2\beta;$

Такрорлашга доир машқлар

4.36. Квадрат тенгсизликни ечинг:

1) $x^2-4x+3<0$; 2) $2x^2-5x+3\geqslant0$;
3) $4x^2+x+1\leqslant0$; 4) $3x^2-x-1>0$.

4.37. 1) $\left(5+3\sqrt{7}\right)^2+\left(5-3\sqrt{7}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{\sqrt{45}+2\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{45}-2\sqrt{5}}\right)^2-6\sqrt{5}$

соннинг рационал сон бўлишини кўрсатинг.

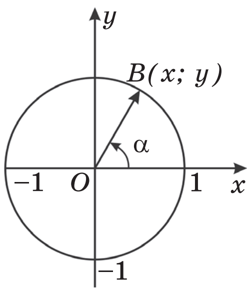
4.3. Тригонометрик функцияларнинг хоссалари

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Бирлик айлана ёрдамида тригонометрик функцияларнинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар тўпламини топишни ўрганасизлар;
- Бирлик айлана ёрдамида тригонометрик функцияларнинг жуфтлигини (тоқлигини), даврийлигини, монотон ва ўзгармас ишорали оралиқларини топишни ўрганасизлар.

4.3.1. Тригонометрик функцияларнинг ишоралари

Таърифга кўра бирлик тригонометрик айланада $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$ тенгликлар бажарилади (4.13-расм).



4.13-расм

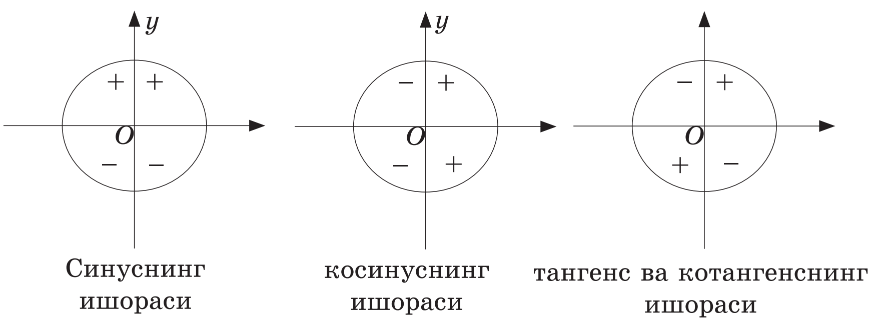
Агар $B(x;\ y) \in$ I, биринчи чоракда ётса, $x>0$, $y>0$. Бундан $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$ тенгсизликлар бажарилади.

Агар $B(x;\ y) \in$ II, иккинчи чоракка тегишли бўлса, $x<0$, $y>0$. Бундан $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$ тенгсизликлар бажарилади.

$B(x;\ y) \in$ III учинчи чоракка тегишли бўлса, $x<0$, $y<0$. Бундан $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$ тенгсизликлар бажарилади.

$B(x;\ y) \in$ IV тўртинчи чоракка тегишли бўлса, $x>0$, $y<0$. У ҳолда, $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$ тенгсизликлар бажарилади.

4.14-расмда тригонометрик функцияларнинг турли хил чораклардаги ишоралари тасвирланган.



4.14-расм

1-мисол. а) $\alpha=350°$; б) $\alpha=\frac{3\pi}{5}$ учун $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$ ва $\text{ctg}\alpha$ ишораларини аниқлаш керак.

а) 350° га тенг бўлган бурчак IV чоракда ётади. Бундан $\sin 350°<0$, $\cos 350°>0$, $\text{tg}\, 350°<0$, $\text{ctg}\, 350°<0$.

б) $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{5}<\pi$ эканлигидан мос бурчак II чоракда ётади.

У ҳолда $\frac{3\pi}{5}>0$, $\cos\frac{3\pi}{5}<0$, $\text{ctg}\frac{3\pi}{5}<0$.

4.3.2. Тригонометрик функцияларнинг тоқ-жуфтлиги

Функция тоқ ёки жуфт бўлиши учун унинг аниқланиш соҳаси координаталар бошига нисбатан симметрик бўлиши керак. Чунки функциянинг аниқланиш соҳасида a нуқта билан биргаликда $-a$ нуқта ҳам ётди. Шундагина функциянинг тоқ-жуфтлигини қуйидаги таърифлар орқали текшира оламиз.

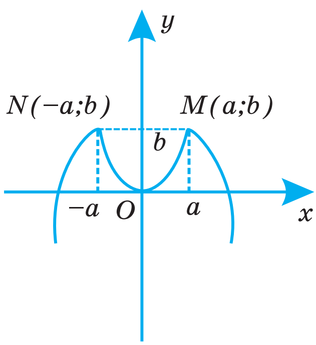
1-таъриф. *Агар $y=f(x)$ функция аниқланиш соҳасидаги ҳар бир x учун*

$$f(-x)=f(x) \qquad (1)$$

тенглик бажарилса, функция ***жуфт функция*** *деб аталади.*

Масалан, $y=x^2$, $y=|x|$ — жуфт функциялар, чунки $(-x)^2=x^2$, $|-x|=|x|$ тенгликлар бажарилади.

Агар $M(a;b)$ нуқта $y=f(x)$ жуфт функциянинг графигида ётса, $b=f(a)$ тенглик бажарилади. (1) тенгликка кўра $f(-a)=f(a)=b$. У ҳолда, $N(-a;\, b)$ нуқта ҳам $y=f(x)$ функциянинг графигида ётади. Демак, ***жуфт функцияларнинг*** графиклари Oy ўқига нисбатан симметрик (4.15-расм).



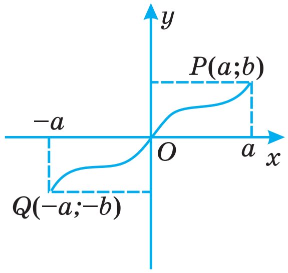
4.15-расм

2-таъриф. *Агар $y=f(x)$ функция аниқланиш соҳасидаги ҳар бир x учун*

$$f(-x)=-f(x) \qquad (2)$$

тенглик бажарилса, функция ***тоқ функция*** *деб аталади.*

Масалан, $y=x$, $y=x^3$ — тоқ функциялар.



4.16-расм

Агар $P(a;b)$ нуқта $y=f(x)$ тоқ функциянинг графигида ётса, $b=f(a)$ тенглик бажарилади. Таърифга кўра $f(-a)=-f(a)=-b$. Демак, функциянинг графигида $Q(-a;-b)$ нуқта ҳам ётади. Тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик (4.16-расм).

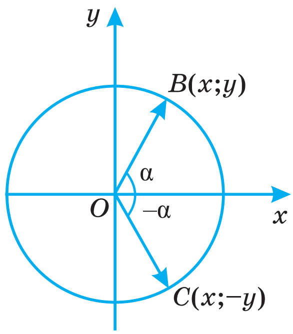
Ушбу маълумотлардан исталган функциянинг тоқ ёки жуфт бўлиши келиб чиқмайди. Масалан, $f(x)=x+x^2$ функция тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас. Чунки

$$f(-x)=-x+x^2,$$

яъни

$f(-x)=f(x)$ ва $f(-x)=-f(x)$ тенгликларнинг иккаласи ҳам бажарилмайди.

Тоқ ҳам , жуфт ҳам бўлмаган функциялар ***умумий кўринишдаги функциялар*** (УКФ) деб аталади.



4.17-расм

$f(x)=x+x^2$ — умумий кўринишдаги функция. 4.17-расмда α ва − α бурчакларга B ва C нуқталар мос келади. Агар $B(x;y)$ бўлса, $C(x;-y)$.

Бундан

$$\sin(-\alpha)=-y=-\sin\alpha;\ \cos(-\alpha)=x=\cos\alpha;\ \mathrm{tg}(-\alpha)=\frac{(-y)}{x}=-\mathrm{tg}\alpha;$$

$\mathrm{ctg}(-\alpha)=\dfrac{x}{(-y)}=-\mathrm{ctg}\alpha$ тенгликларга эга бўламиз. Таърифга кўра $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ функциялар тоқ, $\cos\alpha$ — жуфт функция.

2-мисол. $f(x)=\sin x\,\mathrm{tg}^2x$ функциянинг тоқ-жуфтлигини аниқлаш керак.

Исталган x учун $f(-x)=-f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ функция-тоқ. $f(-x)=f(x)$ тенглик бажарилса, функция-жуфт. Ушбу таърифдан ва $\sin x$, $\mathrm{tg}x$ функцияларнинг тоқ эканлигини инобатга олиб,

$$f(-x)=\sin(-x)\mathrm{tg}^2(-x)=(-\sin x)(-\mathrm{tg}x)^2=-\sin x\,\mathrm{tg}^2x=-f(x)$$

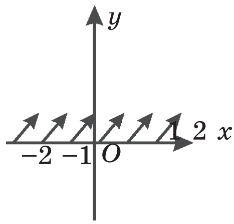
тенгликка эга бўламиз. Демак, $f(x)$ — тоқ функция.

4.3.3. Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги

3-таъриф. *Агар $y=f(x)$ функция учун $T\neq 0$ сони топилиб, x аргументнинг исталган қиймати учун*

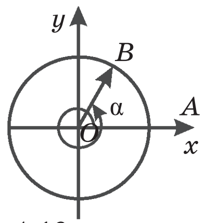
$$f(x+T)=f(x) \tag{3}$$

тенглик бажарилса, T сони $f(x)$ ***функциянинг даври*** *деб аталади*. (3) тенгликдан $y=f(x)$ функциянинг қиймати узунлиги T га тенг бўлган оралиқдан кейин такрорланиб келишини кўрамиз. Даврий функцияларнинг бу хоссасидан уларнинг графикларини ясашда фойдаланилади. Масалан, $y=\{x\}$ ($\{x\}$ ифода x сонининг каср қисмини аниқлайди) функция –даврий функция. Унинг даври $T=1$. Ҳақиқатан, агар x га 1 ни қўшсак, соннинг бутун қисмигина 1 га ортади. Унинг каср қисми ўзгармайди: $\{x+1\}=\{x\}$. Функциянинг [0;1) оралиқдаги графиги билан [1; 2), [2; 3) ва хоказо оралиқлардаги графикларининг шакли бир хил (4.18-расм). Агар T сони $y=f(x)$ функциянинг даври бўлса, ±2T, ±3T, ±4T,... сонлар ҳам шу функциянинг даври ҳисобланади. Ҳақиқатан,



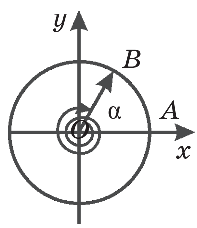
4.18-расм

$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$,
$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x),\ldots$
Сифатида
$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)$,
$f(x-2T)=f((x-2T)+2T)=f(x),\ \ldots$



4.19-расм

Шундай қилиб, даврий функциянинг чексиз кўп даврлари мавжуд бўлади. Ҳисоблашлар бажарганда энг кичик мусбат даври олинади. Масалан, $y=\{x\}$ функциянинг даврлари ±1, ±2, ±3, ±4 сонлари. 1 сони –унинг энг кичик мусбат даври.

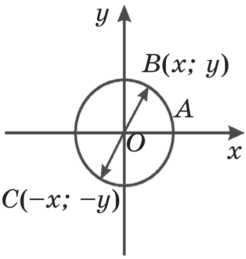


4.20-расм

4.19-срасмда B нуқта α бурчак билан ёки $\alpha+2\pi$ бурчак билан, 4.20-расмда B нуқта α бурчак билан ёки $\alpha-4\pi$ бурчак билан аниқланади. У ҳолда таърифга кўра $\sin\alpha=y$, $\sin(\alpha+2\pi)=y$, $\sin(\alpha-4\pi)=y$ тенгликларга эга бўламиз. Умуман шу каби $\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi)=$ $=\sin(\alpha-4\pi)$ тенглик бажарилади. Умуман худди шундай α ва $\alpha+2n\pi$, $n\in Z$ бурчаклар B нуқтани аниқлаганлиги сабабли,

$\sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha$ тенглик бажарилади. Демак, $\sin\alpha$ функция даврий функция. Унинг даври $2n\pi$-га тенг. Бунда n — исталган бутун сон. Худди шундай $\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha$, $n\in Z$ тенгликни ва $\cos\alpha$ функциянинг ҳам даври $2n\pi$ га тенг бўлишини кўрамиз ($n\in Z$). $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври 2π, чунки бу сон тригонометрик айлананинг соат срелкасига қарши йўналишидаги тўлиқ айланиб чиқишига мос келади.

$\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври π га ($180°$ га) тенг. Ҳақиқатан, α ва $\alpha+\pi$ бурчакларга мос келувчи радиус-векторлар қарама-қарши чоракларда жойлашади. Агар α бурчак билан бирлик тригонометрик айланада $B(x;y)$ нуқта аниқланса, $\alpha+\pi$ бурчак билан $C(-x;-y)$ нуқта аниқланади (4.21-расм). $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ эканлигидан,



4.21-расм

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Бундан $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ функцияларнинг даври $n\pi$, $n\in Z$ эканлигини кўрамиз.

Шундай қилиб, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ функцияларнинг даври $2n\pi$ ($360°\cdot n$) ва энг кичик даврлари 2π ($360°$). $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ функцияларнинг даври эса $n\pi$ ($180°\cdot n$). Энг кичик даврлари эса π га ($180°$) га тенг. Бунда $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \ldots$ исталган бутун сон.

3-мисол. а) $\alpha=-1125°$; б) $\alpha=\frac{25\pi}{3}$ болса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ қийматларини топиш керак.

Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги эътиборга олинади: а) $1125° = 3\cdot360° + 45°$ эканлигидан,

$$\sin(-1125°) = -\sin1125° = -\sin(3\cdot360°+45°) = -\sin45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(-1125°) = \cos1125° = \cos(3\cdot360°+45°) = \cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}(-1125°) = -\mathrm{tg}1125° = -\mathrm{tg}45° = -1;$$

$$\mathrm{ctg}(-1125°) = -\mathrm{ctg}45° = -1.$$

б) $\frac{25\pi}{3} = 4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$ эканлигидан,

$$\sin\frac{25\pi}{3} = \sin\left(4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{25\pi}{3} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};\ \mathrm{ctg}\frac{25\pi}{3} = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

1. Тригонометрик функцияларнинг асосий хоссаларини атаб кўрсатиб, исботланг: а) ишораларини; б) тоқ-жуфтлигини; в) даврийлигини.
2. Асосий тригонометрик функцияларнинг энг кичик мусбат даврини атаб кўрсатинг.

Амалий иш

$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ оралиқни 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$ функциянинг ўзгармас ишорали бўладиган иккита бўлакка бўлинг.

МАШҚЛАР

А

4.38. Қуйида берилган бурчаклар учун тригонометрик функцияларнинг ишораларини аниқланг:

1) $143°$; 2) $-243°$; 3) $735°$; 4) $-735°$; 5) $300°$;

6) $\frac{3\pi}{5}$; 7) $\frac{4\pi}{3}$; 8) $-0,5$; 9) 4; 10) $-7,3$.

4.39. Қуйидаги ифодаларнинг ишораларини аниқланг:

1) $\sin 300° \cdot \cos 200°$; 2) $\sin 193° \cdot \mathrm{tg} 202°$;
3) $\cos 40° \cdot \sin 120° \cdot \mathrm{tg} 150°$; 4) $\mathrm{tg} 97° \cdot \mathrm{ctg} 197° \cdot \cos 297°$;
5) $\sin\frac{3\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6}$;
7) $\cos 8 \cdot \cos 5 \cdot \mathrm{tg} 1$; 8) $\mathrm{tg} 5 \cdot \mathrm{ctg} 3 \cdot \sin 2$; 9) $\mathrm{tg}(-3) \cdot \cos(-5)$.

8) $tg5 \cdot ctg3 \cdot sin2$ ифоданинг ишорасини аниқлаш керак.

$4{,}75 < \frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$; $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ эканлигидан, $tg5 < 0$, $ctg3 < 0$, $sin2 > 0$. Бундан $tg5 \cdot ctg3 \cdot sin2 > 0$.

4.40. 1) $\sin\alpha > 0$ ва $\cos\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha < 0$ ва $\cos\alpha > 0$;
3) $\sin\alpha > 0$ ва $\cos\alpha < 0$; 4) $tg\alpha < 0$ ва $\cos\alpha > 0$;
5) $\sin\alpha > 0$ ва $tg\alpha > 0$; 6) $ctg\alpha > 0$ ва $\sin\alpha < 0$ бўлса,
α қайси чоракда жойлашди?

4.41. Қайси чоракда 1) $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$; 2) $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$;

3) $\cos\alpha$ ва $tg\alpha$ ифодаларнинг ишоралари бир хил бўлади?

4.42. Функциянинг тоқ-жуфтлигини аниқланг (оғзаки):

1) $y=x^{10}$; 2) $y=x^{-2}$; 3) $y=\sqrt{x}$;
4) $y=\sqrt{x^6}$; 5) $y=x^4-2x^2+3$; 6) $y=x^3-5x$;
7) $y=x+\sin x$; 8) $y=x^2-\cos x$; 9) $y=x^5 \cdot tgx$.

4.43. Функцияни тоқ-жуфтликка текширинг:

1) $f(x)=9$; 2) $g(x)=0$; 3) $h(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;
4) $f(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$; 5) $f(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$.

B

4.44. Функциянинг тоқ-жуфтлигини аниқланг:

1) $y=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$; 2) $y=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;

3) $y=\dfrac{|x-7|}{x+1}+\dfrac{|x+7|}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{|x-4|}{x+2}+\dfrac{|x+4|}{x-2}$;

5) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x+1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$; 6) $g(x)=\dfrac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}-\dfrac{(x+1)^6}{(3x-4)^3}$.

4.45. Қуйидаги функцияларнинг энг кичик мусбат даврини кўрсатинг:

1) $y=\{2x\}$; 2) $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; 3) $y=\left\{\dfrac{x}{3}\right\}$;

4) $y=tg3x$; 5) $y=\sin 2x$; 6) $y=ctg\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

3) $y=\left\{\frac{x}{3}\right\} \Rightarrow 0 \le \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow 0 \le x < 3 \Rightarrow$ энг кичик мусбат даври $T=3$.

Жавоби: 3.

4.46. 1) $\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}$;

3) $\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{4}$; 4) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}$

ифодаларнинг ишорасини аниқланг.

4.47. Қуйида берилган функцияларнинг тоқ-жуфтлигини ёки умумий холдаги функция бўлишини аниқланг:

1) $1-\cos x$; 2) $x-\sin x$; 3) $x^2-\cos x$; 4) $x^3+\sin x$;

5) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 6) $\frac{\mathrm{tg}\, x+1}{\mathrm{tg}\, x-1}$; 7) $\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; 8) $\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$;

9) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$; 10) $\cos x\cdot\sin x$; 11) $\mathrm{tg}x\cdot\sin^2 x$; 12) $\sin x\cdot\mathrm{ctg}^2 x$.

4.48. Тригонометрик функцияларнинг даврийлигидан фойдаланиб, қуйидаги ифодаларнинг қийматларини топинг:

1) $\sin 390°$; 2) $\cos 420°$; 3) $\mathrm{tg}540°$; 4) $\mathrm{ctg}450°$;

5) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{3}$; 6) $\sin\frac{11\pi}{6}$; 7) $\cos\frac{9\pi}{4}$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}$.

4.49. Қуйидаги мулоҳазаларнинг тўғрилигини текширинг:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}<1$.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$; б) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>1.$

У ҳолда, $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\ne\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$.

C

4.50. 1) $|\sin\alpha|=\sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$; 3) $|\mathrm{tg}\alpha|=-\mathrm{tg}\alpha$; 4) $|\mathrm{ctg}\alpha|=\mathrm{ctg}\alpha$ тенгликларни қаноатлантирувчи α бурчак қайси чоракда жойлашган?

4.51. 1) $\sin\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$; 3) $\sin\alpha=-1$; 4) $\cos\alpha=1$; 5) $\cos\alpha=0$; 6) $\cos\alpha=-1$ тенгликларни қаноатлантирувчи барча α бурчакларнинг умумий формуласини ёзиб кўрсатинг.

4.52. Учбурчак бурчаклари α, β, γ бўлса, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ йиғиндининг ишораси қандай бўлади?

4.53. 1) $1+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha$; 3) $2-3\sin\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha-1$; 5) $|2-5\cos\alpha|$; 6) $2-5|\cos\alpha|$ ифодаларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини кўрсатинг.

4.54. 1) $\sin\alpha+2\cos\alpha=3$; 2) $3\sin\alpha-2\cos\alpha=5$; 3) $5\cos\alpha-3\sin\alpha=8$; 4) $2\sin\alpha+5\cos\alpha=-7$ тенгликлар бажариладими?

4.55. $y=f(x)$ функция жуфт ва 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geqslant0$; 2) $f(x)=x^2-3x$, $x\geqslant0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\leqslant0$; 4) $\dfrac{1}{x+1}$, $x\leqslant0$ бўлса, $f(x)$ функцияни битта формула билан аниқлаб, унинг графигини ясанг.

4.56. $y=f(x)$ функция тоқ ва 1) $f(x)=x^2$, $x\geqslant0$; 2) $f(x)=x^2$, $x\leqslant0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\geqslant0$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ бўлса, $f(x)$ функцияни формула орқали ёзиб, унинг графигини чизинг.

4.57. $y=\{x\}+\cos\pi x$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4.58. Қуйидаги функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:
1) $y=\sin2\pi x$; 2) $y=|\cos x|$; 3) $y=1+\sin^2x$;
4) $y=\sin2x+3\cos3x$; 5) $y=\mathrm{tg}3x+5\mathrm{ctg}2x$.

Такрорлашга доир машқлар

4.59. $y=x^2+6x-1$ функция 1) -1; 2) -8; 3) -11 га тенг бўлган қийматлар қабул қилиши мумкинми?

4.60. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 2x-6<3-x, \\ x^2-5x+4\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ 2x^2-9x<0. \end{cases}$

4.4. Келтириш формулалари

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Келтириш формулаларини келтириб чиқаришни ва ундан мисоллар ечишда фойдаланишни ўрганасизлар.

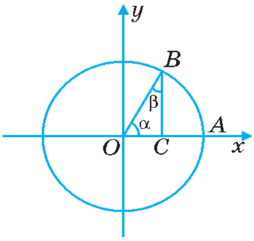
Агар $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ тенглик бажарилса, у ҳолда α ва β бурчаклар $\dfrac{\pi}{2}$ гача бир-бирини ***тўлдирувчи бурчаклар*** деб аталади. Синус ва косинус , тангенс ва котангенс функциялар номланишига кўра бир-бирига ўхшаш функциялар деб аталади.

Теорема. ***Тўлдирувчи бурчаклардаги ўхшаш функцияларнинг қийматлари тенг бўлади.***

α ва $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ тўлдирувчи бурчаклар учун

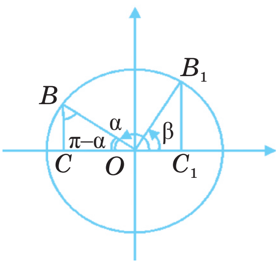
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad (1)$$

тенгликларнинг бажарилишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ бўлсин. (4.22-расм). Бу бурчак бирлик айланада $B(x;y)$ нуқта билан аниқлансин. $C(x;\ 0)$ бўлса, $\beta=\angle OBC=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$. Бундан тўғри бурчакли учбурчакларнинг хоссасига кўра $\cos\alpha=x$, $\sin\beta=x$, $\cos\beta=y$, $\sin\alpha=y$. У ҳолда $\sin\beta=\cos\alpha$ ва $\cos\beta=\sin\alpha$ тенгликлардан $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ ва $\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ тенгликларга эга бўламиз.



4.22-расм

Энди $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бўлсин (4.23-расм).



4.23-расм

Бунда $B(x;\ y)$, $C(x;0)$, $\angle BOC=\pi-\alpha$ деб олсак,

$$\angle CBO=\frac{\pi}{2}-\angle BOC=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Бирлик айланада $\beta=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ бурчакка мос келадиган $B_1(x_1;\ y_1)$ нуқтани оламиз. OBC ва OB_1C_1 тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан $y_1=-x$, $x_1=y$. Демак, $\sin\beta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=y_1=-x=-\cos\alpha$.

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

тенгликни эътиборга олган ҳолда,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ тенглик ҳам худди шу каби исботланади. Умуман худди шу каби (1) учун исботлаш мумкин.

Тангенс ва котангенс функциялар учун теорема қуйидагича исботланади:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

(2)

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ ва $2\pi\pm\alpha$ кўринишдаги бурчакларнинг тригонометрик функциялари α бурчакнинг функциялари орқали ифодаланадиган формулалар *келтириш формулалари* деб аталади.

а) агар (1) ва (2) формулаларда α ни −β билан алмаштирсак,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha. \qquad (3)$$

б) Худди шундай

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad (4)$$

$$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(\pi+\varphi)=\mathrm{ctg}\alpha$$

тенгликлар ҳам бажарилади.

в) (4) формулаларда α ни −α билан алмаштирсакқ,

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha, \qquad (5)$$
$$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha.$$

г) $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ бурчак учун

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha. \qquad (6)$$

ғ) (6) формулада α ни − α билан алмаштирсак,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha. \qquad (7)$$

д) 2π сони тригонометрик функцияларнинг даври эканлигини эътиборга олиб,

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,\qquad (8)$$
$$\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$$

ва

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(2\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(2\pi+\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha.\qquad (9)$$

Шундай қилиб, (1) — (9) формулаларни бирлаштириб келтириш формулаларига эга бўламиз. Уларни жадвал кўринишда ёзиш қулай.

4.2-жадвал

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

1-мисол. а) $\beta=\frac{10\pi}{3}$; б) $\beta=-960°$ бўлса, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\beta$ ва $\mathrm{ctg}\beta$ нинг қийматларини топиш керак.

▶ а) $\beta=\frac{10\pi}{3}=3\pi+\frac{\pi}{3}=2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ эканлигидан келтириш формулаларидан фойдалансак,

$$\sin\frac{10\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}=\mathrm{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$
$$\mathrm{ctg}\frac{10\pi}{3}=\mathrm{ctg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) $\beta=-960^\circ=-3\cdot360^\circ+120^\circ=-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ)$. У ҳолда,

$$\sin(-960^\circ)=\sin(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(-960^\circ)=\cos(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin30^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}(-960^\circ)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}(-960^\circ)=\frac{\frac{\sqrt{1}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2-мисол. Исталган α *учун*

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2(\pi+\alpha)}+\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)\sin^2\alpha}{1-\sin^2(2\pi+\alpha)}=1$$

тенглик бажарилишини исботлаймиз.

Келтириш формулаларидан фойдаланамиз: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin^2\alpha$; $\cos^2(\pi+\alpha)=\cos^2\alpha$; $\cos^2(2\pi-\alpha)=\cos^2\alpha$; $\sin^2(2\pi+\alpha)=\sin^2\alpha$.

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2(\pi+\alpha)}+\frac{\cos^2(2\pi-\alpha)\sin^2\alpha}{1-\sin^2(2\pi+\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+$$

$$+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Эслатма: Келтириш формулалари исталган α бурчак учун бажарилади. Масалан, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ формулани қуйидагича бериш мумкин: исталган $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ бурчак учун тенглик бажарилади. $\alpha=\frac{\pi}{12}$ деб олсак, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$ тенглик; $\alpha=\frac{7\pi}{12}$ десак, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\frac{7\pi}{12}$ хосил бўлади.

Келтириш формулаларини юқоридаги жадвал кўринишида ёдда сақлаш қийин

$\sin x$ билан $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ билан $\operatorname{ctg} x$ функциялар –ўзаро “ўхшаш” функциялар. Келтириш функциялари жадвалини эътибор билан тахлил қилсак, аргументга боғлиқ бўлган функциянинг номи ўзгармайди ёки ўхшаш функцияга ўзгаради, ишораси ҳам «+» ёки «–» ишоралар билан алмашиб боришини кўрамиз.

Шу сабабли α ни ўткир бурчак деб олиб, қуйидаги келтириш формулаларидан фойдаланиш қоидаларини ёдда сақлаш етарли.

1-қоида (ишорасини аниқлаш). α бурчакни ўткир деб олиб, $k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha$ ёки $(90°k+\alpha)$ бурчакка, $\pi k+\alpha$ ёки $(180°k+\alpha)$ бурчакка мос келувчи радиус-вектор қайси координаталар чорагида жойлашганини аниқлаб, берилган функциянинг шу чоракдаги ишорасини қўямиз.

2-қоида (функциянинг номи бўйича). Агар функциянинг аргументида фақат $\frac{\pi}{2}$ га ($90°$ га) каррали $\frac{\pi}{2}\cdot k$, яъни $90°\cdot k$ кўринишдаги қўшилувчилар мавжуд бўлса ва π га ($180°$ га) каррали бўлмаса, функциянинг номи ўхшаш функцияга алмашади ва $\frac{\pi}{2}\cdot k$ $(90°\cdot k)$ кўринишдаги қўшилувчилар олиб ташланади. Бунда $k\in Z$.

Агар функция аргументида πk, яъни $180°\cdot k$ кўринишдаги қўшилувчилар мавжуд бўлса, функциянинг номи ўзгармайди.

Масалан, $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$, чунки $\frac{7\pi}{2}+\alpha=3\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$

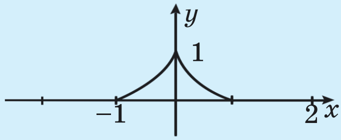
Бурчак IV координаталар чорагида жойлашган. Бу чоракда синуснинг ишораси манфий, бундан «–» ишора қўйилади.

Қўшилувчи $7\cdot\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2}\text{-га каррали}\right)$ бўлгани учун синус ўхшаш функция косинусга алмашади.

1. Қандай бурчаклар тўлдирувчи бурчаклар деб аталади?
2. Қандай тригонометрик функциялар ўхшаш функциялар деб аталади?
3. Тўлдирувчи бурчаклардаги ўхшаш бурчакларнинг қийматлари тенг эканлигини исботланг.
4. Келтириш формулалари нима? Уни қандай тушунасиз?

Амалий иш

4.24-расмда даври $T = 2$ бўлган $y = f(x)$ функциянинг графигининг $[-1;1]$ оралиқдаги қисми тасвирланган. Ушбу функция графигининг $[-2;5]$ оралиқдаги тасвирини ясанг.



4.24-расм

МАШҚЛАР

А

4.61. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\cos(2\pi-\alpha)$; 3) $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin(2\pi+\alpha)$; 6) $\cos(90°-\alpha)$;

7) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 8) $\operatorname{tg}(180°-\alpha)$; 9) $\sin(270°-\alpha)$

ифодаларни α бурчакнинг тригонометрик функциялари билан алмаштиринг.

4.62. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда бурчакни тригонометрик функциясига келтиринг:

1) $\cos 0{,}7\pi$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$; 3) $\sin 1{,}6\pi$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

4.63. $(0°; 90°)$ оралиқда бурчакни тригонометрик функциясига келтиринг:

1) $\operatorname{tg}137°$; 2) $\sin(-178°)$; 3) $\sin 680°$; 4) $\cos(-1000°)$.

4.64. 1) $\alpha=\frac{3\pi}{2}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ деб олиб, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ ни топинг.

Ифоданинг қийматини топинг **(4.65 – 4.66):**

4.65. 1) $\sin 240°$; 2) $\cos(-210°)$; 3) $\cos\frac{7\pi}{6}$; 4) $\cos\frac{4\pi}{3}$.

3) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.66. 1) $\sin 330°$; 2) $\mathrm{tg}300°$; 3) $\mathrm{ctg}(-225°)$;
4) $\sin(-150°)$; 5) $\mathrm{tg}(-225°)$; 6) $\cos 120°$.

5) $\mathrm{tg}(-225°)=-\mathrm{tg}225°=-\mathrm{tg}(180°+45°)=-\mathrm{tg}45°=-1$.

B

4.67. $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{10}{11}$ деб олиб, $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ нинг қийматини топинг.

4.68. Ҳисобланг:

1) $3\sin\frac{\pi}{2}+4\cos\frac{2\pi}{3}+6\sin\frac{13\pi}{6}$;

2) $2\mathrm{tg}180°-0{,}5\sin(-270°)+0{,}5\cos 180°$.

4.69. $\mathrm{tg}15°=2-\sqrt{3}$ деб олиб, $2\mathrm{tg}1095°+\mathrm{ctg}975°-\mathrm{tg}(-195°)$ ифоданинг қийматини топинг.

4.70. Агар α, β ва γ учбурчакнинг бурчаклари бўлса,

1) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$;

айниятни исботланг.

4.71. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sin^2(\pi+\alpha)$; 2) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

4) $\sin^2(180°-x)+\sin^2(270°-x)$; 5) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=(-\mathrm{ctg}\,\alpha)^2=\mathrm{ctg}^2\,\alpha$.

4.72. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

2) $\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$;

3) $\sin 160°\cos 110°+\sin 250°\cos 340°+\operatorname{tg} 110°\operatorname{tg} 340°$;

4) $\operatorname{tg} 18°\operatorname{tg} 288°+\sin 32°\sin 148°-\sin 302°\sin 122°$.

C

4.73. Айниятни исботланг:

1) $\sin(60°-\alpha)=\cos(30°+\alpha)$; 2) $\operatorname{ctg}(80°-\alpha)=\operatorname{tg}(10°+\alpha)$;

3) $$\frac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos^2\alpha.$$

4.74. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\operatorname{tg}15°\operatorname{tg}30°\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}75°$; 2) $\operatorname{ctg}18°\operatorname{ctg}36°\operatorname{ctg}54°\operatorname{ctg}72°$;

3) $\operatorname{tg}1°\operatorname{tg}2°\ldots\operatorname{tg}88°\operatorname{tg}89°$; 4) $\operatorname{ctg}88°\operatorname{ctg}86°\ldots\operatorname{ctg}4°\operatorname{ctg}2°$.

4.75. Ҳисобланг:

1) $\sin 225°\cdot\cos 120°\cdot\operatorname{tg} 330°\cdot\operatorname{ctg} 240°$;

2) $\sin\frac{7\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

3) $\cos(-7{,}9\pi)\cdot\operatorname{tg}(-1{,}1\pi)-\sin 5{,}6\pi\cdot\operatorname{ctg}4{,}4\pi$;

4) $\sin 5{,}9\pi\cdot\operatorname{tg}(-0{,}6\pi)+\cos 3{,}6\pi\cdot\operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$.

Такрорлашга доир машқлар

4.76. 1) $36°$; 2) $240°$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 3 га тенг бўлган бурчакларнинг тригонометрик функцияларининг ишораларини аниқланг.

4.77. Тенгсизликни ечинг:

1) $\frac{2x^2-7x+5}{4-x^2}<0$; 2) $\frac{3x^2+4x-7}{x^2+8x+7}\le 0$.

Ўқинг, қизиқ!

Халқаро космик станциясида Canadarm-2 манипуляторининг ҳар бир бўғинининг эгилиши, бурилиши тригонометрик ҳисоблашлар орқали бошқарилади. Ушбу манипуляторнинг ёрдамида космонавтнинг фазодаги ўрни ҳам кузатилади.

4.5. Тригонометрик формулалар

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Асосий тригонометрик айниятлардан мисоллар ечишда фойдаланасизлар;
- Бурчакларнинг йиғиндиси ва айирмаси, иккиланган ва ярим бурчакнинг тригонометрик формулаларини келтириб чиқарасизлар;
- Тригонометрик йиғиндини кўпайтмага ва кўпайтмани йиғиндига алмаштиришни ўрганиб, ундан фойдаланасизлар;
- Тригонометрик ифодаларни айнан шакл алмаштиришни ўрганасизлар.

4.5.1. Асосий тригонометрик айниятлардан тригонометрик ифодаларни шакл алмаштиришда фойдаланиш

Бир хил аргументли ифодаларни шакл алмаштиришда асосий тригонометрик айниятдан

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \tag{1}$$

ва таърифдан олинадиган

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{2}$$

формулалар чиқувчи натижалардан фойдаланилади. Бинобарин, (2) формуладан

$$\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{ctg}\alpha=1 \tag{3}$$

айниятни, (1) айниятни мос равишда $\sin^2\alpha$ ва $\cos^2\alpha$ ифодаларга ҳадма-ҳад бўлиб,

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{4}$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{5}$$

формулаларга эга бўламиз. Энди бу формулалардан мураккаброқ тригонометрик ифодаларни шакл алмаштиришда фойдаланайлик.

1-мисол. $\sin\alpha\ \cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\ \sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$ ифодани соддалаштирамиз.

▶ (4) ва (5) формулалар бўйича $\sin\alpha\ \cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\times$

$\times\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)=\sin\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha+\cos\alpha\ \sin^2\alpha\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$ ◀

2-мисол. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^2\alpha+\cos^4\alpha)$ ифодани соддалаштирамиз.

(1) (1) Формуланинг иккала томонини квадратга ошириб, $1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$
тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Худди шундай
$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\times$
$\times\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\times$
$\times\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

Берилган ифодани қуйидагича шакл алмаштириш мумкин:
$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=2(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-3(1-2\sin^2\alpha\cos^2)=$
$=2-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-1.$

3-мисол. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\mathrm{ctg}\alpha}=\mathrm{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha$ айниятни исботлаймиз.

Одатда айниятни исботлаш учун унинг бир томонини айнан шакл алмаштиришлар орқали берилган айниятни иккинчи томонига тенг бўлиши кўрсатилса, етарли. Берилган айниятнинг чап томонини айнан шакл алмаштирсак,

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\cos\alpha\left(1-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\mathrm{ctg}\,\alpha(\sin\alpha-1)}=\mathrm{tg}\,\alpha\cos^{-1}\alpha.$$

Шуни исботлаш талаб этилган эди.

4-мисол. Агар $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=2{,}3$ бўлса, $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$ нинг қийматини топиш керак.

$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=2{,}3$ тенгликнинг иккала томонини квадратга

оширсак, $2{,}3^2=5{,}29=\mathrm{tg}^2\alpha+2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+2,$

$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha+2=5{,}29.$ Бундан $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha=5{,}29-2=3{,}29.$

Тарихга назар

Тригонометрия элементларини инсоният қадимги замонларда бурчакларни ўлчаш эҳтиёжи туғилгандан бошлаб фойдалана бошлаган. Масалан, бизнинг замонизгача бўлган икки мингинчи йилларда қадимги вавилонликлар доира ватарининг узунлигини доиранинг диаметри билан сегмент баландиклари орқали ҳисоблай олганликлари ҳақида шу кунга қадар сақланиб қолган миххат жадваллари тасдиқлайди.

Милетлик Фалес (тахминан б.э.а. 625-547 йиллар) эса ўз асарларида қадимги мисрлик олимлар жисмнинг баландлигини унинг сояси ёрдамида топа олганликларини айтиб ўтган.

Энг дастлабки тартибланган тригонометрик жадвалларни К.Птоломей (б.э.а. II аср) тузган. У ўз асарларида 60 лик саноқ системасидан фойдаланиб, айланани ўзаро тенг бўлган 360 бўлакка бўлиб ўрганган ва унинг меҳнатлари шу кунга қадар сақланиб келмоқда (360°; минут, секунд ва хоказо) .Умуман б.э.а. II асрда грек олимлари айлана ватарлари узунликларининг жадвалидан кенг қўллана олган. Бу ватарларнинг ярми шу кундаги синус тушунчасига тўғри келади.

Ҳақиқатан, BC ватарга тиралган айланага ички чизилган BC ватарнинг ярмига тенг: $\sin\alpha = \dfrac{BD}{BO} = BD$, чунки $BO = 1$.

Хинд олимлари эса ҳисоблашларда синус билан бир қаторда косинусдан ҳам фойдаланишган ва улар катта аниқликда синус ва косинуснинг жадвалларини тузишган. Синуслар ва тангенслар жадваллари Ал-Хоразмийнинг (787–850) астраномик трактатларида учрайди. Тригонометрияни астрономияга боғлиқ бўлмаган ҳолда ўрганган Туса шаҳрида туғилган (Озарбайжоннинг жануби) Насриддин ат-Тусий (1201–1274) бўлди. У ўзининг трактатларида синуслар теоремасини исботлаган. Шу билан бир қаторда Ўрта Осиё олимлари араб тилида тригонометрик функцияларнинг ўзаро боғланишлари ҳақида тушунчалари ва исботлари бўлган астрономик ва тригонометрик жадваллар – зижилар ясаб чиқара бошлашган. Шу кунга қадар юзлаб зижилар сақланиб қолган, улардан Самарқандлик Улуғбекнинг жадваллари ҳам бўлиб, улар кўп замонларгача аниқлиги юқори бўлган жадваллар бўлди.

Улуғбек
(1394–1449)

Улуғбек абсерваториясининг бурчак ўлчаш асбоби

У абсерватория қурдириб, махсус қуроллар ёрдамида кўплаган ўлчовлар олиб борди. Бу қуроллардан бири-узунлиги 60 мм бўлган бурчак ўлчовчи қурол.

Европалик математиклардан тригонометрияни ўганганлардан дастлабкиси немис математиги И.Мюллер (1436–1476, уни кўпинча туғилган ери бўйича Региомонтан деб атайди). XVIII асргача тригонометрия тўла шаклланмаган эди. Ягона шартли белгилар бўлмаганлиги сабабли тригонометрик формулалар сўз билан ёзилиб келган, доира чоракларидаги тригонометрик функцияларнинг ишоралари ҳам тўлиқ аниқланмаган эди.

Л.Эйлер (1707–1783) тригонометрик функцияларни аниқлаганда тригонометрик айланалардан фойдаланиб, бир нечта асосий формулалар ёрдамида бошқа барча формулаларни келтириб чиқарган. У тригонометрик формулаларни ўлчовсиз сонлар сифатида ўрганиб, унинг иҳтиёрий сон аргументидаги ишораси ҳақидаги саволга тўлиқ жавоб топди.

Тригонометрик функцияларнинг ҳозирги номлари XVI–XVIII асрларда пайдо бўлган. Синус сўзи лотин тилидан таржима қилинганда “қавариқлик” деган маънони билдиради. Косинуснинг “ко” қўшимчаси лотинча complementom — тўлдирувчи деган маънони англатади. Шу кунларда фойдаланилаётган sin$x$ ва cos$x$ белгилашлар 1739 йили И.Бернуллининг Л.Эйлерга ёзган хатида дастлаб таклиф қилинган. Бу белгилашлардан кейинчалик Л.Эйлер ва бошқалар кенг фойдалана бошлади.

МАШҚЛАР

А

4.78. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\operatorname{ctg}\beta - \dfrac{\cos\beta - 1}{\sin\beta}$; 2) $\dfrac{1}{\sin\alpha - 1} - \dfrac{1}{\sin\alpha + 1}$;

3) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{tg}\gamma-1}$; 4) $\dfrac{\sin^2\theta-1}{\cos^2\theta-1}+\mathrm{tg}\theta\ \mathrm{ctg}\theta$;

5) $\mathrm{tg}^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)$; 6) $\cos^2\alpha-\left(\mathrm{ctg}^2\alpha+1\right)\sin^2\alpha$.

4.79. Ифодани шакл алмаштиринг:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos^2\alpha\ \mathrm{tg}^2(-\alpha)-1$;

3) $\dfrac{\mathrm{ctg}(-\beta)\sin\beta}{\cos\beta}$; 4) $\dfrac{1-\mathrm{tg}(-x)}{\sin x+\cos(-x)}$;

5) $\mathrm{ctg}\alpha\ \sin(-\alpha)-\cos(-\alpha)$; 6) $\mathrm{tg}(-u)\ \mathrm{ctg}u+\sin^2 u$;

7) $\dfrac{1-\sin^2(-y)}{\cos y}$; 8) $\dfrac{\mathrm{tg}(-x)+1}{1-\mathrm{ctg}\,x}$.

4.80. Ифоданинг қиймати α га боғлиқ эканлигини кўрсатинг:

1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; 2) $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2-(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^2$;

3) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$; 6) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

3)

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\left|\begin{array}{l}1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{array}\right|=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

B

4.81. Айниятни исботланг **(4.81—4.82)**:

1) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=1$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}=2$;

3) $(2-\sin\alpha)(2+\sin\alpha)+(2-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)=7$;

4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

4.82. 1) $\mathrm{ctg}\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

$$2)\ \frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha;$$

$$3)\ \frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}; \qquad 4)\ \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x}=\cos^2 x.$$

$$4)\ \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x}=\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos x}{\sin x\left(\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right)}=\cos^2 x.$$

4.83. Ифоданинг энг катта қийматини топинг:

1) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$; 2) $1-\sin\alpha\ \cos\alpha\ \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\cos^2\alpha\ \operatorname{tg}^2\alpha+5\cos^2\alpha-1$; 4) $\sin\alpha+3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$.

4.84. Ҳисобланг:

$$1)\ 1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}; \qquad 2)\ 1-\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}-\cos^3\frac{\pi}{4};$$

$$3)\ 1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6}; \qquad 4)\ 1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^3\frac{\pi}{6}.$$

4.85. Ифодани соддалаштиринг:

$$1)\ \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha; \qquad 2)\ \operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x};$$

$$3)\ \frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x; \qquad 4)\ (1-\cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha+1-\operatorname{tg}^2\alpha;$$

$$5)\ (\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)^2-(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)^2; \qquad 6)\ \operatorname{ctg}^6 x-\frac{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$6)\ \operatorname{ctg}^6 x-\frac{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{ctg}^6 x-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\sin^2 x}}{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=$$

$$=\operatorname{ctg}^6 x-\operatorname{ctg}^2 x\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x-1}=\operatorname{ctg}^6 x-\operatorname{ctg}^4 x\cdot\frac{-\cos^2 x}{-\sin^2 x}=$$

$$=\operatorname{ctg}^6 x-\operatorname{ctg}^6 x=0.$$

4.86. Ифодани шакл алмаштиринг:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)$;

3) $(\operatorname{ctg}(6{,}5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+2\sin^2(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)$;

4) $\left(\cos(2{,}5-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi+\alpha)+\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+$

$+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

C

4.87. Системадаги t параметрдан қутулинг:

1) $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=5\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\sin t\cos t. \end{cases}$

4.88. Айниятни исботланг:

1) $(\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)$;

2) $1+\cos\alpha-\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=(1-\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$.

4.89. Агар $\operatorname{tg}\alpha=2$ бўлса,

1) $\frac{3\sin\alpha-5\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}$;

3) $\frac{\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha}{2\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$; 4) $\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha}$

ифоданинг қийматини топинг.

4.90. Агар $\operatorname{ctg}\alpha=-2$ бўлса,

1) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$;

3) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin^3\alpha-2\cos^2\alpha}$; 4) $\frac{(\sin\alpha+3\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

ифоданинг қийматини топинг.

4.91. Айниятни исботланг:

$$1)\ \frac{\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha};$$

$$2)\ \frac{\cos\alpha+\sin\alpha-\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.$$

4.92. Айниятни исботланг:

1) $\sin^2\alpha\ \cos^2\beta-\cos^2\alpha\ \sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos^2\alpha\ \cos^2\beta-\sin^2\alpha\ \sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

$$4)\ \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}=\mathrm{tg}\,\alpha\mathrm{tg}\beta.$$

Такрорлашга доир машқлар

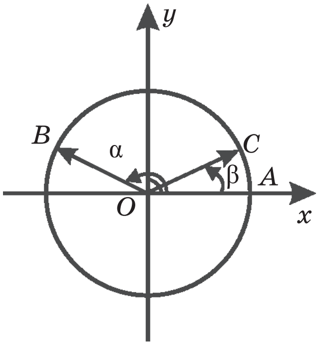
4.93. $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ деб олиб, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ ннинг қийматларини топинг.

4.94. $\begin{cases} x+2y\le 4, \\ y\le x^2+6x-7 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан берилган фигурани ясанг.

4.95. $x^2-3x+2=0$ тенгламани график усулда ечинг.

4.5.2. Қўшиш формулалари

Иккита бурчак йиғиндиси билан айирмасининг тригонометрик функциялари шу бурчакларнинг тригонометрик функциялари орқали ифодаловчи формулалар ***қўшиш формулалари*** деб аталади. Энди шу формулаларни келтириб чиқарамиз.



4.25-расм

Фараз қилайлик, бизга α ва β бурчаклар берилсин ва $\alpha \geqslant \beta$, $\alpha - \beta \leqslant \pi$ бўлсин. Бирлик тригонометрик айланада $B(x_1;\ y_2)$ нуқта α бурчакни, $C(x_2;\ y_2)$ нуқта β бурчакни аниқласин(4.25-расм). $\overrightarrow{OB}$ векторнинг координаталари $(x_1;y_1$, $\overrightarrow{OC}$ векторнинг координаталари $(x_2;y_2)$ бўлади. Векторларнинг скаляр кўпайтмасининг таърифига кўра

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = x_1x_2 + y_1y_2. \qquad (1)$$

Синус ва косинуснинг таърифига кўра $\sin\alpha = y_1$, $\sin\beta = y_2$, $\cos\alpha = x_1$, $\cos\beta = x_2$. (1) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

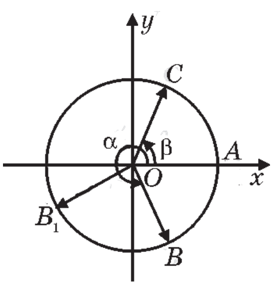
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \qquad (2)$$

Иккинчи томондан, $\angle BOC = \alpha - \beta$ эканлигидан ва векторларнинг скаляр кўпайтмасининг иккинчи таърифига кўра

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right| \cos(\angle BOC) = \cos(\alpha - \beta). \qquad (3)$$

(2) ва (3) тенгликларни таққослаб,

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta} \qquad (4)$$



4.26-расм

формулага эга бўламиз. Бунда $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 1$ тенглик эътиборга олинади.

$\alpha - \beta > \pi$ бўлса, (4.26-расм),

$\angle BOC = 2\pi - (\alpha - \beta) < \pi$ ва

$\cos(\angle BOC) = \cos(2\pi - (\alpha - \beta)) = \cos(\alpha - \beta)$

тенглик бажарилади. Бу ҳолда ҳам (4) формула бажарилади.

Эслатма. (4) формулани келтириб чиқарганда $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta<2\pi$ тенгсизликлар бажарилади деб ҳисобладик. Амалда бу формула исталган α ва β бурчаклар учун бажарилади. Бу ҳолларда қўшимча $2n\pi$ қўшилувчигина пайдо бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, исталган α ва β бурчаклар учун

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

формула бажарилишини исботладик. Бундан

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (5)$$

формула келиб чиқади. Ҳақиқатан,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-$ $-\sin\alpha\sin\beta$.

Шуни исботлаш керак эди.

Бажариб кўринг

Худди шундай

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (6)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (7)$$

формулаларни мустақил исботлаб кўринг.

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ва

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

(4)–(7) формулалар синус ва косинус учун ***қўшиш формулалари*** деб аталади. Шу билан бир қаторда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}; \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (8)$$

Ҳақиқатан,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Бажариб кўринг

Бошқа формулалар ҳам худди шу каби исботланади. Уни мустақил исботлаб кўринг.

1-мисол. а) $\cos\frac{7\pi}{12}$; б) $\sin 105°$; б) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$ ифодаларнинг қийматларини топиш керак.

а) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

б) $\sin 105° = \sin(60°+45°) = \sin 60°\cos 45° + \cos 60°\sin 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

в) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}.$

2-мисол. $\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$ ифоданинг энг катта қийматини топиш керак.

Берилган ифодани $\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$ кўринишда ёзиб ва $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ эканлигини эътиборга олсак, $\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. тенгликдаги $2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$ ифоданинг энг катта қиймати 2 га тенг. У ҳолда берилган ифоданинг ҳам энг катта қиймати 2

1. Қандай формулалар қўшиш формулалари деб аталади?
2. (4)–(8) формулаларни исботлаб кўрсатинг.

Амалий иш

Банк 2016 йили депозитга тенгеда солинган маблағнинг 10,5% ини ташкил этувчи йиллик мукофот пули тўлайди. Депозитга солинган 1000000 тенге миқдори икки йилдан кейин қанча бўлади?

МАШҚЛАР

А

4.96. Қўшиш формуласидан фойдаланиб, ифодани шакл алмаштиринг:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

4.97. Ҳисобланг:

1) $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$; 2) $\cos 70^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \sin 40^\circ$.

Ифодани соддалаштиринг **(4.98 — 4.100):**

4.98. 1) $\cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x$; 2) $\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$;
3) $\cos\beta \sin 5\beta - \sin\beta \cos 5\beta$; 4) $\sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha$.

4.99. 1) $\sin(x+y) - \cos x \sin y$; 2) $\cos(x-y) - \sin x \sin y$;
3) $\sin\alpha \cos\beta - \sin(\alpha-\beta)$; 4) $\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha-\beta)$.

4.100. 1) $\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x}$; 2) $\frac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 5x}$;

3) $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

5) $\dfrac{\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}$; 6) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}$.

6) $$\frac{\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos\frac{3\pi}{6}}{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=0.$$

B

4.101. Айниятни исботланг:

1) $\sin(30^\circ+x)\cos x-\cos(30^\circ+x)\sin x=0,5;$

2) $\cos(60^\circ+x)\cos x+\sin(60^\circ+x)\sin x=0,5;$

3) $$\frac{0,5\sin 20^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 3^\circ\sin 17^\circ-\cos 3^\circ\cos 17^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

4) $$\frac{\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}=\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}^2\,y;$$

5) $$\frac{\mathrm{tg}\,(x-y)+\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,(x+y)-\mathrm{tg}\,y}=\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}.$$

4.102. Тенгликнинг тўғрилигини кўрсатинг:

1) $$\frac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}=-1;$$

2) $$\frac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}=1;$$

3) $$\frac{\cos 63^\circ\cos 3^\circ+\cos 87^\circ\cos 27^\circ}{\cos 132^\circ\cos 72^\circ-\cos 42^\circ\cos 18^\circ}=1;$$

4) $$\frac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 3^\circ+\cos 87^\circ\cos 19^\circ}=1;$$

5) $$\frac{\cos 66^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}=1;$$

6) $$\frac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ+\cos 80^\circ\cos 20^\circ}{\cos 68^\circ\cos 8^\circ+\cos 82^\circ\cos 22^\circ}=1.$$

4) $\dfrac{\cos 64° \cdot \cos 4° - \cos 86° \cdot \cos 26°}{\cos 71° \cdot \cos 3° + \cos 87° \cdot \cos 19°} =$

$$= \frac{\cos 64° \cdot \cos 4° - \cos(90° - 4°) \cdot \cos(90° - 64°)}{\cos 71° \cdot \cos 3° + \cos(90° - 3°)\cos(90° - 71°)} =$$

$$= \frac{\cos 64° \cdot \cos 4° - \sin 4° \cdot \sin 64°}{\cos 71° \cdot \cos 3° + \sin 3° \cdot \sin 71°} = \frac{\cos(64° + 4°)}{\cos(71° - 3°)} = \frac{\cos 68°}{\cos 68°} = 1.$$

4.103. Ҳисобланг:

1) $\cos 105°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\sin\dfrac{\pi}{12}$;

4) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; 5) $\mathrm{tg}\,75°$; 6) $\mathrm{ctg}\,15°$.

4.104. 1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\sin\beta=-0{,}6$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ деб олиб, $\sin(\alpha-\beta)$ ни;

2) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{3}$ деб олиб, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$-ни;

3) $\sin\alpha=-\dfrac{40}{41}$, $\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{9}{40}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ деб олиб, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ ни топинг.

4.105. α, β ва γ — учбурчакнинг бурчаклари.

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

тенгликнинг бажарилишини исботланг.

4.106. 1) $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ деб олиб, $\sin(\alpha+\beta)$ ва $\cos(\alpha-\beta)$ ни;

2) $\sin\alpha=\dfrac{9}{41}$, $\sin\beta=\dfrac{40}{41}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ деб олиб, $\cos(\alpha+\beta)$ ва $\sin(\alpha-\beta)$ ни топинг.

C

4.107. 1) $\cos x=0{,}6$; $\cos(x+y)=0$; $0<x\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<y<\dfrac{3\pi}{2}$ деб олиб, $\cos y$ ни;

2) $\mathrm{tg}\alpha=0,5$; $\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{3}$; $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ деб олиб, $\alpha+\beta$ ни;

3) $\sin\alpha=\frac{40}{41}$, $\sin\beta=-\frac{9}{41}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$ деб олиб, α ни;

4) $\mathrm{tg}\alpha=3$, $\mathrm{tg}\beta=-0,5$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$ деб олиб, $\alpha+\beta$ ни ни топинг.

4.108. 1) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{5}{11}$, $\mathrm{tg}\beta=\frac{3}{8}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$;

2) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3a}}{4-a}$, $\mathrm{tg}\beta=\frac{a-1}{\sqrt{3}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ бўлса,

$\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$ тенгликни исботланг.

4.109. Айниятни исботланг:

1) $\frac{\sin(x-y)}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}=\cos x\cos y$; 2) $\frac{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,y}{\sin(x+y)}=\frac{1}{\sin x\sin y}$;

3) $\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$; 4) $\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=\frac{\mathrm{ctg}\,y-\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,y+\mathrm{ctg}\,x}$.

4.110. Ифоданинг энг кичик ва энг катта қийматларини топинг:

1) $\sin x+\cos x$; 2) $\sqrt{3}\cos y-\sin y$; 3) $\sin u-\sqrt{3}\cos u$;

4) $\sqrt{2}\sin x+\sqrt{6}\cos x$; 5) $3\sin x+4\cos x$; 6) $2\sin y-5\cos y$.

4.111. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin^2 x$;

2) $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$;

3) $\cos(x-y)(\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y-1)+(1+\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y)\cos(x+y)$;

4) $(\mathrm{ctg}x\ \mathrm{ctg}y+1)\cos(x+y)+(1-\mathrm{ctg}x\ \mathrm{ctg}y)\cos(x-y)$;

5) $\dfrac{\sin^2(x-y)+\sin^2(x+y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}-\operatorname{tg}^2 x;$

6) $\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y-\dfrac{\cos^2(x-y)+\cos^2(x+y)}{2\sin^2 x\sin^2 y}.$

4.5.3. Иккиланган бурчак формулалари

Қўшиш формулаларидаги $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ ва $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ ифодаларда $\alpha=\beta$ деб олсак, 2α иккиланган аргументнинг тригонометрик функцияларини α га боғлиқ бўлган функциялар орқали ифодалаймиз:

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Бундан,

$$\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,} \qquad (1)$$
$$\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \qquad (2)$$

Худди шундай

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha). \qquad (3)$$

Бу формулалар иккиланган ***бурчак формулалари*** деб аталади. (2) формулани шакл алмаштириб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

ва

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1.$$

Ушбу тенгликлардан қуйидаги формулалар олинади:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \qquad (4)$$

1-мисол. $\sin 3\alpha$-ни $\sin\alpha$ орқали ифодалайлик.

$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=$
$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=$
$=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$

Шундай қилиб, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. Худди шундай

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

формулани келтириб чиқариш мумкин.

4.5.4. Ярим бурчак формулалари

Агар иккиланган бурчакнинг (1)-(4) формулаларда α ни $\frac{\alpha}{2}$ ифода билан алмаштирсак, ***ярим бурчакнинг*** формулаларини оламиз:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right); \quad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Ушбу тенгликлардан фойдаланиб, қуйидаги формулани олиш мумкин:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Худди шундай

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

2-мисол. Жадвалдан фойдаланмай, $\operatorname{tg}22°30'$ нинг қийматини топинг.

$$\operatorname{tg}22°30' = \operatorname{tg}\frac{45°}{2} = \frac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 = 0,41.$$

1. Иккиланган бурчакнинг тригонометрик функцияларини ёзиб, исботлаб кўрсатинг.
2. Ярим бурчакнинг тригонометрик функцияларини ёзиб, исботлаб кўрсатинг.

МАШҚЛАР

А

4.112. Касрни қисқартиринг:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

Ифодани соддалаштиринг **(4.113 – 4.115):**

4.113. 1) $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\cos\alpha$.

4.114. 1) $\cos^4 2x-\sin^4 2x$; 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

3) $1+\cos 2x+2\sin^2 x$; 4) $2\sin^2\alpha-1$;

5) $\sin^2 x+\cos^4 x-0{,}75$; 6) $2\cos^2 x-1$.

3) $1+\cos 2x+2\sin^2 x=1+\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin^2 x=1+\cos^2 x+$
$+\sin^2 x=2$.

4.115. 1) $\cos^2\alpha-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $1-4\sin^2 x\cos^2 x$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$; 4) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x}+\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$;

5) $\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}}$; 6) $\cos^4\dfrac{\alpha}{2}-\sin^4\dfrac{\alpha}{2}$.

4.116. Касрни қисқартиринг:

1) $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ+\sin 40^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$; 4) $\dfrac{\cos 36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

B

4.117. 1) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $180°<\alpha<270°$ деб олиб, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$ ва $\mathrm{ctg}2\alpha$ ни;

2) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ деб олиб, $\cos 2\alpha$ ва $\sin 2\alpha$ ни топинг.

2) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=$

$=-\frac{5}{13}$. $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{120}{169}$;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144-25}{169}=\frac{119}{169}$.

4.118. $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ деб олиб, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$ ни топинг.

4.119. 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$;

3) $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 4) $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ деб олиб,

$\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ мен $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ ни топинг.

Ифодани соддалаштиринг **(4.120–4.121):**

4.120. 1) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}-1}$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)-1$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)-1$.

4.121. 1) $\dfrac{1+\cos 42°}{1-\cos 42°}$; 2) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin^2 x$;

3) $\dfrac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x}$; 4) $\dfrac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x}$.

4.122. sinα, cosα, tgα ва ctgα-ни $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ орқали ифодаланг.

4.123. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$ деб олиб, $\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha+5\cos\alpha}$ ифоданинг қийматини топинг.

C

4.124. 1) $\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=-0{,}5$ деб олиб, cos2α ни;

2) $\frac{\cos\alpha+2\sin\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}=-2$ деб олиб, sin2α ни топинг.

4.125. Ҳисобланг:

1) $8\sin^2\frac{15\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{17\pi}{16}$; 2) $\sin^4\frac{23\pi}{12}-\cos^4\frac{13\pi}{12}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{8}$;

5) $\sin^2\frac{2\pi}{13}+\sin^2\frac{11\pi}{26}$; 6) $\cos^2\frac{3\pi}{34}+\cos^2\frac{7\pi}{17}$.

4.126. Айниятни исботланг:

1) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-2\sin2\alpha\sin^2\alpha=\sin4\alpha$;

2) $\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}+\frac{\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2x}=\sin2x$;

3) $\operatorname{tg}^4\alpha(8\cos^2(\pi-\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)-1)=8\sin^4\alpha$;

4) $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

4.127. Ифодани соддалаштиринг:

1) $0{,}125\cos4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\gamma\operatorname{tg}\gamma\cos^2\gamma\operatorname{ctg}\gamma+2\operatorname{ctg}2\gamma$;

3) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}-\frac{2\cos2x}{1+\sin(2x+1{,}5\pi)}$;

4) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}x}-\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin x}{\cos2x}$.

4.5.5. Йиғинди ва айирмани кўпайтмага алмаштириш

Кўпгина ҳисоблашлар ва шакл алмаштиришларда тригонометрик функцияларнинг йиғиндиси билан айирмасини кўпайтмага айлантириш эҳтиёжи туғилади. Шу сабабли $\sin\alpha+\sin\beta \sin\alpha-\sin\beta$, $\cos\alpha+\cos\beta$, $\cos\alpha-\cos\beta$ ифодаларни кўпайтма шаклига келтирамиз: $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ деб олиб, қўшиш формуласидан фойдалансак,

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$

$$=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot \cos x+\sin x \cdot \cos y-\sin y \cdot \cos x=2\sin x \cos y$$

тенгликка эга бўламиз. $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ тенгликлардан $x=\frac{\alpha+\beta}{2}, y=\frac{\alpha-\beta}{2}$

тенглик келиб чиқади. Бундан

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Худди шундай

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4)$$

формулаларни келтириб чиқариш мумкин.

4.5.6. Кўпайтмани йиғиндига алмаштириш

1–4-формулалар билан бир қаторда

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta,\ \sin\alpha\cdot\sin\beta \text{ ва } \sin\alpha\cdot\cos\beta$$

кўпайтмани йиғиндига алмаштирадиган формулалар бажарилади:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (5)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]. \qquad (7)$$

Бу формулаларнинг исботлари бир-бирларига ўхшаш.

(5) формуланинг исботини кўрсатамиз. Қўшиш формулалари бўйича

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+ +\sin\alpha\cdot\sin\beta$ тенгликларни ҳадма-ҳад қўшсак,

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

ёки

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

(6) ва (7) формулалар ҳам худди шу каби исботланади.

1-мисол. $\sin 84°+\sin 36°$ ифодани соддалаштирамиз.

(1) (1) формулага кўра $\sin 84° + \sin 36° = 2\sin\frac{84° + 36°}{2} \times$

$\times \cos\frac{84° - 36°}{2} = 2\sin 60° \cos 24° = \sqrt{3}\cos 24°.$

2-мисол. $\cos 12°-2\sin 36°\sin 24°$ ифоданинг қийматини топиш керак.

(6) формулага кўра

$$\cos 12° - 2\frac{1}{2}\left[\cos(36° - 24°) - \cos(63° + 24°)\right] = \cos 12° -$$

$$- \cos 12° + \cos 60° = 0,5.$$

3-мисол. $\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y$ ифодани кўпайтмага алмаштириш керак.

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y}.$$

1. Йиғиндини кўпайтмага алмаштириш формулаларини ёзиб, исботланг.
2. Кўпайтмани йиғиндига алмаштириш формулаларини ёзиб, исботланг.
3. $\sin\alpha\pm\cos\beta$ йиғиндини кўпайтмага қандай алмаштириш мумкин?

Амалий иш

Қадимда ёзилган дарсликларда $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (секанс) ва $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (косеканс) белгилашлари учрайди.

1) $\sec\alpha\pm\sec\beta$; 2) $\mathrm{cosec}\alpha \pm \mathrm{cosec}\beta$ йиғиндиларни кўпайтмага алмаштиринг.

МАШҚЛАР

A

4.128. Кўпайтмани шакл алмаштиринг:

1) $\cos47°-\cos15°$; 2) $\cos58°+\cos24°$;
3) $\sin70°+\sin30°$; 4) $\sin17°-\sin35°$.

Ифодани кўпайтма шаклига келтиринг **(4.129–4.130):**

4.129. 1) $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

5) $\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{9}$; 6) $\sin\alpha-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

4.130. 1) $\sin15°+\cos65°$; 2) $\cos40°-\sin16°$; 3) $\cos50°+\sin80°$;

4) $\sin40°-\cos40°$; 5) $\cos18°-\sin22°$; 6) $\cos36°+\sin36°$.

4.131. Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $\sin3\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos2\alpha+\cos3\alpha$;
3) $\cos x-\cos3x$; 4) $\sin y-\sin5y$.

4.132. Кўпайтмани йиғинди кўринишида ёзинг:

1) $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$; 2) $\cos(x+y)\cos(x-y)$;

3) $\sin75°\sin15°$; 4) $\cos40°\cos20°$;

5) $\sin(30°+x)\cos(30°-x)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$.

5) $\sin(30°+x)\cos(30°-x)=\frac{1}{2}\left[\sin(30°+x+30°-x)+\right.$

$\left.+\sin(30°+x-30°+x)\right]=\frac{1}{2}(\sin60°-\sin2x)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\sin2x.$

4.133. Кўпайтма кўринишида ёзинг:

1) $\cos x+\sin y$; 2) $\sin x-\cos y$; 3) $\sin^2x-\sin^2y$;
4) $\cos^2x-\cos^2y$; 5) $\sin^2x-\cos^2y$; 6) $\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y$.

B

4.134. Айниятни исботланг:

$$1)\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

$$2)\ \sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

4.135. Кўпайтмани шакл алмаштиринг:

1) $\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}y$; 2) $\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}y$; 3) $1+\mathrm{tg}x$; 4) $1+\mathrm{ctg}x$.

4.136. Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $1 + \cos\beta + \cos\dfrac{\beta}{2}$; 2) $3-\mathrm{tg}^2\beta$; 3) $\cos\beta-\sin\beta\sin2\beta$;

4) $\mathrm{ctg}^2\beta-3$; 5) $\cos\beta+\sin2\beta-\cos3\beta$; 6) $1 - \mathrm{tg}\,\beta + \dfrac{1}{\cos\beta}$;

7) $3-4\sin^2\beta$; 8) $1-4\cos^2\beta$.

5) $\cos\beta + \sin2\beta - \cos3\beta = (\cos\beta - \cos3\beta) + \sin2\beta =$

$$= -2\sin\frac{\beta+3\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-3\beta}{2} - \sin2\beta = 2\sin2\beta\cdot\sin\beta + \sin2\beta =$$

$$= \sin2\beta(2\sin\beta + 1).$$

4.137. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; 2) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$; 3) $\dfrac{2\sin y - \sin2y}{2\sin y + \sin2y}$;

4) $\dfrac{\mathrm{tg}\,2y + \mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,2y - \mathrm{tg}\,y}$; 5) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,x + 1}$; 6) $\dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)}$.

4.138. Ҳисобланг:

1) $\sin15°\cos7°-\cos11°\cos79°-\sin4°\sin86°$;

2) $\cos17°\cos73°-\cos13°\cos21°-\cos4°\cos86°$.

C

4.139. Кўпайтма кўринишда ёзинг:

1) $\sqrt{2}-2\cos\beta$; 2) $0{,}5+\sin\beta$.

4.140. Айниятни исботланг:

$$1)\ 1+2\cos 2x=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right);$$

$$2)\ \sqrt{3}-2\sin 2y=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right);$$

$$3)\ 1-4\sin^2 x=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right);$$

$$4)\ 3-4\cos^2 y=-4\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-y\right).$$

4.141. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin^2\varphi+\sin^2\psi+\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)$;

$$3)\ \cos^2\left(\varphi-\frac{5\pi}{8}\right)-\sin\left(\varphi-\frac{5\pi}{8}\right).$$

4.142. 1) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

$$3)\ \operatorname{tg} 3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad 4)\ \operatorname{ctg} 3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$$

формулаларнинг бажарилишини исботланг.

4.143. Айниятни исботланг:

$$1)\ \frac{\sin 5\varphi-2\sin 3\varphi\cos 3\varphi}{1-\cos 5\varphi-2\sin^2 3\varphi}=\operatorname{ctg} 5{,}5\varphi;$$

$$2)\ \frac{2\cos^2 2\alpha+\cos 5\alpha-1}{\sin 5\alpha+2\cos 2\alpha\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg} 4{,}5\alpha;$$

$$3)\ \frac{\sin 4\beta+2\sin 2\beta}{2(\cos\beta+\cos 3\beta)}=\cos\beta\operatorname{tg} 2\beta;$$

$$4)\ \frac{2\cos\psi+\cos 3\psi+\cos 5\psi}{\cos 3\psi+\sin\psi\sin 2\psi}=4\cos 2\psi.$$

4.144. Кўпайтма кўринишида ёзинг:

1) $\sqrt{3}-2\cos\varphi$; 2) $2\sin\varphi-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}+2\cos\varphi$; 4) $0{,}5-\sin\varphi$.

4.145. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $\sin\gamma+\sin 2\gamma+\sin 3\gamma+\sin 4\gamma$; 2) $\cos 2\gamma-\cos 4\gamma-\cos 6\gamma+\cos 8\gamma$.

4.146. 1) $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$ деб олиб, $\cos 2\gamma-\cos 6\gamma$ ифоданинг;

2) $\sin\gamma=\frac{2}{\sqrt{5}}$ деб олиб, $\sin5\gamma-\sin3\gamma$ ифоданинг қийматини топинг.

4-БЎЛИМГА ДОИР МАШҚЛАР

4.147. Айниятни исботланг:

1) $\frac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}3y}{\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}3y}=\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}3y}$;

2) $\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{tg}3\gamma+\operatorname{ctg}3\gamma=\frac{8\cos^2 2\gamma}{\sin6\gamma}$;

3) $\frac{\sin2x-\sin3x+\sin4x}{\cos2x-\cos3x+\cos4x}=\operatorname{tg}3x$;

4) $\sin^6\frac{y}{2}-\cos^6\frac{y}{2}=\frac{\sin^2 y-4}{4}\cdot\cos y$;

5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos2\alpha\times$
$\times\cos4\alpha\sin6\alpha$;

6) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

7) $\frac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}(180^\circ+\beta)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\beta)-1}$;

8) $\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin2x}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$;

9) $\cos4\beta-\sin4\beta\operatorname{ctg}2\beta=\cos2\beta-2\cos^2\beta$;

10) $\cos^2 y-\sin^2 2y=\cos^2 y(1-4\sin^2 y)$.

4.148. Ифодани соддалаштиринг:

1) $1-\sin^2\left(\frac{x}{2}-3\pi\right)-\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$;

2) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\gamma\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\gamma\right)$;

3) $\cos^2(\varphi+2\beta)+\sin^2(\varphi-2\beta)-1$;

4) $\sin^2(x+2y)+\sin^2(x-2y)-1$;

5) $(\cos\alpha-\cos2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin2\beta)^2$;

6) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-x)}{1-\operatorname{tg}^2(x-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-x)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+x)}$.

4.149. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)+2$;

2) $\sin 4\beta-2\cos^2 2\beta+1$;

3) $\cos^{-4}y - \sin^{-4}y$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}^4\beta-\operatorname{tg}^6\beta}{\operatorname{ctg}^4\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}$;

5) $\dfrac{\sin\varphi-2\cos 3\varphi-\sin 5\varphi}{-\cos\varphi-2\sin 3\varphi+\cos 5\varphi}$;

6) $\dfrac{\sin 4\varphi+\sin 5\varphi+\sin 6\varphi}{\cos 4\varphi+\cos 5\varphi+\cos 6\varphi}$;

7) $\sin 5\varphi-\sin 6\varphi-\sin 7\varphi+\sin 8\varphi$;

8) $\cos 3\varphi-\cos 4\varphi-\cos 5\varphi+\cos 6\varphi$;

9) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$;

10) $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$.

4.150. Ҳисобланг:

1) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$;

3) $\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$;

5) $\operatorname{tg}x=\dfrac{2}{3}$ деб олиб, $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{4}\right)$ ни;

6) $\operatorname{ctg}x=\dfrac{2}{3}$ деб олиб, $\cos\left(2x+\dfrac{7\pi}{4}\right)$ ни;

7) $\sin x-\cos x=p$ деб олиб, $\sin 2x$ ни;

8) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=0{,}75$ деб олиб, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-x\right)$ ни;

9) $\sin x+\sin y=-\dfrac{21}{65}$, $\cos x+\cos y=-\dfrac{27}{65}$, $\dfrac{5\pi}{2}<x<3\pi$ ва

$-\frac{\pi}{2}<y<0$ деб олиб, $\sin\frac{x+y}{2}$ ва $\cos\frac{x+y}{2}$ ни топинг.

4.151. $\dfrac{2\cos^2 x+\cos 4x-1}{\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}}$ ифоданинг энг кичик ва энг катта қийматини топинг.

4.152. Ҳисобланг:

1) $\sin 18°$; 2) $\sin 42°$; 3) $\sin 15°$; 4) $\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$.

4.153. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sin^3 2\alpha\cdot\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\cdot\sin 6\alpha$;
2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$;
3) $9\sin\alpha\cos 3\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-3\sin 3\alpha\cos 3\alpha-3\sin 3\alpha\cos\alpha$;
4) $4(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-1$.

4.154. Айниятни исботланг:

1) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha$;
2) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}3x-\operatorname{ctg}x}=\operatorname{ctg}2x$;
3) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$;
4) $\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\cos 2\alpha(0{,}25\sin^2 2\alpha-1)$.

4.155. Агар A, B, C учбурчакнинг ички бурчаклари бўлса, қуйидаги айниятларнинг бажарилишини кўрсатинг:

1) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$;
2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;
3) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$;
4) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

4.156. Кўпайтмани шакл алмаштиринг:

1) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\cos 2\varphi+\sin 2\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi$;
3) $2+\operatorname{tg}2\varphi+\operatorname{ctg}2\varphi$; 4) $1-0{,}25\sin^2 2\varphi-\cos^2 2\varphi-\cos^4\varphi$.

4.157. $\cos(n+1)x=2\cos nx\cdot\cos x-\cos(n-1)x$ формуланинг бажарилишини кўрсатинг. Ушбу формула ёрдамида $\cos 3x$ *билан* $\cos 4x$ ни $\cos x$ га боғлиқ бўлган кўпҳад кўринишида ёзинг.

4.158. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha;$

2) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8};$

3) $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha;$

4) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=0{,}25\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha).$

4.159. $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$ ифода α билан φ-га боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

4.160. A, B, C учбурчакнинг ички бурчаклари бўлса,

1) $\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC;$

2) $\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$

$=(-1)^n 4\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}A\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}B\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}C\right)$

тенгликларни исботланг.

4.161. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ бўлганда $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ ифоданинг энг кичик қийматини топинг.

4.162. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ бўлганда $\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$ ифоданинг энг катта қийматини топинг.

4.163. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$ болса, а) $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$; б) $\cos 2\alpha=-\cos 2\beta$ тенгликларнинг тўғрилигини кўрсатинг.

4.164. $\cos(\alpha+\beta)=0$ бўлса, $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$ бўлса, бўлишини кўрсатинг.

4.165. $\cos\alpha=m$ бўлса, $\cos\dfrac{\alpha}{3}$ ни аниқлайдиган тенглама тузинг.

4.166. $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$ бўлса, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ ни топинг.

4.167. Йиғиндини топинг:

1) $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 9\alpha;$

2) $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}.$

4.168. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1$ айниятни исботланг.

4.169. $\sin^2 2\varphi \cdot 0,5\cos 4\varphi + 2\sin^2\varphi + \cos 2\varphi$ ифоданинг қиймати φ гега боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

4.170. $y=\cos^2 x$ функция даврий бўладими? Даврий бўлса, унинг энг кичик мусбат даврини топинг.

4.171. $\cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha \cdot \cos x \cdot \cos(\alpha + x)$ифоданинг қиймати x га боғлиқ эмаслигини кўрсатинг.

4.172. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi} + \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - \sin\varphi.$$

4.173. Айниятни исботланг:

$$\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1 - \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

АТАМАЛАР ЛУҒАТИ

Ўзбек тилидаги варианти	Қозоқ тилидаги варианти	Рус тилидаги варианти	Инглиз тилидаги варианти
Бурчакнинг радиан ўлчови	Бұрыштың радиандық өлшемі	Радианная мера угла	Radiant value of angle
Бурчакнинг градус ўлчови	Бұрыштың градустық өлшемі	Градусная мера угла	Degree value of angle
Бирлик тригонометрик айлана	Бірлік тригонометриялық шеңбер	Единичная тригонометрическая окружность	One unit trigonometric disc
Тригонометрик функциялар	Тригонометриялық функциялар	Тригонометрические функции	Trigonometric functions
Асосий тригонометрик айният	Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік	Основное тригонометричское тождество	Main trigonometric eguation
Асосий давр	Негізгі период	Основной период	Main period
Келтириш формулалари	Келтіру формулалары	Формулы приведения	Adduction formula
Қўшиш формулалари	Қосу формулалары	Формулы суммы	Addition formulas
Иккиланган (ярим) бурчак формулалари	Қос (жарты) бұрыштың формулалары	Формулы двойного (половинного) угла	Double (half) angle formulas

5-бўлим. ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Астана шаҳридаги умумий савдо-сотиқ, кўнгилочар платформаси бўлган турар жой мажмуаси тўртта иморатдан ташкил топган. Улар мос равишда 20, 28, 38 ва 43 қаватли иморатлар. Бўлимни ўрганиш давомида сиз ҳар бир иморатнинг 1-қаватида лифтга чиққан уй эгасининг 15-қаватда туриш эҳтимоллигини аниқлай оласиз.

5.1. Эҳтимоллар назариясининг асослари

Мавзуни ўрганиш давомида сизлар:

- Ҳодиса, тасодифий ҳодиса, рост ҳодиса, мумкин бўлмаган ҳодиса, қулай натижалар, тенг имкониятли ва қарама-қарши ҳодисалар тушунчасини ўзлаштирасиз;
- Элементар ва элементар бўлмаган ҳодисаларни фарқлай оласиз;
- Эҳтимолликнинг классик таърифини билиб, ундан мисоллар ечишда фойдаланасиз;
- Эҳтимолликнинг статистик таърифини биласиз.

5.1.1. Элементар ҳодисалар фазоси

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари қаторига элементар ҳодисалар билан элементар ҳодисалар фазоси киради.

Элементар ҳодисалар деб синовнинг (тажрибанинг) маълум бир натижасининг бажарилишини (ёки бажарилмаслигини), яъни синовнинг маълум бир “ажратилмайдиган” натижасига айтилади. Масалан, ўйин суягини ташлаганда 1, 2, 3, 4, 5, 6 очколардан бири тушиши мумкин. Бу синов (ўйин суягини ташлаш) натижасида бир хил имкониятли олтита элементар ҳодисалардан бири бажарилади: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Бунда A_k ҳодиса синов натижасида k очко (k=1, 2, 3, 4, 5, 6) тушишини билдиради. Агар ўйин суягини ташлаш давомида бизни жуфт очко тушиши қизиқтирса, у ҳолда бу ҳам (“жуфт очко тушиши”) тасодифий ҳодиса, бироқ у элементар ҳодиса бўла олмайди. Чунки жуфт очко тушишини билдирадиган тасодифий ҳодиса A_2, A_4, A_6 элементар ҳодисаларга ажратилиб, шу элементар ҳодисалардан бирининг бажарилиши билан аниқланади. Худди шундай синов сифатида тангани бир марта ташлашни олсак, икки хил натижа кутиш мумкин: E – тангaнинг герб томони билан тушиши, C – танганинг сон томони билан тушиши.

U тўпламнинг ҳар бир элементи синовнинг маълум бир натижасини билдирса ва аксинча шу синовнинг ҳар бир элементар натижаси U тўпламнинг элементи бўлса, у ҳолда U тўпламнинг элементар ҳодисалар фазоси деб аталади. Биз бунда осон бўлиши учун элементар ҳодисалар сони саноқли деб ҳисоблаймиз. Масалан, ўйин суягини ташлаганда юқорида кўрсатилгани каби элементар ҳодисалар фазоси 6 та элементдан ташкил топади: $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, танга ташлаганда эса $U = \{E, C\}$ фазони ҳосил қиламиз.

Элементар ҳодисалар фазосининг ҳар бир ички тўплами тасодифий ҳодиса деб аталади. Масалан, ўйин суягини ташлаганда $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ ички тўплам “жуфт очко тушди” деган тасодифий ҳодисани аниқлайди.

Ҳодисанинг куни аввал бажарилиши маълум бўлса, бундай ҳодиса рост ҳодиса, ҳодисанинг ҳеч бир синов натижаси ҳам бажарилмаслиги маълум бўлса, у ёлғон (мумкин бўлмаган) ҳодиса деб аталади.

Рост ҳодиса U, мумкин бўлмаган ҳодиса $\varnothing$ орқали белгиланади. Масалан, ўйин суягини бир марта ташлаганда 1 дан кам бўлмаган очко тушишини билдирадиган ҳодиса-рост, 7 дан ортиқ очко тушиши ёлғон ҳодиса.

Икки тасодифий ҳодисанинг бир марта ўтказилган синов натижасида бирин-кетин бажарилиши мумкин эмас бўлса, уларни биргаликда бўлмаган ҳодисалар, бошқа холларда **биргаликда бўлган** деб аталади. Масалан, кўриб чиқилган $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ элементар ҳодисалар фазосининг элементлари жуфт-жуфтдан биргаликда бўлмаган. Худди шундай $A= \{A_2, A_4, A_6\}$ ва $B = \{A_1, A_3\}$ ҳодисалар ҳам биргаликда бўлмаган ҳодисалар. $A =\{A_2, A_4, A_6\}$ ва $C =\{A_1, A_2, A_3\}$ ҳодисалар биргаликда бўлган, чунки бу ички тўпламларда умумий элемент мавжуд.

Шундай қилиб, $A \subset U$ *ҳодисанинг бажарилиши учун унинг таркибига кирадиган элементар ҳодисалардан бирининг бажарилиши зарур ва етарли.*

P ва Q ҳодисалар бир хил элементар ҳодисалардан ташкил топган бўлса, улар *тенг (бир хил) ҳодисалар* деб аталиб, қуйидагича ёзилади: $P = Q$. Масалан, ўйин суягини ташлаганда P ҳодиса “ 4 дан кам очко тушишини”, Q — дан ортиқ эмас очко тушишини” билдирсин. У ҳолда $P =\{A_1, A_2, A_3\}$, $Q=\{A_1, A_2, A_3\}$ ва $P=Q$.

А ҳодисанинг бажарилмаслигини билдирувчи тасодифий ҳодиса қарама-қарши ҳодиса деб аталади ва у $\overline{A}$ орқали белгиланади. Масалан, $A =\{A_2, A_4, A_6\}$ҳодиса қарама-қарши ҳодиса $\overline{A} =\{A_1, A_3, A_5\}$—“тоқ очко тушишини” билдиради.

Агар А ҳодисанинг бажарилиши ёки бажарилмаслиги В ҳодисанинг бажарилиши ёки бажарилмаслигига таъсир кўрсатмаса, А ва В ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар деб аталади. Қолган холларда ҳодисалар бир-бирига боғлиқ бўлган ҳодисалар деб аталади. Масалан, иккита ўйин суягини ташлаганда улардан бирида тушадиган очколар сони иккинчисида тушадиган очколар сонига боғлиқ эмас.

5.1.2. Ҳодисалар устида бажариладиган амаллар

A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси деб A ёки B ҳодисаларнинг камида биттасининг бажарилишини билдирадиган ҳодисага айтилади ва у $A + B$ орқали белгиланади. $A + B$ нинг таркибига A га ёки B га тегишли бўлган элементар ҳодисалар киради. Масалан, ўйин суягини ташлаганда “жуфт очко тушиши” билан “учдан кам очко тушишини” билдирадиган ҳодисаларни қўшиш керак бўлади, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ ва $B =\{A_1, A_2\}$ ҳодисаларни қўшамиз: $A + B =\{A_1, A_2, A_4, A_6\}$.

A ва B ҳодисаларнинг *кўпайтмаси* деб A ва B ҳодисаларнинг бирин-кетин бажарилишини билдирадиган ҳодисага айтилади ва у $A{\cdot}B$ орқали белгиланади. Шундай қилиб, $A \cdot B$ нинг таркибига A га ҳам ва B га ҳам тегишли бўлган элементар ҳодисалар киради. Масалан, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ ва $B=\{A_1, A_2\}$ ҳодисалар учун $A \cdot B=\{A_2\}$ бўлади.

A ва B ҳодисаларнинг *айирмаси деб* фақатгина A гина бажарилиб, B нинг бажарилмаслигини билдирадиган ҳодисага айтилади ва у $A-B$ орқали белгиланади. $A-B$ нинг таркибига фақат A га гина кирадиган ва B га тегишли бўлмаган элементар ҳодисалар киради. Масалан, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ ва $B=\{A_1, A_2\}$ ҳодисалар учун $A-B=\{A_4, A_6\}$, $B-A=\{A_1\}$ тенглик бажарилади.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ элементар ҳодисалар учун

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U \text{ ва } A_i \cdot A_j = \varnothing \ (i \neq j)$$

шартлар бажарилса, бу ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳи (группаси) деб аталади. Масалан, ўйин суягини ташлаганда $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ элементар ҳодисалар тўлиқ гуруҳ ташкил этади. Ҳақиқатан, ўйин суягини ташлаганда олтита очкодан бирининг тушиши аниқ.

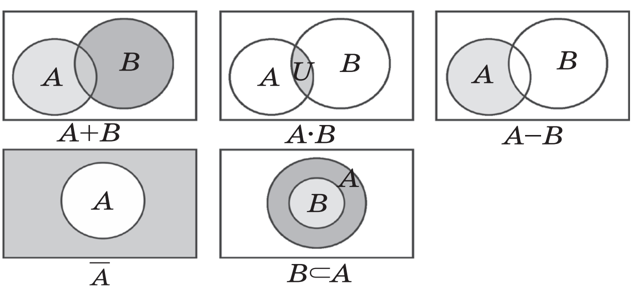
$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6=U$$

йиғиндиси- рост ҳодиса. Шу билан бир қаторда бир марта ташлаганда икки хил очко тушиши мумкин эмас: $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$ — ёлғон ҳодиса.

Бунда ўзаро қарама-қарши A ва $\overline{A}$ ҳодисалар жуфти ҳам ҳодисалар гуруҳини ташкил этади: $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ ва $A + \overline{A} = U$.

B ҳодиса бажарилганда A ҳодиса ҳам бажарилса, A ни B ҳодисанинг натижаси деб аталади ва қуйидагича белгиланади: $B \subset A$. Масалан, $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ ва $C = \{A_2, A_4\}$ бўлса, A ҳодиса — C нинг натижаси. Ўзаро тескари A ва $\overline{A}$ ҳодисалар учун $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ ва $A + \overline{A} = U$ тенгликлар бажарилади.

Тасодифий ҳодисалар тўпламларига қўлланиладиган Эйлер-Венн диаграммалари билан тасвирлаш қулай (5.1-расм).



5.1-расм

Шу билан бир қаторда ҳар бир A ва B ҳодисалар учун:

1) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$;

2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ *тенгликлар бажарилади*.

Исботи. 1) Фараз қилайлик, $A_j \in \overline{A+B}$ бўлсин. У ҳолда $\{A_i \notin A + B\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow\{A_i \notin A$ ва $A_i \notin B) \Leftrightarrow \{A_i\ \overline{A}$ ва $A_i \notin \overline{B}\} \Leftrightarrow \{A_i \notin \overline{A} \cdot \overline{B}\}$. Бундан $\overline{A+B}$ ва $\overline{A} \cdot \overline{B}$ ҳодисалар бир хил элементар ҳодисалардан тузилганини кўрамиз: $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

2) Худди шу каби исботланади.

1-мисол. Учта мергандан биринчисининг нишонга текказишини A ҳодиса, иккинчисининг текказишини B ҳодиса ва учинчисининг текказишини C ҳодиса деб олиб, 1) $A + B$; 2) $AB\overline{C}$; 3) $AB + AC + BC$ ифодалар билан аниқланган ҳодисаларнинг маъносини очиб кўрсатамиз.

1) Нишонга биринчи ёки иккинчи мерган текказди;

2) Нишонга биринчи ва иккинчи мерган текказиб, учинчиси текказа олмади. 3) Камида иккита мерган нишонга текказди

2-мисол. Олдинги мисол шартида нишонга 1) фақат биринчи мерган текказди; 2) фақат иккита мерган текказди; 3) мерганлардан ҳеч бири текказа олмади деган ҳодисаларни A, B ва C орқали ифодалаш лозим.

1) Нишонга фақат биринчи мерган текказиб, қолган иккитаси текказа олмаган. Демак, A, $\overline{B}$ ва $\overline{C}$ ҳодисалар бажарилади. Бундан ҳодисаларни кўпайтириш қоидаси бўйича бу ҳодиса $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ орқали ифодаланади.

2) Бу ҳолда нишонга 2 та мерган текказиб, учинчиси нишонга текказмаслиги шарт, яъни $AB\overline{C}$ ёки $A\overline{B}C$ ёки $\overline{A}BC$ ҳодисаларнинг биттаси бажарилади. Бундан бизга керак бўлган ҳодиса $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$ йиғинди орқали ифодаланади.

3) Мерганлардан биттаси ҳам нишонга текказа олмаса, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ ҳодисалар бирин-кетин бажарилса, яъни $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ ҳодиса бажарилади.

1. Қандай ҳодисалар элементар ҳодисалар деб аталади?
2. Элементар ҳодисалар фазоси деганимиз нима? Мисол келтиринг.

3. Рост-ёлғон, биргаликда бўлган-биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади? Мисол келтиринг.
4. Тасодифий ҳодиса деганимиз нима?
5. Тескари ҳодиса, натижа деганимиз нима? Мисол келтиринг.
6. Ўзаро боғлиқ бўлган, боғлиқ бўлмаган ҳодисалар деб нимага айтилади?
7. Ҳодисалар устида қандай амаллар бажарилади? Уларни Эйлер-Венн диаграммалари билан тушунтиринг.

Ижодий иш

1) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; 2) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ хоссаларини Эйлер-Венн диаграммалари ёрдамида исботланг.

МАШҚЛАР

А

5.1. Қутида оқ, қизил ва кўк рангли ошиқлар бор. A, B ва C ҳодисалар қутидан тасодифий олинган ошиқнинг мос равишда оқ, қизил ва кўк рангли бўлишини билдирсин. 1) $A + C$; 2) A; 3) $A + B$ ҳодисаларнинг маъносини тушунтиринг.

5.2. Элементар ҳодисалар фазосидаги $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ бешта элементар ҳодисалардан ташкил топсин. $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{A_3, A_4\}$, $C = \{A_4, A_5\}$, $D = \{A_1, A_3, A_5\}$ тасодифий ҳодисаларни олиб, уларнинг ичидан 1) жуфт-жуфтдан биргаликда бўлмаган ҳодисалар жуфтини; 2) биргаликда бўлган ҳодисалар жуфтини; 3) ҳар бирига тескари бўлган ҳодисаларни ёзиб кўрсатинг.

5.3. Аввалги масала шартида 1) $A+B$; 2) $B+C$; 3) $A+D$; 4) $A\cdot B$; 5) $B \cdot C$; 6) $A \cdot D$; 7) $A-B$; 8) $B-C$; 9) $A-D$; 10) $D-A$; 11) $(\overline{A}+C)-\overline{D}$; 12) $\overline{C}\cdot D-A$ ҳодисаларга кирувчи элементар ҳодисаларни кўрсатинг.

5.4. Агар A ҳодиса ўйин суягини бир марта ташлаганда 1) олтилик очко тушганини; 2) тоқ очко тушганини; 3) учдан кичик бўлмаган очко тушганини; 4) 2 дан катта ва 6 дан кичик очко тушишини билдирса, $\overline{A}$ ҳодисани аниқланг.

5.5. $A=\{A_2\}, B=\{A_1,A_3\}, C=\{A_1,A_2,A_3\}, D=\{A_1,A_3,A_5\}$ ҳодисалар $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ элементар ҳодисалар фазосида аниқланган. 1) C; 2) D; 3) $\overline{A}$ ҳодисалар берилган ҳодисаларнинг қайсиларининг натижаси бўлади?

5.6. Танга икки марта ташланди. Элементар ҳодисалар фазосини ёзиб кўрсатинг.

Е ҳарфи танганинг герб томони билан тушишини, С ҳарфи унинг сон томони билан тушишини билдирсин. У ҳолда тангани икки марта ташлаганда навбатдаги элементар ҳодисалар бажарилади: ЕЕ; ЕС, СЕ; СС, яъни U={ЕЕ, ЕС, СЕ, СС}.

5.7. 1) Рост; 2) ёлғон ҳодисаларни кўрсатинг:

A — тангани икки марта ташлаганда икки марта герб томони билан тушиши;

B — тасодифий ёзилган икки хонали соннинг 99 дан катта бўлмаслиги;

C — ўйин суягини ташлаганда тушган очконинг 5 дан ортиқ бўлмаслиги;

D — иккита ўйин суягини ташлаганда тушган очколар йиғиндисининг 12 дан катта бўлиши.

B

5.8. A ҳодиса B нинг натижаси бўлса, 1) $A + B$; 2) $A \cdot B$ ифоданинг қийматини топинг.

5.9. Ёпиқ қутида шарлар бор. A ҳодиса қутидаги шарларнинг камида биттаси оқ рангли бўлишини билдиради деб олиб, $\overline{A}$ ҳодисани аниқланг.

$\overline{A}$ белги “ қутида оқ шар йўқ” деган маънони билдиради.

5.10. Икки хил лотерея ўйинларига биттадан билет олинган. A—биринчи ўйиндаги ютуқ, B — иккинчи ўйиндаги ютуқ тушгаганини билдирсин. 1) $P = A\overline{B} + \overline{A}B$; 2) $Q = A\overline{B} + + \overline{A}B + AB$ ҳодисаларнинг маъноси қандай?

5.11. A, B, C — тасодифий ҳодисалар берилсин. 1) $ABC = A$; 2) $A + B + C = A$ тенгликларнинг маъноси қандай?

1) $ABC=A$ бўлса, B ва C ҳодисалар A нинг натижаси бўлади.

5.12. A, B, C тасодифий ҳодисалардан 1) фақатгина A ҳодисанинг бажарилганини; 2) A ва B бажарилиб, C-

нинг бажарилмаганини; 3) ҳамма учта ҳодисанинг ҳам бажарилганини; 4) камида битта ҳодиса бажарилганини; 5) камида иккита ҳодиса бажарилганини; 6) фақат битагина ҳодисанинг бажарилганини; 7) фақатгина иккита ҳодисанинг бажарилганини; 8) битта ҳам ҳодисанинг бажарилмаганини; 9) бажарилган ҳодисалар сони иккитадан ортиқ эмас бўлишини A, B, C орқали ифодаланг.

5.13. $A \subset B$ бўлса, 1) $A + B + C$; 2) $(A + B) \cdot C$; 3) $A \cdot B + C$ ифодаларни соддалаштиринг.

5.14. Иккита ўйин суяги бир вақтда ташланди. Элементар ҳодисалар фазосининг нечта элементдан ташкил топганлигини топинг.

C

5.15. Учта мерган нишонга биттадан ўқ отди. A — биринчи мерганннинг текказишини. B — иккинчи мерганнинг текказишини, C — учинчи мерганнинг текказишини билдирадиган ҳодисалар бўлсин. Агар биринчи ва иккинчи мерганларнинг ўқлари нишонга теккани, учинчи мерганники тегмаганлиги маълум бўлса,

1) $A + B \cdot \overline{C}$; 2) $(A + B)\overline{C}$; 3) $\overline{A}\,B + C$; 4) ABC; 5) $AB\overline{C}$ ҳодисаларнинг бажарилганлиги ёки бажарилмаганлигини топинг.

5.16. Исталган A, B, C ҳодисалар учун 1) $A + B$; 2) $A + B + C$ йиғиндиларни биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндиси кўринишида ёзинг.

5.17. A, $\overline{A}\,B$, $\overline{A + B}$ ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳ ташкил этишини исботланг.

5.18. 1) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ тенгликлар бажарилишини исботланг.

5.19. A ва B ҳодисалар тенг бўлиши учун $A \subset B$ ва $B \subset A$ шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли бўлишини кўрсатинг.

5.20. Мерганга 5 та ўқ берилди. У нишонга теккazганча отади. Элементар ҳодисалар фазосини ёзинг.

Такрорлашга доир машқлар

5.21. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7; \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = -3, \\ y^2 - xy = 12. \end{cases}$

5.22. Ифодани соддалаштиринг:
1) $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha + 30°)\sin(\alpha - 30°)$;

2) $2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} - \cos\varphi$.

5.23. 5 га бўлганда қолдиғи 1 га тенг бўладиган барча уч хонали натурал сонларнинг йиғиндисини топинг.

5.1.3. Ҳодиса эҳтимоллигининг классик таърифи

$U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ элементар ҳодисалар фазосида $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}$ $(A_{ni} \in U)$ тасодифий ҳодиса берилсин. Бунда $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}$ элементар ҳодисаларни А ҳодисага қулай натижалар деб аталади. Масалан, ўйин суягини ташлаганда жуфт очко тушишини билдирадиган $A = \{A_1, A_2, A_6\}$ тасодифий ҳодисага учта қулай натижа мавжуд: A_2, A_4, A_6.

Таъриф. *$A \subset U$ тасодифий ҳодисанинг эҳтимоллиги деб A га қулай бўлган натижалар сонининг барча мумкин бўлган натижалар (барча элементар ҳодисалар) сонига нисбатига айтилади ва у $P(A)$ каби белгиланади. Шундай қилиб,*

$U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ва $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m},\}$ $(A_{ni} \notin U)$ деб олсак, таърифга кўра

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

формула ёрдамида A ҳодисанинг эҳтимоллиги аниқланади. Бу таъриф эҳтимолликнинг ***классик таърифи*** деб аталади. Чунки U элементар ҳодисалар фазосига кирувчи элементар ҳодисаларни тенг имкониятли ҳодисалар деб қабул қиламиз. Бунда ҳар бир элементар ҳодисанинг эҳтимоллиги $\dfrac{1}{n}$.

$U \subset U$ эканлигидан уни ҳам ҳодиса сифатида қараб чиқамиз. У ҳолда U — рост ҳодиса ва (1) формулага кўра

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

Рост ҳодисанинг эҳтимоллиги 1, ёлғон ҳодисанинг эҳтимоллиги $\varnothing$ 0 га тенг.

Чунки $\varnothing$ ёлғон ҳодисага бирорта ҳам қулай натижа топилмайди ($m = 0$). У ҳолда $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

1-мисол. Чўнтакда 6 та оқ ва 4 та қизил рангли ошиқлар бор. Чўнтакдан тасодифий олинган ошиқнинг қизил рангли бўлиш эҳтимолини аниқлаймиз.

Чўнтакдаги ошиқларнинг шаклларини бир хил деб олиб, А орқали чўнтакдан тасодифий олинган ошиқнинг қизил рангли бўлишини белгилайлик. У ҳолда $n = 4 + 6 = 10$ тенг имкониятли натижалардан 4 таси A ҳодисага қулай. Бундан (1)

формулага кўра $P(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

2-мисол. Чорва хўжалигидаги тракторларнинг 65% и Павлодар заводидан чиқарилган. Тасодифий олинган тракторнинг Павлодар заводидан чиқмаслик эҳтимолини топиш керак.

Кўп ҳолларда бизга қулай натижалар шу мисолдаги каби фоизларда берилади. Бундай ҳолларда барча мумкин бўлган натижалар 100% деб олинади. У ҳолда қулай натижалар $100\% - 65\% = 35\%$ ташкил этади. Бундан изланаётган эҳтимоллик $P(A) = \frac{35\%}{100\%} = 0{,}35$.

5.1.4. Ҳодисалар эҳтимоллигининг статистик таърифи

Ҳодиса эҳтимолигининг классик таърифидан фақатгина бир хил имкониятли эҳтимолликларни аниқлаш учун фойдаланилади.Масалан, ўйин суягини ташлаганда олти хил очконинг тушишиши, чўнтакдаги ошиқлардан бирини тасодифан олиш ва ҳоказо мумкин бўлган ҳодисалар.

Фикр уйғотиш

Жуфтларда ёки кичик гуруҳларда бирлашиб ошиқни 50 марта ташлаб, натижасини қуйидаги жадвалга ёзинг.

Давоми

Ошиқнинг тушган сони	Олчи	Товон	Чик	Пук

Ошиқнинг тўрттала томонинг тушиши тенг имкониятли ҳодисалар бўладими? Барча гуруҳларнинг маълумотларини тўплаб, хар бир ҳол учун маълумотларнинг ўрта арифметигини аниқлаб, фикрларингиз билан ўртоқлашинг. Синф билан биргаликда муҳокама қилинг. Хулоса чиқаринг.

Фараз қилайлик, синовни n марта ўтказиш натижасида бизга лозим бўлган A ҳодиса m марта бажарилсин. У ҳолда m сони А ҳодисанинг бажарилиш частотаси деб, $\frac{m}{n}$ сони ҳодисанинг солиштирма частотаси деб аталади. Синовлар сони n ортган сайин ҳодисанинг солиштирма частотаси $\frac{m}{n}$ ҳодисанинг эҳтимоллигига мумкин қадар яқинлашади. Масалан, инглиз математиги Карл Пирсон (1857–1936) тангани 24 000 марта ташлаб, унинг 12 012 марта герб томони билан тушганинини текширган.Пирсон ўтгазган синов натижасида танганинг герб томони билан тушиш частотаси 12 012, солиштирма частотаси

$$\frac{12\ 012}{24\ 000} = 0{,}5005.$$

Иккинчи томондан, танганинг герб томони билан тушиши ёки тушмаслиги бир хил имкониятли ҳодисалар бўлганлигидан унинг эҳтимоллиги (классик таърифга кўра) 0,5 га тенг.

Бундан бир хил имкониятли бўлмаган ҳодисалар учун солиштирма частотанинг қиймати унинг эҳтимоллигини баҳолаш деб қабул қилиш мумкинлигини кўрамиз. Ҳодисалар эҳтимоллигини солиштирма частота орқали баҳолаш эҳтимолликни статистик йўл билан аниқлаш деб аталади. Шундай қилиб, n синовлар сериясида A ҳодиса ўрта ҳисобда m марта бажарилса, А ҳодисанинг бажарилиш эҳтимоли сифатида $\frac{m}{n}$ (ёки $\frac{m}{n}\cdot 100\%$) сони олинади.

Масалан, таниқли баскетболчининг коптокни саватга тушириш эҳтимоли 80% га тенг деб айтишади. Буни ўйинчи коптокни саватга 100 марта ташлаганда, ўрта ҳисобда 80 марта тушиши деб тушиниш керак. Албатта, ўйинчи коптокни саватга 100 марта ташлаган сайин унинг саватга роппа-роса 80 марта тушишиши ҳам мумкин: баъзида копток 78 ёки 79 марта, баъзида 82 марта ёки 84 марта тушиши ҳам мумкин. Айрим холларда саватга тушган коптоклар сони 80 дан анча кўп ёки анча кам бўли ши мумкин. Бироқ ўрта ҳисобда коптокни саватга ташлаш сонини кўпайтирган сайин ўйинчининг ижобий натижали ташлашлар эҳтимоллиги 0,8 га (80% га) тенг. 80 сони ўйинчининг моҳирлик даражасини кўрсатади ва бу кўрсаткич одатда, жуда барқарор сон бўлади.

5.1.5. Эҳтимолликнинг хоссалари

Ҳодисалар эҳтимоллигининг қуйидаги хоссалари мавжуд:

1°. *Исталган А ҳодиса учун* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *тенгсизлик бажарилади.*

Исботи. Ҳақиқатан, барча элементар ҳодисалар сони n га тенг бўлганда исталган А ҳодисага қулай натижаларнинг m сони $0 \leqslant m \leqslant n$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Бундан $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$ ёки $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Агар A А рост ҳодиса десак, юқорида кўрсатилгани каби $P(A)=1$. A ёлғон ҳодиса десак, $P(A) = 0$ тенгликлар бажарилади.

2°. (**Қўшиш қоидаси**). *Агар А ва В ҳодисалар биргаликда бўлмаган бўлса,*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{2}$$

тенглик бажарилади.

Исботи. A ҳодисага қулай натижалар сони m, B ҳодисага қулай натижалар сони k, барча мумкин бўлган натижалар сони n дейлик. A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган бўлганидан, $A+B$ ҳодисага қулай натижалар сони $m + k$-га тенг. (2) формуладан

$$P\left(A+B\right)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P\left(A\right)+P\left(B\right).$$

3-мисол. Қутида 6 та оқ, 4 та қизил ва 5 та кўк шар бор. Қутидан тасодифий олинган шарнинг оқ ёки кўк бўлиш эҳтимоллигини топиш керак.

A ҳодиса қутидан “оқ шар олинганини”, B ҳодиса ққутидан «кўк шар олинганини» ва C ҳодиса «оқ ёки кўк шар олинганини» билдирсин. У ҳолда ҳодисаларни қўшиш қоидаси бўйича $C=A+B$. Бунда A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган (олинган шар ҳам оқ, ҳам кўк бўла олмайди) эканлигидан, 2°-хоссага кўра $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)$. Бунда

$$P(A)=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}.$$

Бунда $P(C)=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$.

2°-хосса жуфт-жуфтдан биргаликда бўлмаган бир нечта қўшилувчилар учун ҳам бажарилаверади. Масалан, биргаликда бўлмаган A, B, C ҳодисалар учун $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$ тенглик бажарилади. Худди шундай A ва $\overline{A}$ ҳодисалар ҳам биргаликда бўлмаган ва $A+\overline{A}=U$ тенгликни қаноатлантиради. (2) формулага кўра

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(U)=1$$

тенгликдан

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{3}$$

формулани оламиз.

3°. **(Кўпайтириш қоидаси).** *Агар A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса,*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B) \tag{4}$$

тенглик бажарилади.

Исботи. Фараз қилайлик, A ҳодиса барча n_1 элементар ҳодисалар орасидан m_1 и қулай, B ҳодисага барча n_2 элементар ҳодисалар орасидан m_2 и қулай бўлсин (бунда ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар турли хил элементар ҳодисалар фазосида аниқлангани эътиборга олинди). A ва B ўзаро боғлиқ бўлмаганлиги учун, $A\cdot B$ ҳодисага жами $n_1\cdot n_2$ элементар ҳодисалар орасидан $m_1\cdot m_2$ кўпайтма қулай бўлади:

$$P(A\cdot B)=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=P(A)\cdot P(B).$$

(4) формула ўзаро боғлиқ бўлмаган бир нечта кўпайтувчилар учун бажарилаверади. Масалан, A, B, C ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар учун

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

тенглик бажарилади.

4-мисол. Нишонга иккита мерган, мос равишда 0,7 ва 0,8 га тенг бўлган эҳтимолликлар билан теказа олади. Улар биттадан ўқ отганда нишонга камида битта ўқнинг тегиш эҳтимоллигини топиш керак.

А нишонга биринчи мерганнинг теккизишини, В нишонга иккинчи мерганнинг текказишини билдирадиган ҳодисалар бўлсин. $C = A+B$ ҳодисанинг эҳтимоллигини топиш керак. A ва B биргаликда бўлган (бироқ ўзаро боғлиқ бўлмаган) эканлигидан, 2°-хоссадан фойдаланамиз. $P(C)$ эҳтимолликни (4) формула ёрдамида ҳисоблаган маъқул. $\overline{C} = \overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ва

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1-0,7 = 0,3; \ P(\overline{B}) = 1-0,8=0,2$$

эканлигидан, $P(C) = P(A+B) = 1-P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1-P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1-- 0,3 \cdot 0,2 = 0,94$.

4°. **(Қўшиш қоидасининг умумий тури.)** *исталган A ва B ҳодисалар учун*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \tag{5}$$

тенглик бажарилади.

Ҳодисани биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисига ажратиш мумкин: $A=AB+A\cdot\overline{B}$; $B=AB+\overline{A}\cdot B$. Бундан

$$A+B=(AB + A\cdot\overline{B})+(AB + \overline{A}\cdot B) = AB + A\overline{B} + \overline{A}B.$$

У ҳолда, $P(A+B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$. (6)
Иккинчи томондан,

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B).$$

охирги тенгликдан (6) ни эътиборга олсак,

$$P(A) + P(B) = 2P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) =$$

$$= (P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)) + P(AB) = P(A+B) + P(A\cdot B).$$

Бундан (5) формула келиб чиқади.

4-мисолда келтирилган мисол (5) формуладан фойдаланса осон чиқади: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-P(A)\cdot P(B)= =1,5-0,7\cdot 0,8=0,94$.

4°-хоссани бир нечта қўшилувчилар учун ёзиш мумкин. Масалан, исталган A, B, C ҳодисалар учун

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(A\cdot B\cdot C).$$

Шартли эҳтимоллик тушунчасини аниқлаймиз. Ўйин суягини бир марта ташлаганда А ҳодиса “тоқ очко тушишини”, В ҳодиса “4 дан кам очко тушишини” билдирсин. Бу ҳодисалар ўзаро биргаликда бўлган ва уларнинг ҳар бирининг эҳтимоллигини топиш мумкин: $P(A)=\frac{3}{6}=0,5;\ P(B)=\frac{3}{6}=0,5.$

Энди B ҳодиса бажарилади деб олиб, A ҳодисанинг эҳтимоллигини аниқлаймиз. Бундай ***эҳтимолликлар шартли эҳтимолликлар*** деб аталади. Унинг белгиланиши: $P_B(A)$.

$U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ элементар ҳодисалар фазосида $A=\{A_1, A_3, A_5\}$, $B=\{A_1, A_2, A_3\}$ эканлигидан, B ҳодиса бажарилган холда A ҳодисага A_1, A_2, A_3 элементар ҳодисалар ичидан иккитаси қулай: A_1 ва A_3. У ҳолда $P_B(A)=\frac{2}{5}$.

5°. **(Кўпайтириш қоидасининг умумий тури.)** *Исталган А ва В ҳодисалар учун*

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B) \qquad (7)$$

тенгликлар бажарилади.

Исботи. n элементи бўлган элементар ҳодисалар фазосида А ҳодисага A элементар ҳодисалар m элементар ҳодисалар, B ҳодисага k элементар ҳодисалар қулай:

$$P(A)=\frac{m}{n},\ P(B)=\frac{k}{n}.$$

B ҳодиса бажарилса, A ҳодисага B таркибидаги l элементар ҳодисалар қулай бўлсин дейлик. Бошқача айтганда, $A\cdot B$ кўпайтмага l элементар ҳодисалар қулай:

$$P_B(A)=\frac{l}{k}=\frac{l}{n}:\frac{k}{n}=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Бундан

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

(7) формуланинг иккинчи ярми ҳам худди шундай исботланади.

Агар A ва B В ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса, $P_B(A)=P(A)$ тенглик бажарилиб, (7) формуладан (4) формула келиб чиқади.

1. Қулай натижалар ва барча мумкин бўлган натижалар дегани нима?
2. Тенг имкониятли ҳодисалар фазосидаги тасодифий ҳодисанинг эҳтимоллиги қандай ҳисобланади?
3. Ҳодисанинг бажарилиш частотаси билан солиштирма частотаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
4. Ҳодисанинг эҳтимоллиги солиштирма частота орқали қандай аниқланади? Унинг аниқлигини қандай ошириш мумкин? Мисол келтиринг.
5. Рост ва ёлғон ҳодисаларнинг эҳтимолликлари нимага тенг?
6. Ҳодисаларнинг эҳтимоллиги қандай оралиқда ўзгаради?
7. Биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг қўшиш қоидасини келтириб чиқаринг ва исботланг.
8. Ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисаларнинг кўпайтириш қоидасини келтириб чиқариб, исботланг.
9. Қўшиш қоидасининг умумий турини келтириб чиқариб, исботланг.
10. Шартли эҳтимоллик нима? Мисол келтиринг.
11. Кўпайтириш қоидасининг умумий турини келтириб чиқариб, исботланг.

Амалий иш

Синфдаги ўқувчилар орасидан тахтага топшириқни бажаришга иккита ўқувчи чиқарилса, уларнинг 1) иккаласи ҳам қиз бола; 2) иккаласи ҳам ўғил бола; 3) бири қиз бола, иккинчиси ўғил бола бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Машқлар

А

5.24. Техник текшириш бўлими 1000 та буюмдан 8 таси яроқсиз бўлишини аниқлади. Яроқсиз буюм ясаш частотаси қандай?

5.25. Нишонга отилган 20 та ўқдан 18 таси нишонга тегди. Нишонга текказиш частотаси қандай?

5.26. Қуроллар партиясини синовдан ўтказиш давомида қуролларнинг яроқли бўлиш частотаси 0,9 га тенг бўлади. Агар жами 200 та қурол текширилган бўлса, уларнинг ичида яроқли қуроллар сони нечта?

5.27. Унумдорлигини текшириш мақсадида 200 та дон экилди ва улардан 170 таси униб чиқди. Экилган ҳар бир 1000 та дондан ўрта ҳисобда нечтаси униб чиқади?

Дастлаб доннинг унумдорлигини солиштирма частотасини (унумдорлик эҳтимоллигини) аниқлаймиз: $\frac{m}{n} = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}$. У ҳолда 1000 та дондан тахминан, $1000 \cdot \frac{27}{20} = 50 \cdot 17 = 850$ си униб чиқади.

5.28. Дарсликнинг берилган бетида учрайдиган “к” ҳарфининг частотасини аниқланг.

5.29. Исталган газета матнида учрайдиган олтита ҳарфдан тузилган сўзлар частотасини топинг.

5.30. Исталган газета матнида учрайдиган отлар частотасини топинг.

5.31. Матнни компьютерда териш давомида иккита сўз оралиғидаги “оралиқни” ҳам “ҳарф” сифатида олинади. Исталган газета матнида учрайдиган “ оралиқлар” частотасини топинг.

5.32. 9-синфда ўқийдиган барча ўқувчиларнинг ҳар ойга тўғри келадиган туғилган кунларнинг частотасини топинг.

5.33. 1) Тангани бир марта ташлаганда унинг герб томони билан тушиши; 2) ўйин суягини бир марта ташлаганда олти очко тушиши эҳтимоллиг қандай?

5.34. Қутида ўзаро бир хил 10 та ошиқнинг 4 таси бўялган. Қутидан тасодифий олинган ошиқнинг 1) бўялган; 2) бўялмаган бўлиш эҳтимоли қандай?

5.35. Танга икки марта ташланди. Унинг 1) икки марта герб томони билан тушиши; 2) фақатгина бир марта герб томони билан тушиши; 3) камида бир марта герб томони билан тушиши эҳтимоллигини топинг.

5.36. Ўқувчи дафтарига икки хонали тасодифий сон ёзди. Ушбу ёзилган соннинг 1) тоқ бўлиши; 2) 3 га каррали бўлиш эҳтимоллиги қандай?

5.37. 35 ўқувчининг 5 таси дарсга тайёрланмай келган. Тахтага тасодифий чиқарилган ўқувчининг дарсга тайёрланмай келиш эҳтимоли қандай?

5.38. Иккита мерган нишонга биттадан ўқ отади. Биринчи мерганнинг нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,7 га, иккинчисиники 0,8 га тенг. Нишонга 1) фақатгина битта мерганнинг текказиши; 2) камида битта мерганнинг текказиши; 3) иккаласини ҳам текказиши; 4) иккаласини ҳам текказмаслиги; 5) камида битта мерганнинг текказмаслик эҳтимоллиги қандай?

5.39. Завод маҳсулотларининг 27% и юқори сифатли ва 70%-1-навли. Тасодифий олинган маҳсулотнинг юқори ёки 1-навли бўлиш эҳтимоллигини топинг.

A ҳодиса завод маҳсулотининг юқори сифатли бўлишини, B ҳодиса 1-навли бўлишини билдирсин. Бизга $P(A+B)$ эҳтимолликни топиш керак. A ва B биргаликда бўлмаган ҳодисалар ва $P(A)=0{,}27$, $P(B)=0{,}7$ эканлигидан,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}27+0{,}7=0{,}97.$$

5.40. Мерган ўзаро кесишмайдиган учта бўлакка бўлинган нишонга текказди. Нишоннинг I бўлагига текказиш эҳтимоллиги 0,45, II бўлагига текказиш эҳтимоли 0,35. Мерганнинг нишоннинг1) I ёки II бўлакларга текказиши; 2) IIёки III бўлакларига текказиши; 3) III бўлакка текказиш эҳтимоли қандай?

5.41. Дўкондаги ҳар бир 100 та электр чироғининг ўрта ҳисобда биттаси яроқсиз бўлиб келади. Дўкондан тасодифий олинган иккита электр чироғининг 1) иккаласи ҳам яроқли; 2) биттасигина яроқсиз; 3) иккаласи ҳам яроқсиз бўлиш эҳтимолини топинг.

5.42. «“Эҳтимоллик” сўзининг ҳар бир ҳарфи ёзилган карточкалар аралаштирилиб, орқасига ўгириб ташланди. Булардан тасодифий олинган карточкада унли товушли ҳарф бўлиш эҳтимоллиги қандай?

5.43. 20 дан катта бўлмаган исталган натурал соннинг 1) 5 га каррали; 2) 3 га каррали; 3) туб сон; 4) мураккаб сон бўлиш эҳтимоллиги қандай?

5.44. Чўнтакдаги бир хил 11 та ошиқнинг 5 таси бўялган. Чўнтакдан дастлабки олинган ошиқ бўялган бўлса, иккинчи олинган ошиқнинг ҳам бўялган бўлиш эҳтимоли қандай?

5.45. Қутидаги 15 та деталнинг 10 таси бўялган. Қутидан конструкторнинг тасодифий олинган деталининг бўялган бўлиш эҳтимолини топинг.

5.46. Танга икки марта ташланди. Танганинг камида бир марта герб томони билан тушиш эҳтимоллигини топинг.

5.47. Қутида 10 та оқ ва 15 та қора рангли шарлар бор. Қутидан тасодифий олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимолини топинг.

5.48. Техник назорат бўлими тасодифий олинган 100 та китобдан 5 та яроқсиз китоб топди. Ярoқсиз китоб олинишининг солиштирма частотасини топинг.

5.49. Иккита ўйинчи навбатма-навбат танга ташлади ва шартнома бўйича кимнинг ташлаган тангаси биринчи бўлиб герб томони билан тушса, шу ғолиб бўлади. Ушбу ўйинни 20 марта такрорлаганда биринчи ўйинчининг ғолиб бўлишининг солиштирма частотасини топинг.

5.50. Қозоқ алфавити ҳарфларининг Қозоғистон Республикаси Гимнининг матнида учраш частотасини аниқланг.

5.51. 5.27-масаладаги битта доннинг униб чиқиш эҳтимоллигини баҳоланг.

5.52. Завод маҳсулотларининг сифатини текшириш учун тайёр маҳсулотлар партиясининг ҳар биридан текширишга 100 та буюм олинди. Текширишга олинган буюмларнинг ўрта ҳисоб билан 8 таси ярoқсиз бўлиб чиқди. Ушбу завод маҳсулотларидан тасодифий олинган буюмнинг сифатли бўлиш эҳтимоллигини баҳоланг. 1000 та буюмдан ўрта ҳисобда нечтаси ярoқсиз?

5.53. Танга уч марта ташланди. Танганинг камида бир марта Герб томони билан тушиш эҳтимоллиги қандай?

E_i Е орқали тангани i марта ташлаганда унинг Герб томони билан тушишини билдирувчи ҳодисани белгилайлик. Бунда $i = 1,2,3$. Бизга $P(E_1+E_2+E_3)$ эҳтимолликни топиш керак. (3) формулага кўра

$$P\left(E_1 + E_2 + E_3\right) = 1 - P\left(\overline{E_1 + E_2 + E_3}\right) = 1 - P\left(\overline{E_1} \cdot \overline{E_2} \cdot \overline{E_3}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\overline{E_1}\right) \cdot P\left(\overline{E_2}\right) P\left(\overline{E_3}\right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Жавоби: $\frac{7}{8}$.

5.54. Тасодифий олинган икки хонали сонни 8 га бўлганда 1 қолдиқ қолиш эҳтимоллиги қандай?

5.55. Ўйин суяги икки марта ташланганда 1) камида бир марта учдан кичик очко тушиши; 2) аниқ бир марта учдан кичик очконинг тушиш эҳтимоллигини топинг.

5.56. Олдинги масала шартида A-“ тушган очколар сони тоқ”, B-“ камида бир марта бирлик очко тушиши” деган ҳодисалар учун қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимоллигини топинг: 1) $A + B$; 2) $A \cdot B$; 3) $A \cdot \overline{B}$.

5.57. 9-синф бўйича вилоят математика олимпиадасига қатнашган 12 та ўқувчининг 5 таси –аълочи ўқувчилар. Дастлабки учта ўринни эгаллаган ўқувчиларнинг ҳаммасининг аълочи бўлиш эҳтимолиги қандай? Бунда олимпиадага қатнашган ўқувчиларнинг имкониятлари бир хил деб ҳисоблаш керак.

5.58. Корхонада ёнғин бошланганини хабарловчи иккита автоматлаштирилган мосламалар ўрнатилган. Ёнғин бўлганда биринчи мосламанинг ишлаб кетиш эҳтимоли 0, 95 га, иккинчисининг ишлаб кетиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Ёнғин бўлганда фақат биттагина мосламанинг ишлаб кетиш эҳтимоллигини топинг.

5.59. Бир иш кунида станокнинг ишдан чиқиш эҳтимоллиги 0,01 га тенг. Унинг икки кун ишлагандан кейин бирон марта ҳам ишдан чиқмаслик эҳтимолини топинг?

> A_i — станокнинг i марта ишдан чиқмаслигини билдирадиган ҳодиса бўлсин. $P(A_i)$=0,01 ва $P(A_i)$=0,99. Бунда i=1,2. Топиш керак: $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$=0,99 · 0,99=0,9801.

5.60. Техник мосламанинг ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлайдиган учта элементи мавжуд ва уларнинг ишдан чиқиш эҳтимолликлари мос равишда -0,05; 0,03 ва 0,04 га тенг. Бу элементлардан биттаси ишдан чиқса, мосламанинг ўзи ишдан чиқади.Мосламанинг ишдан чиқиш эҳтимолини топинг?

5.61. Ҳамма ёқлари бўялган куб ўзаро тенг бўлган 1000 та кичкина кубларга бўлинадиган қилиб қирқилиб, яхшилаб аралаштирилган. Тасодифан олинган кубнинг 1) бир; 2) икки; 3) учта ёғининг бўялиш эҳтимоли қандай?

5.62. Душман кўпригини ишдан чиқариш учун унга битта бомбани аниқ тekказиш етарли. Кўприкка аниқ теккaзиш эҳтимолликлари 0,6 га ва 0,7 га тенг бўладиган, иккита бомба ташланди. Кўприкнинг ишдан чиқиш эҳтимоллигини топинг.

5.63. Мерганнинг 4 марта отганда нишонга камида бир марта теккaзиш эҳтимоли 0,9984. Унинг бир марта отганда нишонга аниқ теккaзиш эҳтимоллиги қандай?

5.64. Электр системасига кетма-кет учта элемент уланган. Элементларнинг ишдан чиқиш эҳтимолликлари 0,1; 0,15 ва 0,2. Бу кетма-кетликнинг токни ўтказмаслик эҳтимоллигини топинг?

C

5.65. Чўнтакда 4 та оқ ва 2 та қизил ошиқ бор. Чўнтакдан тасодифан олинган 2 та ошиқнинг ранглари ҳар хил бўлиш эҳтимоллигини топинг.

5.66. Узунликлари 2 см, 5 см, 6 см ва 10 см бўлган таёқчалардан тасодифан учта таёқча олинди. Олинган таёқчалардан учбурчак ясаш эҳтимоллиги қандай?

5.67. Иккита ўйин суяги ташланди. n тушган очколар йиғиндисига тенг. n=7 ёки n=8 бўлиш эҳтимолликларидан қайсиси каттароқ?

5.68. Сариарқадаги сайғоқларнинг 400 таси эмланган. Тажриба учун тасодифий ушланган 20 та сайғоқдан 8 таси эмланган бўлиб чиқди. Бу минтақада тахминий ҳисобда нечта сайғоқ бор?

5.69. Чўнтакда (қопда) 20 та ошиқ бор, улардан 5 таси қизил рангли ва 8 таси кўк рангга бўялган, қолгани бўялмаган. Чўнтадан тасодифан олинган ошиқнинг мумкин бўлган рангларининг барча элементар натижаларини атаб кўрсатинг. Шу натижаларнинг эҳтимоллик шкаласини ясанг.

5.70. Танга икки марта ташланди. Барча элементар натижаларни атаб кўрсатинг. Эҳтимолликлар шкаласини тўлдиринг.

5.71. Нишонга бир марта отганда текказиш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Нишонга текканча ўқ отилаверди. Нишонга учтадан ортиқ ўқ отилмаслик эҳтимолини топинг.

5.72. Иккита ўйинчи навбат билан танга ташлаб ўйнади. Шартга кўра биринчи бўлиб кимнинг тангаси Герб томони билан тушса, шу енгади. Ҳар бир ўйинчининг енгиш эҳтимолини топинг.

5.73. Олдинги масалани учта ўйинчи учун ечинг.

5.74. Агар $P_B(A)>P(A)$ бўлса, у ҳолда $P_A(B)>P(B)$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатинг.

5.75. Агар $P(AB)=0,72$, $P(A\overline{B})=0,18$ бўлса, у ҳолда $P(A)$ ни топинг.

5.76. Агар $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$ бўлса, у ҳолда $P(A\overline{B})$ ни топинг.

$$c=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=a+b-P(A\cdot B)\Rightarrow$$

$$A\cdot B+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A\Rightarrow P(AB+A\overline{B})=P(A)\Rightarrow$$

$$P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)\Rightarrow\ a+b-c+P(A\overline{B})=a\Rightarrow P(A\overline{B})=c-b.$$

5.77. 1 ва 2 рақамлари билан номерланган ўйин суяклари ташланди. Биринчи суякда тушган очко сони иккинчисига қараганда ортиқ бўлиш эҳтимоли қандай?

5.78. 1 дан n гача номерланган ошиқлар халтага солинган. Ҳар бир юришда халтадан битта ошиқ олиниб, у халтага қайта солинмайди. Камида бир марта ошиқнинг номери билан юришнинг номери мос келиш эҳтимоллиги қандай?

Такрорлашга доир машқлар

5.79. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\dfrac{ax-y}{x+y}-\dfrac{ay+x}{y-x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-y^2}{a^2-1}:\dfrac{x^2+y^2}{a-1}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{4ab}{b^2-a^2}\right)$.

5.80. $|x+3|=2x-1$ тенгламани ечинг.

5.81. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x+\sin(\pi-x)}-\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\cos(\pi-x)}{2}$;

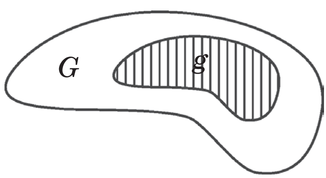
2) $\dfrac{2\sin\varphi\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)}{2\cos^2\varphi-1}$.

5.2. Геометрик эҳтимоллик

Мавзуни ўзлаштириш давомида сизлар:

- Матнли масала сифатида берилган геометрик эҳтимолликларни топиш кўникмаларини ўзлаштирасизлар.

Кўпгина холларда ҳодисаларнинг эҳтимоллигини топиш маълум классик таъриф бўйича ҳисоблаш мумкин бўлавермайди. Одатда бундай холларда синовнинг барча мумкин бўлган натижалари билан ҳодисага қулай бўлган натижалар сони чексиз кўп бўлади. Масалан, текисликдаги G соҳанинг ичида кичик g соҳа жойлашсин (5.2-расм). Бизга G соҳадан тасодифий олинган M нуқтанинг g соҳага тегишли бўлиш эҳтимолигини топиш керак. Бунда синовнинг яъни M нуқтани



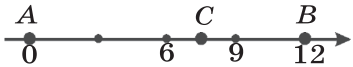
5.2-расм

G соҳадан танлаб олишнинг барча мумкин бўлган холларининг сони G соҳанинг нуқталари “сонига” тенг. Худди шундай g соҳанинг нуқталар “сони” ҳам чексиз кўп. Бундан бу ҳодисанинг эҳтимоллигини $P(A)=\dfrac{m}{n}$ формула билан топиш мумкин эмас. Бундай эҳтимолликлар геометрик усул билан бажарилади. Бу эҳтимолликлар берилган g ва G фигураларнинг юзаларининг нисбати кўринишда аниқланади:

$$P=\frac{S_g}{S_G}. \tag{1}$$

(1) формулани барча чексиз натижали ҳодисаларга қўлланаладиган универсал формула деб қарамаслик керак. Чунки кесмада ҳам, фазовий жисмларда ҳам чексиз кўп нуқталар мавжуд. Бундан берилган масаланинг шартига кўра керакли эҳтимолликлар мос равишда кесмадаги нуқталар учун узунликларнинг нисбати, ясси фигуралар учун юзаларининг нисбати ва фазовий нуқталар учун ҳажмларнинг нисбати сифатида аниқланади.

1-мисол. Узунлиги 12 см AB кесмадан тасодифан C нуқта олинди. Томони AC га тенг бўлган квадратнинг юзи 36 см^2 дан катта ва 81 см^2 дан кичик бўлиш эҳтимолини топиш керак.



5.3-расм

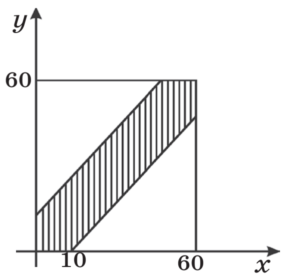
Томони $AC=x$ бўлган квадратнинг юзи x^2 га тенг. Масала шартига кўра $36<x^2<81 \Rightarrow 6<x<9$ тенгсизлик бажарилиши керак. Сонлар ўқида A нуқтанинг координатасини $A(0)$ деб олсак, $B(12)$, $C(x)$ бўлади. У ҳолда $x\in(6;\ 9)$ оралиқда ётиши керак (5.3-расм). Бу интервалнинг узунлиги 3 га тенг. Бундан бизга керак бўлган эҳтимоллик 3:12 нисбат билан аниқланади: $P=\dfrac{3}{12}=0{,}25.$

2-мисол. Ишчи ўзаро боғлиқ бўлмаган иккита станокнинг ишини кузатди. Кўп йиллик кузатишлар натижасида ҳар бир станок (бир-бирига боғлиқ бўлмаган) бир соатда ишчининг унга 10 минут эътибор беришини талаб этади. Ишчининг битта станок билан банд бўлган вақт оралиғида иккинчи станокка ҳам эътибор бериш эҳтиёжининг эҳтимоллигини аниқлаймиз.

x орқали ишчининг I станокка эътибор бериш вақтини, y орқали II станокка эътибор бериш вақтини белгилаймиз. Ишчининг I станок билан банд бўлган вақтида II станокка ҳам эътибор бериши керак бўлса, $|x-y|<10$ тенгсизлик бажарилиши керак. Бундан $-10<x-y<10$ қўш тенгсизликка эга бўламиз. Масала шартига кўра дастлаб I станок ишдан чиқиб, кейин иккинчи станок бузилган ($x\geqslant y$) бўлиб кўрингани билан, $y\geqslant x$ ҳолда ҳам (биринчи бўлиб 2-станок ишдан чиқса ҳам) бизни ишчининг II станок билан банд бўлган вақтида I станокнинг ишдан чиқиши тўлиқ қаноатлантиради. У ҳолда текисликдаги бизга қулай бўлган нуқталарнинг координаталари

$$\begin{cases} y > x-10, \\ y < x+10, \\ 0 \leq x \leq 60, \\ 0 \leq y \leq 60 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан аниқланади. Барча мумкин бўлган натижалар тўплами $0\leqslant x\leqslant 60$, $0\leqslant y\leqslant 60$ тенгсизликлар билан аниқланади. 5.4-расмда барча мумкин бўлган натижалар томони 60 га тенг квадрат билан, бизга қулай натижалар бўялиб тасвирланган фигуралар билан аниқланади. (1) формуладан



5.4-расм

$$P = \frac{60^2 - 50 \cdot 50}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

Одатда масалани геометрик усул билан ечиш эҳтиёжи бирдан пайқалмайди. Бундан масаланинг шартини тўлиқ таҳлил қилиб, унинг қуйидаги томонларига эътибор қаратиш керак:

- Синовнинг барча мумкин бўлган натижалари ва бизга қулай бўлган натижалари –чексиз кўп қийматлар (ҳақийқий сонлар тўпламида) қабул қилиши керак;

- Агар масалани ечиш давомида ўзаро боғлиқ бўлмаган ўзгарувчилар киритиб, улар ҳақийқий сонлар оралиғида ўзгарса, киритилган ўзгарувчилар сонига боғлиқ бўлган бир ўзгарувчили мисол тўғри чизиқда; икки ўзгарувчили мисол текисликда ечилади

МАШҚЛАР

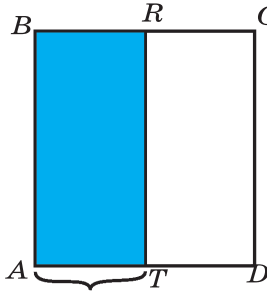
А

5.82. AB=20 см кесманинг ўртаси C нуқта. AB кесмада тасодифан олинган нуқтанинг BC кесмага тегишли бўлиш эҳтимоллиги қандай? Бунда AB кесманинг нуқталари бир хил имконият билан олинди деб ҳисоблаймиз.

5.83. Кесма ўзаро тенг учта бўлакка бўлинган.Кесмада тасодифий белгиланган нуқтанинг ўртадаги бўлакка тегишли бўлиш эҳтимоли қандай?

5.84. Томони 1 га тенг бўлган квадрат ичида тасодифан A нуқта олинди. A нуқтадан квадратнинг маълум бир томонигача бўлган масофа a сонидан катта бўлмаслик эҳтимоллиги қандай? $0<a<0,5$.

Бизга керак бўлган эҳтимоллик $S_{ABRT} : S_{ABCD}$ нисбатга тенг. AB=1 эканлигидан, S_{ABCD}=1, ал S_{ABRT}= =$1 \cdot a = a$ (5.5-сурет). Демак, $P=a$.



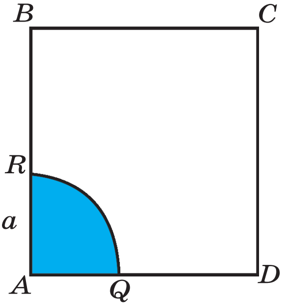
5.5-расм

5.85. Томони a га тенг бўлган квадрат ичидан тасодифий олинган нуқтанинг унга ички чизилган айланага тегишли бўлиш эҳтимоли қандай?

5.86. Томони a бўлган тенг томонли учбурчак ичида тасодифан олинган нуқта шу учбурчакнинг ўрта чизиқлари ёрдамида ясалган учбурчакка тегишли бўлиш эҳтимоли қандай?

В

5.87. 5.84-масала шартида A нуқта квадратнинг 1) маълум бир учигача бўлган масофа; 2) марказигача бўлган масофа a $(0<a<0,5)$ сонидан катта бўлмаслик эҳтимолини топинг.



5.6-расм

1) Бизга керак бўлган эҳтимоллик $S_{\text{сек.}ARQ}$: $S_{ABCД}$ нисбатга тенг (5.6-расм). Бунда $AR=AQ=a$ эканлигидан, $S_{\text{сек}APQ}=\frac{1}{4}\pi a^2$, $S_{ABCD}=1$. Демак, $p=\frac{\pi a^2}{4}$. 2) $p=\pi a^2$.

5.88. Радиуси R га тенг бўлган доира ичидан тасодифан олинган A нуқта шу доирага ички чизилган 1) квадратга; 2) мунтазам учбурчакка; 3) битта томони $2a$ га $(0<a<R)$ тенг бўлган тўғритўртбурчакка; 4) асослари $2a$ ва $2b$ $(0<a<R,\ 0<b<R)$ бўлган тенгёнли трапецияга тегишли бўлиш эҳтимоллиги қандай?

5.89. Радиуслари 2 см ва 4 см бўлган иккита концентрик доиралар берилган. Катта доира ичида тасодифий белгиланган нуқтанинг 1) кичик доирага; 2) шу айланалар билан чегараланган халқага тегишли бўлиш эҳтимоли қандай?

5.90. Берилган квадрат томонларининг ўрталарини кетма-кет туташтириб иккинчи квадрат олинди. Иккинчи квадрат томонларининг ўрталарини туташтириб, учинчи квадрат олинди. Берилган квадратнинг ичидан тасодифан олинган нуқтанинг 1) 3-квадратга; 2) 3-квадратнинг ташқи бўлаги бўлган 2-квадратга; 3) 3-квадратга ички чизилган доирага тегишли бўлиш эҳтимоли қандай?

5.91. Олдинги масалада квадратнинг ўрнига тенг томонли учбурчак олиб, ечинг.

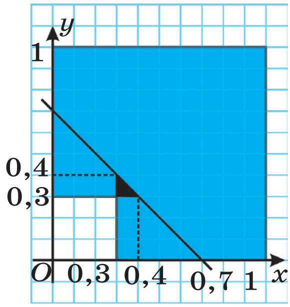
5.92. Доира ўзаро тенг 6 та секторга бўлиниб, бу секторлар тартиб билан қизил, кўк ва сариқ рангларга бўялган. Маркази атрофида айлантирилган доирага тир милтиғидан ўқ отилди. Ўқнинг сариқ рангли секторга тегиш эҳтимоли қандай?

C

5.93. Узунлиги 1 м бўлган чивиқ синиб, иккига бўлиниб қолди. Унинг ҳар бир бўлагининг узунлиги 30 см дан кам бўлмаслик эҳтимоллигини топиш керак. Чивиқнинг исталган нуқтада синиш эҳтимоллиги бир хил.

Синган чивиқнинг биринчи бўлагининг узунлиги x, иккинчи бўлаги нинг узунлиги y бўлсин. Учинчи бўлагининг узунлиги $1-x-y$. Масала шартига кўра қуйидаги тенгсизликлар системаси бажарилади:

$$\begin{cases} x \geq 0,3, \\ y \geq 0,3, \\ 1-x-y \geq 0,3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,3, \\ y \geq 0,3, \\ x+y \leq 0,7. \end{cases}$$



5.7-расм

$0<x<1$, $0<y<1$ эканлигидан, (x, y) нуқталар 5.7-расмда кўрсатилган квадратни тўлдиради. Тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган (x, y) нуқталар эса қора ранг билан бўялган учбурчакни тўлдиради. Бу учбурчакнинг катетлари 0,1 га тенг, юзаси $\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 0,1 = 0,005$. Квадратнинг юзи 1 га тенг. Бизга керак бўлган эҳтимоллик $\frac{0,005}{1} = 0,005$.

5.94. Узунлиги l га тенг бўлган чивиқ синиб, учга бўлиниб қолди. 1) шу бўлаклардан учбурчак ясаш; 2) ҳар бир бўлакнинг узунлиги $\frac{l}{4}$ дан кичик бўлмаслик эҳтимоли қандай?

5.95. Шахмат тахтасидаги квадрат томонининг узунлиги $2a$. Унга диаметри $2r$ га тенг бўлган $(r < a)$ танга ташланди. Тангани бирин-кетин 1) битта квадратнинг ичида; 2) қора рангли квадратнинг ичида ётиш эҳтимолини топинг.

5.96. Узунлиги l дан катта бўлмаган тасодифан олинган учта кесмадан учбурчак ясаш эҳтимолини топинг.

5.97. Халқа радиусларидан бири иккинчисидан икки марта катта бўладиган қилиб марказлари умумий бўлган (концентрик) иккита айлана билан чегараланган. Ички айланада олинган битта нуқтага ёруғлик манбаи ўрнатилган. Халқадан тасодифан олинган нуқтага ёруғлик тушиш эҳтимолини топинг?

5.98. Олдинги масаладаги айланаларнинг ўрнига сфералар олиб, ечинг. (керакли формулаларни справочниклардан қараб фойдаланинг)

5.99. (Учрашув масаласи). Икки киши маълум бир жойда соат 17 ва 18 оралиғида учрашишга келишишди. Ваъдага кўра уларнинг ҳар бири белгиланган жойга келгандан кейин иккинчисини роппа-роса T минут кутиб, келмаса, кетиб қолади. Бу икки кишининг учрашиш эҳтимоли қандай? Масалани 1) T=15 мин; 2) T=20 мин; 3) T=30 мин деб олиб, ечинг.

Такрорлашга доир машқлар

5.100. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$.

5.101. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-2$ деб олиб, $\operatorname{tg}x$ ни топинг.

5.102. Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади 150, тўртинчи ҳади 1,2. Прогрессиянинг бешинчи ҳадини топинг.

5-БЎЛИМГА ҚЎШИМЧА МАШҚЛАР

5.103. Тангани герб томони билан тушганча ёки 4 марта кетма-кет сон томони билан тушганча ташланди. Элементар ҳодисалар фазосини аниқланг.

5.104. 1 дан 9 гача бўлган рақамлар орасидан тасодифан битта рақам олинди. Олинган рақам 1) жуфт; 2) тоқ; 3) туб сон бўлиш эҳтимоли қандай?

5.105. Бир корхона ишлаб чиқарадиган маҳсулотларнинг 1,5% и яроқсиз бўлиши аниқланган. Ушбу корхона ясаган 1000 та маҳсулотдан ўрта ҳисобда нечта детал яроқсиз деб кутиш мумкин?

5.106. Ўйин суяги уч марта ташланганда камида бир марта олтилик томони билан тушиш эҳтимолини топинг?

5.107. Исталган 9 кишидан бир-бирларини танийдиган 3 киши ёки бир-бирларини танимайдиган 4 киши топилишини исботланг.

5.108. Шахмат тахтасининг битта диагоналида ётган қарама-қарши иккита бурчагидаги квадратлар қирқиб олинди. Тахтанинг қолган бўлагини битта оқ ва битта қора квадратлардан ясалган тўғритўртбурчаклар билан тўлиқ ёпиб чиқиш мумкинми?

5.109. Почтадаги 10 хил маркадан неча усул билан 1) 8 та марка; 2) турли хил 8 та марка сотиб олиш мумкин?

5.110. Қутида 5 та оқ, 4 та қизил ва 2 та кўк ошиқ бор. Қутидан неча хил усул билан 1) 3 та ошиқ; 2) турли хил 3 та ошиқ; 3) иккитаси бир хил рангли бўладиган 3 та ошиқ олиш мумкин?

5.111. 15 кун ичида ўқувчилар 5 та имтиҳон топширишлари керак. Бу имтиҳонлардан бири алгебрадан, иккинчиси геометриядан. Алгебра ва геометрия бўйича имтиҳонларни биридан кейин бири келмайдиган қилиб имтиҳонлар жадвалига неча усул билан жойлаштириш мумкин?

5.112. 1, 2, 3, 5, 6, 7 рақамлари ёрдамида 3 та тоқ, 2 та жуфт рақамлардан тузилган ва рақамлари такрорланмайдиган қилиб неча усул билан беш хонали сонлар ёзиш мумкин?

5.113. Иккита унли товушнинг орасида иккита ундош товуш келадиган қилиб **тупроқ** сўзидаги ҳарфларни неча усул билан алмаштириш мумкин?

5.114. 1) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$; 2) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$;

3) $C_n^0 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n+1)^3$ тенгликлар бажарилишини исботланг.

5.115. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^m$ Бином ажратишида биринчи ва учинчи қўшилувчиларнинг коэффициентларининг йиғиндиси 46 бўлса, бу ажратилишнинг x и йўқ бўлган ҳадини топинг.

5.116. 1) $(1+x-x^2)^3$; 2) $(1+x^2-x^3)^4$ кўпҳадлардаги x^5 нинг коэффициентларини аниқланг.

5.117. A ва B пунктлар учта йўл билан уланган. Шу оралиқда бу йўлларни ўзаро параллел 4 та йўл кесиб ўтади. Бир марта юриб ўтган йўлдан қайта юрмай, A пунктдан B пунктга неча усул билан бориш мумкин?

5.118. Агар B ва C биргаликда бўлмаган, $P(A)\neq 0$ бўлса,

$$P_A(B+C) = P_A(B) + P_A(C)$$

тенглик бажарилишини исботланг.

5.119. Агар $P(A)\neq 0$ бўлса, $P_A(B+C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(BC)$ тенглик бажарилишини исботланг.

5.120. Шахмат тахтасидаги квадрат томонининг узунлиги $2a$. Унга радиуси $r<a$ бўлган танга ташланди. Танганинг бутунлигача битта квадратда ётиш эҳтимоли қандай?

5.121. 1) Қадимда бир хон қулини жазоламоқчи бўлиб, унга иккита оқ ва иккита қизил рангли ошиқларни иккита халтага тақсимлаб солишни буюрди. Жаллод иккита халтанинг биттасидан битта ошиқни тасодифий танлаб олди. Агар олинган ошиқ қизил рангли бўлса, қул бошидан айрилади, олинган ошиқнинг ранги оқ бўлганда қул жазодан озод қилинади. Қулни жазодан озод қилиниш эҳтимоли энг катта бўлиши учун ошиқларни халталарга қандай усуллар билан тақсимлаб солган маъқул?

2) Ички чизилган доираси бўлган квадратга тасодифан 4 нуқта ташланди. Ушбу нуқталардан роппа-роса иккитасининг доирага тушиш эҳтимоли қандай?

Тарихга назар

Баъзи бир комбинаторика масалалари билан қадимги грек математиклари ҳам шуғулланишган. Бу соҳадаги муҳим натижаларга алгебра билан эҳтимоллар назариясининг ривожланишига боғлиқ XVII ва XVIII аср математиклари эриша бошлаган. Дастлаб эҳтимоллар назарияси, аслида азарт ўйинларнинг (ўйин суягини ташлаш, карта ўйинлари ва хоказо) эҳтиёжлардан туғилган. Масалан, Людовик XIV даврида азарт ўйинларнинг ҳақийқий ишқибози Кавалер де Мере учта ўйин суягини кетма-кет ташлаш натижасида йиғиндида 12 очкадан кўра 11 очконинг кўпроқ тушишини кузатган. Бироқ унинг фикри бўйича бу очколарнинг иккаласини ҳам ҳар хил 6 та комбинация билан олиш мумкин деб ҳисоблаган.

11 очко учун: (6, 4, 1), (6, 3, 2), (5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 3, 3), (4, 4, 3).

12 очко учун: (6, 5, 1), (6, 4, 2), (6, 3, 3), (5, 5, 2), (5, 4, 3), (4, 4, 4).

Де Меренинг хатосини француз математиги Блез Паскаль (1623–1662) кўрсатди. Де Мере кўрсатилган комбинацияларни ўзаро тенг имкониятли ҳодисалар деб ҳисоблаган.Аслида эса булар тенг имкониятли ҳодисалар эмас. Масалан, (6, 4, 1) комбинацияни 6 хил усул билан олиш мумкин (6, 4, 1), (6, 1, 4), (4, 1, 6), (4, 6, 1), (1, 4, 6), (1, 6, 4). (4, 4, 4) комбинациянинг эса биттагина имконияти бор. (Учта ўйин суягини ташлаганда йиғиндиси 11 ва 12 очко тушиш эҳтимоллигини мустақил ҳисоблаб, Де Меренинг хатосини кўрсатинг).

У XVII асрнинг иккинчи ярмида Паскаль билан Ферма орасидаги хат алмашув вақтида олимлар азарт ўйинларида учрайдиган қонуниятларни илмий йўналишда ўрганиб кўрди. Тарихчи олимлар эҳтимоллар назариясининг пайдо бўлишини ушбу хат алмашувлардан бошлаб пайдо бўлди деб ҳисоблайди. Бу назариянинг ривожланишига нидерланд математиги Гюйгенс (1629–1695), нимис олими Г.В. Лейбниц (1646–1716), швецариялик математик В.Бернулли (1654–1705) ва бошқалар катта ҳисса қўшди.

XVIII асрда табиий ва ҳаётий эҳтиёжлар (кузатиш хатоликлари назарияси, ўқ отиш назариясининг масалалари, ва бошқалар) эҳтимолликлар назариясининг ривожланишини янги босқичга кўтарди.

Эҳтимоллар назариясида аналитик усуллардан фойдаланишга катта хисса қўшганлар қаторига А.Муавр (1667–1754), С.Лаплас (1749–1827), К.Гаусс (1777–1855), С.Пуассон (1781–1840) каби математиклар бўлди. XIX–XX асрларда эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг шаклланиб, ривожланишига рус математикларининг қўшган хиссалари зўр. Уларнинг қаторига Чебишев (1821–1894), А.А. Марков (1856–1922), А.М. Ляпунов (1857–1918), С.Н. Бернштейн (1880–1968), А.Я. Хинчин (1894–1959), А.Н. Колмогоров (1903–1987) ва бошқа олимларни қўшиш мумкин. Масалан, А.Н. Колмогоров эҳтимоллар назариясини аксиоматик йўл билан ёзди.

ТЕРМИН СЎЗЛАР ЛУҒАТИ

Ўзбек тилидаги варианти	Қозоқ тилидаги варианти	Рус тилидаги варианти	Инглиз тилидаги варианти
Тасодифий ҳодиса	Кездейсоқ оқиға	Случайное событие	Random event
Элементар ҳодиса	Элементар оқиға	Элементарное событие	Elementary event
Элементар ҳодисалар фазоси	Элементар оқиғалар кеңістігі	Пространство элементарных событий	Elementary event space
Биргаликда бўлган ҳодисалар	Үйлесімді оқиғалар	Совместные события	Joint events
Биргаликда бўлмаган ҳодисалар	Үйлесімсіз оқиғалар	Несовместные события	Non concurrent events
Ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар	Тәуелсіз оқиғалар	Независимые события	Independent events
Ўзаро боғлиқ бўлган ҳодисалар	Тәуелді оқиғалар	Зависимые события	Dependent events
Қарама-қарши ҳодисалар	Қарама-қарсы оқиғалар	Противоположные события	Opposite events
Қулай холлар сони	Қолайлы жағдайлар саны	Количество благоприятствующих исходов	Number of favourable outcomes
Барча мумкин бўлган холлар сони	Барлық мүмкін жағдайлар саны	Количество всех возможных исходов	The number of all possible outcomes
Эҳтимолликнинг классик таърифи	Ықтималдықтың классикалық анықтамасы	Классическое определение вероятности	The classic definition of probability
Эҳтимолликнинг статистик таърифи	Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы	Статистическое определение вероятности	Statistical definition of probability
Геометрик эҳтимоллик	Геометриялық ықтималдық	Геометрическая вероятность	Geometric probability

6-БЎЛИМ.
VII–IX СИНФЛАР КУРСИ МАТЕРИАЛЛАРИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

Натурал ва бутун сонлар. Сонларнинг бўлиниши

6.1. $\overline{5431a}$ сони 1) 2 га; 2) 3 га; 3) 4 га; 4) 5 га; 5) 6 га; 6) 9 га; 7) 10 га; 8) 11 га каррали бўлиши учун a нинг ўрнига қандай рақам ёзиш керак?

6.2. Бутун соннинг 1) 18 га; 2) 25 га бўлиниш аломатларини айтинг.

6.3. Агар $a>c$ бўлса, у ҳолда $\overline{abc}-\overline{cba}$ сони 9 га бўлинишини исботланг.

6.4. Ҳар бир натурал n учун 1) n^4-n^2 сони 12 га; 2) n^9-n^3 сони 504 га; 3) n^4+14n^2+49 сони n тоқ бўлганда 64 га; 4) 5^n-5 сони 20 га; 5) 7^n-7 сони 42 га бўлинишини исботланг.

6.5. Кетма-кет жойлашган тўртта соннинг кўпайтмаси 24 га бўлинишини исботланг.

6.6. Соннинг кубидан ўзини айирганда 24 га бўлинишини исботланг.

6.7. Тоқ соннинг квадратини 1 га камайтирганда 8 га каррали сон чиқишини исботланг.

6.8. Агар 3 дан катта 3 та туб сон арифметик прогрессия ташкил этса, бу прогрессиянинг айирмаси 6 га каррали бўлишини исботланг.

6.9. Исталган тоқ бутун сонни $4m-1$ ёки $4m+1$ кўринишда ёзиш мумкинлигини исботланг. Бунда m — натурал сон.

6.10. 1) $a:b=4:7$ ва $(a, b)=8$; 2) $[a, b]=124$ ва $(a, b)=31$; 3) $ab=375$ ва $[a, b]=75$ деб олиб, a ва b сонларни топинг.

Рационал ва иррационал сонлар. Квадрат илдизлар

6.11. Ҳисобланг:

1) $15\frac{6}{7}-12\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$; 2) $\left(2{,}125\cdot 1\frac{15}{17}-1\frac{7}{12}\right):7{,}25$;

3) $\dfrac{12,8:0,64+3,05:0,05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$;

4) $\dfrac{203,4:9-(5,39-7,39)}{\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}$;

5) $\left(1\frac{1}{3}\cdot 0,27-3\frac{1}{3}\cdot 0,15\right)-1500\cdot(-0,1)^3$;

6) $\left(\frac{6}{64}\cdot 5\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^3+(-1)^5$;

7) $(0,3)^{-3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^6\cdot 6$;

8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\left(\frac{6}{17}\right)^{0}\cdot\frac{1}{8}-0,25^{-2}\cdot 16$.

6.12. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+1$;
2) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}-3$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$;
4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}$;
6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

6.13. Сонларни таққосланг:

1) $\sqrt{0,63}$ ва $\sqrt{0,83}$;
2) $\sqrt{0,63}$ ва $\sqrt[3]{0,63}$;

3) $\sqrt{1,63}$ ва $\sqrt[3]{0,63}$;
4) $\sqrt{2}$ ва $\sqrt[3]{3}$.

6.14. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$ сонларнинг иррационал бўлишини кўрсатинг.

6.15. 1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{x^2}$; 3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ функциянинг графикларини ясанг.

Қисқа кўпайтириш формулалари

6.16. Қуйидаги формулаларни исботланг:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
2) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
3) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^4 + ab + b^2)$;
6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b+3ab^2+b^3$;
7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
8) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
9) $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2} + \ldots + a + 1)$;
10) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+ \ldots +ab^{n-2}+b^{n-1})$;
11) $a^{2n+1} + 1 = (a+1)(a^{2n}-a^{2n-1} + \ldots -a+1)$;
12) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n})$.

6.17. Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $9(x+5)^2 - (x-7)^2$;
2) $49(y-4)^2 - 9(y+2)^2$;
3) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
4) $5a^2 - 5 - 4(a-1)^2$;
5) $2(x+y)^2 + x^2 - y^2$;
6) $a^4+ab^3 - a^3b - b^4$;
7) $(x-y+4)^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
8) $(a-b)^3 + (a+b)^3$;
9) $(x+2y)^3+(2x-y)^3$.

6.18. Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $5xy^3+30x^2z^2-6x^3yz-25y^2z$;
2) $15m^3n^2p35p^2nq^3+25mn^3q^2-21m^2p^2q$;
3) $32c^5-3^5$; 4) $(4a)^5+(2b)^5$; 5) $(2x)^6+(3y)^6$.

6.19. Ифодани иккиҳад кўринишида ёзинг:

1) $(2x+1)(16x^4-8x^3+4x^2-2x+1)$;
2) $\left(\frac{2}{3}x - 3ab\right)\cdot\left(\frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2ab + 6xa^2b^2 + 27a^3b^3\right)$.

6.20. 1) $143^{15}-81^{15}$ сони 62 га; 2) $12^{31}+28^{31}$ сони 80 га каррали бўлишини кўрсатинг.

Квадрат тенглама. Виет теоремаси

6.21. Агар $k^2-ac > 0$ бўлса, у ҳолда $ax^2 + 2kx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}; \qquad x_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

формула орқали аниқланишини исботланг.

6.22. Виет теоремасини исботланг.

6.23. Тенгламани ечиб, мос квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$;
2) $4x^2 - x - 14 = 0$;
3) $3x^2 - 8x + 5 = 0$;
4) $7x^2 + x - 8 = 0$.

6.24. $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = ax^2 + bx + c = 0$ тенгликни исботланг.

6.25. $a+b+c = 0$ бўлса, $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$ бўлишини кўрсатинг.

6.26. $a - b + c = 0$ бўлса, $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$ бўлишини кўрсатинг.

6.27. a нинг қандай қийматларида $(x^2 - a)(x^2 + 3ax + a) = 0$ тенгламанинг иккита илдизи мавжуд бўлади?

6.28. a нинг қандай қийматларида $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - a) = 0$ тенгламанинг учта илдизи мавжуд бўлади?

6.29. $3x^2 - x - 1 = 0$ тенгламанинг илдизларини топмай туриб

1) $x_1 + x_2$; 2) $x_1 x_2$; 3) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;

5) $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$; 6) $x_1x_2^4 + x_1^4x_2$; 7) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

ифоданинг қийматини топинг.

6.30. Илдизлари бўйича квадрат тенглама тузинг:

1) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$;
2) $x_1 = x_2 = 7$;
3) $x_1 = 3a + 1$, $x_2 = 5a - 2$;
4) $x_1 = 6 - \sqrt{5}$, $x_2 = 6 + \sqrt{5}$;
5) $x_1 = \sqrt{7} - \sqrt{6}$, $x_1 = \sqrt{7} + \sqrt{6}$;
6) $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

6.31. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ xy = -2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

Кўпҳадлар ва уларнинг илдизлари

6.32. Кўпҳадни кўпҳадга қолиқли бўлинг:

1) x^4+x^2+1-ді $x+5$-га; 2) x^7-1-ді x^3+x+1-га;
3) x^6-64-ті $x-3$-га.

6.33. $(x^3+6x^2+ax+12):(x+4)$ ифода a нинг қандай қийматларида қолдиқсиз бўлинади?

6.34. $f(x)$ кўпҳадни $x-a$ кўпҳадга бўлганда $f(a)$ га тенг қолдиқ қолишини исботланг (Безу теоремаси).

6.35. Агар α сони $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ кўпҳаднинг бутун илдизи бўлса, у ҳолда a_n сони α га қолдиқсиз бўлинишини кўрсатинг. Бунда a_1, a_2, ..., a_n — бутун сонлар.

6.36. Кўпҳаднинг бутун илдизларини топиб, уларни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) x^3-7x-6; 2) $x^3+9x^2+11x-21$;
3) x^3-5x^2+3x+1; 4) $x^3+9x^2+23x+15$;
5) $x^4+3x^3-12x^2-38x-24$; 6) $x^4-6x^3-14x^2-11x-4$.

6.37. Исталган натурал n сони учун n^5-5n^3+4n ифоданинг қиймати 120 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

6.38. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)\right):\dfrac{x-y}{x}$;

2) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^2n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)-\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)\cdot\dfrac{p^2+n^2}{p^2n^2}\right):\dfrac{p^2+m^2}{p^2m}$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)\cdot\left(\dfrac{a(b-a)}{a^2-ab+b^2}+1\right)$;

4) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\dfrac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)$;

5) $\dfrac{\left(x^2-y^2-z^2-2yz\right)}{(x+y+z)\left(x^2+z^2+2xz-y^2\right)}$;

6) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-1^2}$.

Кўпҳадлар ва уларнинг илдизлари

6.39. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{3x+1}{5x-6}=0;$ 2) $\frac{9x-1}{3x+1}=0;$ 3) $\frac{5x+7}{49-25x^2}=0;$

4) $\frac{x^2-3x}{x^2+7x-30}=\frac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30};$ 5) $x^2+\frac{3x-1}{x+4}=16-\frac{1-3x}{x+4};$

6) $\frac{1}{3x+2}+\frac{3}{5x+6}=\frac{2}{7x+8};$ 7) $\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}=\frac{2}{x-3}.$

6.40. a параметрнинг барча қийматлари учун тенгламани ечинг:

1) $a(a-1)x=a;$ 2) $x^2+ax+36=0;$ 3) $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0;$

4) $\frac{x-a}{x-3}=0;$ 5) $\frac{x^2-a^2}{x-3}=0;$ 6) $\frac{x+a}{x+3}=0.$

6.41. Тенгламани ечинг:

1) $x^4-5x^2+4=0;$ 2) $7x^4-x^2-6=0;$ 3) $3x^2-5x^2+2=0;$

4) $(5x^2+x-1)^2-(5x^2+x-1)-2=0;$ 5) $(3x^2-x-1)^2-18x^2+6x-1=0;$

6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0;$ 7) $x^2+5x+8+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0;$

8) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0;$ 9) $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0;$

10) $\frac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\frac{15x-10}{2x^2-5x+4}=0;$

11) $\frac{x^2+5x-1}{2x-1}+\frac{2x-1}{x^2+5x-1}=5,2.$

6.42. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}3x+5y=11,\\2x-3y=17;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}20x-15y=51,\\4x-3y=10,2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+5y=20,\\6x+10y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2y=3,\\x^2-3xy+5y^2=3;\end{cases}$

5) $\begin{cases}3x+4y=12,\\x^2+y^2=5,76;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}5x-12y=60,\\x^2+y^2=4;\end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + 5xy + 7y^2 = 31; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 47; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 5. \end{cases}$

6.43. a нинг қандай қийматларида:

$$\begin{cases} y^2 + 2y(2 + x) + (x^2 + 2x)(4 - x^2) = 0, \\ y - ax - 3a = 0 \end{cases}$$

системанинг камида турли хил учта илдизи бўлади?

Тенгсизликларни исботлаш

6.44. Тенгсизликни исботланг:

1) $(6u-1)(u+2)<(3u+4)(2u+1)$;

2) $(3v-1)(2v+1)>(2v-1)(2+3v)$;

3) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; 4) $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2,\ a>0$;

5) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$; 6) $(x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant 4,\ (x>0,\ y>0)$;

7) $a+b+c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc},\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0)$;

8) $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc,\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0,\ a+b+c=1)$.

6.45. Учбурчакнинг ҳар бир томони унинг ярим периметридан кичик бўлишини исботланг.

6.46. Сонларни таққосланг: 1) $\dfrac{86}{87}$ ва $\dfrac{87}{88}$; 2) $\dfrac{113}{112}$ ва $\dfrac{112}{111}$; 3) $\sqrt{23} - \sqrt{11}$ ва $\sqrt{22} - \sqrt{10}$; 4) $\sqrt{38} + \sqrt{20}$ ва $\sqrt{37} + \sqrt{21}$; 5) $b+5$ ва $2b+3$; 6) a^4+1 ва $2a|a|$.

6.47. Моторли қайиқнинг турғун сувда 20 км масофага сарфлаган вақти билан дарё оқими бўйича 10 км ва дарё оқимига қарши 10 км босиб ўтган йўлига сарфлайдиган вақтни таққосланг.

Тенгсизликларни ечиш. Интерваллар усули

6.48. Тенгсизликларни ечинг:

1) $17-x>10-6x$; 2) $30+5x\leqslant 18-17x$;
3) $6x-34\geqslant x+1$; 4) $3u-1<6u-1$;
5) $5x^2-5x(x+4)\geqslant 100$; 6) $p(p-1)p^2>12-6p$.

6.49. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}-3<2x-3<-1,\\ 1-4x<0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}0<1-3x<1,\\ 3-4x<2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x-3\leq 0,\\ \dfrac{2x-5}{x-2}\geq 4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x-2\leq 5x-8,\\ \dfrac{2x-1}{2-x}<4.\end{cases}$

6.50. Тенгсизликларни интерваллар усули билан ечинг:

1) $(2x+7)(3x-4)(x+5)>0$; 2) $(x-6)(0,5x+4)(5x+10)<0$;

3) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$; 4) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$;

5) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$; 6) $\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant\dfrac{2x-3}{4x-1}$.

6.51. Тенгсизликни ечинг:

1) $x^2-3x-4>0$; 2) $x^2-5x-6\leqslant 0$; 3) $x^2\geqslant 16$;
4) $|x^2-7x+5|\leqslant 5$; 5) $|x^2-3x|\leqslant x$; 6) $|x^2-3x|>x$.

6.52. a нинг қандай қийматларида $x^2-3ax+1>0$ тенгсизликдаги исталган x учун бажарилади?

6.53. a нинг қандай қийматларида $x=1$ сони $ax^2+(3a^2+1)x-3>0$ тенгсизликнинг ечими бўлади?

6.54. a нинг қандай қийматида $x^2-3x-4<0$ тенгсизликнинг ҳар бир ечими $x^2-a^2<0$ тенгсизликнинг ечими бўлади?

6.55. a нинг қандай қийматларида $x^2-5x+4\leqslant 0$ тенгсизликнинг ҳар бир ечими $x^2-a^2>0$ тенгсизликнинг ечими бўлади?

Бутун ва рационал кўрсаткичли даража

6.56. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; 2) $\dfrac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$; 3) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$;

4) $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; 5) $\dfrac{a^{-2n}-b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}}\cdot\left(\dfrac{1}{b^{-n}}+\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

6.57. Ифодани соддалаштиринг:

1) $a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^{4}$; 2) $\left(c^{-\frac{3}{7}}x^{-0,4}\right)^{3}\cdot c^{\frac{2}{7}}x^{0,2}$; 3) $\sqrt[10]{c^{3}\sqrt{c^{2}}}$;

4) $\sqrt[3]{y^{2}\cdot\sqrt[4]{y^{-3}}}$; 5) $\sqrt[7]{x^{4}}:\sqrt[14]{x}$; 6) $\sqrt[5]{m^{2}\sqrt{m}}:\sqrt[3]{m\sqrt{m}}$.

6.58. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^{2}+\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^{2}}{\left(n^{-\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}\right)}-2n+\dfrac{4n^{2}}{n-m}$;

2) $\dfrac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^{3}+3\left(\sqrt[3]{a^{4}}-\sqrt[3]{a^{3}b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}-\dfrac{(a-b)^{2}}{2(a+b)}+\dfrac{a+b}{2}$.

6.59. x билан y орасидаги боғланишни аниқланг:

1) $x=t^{\frac{1}{2}},\ y=t^{-\frac{1}{2}}$; 2) $x=t^{\frac{1}{3}},\ y=t^{\frac{1}{6}}$;

3) $x=3t^{\frac{1}{2}},\ y=2t^{-\frac{1}{3}}$; 4) $x=0,5t^{-\frac{1}{2}},\ y=0,4t^{-\frac{1}{2}}$.

Функцияни текшириш ва графигини ясаш

6.60. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $y=|x|$; 4) $y=x^3$;

5) $y=\sqrt{x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 8) $y=\sqrt{1-x^2}$.

6.61. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\dfrac{1}{2x-5}$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$; 3) $y=\sqrt{3x-9}$;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-4x+2}}$; 5) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}$; 6) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

7) $y=\dfrac{3}{x-2\sqrt{x}}$; 8) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-6x+8-2}}$.

6.62. Функцияни текшириб, графигини ясанг:

1) $y=|x-1|+|x|$; 2) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; 3) $y=x^2-6x+3$;

4) $y=|x^2-6x+3|$; 5) $y=x^2-6|x|+3$; 6) $y=|x^2-6|x|+3|$.

6.63. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\dfrac{1}{x+2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x}-3$; 3) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$;

4) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$; 5) $y=\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|$; 6) $y=\dfrac{|x|-2}{|x|-3}$;

7) $y=\left|\dfrac{|x|-2}{|x|-3}\right|$; 8) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

6.1. Сонлар кетма-кетлиги

Арифметик ва геометрик прогрессиялар

6.64. Кетма-кетликнинг дастлабки бешта ҳадини ёзинг:

1) $x_n=2n+3$; 2) $x_n=(-1)^n 2$;

3) $x_n=\dfrac{3n-1}{2n+3}$; 4) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

6.65. Кетма-кетликнинг умумий ҳади формуласини ёзинг:

1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots$; 2) 3, 6, 12, 24, 48, …;

3) $1, \dfrac{2}{101}, \dfrac{4}{201}, \dfrac{8}{301}, \ldots$; 4) $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, -\dfrac{16}{81}, \ldots$.

6.66. Агар a_1, a_2, …, a_n, … кетма-кетликнинг айирмаси d га тенг арифметик прогрессия бўлса,

$$a_n=a_1+(n-1)d, \quad 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}, \quad S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

формулаларни исботланг. Бунда S_n — дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси.

6.67. Агар b_1, b_2, …, b_n, … кетма-кетлик маҳражи q га тенг бўлган геометрик прогрессия бўлса, $b_n=b_1q^{n-1}$, $b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}$,

$S_n = \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ формулаларни исботланг. Бунда S_n — дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси.

6.68. b_1, b_2, ..., b_n чексиз камаювчи прогрессиянинг маҳражи q $(|q|<1)$ бўлса, $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=\dfrac{b_1}{1-q}$ формулани исботланг.

6.69. Арифметик прогрессиянинг дастлабки 10 та ҳадининг йиғиндисини топинг: 1) $a_2=7$; $a_4=11$; 2) $a_3=5$; $a_8=13$; 3) $a_5+a_6=11$.

6.70. a_1, a_2, ..., a_n арифметик прогрессияда $a_1=a$, $a_n=b$ $(a>0$, $b>0)$ бўлса, $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$

йиғиндини a, b ва n орқали ифодаланг.

6.71. -7; 11; 29; .... ва -3; 11; 25; .... арифметик прогрессияларнинг умумий ҳадининг формулаларини ёзинг.

6.72. Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади ва маҳражини топинг:

1) $b_2=7$, $b_3=-1$; 2) $b_3=2$, $b_5=8$;

3) $b_{12}=-131$, $b_{185}=243$; 4) $b_2+b_3=7$, $b_3+b_4=49$.

6.73. 5 ва 25 сонларнинг орасига шу сонлар билан биргаликда геометрик прогрессия ташкил этадиган қилиб, еттита ҳад жойлаштиринг.

6.74. a нинг қандай қийматларида $x^2-5x+4=0$ ва $2x-a=0$ тенгламаларнинг илдизлари геометрик прогрессиянинг учта ҳадини аниқлайди?

6.75. b_1, b_2, ... , b_n, ... чексиз камаювчи геометрик прогрессия бўлса, 1) $b_1+b_2+b_3+\ldots$; 2) $b_2^2+b_3^2+b_3^2+\ldots$;

3) $b_1^3+b_2^3+b_3^3+\ldots$ қаторларнинг йиғиндиларини b_1 ва q орқали ифодаланг.

6.76. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади 0,3 га, йиғиндиси 0,9 га тенг. Прогрессиянинг маҳражини топинг.

6.77. Қаторнинг йиғиндисини топинг:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots;$ 2) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-125+\ldots.$

6.78. Даврий касрни оддий касрга айлантиринг:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) 3, (31); 4) 2,1(4).

6.79. Биринчи ҳади 1 га тенг бўлган учта сон геометрик прогрессияни ташкил этади. Агар бу учта сондан биттасини иккилантириб, берилган тартиб билан олсак, у ҳолда арифметик прогрессия хосил бўлади. Ушбу сонларни топинг.

6.80. Арифметик прогрессиянинг 8-ҳади 60 га тенг. Агар a_1, a_7 ва a_{25} ҳадлари геометрик прогрессияни ташкил этса, шу прогрессиянинг маҳражини топинг.

6.2. Тригонометрик ифодалар

6.81. 1) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2};$ 2) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$

3) $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$ 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-2\sqrt{6},\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

деб олиб, α бурчакнинг қолган тригонометрик функцияларини топинг.

6.82. a нинг қандай қийматларида $\frac{\pi}{6}$ сони $3\sin 6x+2\sin 5x+5\cos 4x--3\sin 3x+2\cos 2x-\sin^2 x=a$ тенгламанинг илдизлари мавжуд бўлади?

6.83. Агар $0<x<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда бирлик айланада

1) $x,\ \pi-x,\ \pi+x, \frac{\pi}{2}-x,\ \frac{\pi}{2}+x;$ 2) $x+2k\pi,\ k\in Z;$

3) $\pm x+2k\pi,\ k\in Z;$ 4) $x+k\pi,\ k\in Z;$

5) $(-1)k+k\pi,\ k\in Z$ бурчакларга мос келувчи нуқталарни топинг.

6.84. Ифодани соддалаштиринг:

1) $1+\sin(\pi-\varphi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$; 2) $1-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$;

3) $1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}2\beta$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$.

6.85. Айниятни исботланг:

1) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1-\cos^2\beta)=\operatorname{tg}^2\beta$;

3) $\frac{\sin x+\cos x\operatorname{tg}x}{\cos x+\sin x\operatorname{ctg}x}=2\operatorname{tg}x$; 4) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 y+1}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 y+1}=\cos 2y$.

6.86. Ифоданинг қиймати y га боғлиқ эмас эканлигини кўрсатинг:

1) $\cos(38°+y)\cos(52°-y)-\sin(38°+y)\sin(52°-y)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{10}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{15}+y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}-y\right)\sin\left(\frac{\pi}{15}+y\right)$.

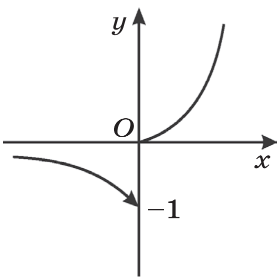
ЖАВОБЛАР

8-синф материалини такрорлаш

0.1. 1) 8; 2) –4; 3) 0,5; 4) 1; 5) 53; 6) 1; 7) $\frac{37}{38}$; 8) $3\frac{9}{20}$; 9) $1\frac{5}{18}$. **0.2.** 1) 30; 2) 21; 3) 48; 4) 6,6; 5) 26; 6) 21; 7) 0,5; 8) 2. **0.4.** 1) $x = 16$; 2) $y = 0,16$; 3) $x = 5\frac{4}{9}$; 4) $z = 0,09$. **0.5.** 1) –0,5; 3; 2) $\varnothing$; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) –11; 2; 5) –1; –0,8; 6) $-\frac{3}{7}$; 2; 7) 8; 4; 8) $\frac{1}{6}$; 9) –1; $\frac{2}{3}$. **0.6.** 1) 2; 3; 2) 1,5; 3) –6; 4; 4) –7; –2; 5) $3a$; $4a$; 6) $-3b$; $-2b$; 7) 1; $\sqrt{2}$; 8) $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{2}$. **0.7.** 1) (–1; 4); 2) $(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2,5]\cup[1; +\infty)$; 4) [–2; 3]. **0.8.** 2) $(-\infty; 0,5)\cup\left(\frac{2}{3}; -\infty\right)$; 4) $(-\infty; -1,5]\cup[0,25; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **0.9.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 2) –3; –2; –1; 0; 3) –2; –1; 0; 1; 2; 4) –2; –1; 0; 1; 2, **0.10.** 1) (–7; –0,25); 2) $(-\infty; 1,5]\cup\left[\frac{5}{3}; +\infty\right]$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4 $\left(-\infty \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{37}}{22}; +\infty\right)$; 5) $(-\infty; -1)\cup(4,5; +\infty)$; 6) $x \neq 0,25$. **0.12.** 1) $(x-4)(x-12)$; 2) $(x+3)(x-4)$; 3) $(x+7)(x-2)$; 4) $(x+8)(x-2)$; 5) $(x+3)(x+9)$; 6) $(2x-1)(x-2)$. **0.13.** 1) $x^2-7x+10=0$; 2) $x^2-x-12=0$; 3) $x^2+9x+14=0$; 4) $2x^2-9x+4=0$; 5) $6x^2-13x+6=0$; 6) $27x^2+12x+1=0$. **0.14.** 1) 3; 2) 55; 3) 6; 4) 3. **0.15.** 1) $x \geqslant 3$; 2) $x \geqslant -3$; 3) $x \geqslant 0,25$; 4) $x > 3$; 5) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$. **0.16.** 1) $\sqrt{14} < \sqrt{6}+\sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{15}-2 < \sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10} > \sqrt{20}-\sqrt{5}$. **0.17.** 1) $\left(x-\sqrt{3}\right)\times$ $\times\left(x+\sqrt{3}\right)$; 2) $\left(2a-\sqrt{5}\right)\left(2a+\sqrt{5}\right)$; 6) $\left(\sqrt{y}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{5}\right)$; 7) $\left(2-3\sqrt{b}\right)\left(2+3\sqrt{b}\right)$. **0.18.** 1) $\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2}$; 3) $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{4a-9b}$; 4) $\frac{2a+3b+2\sqrt{6ab}}{2a-3b}$. **0.20.** 1) $\frac{1}{3}$, 3; 2) –11; –3; 3) –6; 14;

4)-4; $-1,2$; 5) $-0,25$; 6) 17. **0.21.** 1) $(x-1)(2x-3)$; 2) $(x+1)(2x-7)$; 3) $(y-1)(5-y)$; 4) $(5y-3)(y+1)$; 5) $(x-5)(x-6)$; 6) $(1-x)(x+6)$. **0.22.** 1) $(x-1)(4x-5)$; 2) $(4a-3)^2$; 3) $3(x-2)^2$; 4) жіктелмейді; 5) $(x+1)(x-2)$; 6) $(4a+1)(1-12a)$; 7) $(y+1)(11-3y)$; 8) $\left(y-\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(y-\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$; 9) $(4x+0,2)(x+0,2)$. **0.27.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 7. **0.28.** 1) 1; 2) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) 4; 4) 5. **0.29.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{10}{7}$; 4) 0. **0.30.** 1) ±2; ±5; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\sqrt{0,6}$; 4) $\pm\sqrt{3,5}$; 5) ±3; $\pm a$; 6) ±2; $\pm3a$. **0.31.** 1) -1; -5; 0; -6; 2) $-0,5$; 1,5; 3) 4; -2; 4) 0; -4. **0.32.** 1) 1; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2) -3, $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2; 3) -1; $2\pm\sqrt{3}$; 4) -1; $\frac{1}{3}$; 3; 5) $\frac{6+\sqrt{31\pm\sqrt{12\sqrt{31}-33}}}{10}$; 6) $-1\pm\sqrt{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

0.33. 1) 7; 2) 6; 3) 1; 5; 4) 6; 5) -1; 6) 34; 2. **0.34.** 1) -1; 2) $(-\infty; -3]$; 3) -2; 8; 4) [2: 4]. **0.35.** 1) 0; 1; 2) ±1; 3) 4; 12; 4) 0,2. **0.36.** 1) $(-2; 0)$; 2) $(0,75; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $(-7; -5]\cup$ $\cup[0; +\infty)$; 6) $\varnothing$. **0.37.** 1) $x+\frac{8}{7}$; 2) $\frac{5}{2a+9}$; 3) $\frac{b-3}{b+5}$; 4) $-\frac{y+4}{y+9}$; 5) $-\frac{c+1}{c+2}$; 6) $\frac{5a+3}{14-11a}$. **0.41.** 1) $x(x-2)(x+2)$; 2) $x(x-5)^2$; 3) $(x+2)\times$ $\times(x^2-2x+4)$; 4) $y(y+6)^2$; 5) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2+3\right)$; 6) $(x-1)\times$ $\times(x+1)(x+10)$; 7) $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1$; 8) $\left(z-\sqrt{2}\right)\cdot$ $\left(z+\sqrt{2}\right)(z-8)$. **0.44.** 6) $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$ оралиқларда манфий, $(0;6)$ оралиқларда мусбат қиймат қабул қилади. **0.45.** 8) $(-\infty; +\infty)$ аниқланиш соҳаси, $(-1;+\infty)$ — қийматлар тўплами; ноли $x = 0$; узилиш нуқтаси $x = 0$; $(-\infty; 0)$ оралиқда $-$манфий, $(0; +\infty)$ оралиқда мусбат қабул қилади. $(-\infty; 0)$ оралиқда камаяди, $(0;+\infty)$-оралиқда ўсади; экстремумлари йўқ (1-расм). **0.46.** $a\in[-2;0]\cup\{1\}$. **0.47.** 1) $(-1; 2)$; 2) $(1; 4)$. **0.48.** 1) тенг кучли эмас; 2) тенг кучли; **0.49.** 1) 0; 2) -8; 3) $\varnothing$; 4) -27.



1-расм

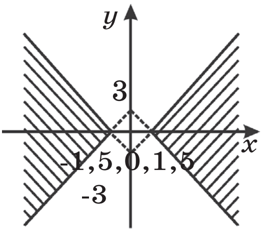
0.50. 1) $-0{,}25$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) ±4; 0; -3; 2; 4) ±5; 0; -4; 7. **0.51.** 1) 2; $-\sqrt{5}$; $b=-40$. **0.52.** $x^4-5x^2+6=0$. **0.54.** $a=-1$. **0.55.** $[13; +\infty)$. **0.58.** 1) $\sqrt{6}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}+2$; 5) $\sqrt{5}-2$; 6) $2\sqrt{3}+2$.

1-бўлим

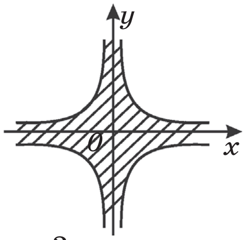
1.3. 2) $k=-0{,}7$; 6) $k=\frac{5}{3}$. **1.6.** 1) 3; 4) 2. **1.8.** 2) $R=2{,}5$; $C(-1{,}5; 2)$; 3) $R=3{,}5$; $C(0; -3{,}5)$. **1.12.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{3}{4}; 3\frac{7}{8}\right)$; **1.13.** 2) $x=2$ және $y=-3$. **1.19.** $n=-\frac{3}{4}$; $m=-3$. **1.22.** 1) (3;1); 3) (5; 0), (−3; 2). **1.23.** 1) (3; −2); 3) (−2; 1). **1.24.** 2) (3; −1); (1; −3); 3) (7; 1); (11; 5). **1.25.** 2) (7; 5), (−5; −7); 3) $\varnothing$. **1.26.** 2) (6; 2), (−4; −3). **1.27.** 1) $\left(-\frac{10}{3}; \frac{11}{3}\right)$; (2; 9). 3) $\varnothing$. **1.28.** 3) (±4; ±7), (±7; ±4). **1.29.** 1) (0; 1). **1.30.** 3) (2; 3), (3; 2). **1.31.** 1) (±20; ±5); 2) $\varnothing$. **1.32.** 1) (4; 8), (8; 4). **1.33.** 1) (2; 2). **1.34.** 1) (4; 9), (9; 4). **1.35.** 1) (1; 0), (0; 1); 3) (2; 0), (0; −2). **1.36.** 2) (±1; ±2), (±3,5. ±0,5). **1.37.** 2) (±8; ±4), (±7; ±1). **1.38.** 1) (−1; −1), (−1; 2), (2; −1). **1.39.** 1) $a=\pm6$; 2) $a=\pm2$. **1.40.** 0; 2. **1.43.** 180 см^2. **1.44.** 4 та ва 5 олма. **1.45.** 24 см^2. **1.46.** 73. **1.47.** 2 кг, 5 кг. **1.48.** 25 тг, 5 тг. **1.49.** 4 кун. **1.50.** 4 км/соат. **1.51.** 9240 га, 6930 га. **1.52.** 10 та товуқ, 5 та қўй. **1.53.** 11 та уй, 14 та том. **1.54.** 12 км/соат, 10 км/соат. **1.55.** 20 км/соат, 4 км/соат. **1.56.** 15 га, 20 га, 25 га. **1.57.** 5 км/соат. **1.58.** 3 соат. **1.59.** 24 та деталь. **1.60.** 28 кун, 21 кун. **1.61.** 18 соат, 24 соат. **1.62.** 72 га, 60 га; 108 га, 120 га. **1.63.** 25 кг. **1.64.** $\frac{1}{10}, \frac{1}{12}$. **1.68.** 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+y=4$; 3) $(x-2)^2+(y-3)^3=9$.

1.78. 3) Фигура $3x-2y+10\geqslant0$; $3x+5y+17\geqslant0$; $x-4y+10\geqslant0$; $x-4y+$ $+10\geqslant0$; $3x+2y-12\leqslant0$, $4x-3y-16\leqslant0$ тенгсизликлар системаси билан аниқланади. **1.79.** 3) 2-расм. **1.80.** 4) 3-расм. **1.82.** 2) 4-расм.

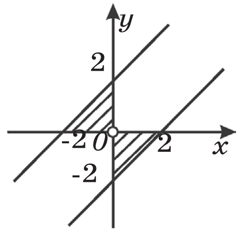
1.83. 1) (3; 8), (8; 3); 2) (±3; ±4); 3) (8; 5), (−5; −8); 4) $\left(4 \pm 4\sqrt{2}; -4 \pm 4\sqrt{2}\right)$. **1.84.** 1) (−∞; 0,5); 2) (−∞; −0,8); 3) (−∞;2).



2-расм



3-расм



4-расм

2-бўлим

2.1. 1) 16; 2) 60. **2.2.** 60. **2.3.** 1) 11; 2) 17. **2.4.** 8. **2.5.** 15. **2.6.** 32. **2.7.** 2) 10. **2.8.** 1) 216; 2) 120. **2.9.** 1) A_8^5; 2) 8! **2.10.** 1) 720; 2) 120. **2.11.** 300. **2.12.** 45. **2.13.** 120. **2.14.** C_{32}^5. **2.15.** 588. **2.17.** 888. **2.19.** 1) 300; 2) 190; 3) 105. **2.20.** 1) 1024; 2)768. **2.21.** 1) 12; 2) 5. **2.22.** A_{35}^4. **2.23.** 1) $9\cdot10^3$; 2) $9\cdot A_9^3$. **2.24.** 720. **2.25.** 60. **2.26.** $3!\cdot C_{15}^3$. **2.27.** 220. **2.28.** $C_n^2 \cdot C_m^2$. **2.29.** 560. **2.30.** 126. **2.31.** 30. **2.34.** 32. **2.35.** Математик индукция методидан фойдаланиш керак: $n=3 \Rightarrow 2$ турли усул билан жойлаштириш мумкин, яъни $2 = 2! = \dfrac{3!}{3} = \dfrac{P_3}{3}$; $n=k \Rightarrow N(k)=\dfrac{P_k}{k}$ тўғри бўлсин. Энди $n=k+1$ бўлса, стол атрофида ўтирган k та киши орасидан $k+1$ кишини k хил усул билан ўтқазиш мумкин. У ҳолда $N(k+1)=N(k)\cdot k=(k-1)!\cdot k=k!=\dfrac{(k+1)!}{k+1}=\dfrac{P_{k+1}}{k+1}$. **2.36.** 3^m. **2.37.** 5!5!

2.38. 1) 13; 2) 26. **2.39.** $3^5=243$. **2.40.** $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3$. **2.41.** $C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10}$. **2.42.** 7. Ўйиндан чиқиб кетган иккита ўйинчининг ўзаро учрашиб улгурмаслигини кўрсатинг. **2.44.** 1) Агар $m<n \Rightarrow (-1)^m C_{n-1}^m$; агар $n=m \Rightarrow 0$; 2) 2^{n-1}; 3) 2^{n-1}. **2.45.** 1) 13; 2) 35.

3-бўлим

3.2. 3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$. **3.3.** $a_n=3n$. **3.4.** $7n$. **3.5.** $4n+1$. **3.6.** $5n+2$. **3.7.** 1) $4n-3$; 2) $(-1)^{n-1}\cdot 2$; 3) $\frac{1}{n^2}$; 4) $\frac{1}{3n+1}$. **3.8.** $a_{10}=\frac{1}{21}$;

$a_{n+1}=\frac{1}{2n+3}$ $\quad a_{2n}=\frac{1}{4n+1}$. **3.10.** 1) $0<a_n<1$; $a_{n+1}-a_n<0$, кетма-кетлик камаювчи, чекланган; 9) чекланган, ўсувчи. **3.12.**1) $x_n=3\cdot 2^{n-1}$; 3; 6; 12; 24; ... **3.16.** $x_{n+1}-x_n=\frac{a-2b}{(b\cdot n+b+1)(b\cdot n+1)}$

. Агар $a>2b$ бўлса, $x_{n+1}>x_n$ ўсувчи; $a<2b$ бўлса, $x_{n+1}<x_n$ камаювчи; $a=\ =2b \Rightarrow x_n=2$ — ўзгармас кетма-кетлик. **3.17.** 1) $\frac{p+q}{p-q}$. **3.18.** 1) $(-1,5;\ 0,5)$; 2) $(8;\ -6)$. **3.19.** 2) $[-4;\ 7]$. **3.20.** $y=-\frac{18}{x}$. **3.21.** 3) $n=1$ бўлса, $S_1=1^3=1$,

$\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$; $n=k$ учун $S_k=1^3+2^3+\ldots+k^3=\ =\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ тўғри бўлсин. У ҳолда $n=k+1$ учун $S_{k+1}=S_k+(k+1)^3=$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Шуни исбот этиш керак эди. 10) $n=1\Rightarrow\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}$; $n=k\Rightarrow S_k=\frac{1}{1\cdot 5}+$ $+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}$ тўғри бўлсин. У ҳолда

$n=k+1\Rightarrow\ \Rightarrow S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$

$=\frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$. **3.22.** 6) $n=1\Rightarrow 1+6+11+6=24\,\vdots\,24$. $n=k\Rightarrow k^4+6k^3+11k^2+6k\,\vdots\,24$ бўлсин, $n=k+1\Rightarrow(k+1)^4+6(k+1)^3+11\times$

$\times(k+1)^2+6(k+1)=(k^4+6k^3+11k^2+6k)+4(k+1)(k+2)(k+3)\vdots 24$. Чунки $k+1$, $k+2$, $k+3$ кетма-кет жойлашган учта соннинг кўпайтмаси ҳам 2 га, ҳам 3 га, яъни 6 га бўлинади. **3.25.** $a_n=(2n-1)^2$ формула билан аниқланишини кўрсатиш етарли. **3.27.** $n=1\Rightarrow 6+20+24=50\vdots 25$. $n=k\Rightarrow 6^k+20k+24\vdots 25$ тўғри бўлсин. У ҳолда $n=k+1\Rightarrow 6^{k+1}+20(k+1)+24=6\cdot 6^k+20k+20+24=(6^k+20k+24)+5\cdot 6^k+20=(6^k+20k+24)+5\cdot(6^k+4)\vdots 25$, чунки 6^k+4 сони 0 билан тугайди. **3.28.** 4) $n=2\Rightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\dfrac{2,41}{1,42}>1,6>\sqrt{2}$.

$n=k\Rightarrow S_k=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ тўғри бўлсин. Онда $n=k+1\Rightarrow$

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}>\frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}.$$

3.31. $[-1;0)\cup(0;2]$. **3.32.** 1) $a_5=3$; 2) $a_5=15$. **3.33.** 1) 10; 14; 18; 22; 2)1,7; 1,5; 1,3; 1,1. 3) −3,5; −2,9; −2,3; −1,7; 4) $\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{3},\dfrac{11}{6}$.

3.34. 1) $a_{11}=4$; 2) $a_{20}=8,5$; 3) $a_5=32$; 4) $b_{21}=-24,2$. **3.35.** 1) $a_5=-5$; $a_n=\dfrac{5-4n}{3}$; 2) $a_5=-2,9$; $a_n=3,6-1,3n$. 3) $a_5=-2$; $an=1,5n-9,5$. 4) $a_5=-5$. $a_n=15-4n$. **3.36.** 2) $a_{11}=-6,7$; 4) $a_{61}=-\dfrac{109}{6}$. **3.37.** 1) 10; 2) 0,6; 3) $-\dfrac{92}{65}$. **3.38.** 1) 15; 2) 7. **3.39.** 2) 2,5; 2,8; 3,1; 3,4; 3,7; 4.

3.40. 1) $d=1,5$; $c_1=21$; 2) $d=-2$; $c_1=38$. **3.41.** 1) бўлмайди; 2) $a_{41}=-28$.

3.42. 1; $2\dfrac{2}{3}$; $4\dfrac{1}{3}$; 6; $7\dfrac{2}{3}$; $9\dfrac{1}{3}$; 11; $12\dfrac{2}{3}$; $14\dfrac{1}{3}$; 16. **3.43.** 1) $a_1=0$; $d=1\dfrac{1}{3}$; 2) $a_1=9,7$; $d=-1,4$. **3.44.** 1) $a_{23}=156$; 2) бўлмайди. **3.45.** 1) $n\leqslant 30$; 2) $n>30$. **3.46.** 1) ҳа; 2) йўқ; 3) ҳа; 4) йўқ; 5) ҳа; 6) ҳа. **3.47.** $a_n=p+q-n$. **3.48.** 25 та умумий ҳади мавжуд. **3.49.** $a_1=1$, $d=3$; $a_{20}=58$. **3.50.** $d=-2ax$. **3.51.** 1) йўқ; 2) ҳа; $d=1+\sqrt{2}-\sqrt{5}$. **3.52.** Мумкин эмас. Таркибида битта тўла квадрати бўлган арифметик прогрессиянинг чексиз кўп ҳадлари тўла квадрат бўлади. **3.55.** 1) ±1; ±4. 2) ±1. **3.56.** 1) 6; 12; 24; 48; 4) $0,4; 0,4\sqrt{2}; 0,8; 0,8\sqrt{2}$. **3.57.** 1) $x_7=0,25$; 2) $x_8=-\frac{10}{27}$; 3) $x_{10}=-32$; 4) $x_6=0,04$. **3.58.** 1) $a_7=1458$; $a_n=2(-3)^{n-1}$; 3) $a_7=-\frac{5}{8}$, $a_n=-\frac{5}{2^{n-4}}$.

3.59. 2) $a_6=54$; $a_n=\frac{3^{n-3}}{2^{n-7}}$; 4) $a_6=0,001$; $a_n=(-1)^n\cdot10^{3-n}$. **3.60.** 3) $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=5$, $b_6=-\frac{5}{32}$, $b_{n+3}=5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. **3.61.** 2) $\pm\frac{3}{5}$. **3.62.** 1) 1) $b_1=\frac{1}{81}$; 2) $b_1=\frac{56}{125}$; 3) ±3; 4) $\pm\frac{3}{5}$; 5) $\pm0,2$; 6) $\varnothing$. **3.63.** $C_2=\pm1$; $C_3=\frac{1}{2}$. **3.64.** 1) 5; 2) 8; 3) 5; 4) 4. **3.65.** Мумкин эмас. **3.66.** 1; ±4; 16; ±64; 256. **3.67.** 50; 10; 2 ёки 50; -10; 2, ёки 2; 10; 50, ёки 2; -10; 50. **3.68.** 3; ±6; 12; ±24; ... . **3.69.** $q=2$ ёки $q=\frac{1}{2}$. **3.70.** 8; 12; 18; 27; ... ёки 27; 18; 12; 8; ... .

3.71. 15; 45; 135; ёки 125; -175; 245. **3.72.** $\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_1}$ тенгликни кўрсатиш етарли. **3.73.** 1; 3; 9 ёки $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$. **3.74.** Бажарилади.

3.75. 1) 7^{n-1}; 2) $2\cdot5^n$. **3.76.** 1) $\frac{a+2}{a+5}$; 2) $\frac{b+1}{b+7}$. **3.77.** 1) -95; 2) -65; 3) 100; 5) 100; 6) 7,5. **3.78.** 1) 15,5; 2) 624,8; 3) 33; 4) $\frac{422}{3}$; 5) -22. 6) $\frac{11}{16}$; 7) -484. 8) 11. **3.79.** 1) 472,5; 2) 360; 3) 60; 4) $-52,5$.

3.80. 1) $q=3\Rightarrow S_6=-\frac{728}{27}$; $q=-3\Rightarrow S_6=\frac{364}{27}$; 3) $q=\frac{1}{5}\Rightarrow S_6=\frac{3906}{25}$; $q=-\frac{1}{5}\Rightarrow S_6=\frac{2604}{25}$. **3.81.** 1) 305; 2) 22,5. **3.82.** 1) $9(3^{10}-1)$; 2) $-\frac{3069}{1024}$. **3.83.** 1) 5050; 2) 12760. **3.84.** 1) $n(n+1)$; 2) n^2. **3.85.** 270.

3.86. 1) 6633; 2) 3402. **3.87.** $b_1=2$. **3.88.** $q=3\Rightarrow S_5=121$; $q=-\frac{3}{4}\Rightarrow S_5=\frac{181}{16}$. **3.90.** 100. **3.91.** 1) $\frac{3^n-1}{2}$; 2) $2(2^n-1)$; 3) $\frac{1-(-x)^n}{1+x}$; 4) $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; 5) $\frac{2^n-(-1)^n}{2^n\cdot 3}$; 6) $\frac{1-(-x)^{3n}}{1+x^3}$.

3.92. 1) 50; 2) 35; 3) −2,5; 4) 781; 5) 93; 6) 1089. **3.93.** 2; 5; 8 не 26; 5; −16. **3.94.** $q=-2$. **3.95.** $q=\frac{1}{3}$. **3.96.** $\frac{a^2\left(1-q^{2n}\right)}{1-q^2}$.

3.97. $\sqrt{\left(a_1a_n\right)^n}$. **3.98.** $n=10$. **3.99.** $\frac{1}{9}\left[\frac{10\left(10^n-1\right)}{9}-n\right]$.

3.102 $S_n=3^n+(n+1)^2-2$. **3.103.** 1) $a_n=n^2$. 2) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

3.106. 1) чегараси 0, табранмали; 2) $-1<y_n<1$ ўсувчи, чунки чегараланган. **3.107.** 1) $\frac{12011}{9900}$; 2) $\frac{4553}{16650}$; 3) $-\frac{12}{5}$; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{4}{11}$.

3.108. 1) $\frac{7}{30}$; 2) $\frac{20}{11}$; 3) $\frac{357}{1100}$; 4) $\frac{989}{606}$. **3.110.** 1) $\frac{6553}{6734}$; 2) $\frac{3}{73}$.

3.110. 1) 0,5; 2) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$; 6) 0,5. **3.111.** 1) 0,5; 2) $\frac{4}{35}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{5}{12}$. **3.112.** 1) $|x|<1$; 2) $|x|<1$. **3.114.** $\sqrt{2}\le x_n<2$ чегараланган, $x_n<x_{n+1}$ ўсувчи. Кетма-кетликнинг чегараси a бўлсин. У ҳолда $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}$ $\Rightarrow$ $a^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}=2+a$ $\Rightarrow$ $a^2-a-2=0\Rightarrow a=2$. **3.115.** 1) 0,7; 2) −0,8. **3.116.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{3}{8}$; 3) мумкин эмас. **3.117.** $-6\left(\sqrt{3}+1\right)$. **3.118.** $q=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow S=6$; $q=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow S=12\left(3+2\sqrt{2}\right)$. **3.119.** $S=96$. **3.120.** $a_n=\dfrac{32}{3^{n-1}}$. **3.121.** $a_1=14$; $q=0{,}75$. **3.122.** 3; $\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{3}{49}$; ... **3.123.** a_1; $\dfrac{a_1}{11}$; $\dfrac{a_1}{121}$; ... . **3.125.** $a_1=2$; $q=\dfrac{1}{3}$.

3-бўлимга доир қўшимча машқлар

3.126. 2) 1; −1; 1; −1; 1; ... **3.127.** 1) $3n-2$; 2) $4n^2$; 3) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. **3.128.** 1) $1<a_n$, ўсувчи, қуйидан чегараланган; юқоридан чегараланган; чегараланмаган; 2) $0<a_n\leqslant 1$, Чегараланган, $a_{n+1}<a_n$ камаювчи; 3) $-1\leqslant a_n\leqslant 1$, чегараланган, тебранмали. **3.132.** 1) $8-2n$; 2) $15-10n$; 3)$-n$; 4) $10-n$. **3.133.** 1) $\dfrac{8^{n-1}}{7^{n-2}}$; 2) $(\pm 1)^{n-1}\cdot 3^{2-n}$. **3.134.** 1) $a_1=2$, $d=3$ не $a_1=14$, $d=-3$. **3.135.** 2) $a_1=0{,}5$, $q=-0{,}5$. **3.138.** $a_1=1$, $d=2$. **3.140.** $a=\pm 5$, $b=\pm 10$, не $a=\pm 5$, $b=\pm 10$. **3.141.** 2) Мумкин, $q=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

3.142. 2,1. **3.143.** 1) $\dfrac{a^2}{1-q^3}$; 2) $\dfrac{a^3}{1-q^3}$; 3) $\dfrac{a^2(1+q)^2}{1-q^4}$; 4) $\dfrac{a^2(1-q)^2}{1-q^4}$; 5) $\dfrac{2a}{2-q}$; 6) $\dfrac{a-1+q}{1-q}$; 7) $\dfrac{q}{1-q}$; 8) $\dfrac{a^2\left(1+q+q^2\right)^2}{1-q}$. **3.144.** 1) $x=-1$; 2)$\varnothing$. **3.145.** 1) $\dfrac{\left(c^{2n}-1\right)\left(c^{2n+2}+1\right)}{c^{2n}\left(c^2-1\right)}+2n$; 2) $(n+1)!-1$; 3) $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$ тенгликдан фойдаланинг. $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$. **3.147.** 1) $\dfrac{n}{7n+4}$; 2) $\dfrac{n}{4n+3}$. **3.148.** 1) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=1+x^2$. **3.149.** Агар $\{a_n\}$ ўзгармас ишорали бўлса, у ҳолда $\{|a_n|\}$ аарифметик прогрессия бўлади. Агар $\{a_n\}$ ишоралари ўзгарадиган кетма-кетлик бўлса, $\{|a_n|\}$ арифметик прогрессия бўлмайди. **3.150.** Бўлади.

4-бўлим

4.2. 1) II; 2) IV; 3) III; 4) IV; 5) I; 6) IV. **4.3.** 1) IV; 2) III; 3) II; 4) IV; 5) III; 6) III. **4.4.** $\frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}, \frac{50\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$. **4.5.** 60°; −120°; 945°; 22°30′; $\frac{540°}{\pi}$; $\frac{18000°}{\pi}$; $\frac{144°}{\pi}$; 450°. **4.6.** $\frac{3\pi}{4}$.

4.7. 12π. **4.8.** 45°; 60°; 75° ёки $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$. **4.9** 1) 45°; 45°; 90° ёки $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$; 2) 30°; 60°; 90° ёки $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. **4.10.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{7\pi}{9}$; 6) $\frac{8\pi}{9}$. **4.11.** 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{4}$. **4.13.** 1) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$; 2) $\frac{\pi}{4}+2k\pi; k\in Z$; 3) $\frac{3\pi}{4}+2k\pi; k\in Z$; 4) $\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$. **4.14.** 1) $n\cdot 360°$ ёки $2n\pi$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ ёки $-90°+n360°$; 8) $-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ ёки $-45°+$ $+n360°$, $n\in Z$. **4.15.** 10π рад/сек. **4.16.** 1) 1; 6; 2) −1; $-\frac{1}{4}$; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) $\varnothing$. **4.18.** 1) $x(x-1)(5x+2)$. **4.19.** 0; 2. **4.20.** 1) $\sin 0°=0$; $\cos 0° = 1$. **4.21.** 1) топилади; 2) топилади; 3) йўқ, топилмайди; 4) топилади. **4.22.** 1) ҳа; 2) йўқ; 3) йўқ; 4) ҳа. **4.23.** 1) йўқ; 2) топилади; 3) йўқ; 4) топилади. **4.24.** 1) 2,5; 2) 1,5; 3) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}$. **4.25.** 1) $-\cos^2\alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) $\sin^2\alpha$. **4.27.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.28.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 7; 3) 1; 4) $3\sqrt{3}$; 5) $2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{3}$.

4.29 1) −1; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $1-\sqrt{3}$; 4) 1. **4.30.** 1) 1; 2) $\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta$; 3) $\mathrm{ctg}^6\alpha$.

4.31. 1) $\frac{17}{4}$; 3) $\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$. **4.32.** 2) $-2-2\sqrt{2}$.

4.34. 1) −0,5; 2) −0,5. **4.36.** 2) $(-\infty; 1]\cup[1{,}5; +\infty)$; 3) $\varnothing$.

4.38. 10) $\sin(-7{,}3) = -\sin 7{,}3 < 0$; $\cos(-7{,}3) > 0$; $\mathrm{tg}(-7{,}3) < 0$; $\mathrm{ctg}(-7{,}3) < 0$. **4.39.** 1) «+»; 6) «−»; 9) «+». **4.40.** 1) I; 2) IV; 3) II; 4) IV; 5) I; 6) III. **4.41.** 1) I; III; 2) I ; II; III; IV; 3) I; II. **4.43.** 1) жуфт; 2) жуфт ҳам тоқ; 3) жуфт; 4) жуфт; 5) жуфт. **4.44.** 1)тоқ; 2) жуфт; 3) тоқ; 4) тоқ; 5) тоқ; 6) жуфт. **4.45.** 1) 0,5; 2) 4π; 3) 3; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) π; 6) 3π. **4.46.** 1) «+»; 2) «+»; 3) «−»; 4) «+». **4.47.** 1) жуфт; 2) тақ; 3) жуфт; 4) тоқ; 5) жуфт; 6) УКФ; 7) жуфт; 8) жуфт; 9) УКФ; 10) тоқ; 11) тоқ; 12) тоқ. **4.48.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 0; 4) 0; 5) $\sqrt{3}$; 6) −0,5; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.50.** 2) II ва III; 4) I ва III. **4.51.** 1) $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{2}+n\pi$; $n\in Z$; 6) $(2n+1)\pi$; $n\in Z$. **4.52.** Мусбат. **4.53.** 1) 0; 2; 2) 0; 2; 3) −1; 5; 4) −1; 1; 5) 0; 7; 6) −3; 2. **4.54.** 1) Бажарилмайди, чунки $\sin\alpha=1$ ва $\cos\alpha=1$ тенгликни қаноатлантирувчи α бурчак топилмайди. **4.55.** 1) $f(x)=\sqrt{|x|}$; 4) $f(x)=\frac{1}{1-|x|}$. **4.56.** 2) $f(x)=-x\ |x|$; 3) $f(x)=x(|x|-2)$. **4.57.** 2. **4.58.** 1) 1; 2) π; 3) π; 4) 2π; 5) π. **4.59.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) йўқ. **4.60.** 1) [1; 3); 2) $(0;\ 1]\cup[2;4{,}5)$. **4.61.** 1) $\cos\alpha$; 4) $\sin\alpha$; 6) $\sin\alpha$; 9) $-\cos\alpha$. **4.62.** 2) $\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{7}$; 3) $-\cos 0{,}1\pi$.

4.63. 1) $-\mathrm{ctg}\,47°$; 2) $-\sin 2°$; 3) $-\sin 40°$; 4) $\sin 10°$.

4.64. 2) $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{4}=\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4}=-1$.

4.65. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) −0,5. **4.66.** 1) −0,5; 2) $-\sqrt{3}$; 3) −1; 4) −0,5; 5) −1; 6) −0,5. **4.67.** −1,1. **4.68.** 1) 4; 2) −1. **4.69.** $8-4\sqrt{3}$. **4.71.** 1) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 5) 1. **4.72.** 1) 4; 2) 4; 3) 0; 4) 0. **4.74.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **4.75.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{12}$; 2) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0;

4) 0. **4.77.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ 2)\cup(2{,}5;+\infty)$; 2) $\left(-7;-\dfrac{7}{3}\right]\cup(-1;\ 1]$.

4.78. 1) $\dfrac{1}{\sin\beta}$; 2) $-\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$; 3) $\operatorname{ctg}\gamma$; 4) $\dfrac{1}{\sin^2\theta}$; 5) $-\sin^2\alpha$; 6) $-\sin^2\alpha$.

4.79. 1) 0; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) -1; 4) $\dfrac{1}{\cos x}$; 5) $-2\cos\alpha$; 6) $-\cos^2 u$; 7) $\cos y$;

8) $-\operatorname{tg}x$. **4.80.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 1; 5) $\dfrac{1}{3}$; 6) 1. **4.83.** 1) 2; 4) 4. **4.84.** 1) $\dfrac{15}{8}$;

2) $\dfrac{6-3\sqrt{2}}{4}$; 3) $\dfrac{12-4\sqrt{3}}{9}$; 4) $\dfrac{14+7\sqrt{3}}{8}$. **4.85.** 1) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\cos^2\alpha$. **4.86.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 3) 1; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$.

4.87. 1) $x^2+y^2=25$; 2) $25x^2+9y^2=225$; 3) $x^2-2y=1$. **4.89.** 1) $\dfrac{1}{9}$;

2) $\dfrac{3}{7}$; 3) $\dfrac{6}{17}$; 4) 20. **4.90.** 1) $-\dfrac{4}{7}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) 0; 4) $-\dfrac{5}{12}$. **4.93.** $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$,

$\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$. **4.96.** 1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin x)$; 2) $\dfrac{1}{2}\cos y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin y$;

3) $\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$; 5) $\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$. **4.97.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **4.98.** 1) $\cos 3x$;

2) $\cos 4x$; 3) $\sin 4\beta$; 4) $\sin 5\alpha$. **4.99.** 1) $\sin x\,\cos y$; 2) $\cos x\,\cos y$;

3) $\sin\beta\,\cos\alpha$; 4) $-\sin\alpha\,\sin\beta$. **4.100.** 1) $\operatorname{tg}5x$; 2) $\operatorname{tg}3x$; 3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$;

4) 1; 5) 0; 6) 0. **4.101.** 1) $\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $2+\sqrt{3}$. **4.104.** 1) $-\dfrac{33}{65}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\dfrac{1519}{720}$.

4.106. 1) $\dfrac{77}{85}$, $\dfrac{84}{85}$; 2) 0; $\dfrac{1519}{1681}$. **4.107.** 1) $-\dfrac{4}{5}$; 3) $\dfrac{\pi}{2}$. **4.110.** 1) $-\sqrt{2}$,

$\sqrt{2}$; 2) -2; 2; 3) -2; 2; 4) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 5) -5; 5; 6) $-\sqrt{29}$; $\sqrt{29}$.

4.111. 1) 1,5; 2) 1,5; 3) 0; 4) 0; 5) $\operatorname{tg}^2 y$; 6) -1. **4.112.** 1) $\sin\alpha$;

4) cosα−sinα. **4.113.** 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$. **4.114.** 1) $\cos 4x$; 3) 2; 5) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$. **4.115.** 2) $\cos^2 2x$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 6) cosα. **4.116.** 1) 2cos20°; 4) cos18°. **4.117.** 1) $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{24}{7}$; $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$; $\operatorname{ctg}2=\frac{7}{24}$. **4.118.** $\sin 2\alpha=-\frac{336}{625}$; $\cos 2\alpha=-\frac{527}{625}$; $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{336}{527}$. **4.119.** 1) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=5$; 4) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$. **4.120.** 1) 1; 2) $\sin\ 3x$; 3) 0; 4) $\sin\ 3x$. **4.121.** 1) $\operatorname{ctg}^2 21°$; 2) $\cos^2 x$; 3) $-\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}$; 4 $\frac{\sin\frac{x}{2}-1}{\sin\frac{x}{2}+1}$ **4.125.** −2,25. **4.124.** 1) 1; 2) $\frac{60}{61}$. **4.125.** 1) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-2\sqrt{2}$; 4) 2; 5) 1; 6) 1. **4.127.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.129.** 4) $\sqrt{3}$ sinα; 6) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. **4.130.** 1) 2 sin20° · cos5°. **4.133.** 4) $-\sin(x+y)\sin(x-y)$. **4.135.** 3) $\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x}$; 4) $\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\alpha}$. **4.136.** 1) $4\cos\frac{\beta}{4}\times\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\frac{2\sqrt{2}\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\beta}$. **4.137.** 1) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$; 3) $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}$; 4) $\frac{\sin 3y}{\sin y}$; 5) $\cos 2x$; 6) $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}y$. **4.138.** 1) 0; 2) 0. **4.139.** 2) $2\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. **4.141.** 1) 1. **4.144.** 2) $4\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$. **4.145.** 1) $4\sin\frac{5\gamma}{2}\cos\gamma\cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $-4\cos 5\gamma\cdot\sin 2\gamma\times$

$\times\sin\gamma$. **4.146.** 1) $-\frac{32}{27}$; 2) $-\frac{28\sqrt{5}}{125}$. **4.148.** 2) $\sin\alpha\sin4\gamma$; 3) $-\sin2\varphi\times$ $\times\sin4\beta$; 6) 1; 7) 1. **4.149.** 4) $\mathrm{tg}^8\beta$; 5) $\mathrm{ctg}3\varphi$; 6) $\mathrm{tg}5\varphi$; 10) $8\cos^4 2\alpha$. **4.150.** 1) 2; 2) 4; 3) $2\sqrt{3}$; 7) $1-p^2$. **4.151.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ бўлса, $\min A=-6$; $x=k\pi$ бўлса, $\max A=2$. **4.152.** 3) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **4.153.** 4) $-\cos^2 2\alpha$. **4.156.** 2) 1. **4.161.** 2. **4.162.** 0,5. **4.165.** $4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}$. **4.166.** 2, $-\frac{1}{3}$. **4.167.** 1) $4\cos\alpha\cos2\alpha\cos6\alpha$; 2) $tg\frac{5x}{2}$. **4.170.** Ҳа, бўлади: $T=\pi$. **4.172.** $\cos\varphi$.

5-бўлим

5.1. 3) Қутидан оқ ёки қизил ошиқ олинади. **5.3.** 5) $BC=\{A_4\}$; 12) $\{A_3\}$. **5.4.** 4) $\overline{A}=\{A_1, A_2, A_6\}$. **5.5.** 1) $A\subset C$; $B\subset C$. **5.8.** 2) B. **5.10.** 2) Камида битта ютуқ чиқди. **5.11.** 1) $A\subset B$, $A\subset C$. **5.12.** 8) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$. **5.13.** 2) BC. **5.14.** 36. **5.15.** 3) ёлғон; 5) рост. **5.16.** 1) $A+\overline{A}\cdot B$. **5.21.** 1) (2; 3), (1,5; 4); 2) (1; 4); (–1; –4). **5.22.** 1) 0,5; 2) 1. **5.23.** 98730. **5.24.** 0,008. **5.25.** Частотаси 18, солиштирма частотаси эса 0,9. **5.26.** 180. **5.27.** 850. **5.33.** 2) $\frac{1}{6}$. **5.34.** 1) 0,4. **5.35.** 3) 0,75. **5.36.** 2) $\frac{1}{3}$. **5.37.** $\frac{1}{7}$. **5.38.** 2) 0,94; 5) 0,44. **5.39.** 0,97. **5.40.** 3) 0,2. **5.41.** 2) 0,0198. **5.43.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) 0,3; 3) 0,4; 4) 0,55. **5.44.** 0,4. **5.45.** $\frac{2}{3}$. **5.46.** 0,75. **5.47.** $\frac{2}{5}$. **5.48.** 0,05. **5.51.** 0,85. **5.52.** 0,92; 80 та яроқсиз буюм. **5.53.** $\frac{7}{8}$. **5.54.** $\frac{11}{90}$. **5.55.** 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{4}{9}$. **5.56.** 1) 0,75; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{3}$. **5.57.** $\frac{1}{22}$. **5.58.** 0,23. **5.59.** 0,9801. **5.60.** 0,12. **5.61.** 1) 0,384. 2) 0,096; 3) 0,008. **5.68.** 0,88. **5.63.** 0,8. **5.64.** 0,388. **5.65.** $\frac{8}{15}$. **5.66.** $\frac{1}{2}$. **5.67.** $P(7)=\frac{1}{6}>P(8)=\frac{5}{36}$. **5.68.**

Тахминан 1000. **5.69.** қизил $\frac{1}{4}$; кўк $\frac{2}{5}$; Бўялмаган $\frac{7}{20}$. **5.71.** 0,936.

5.72. $\frac{2}{3}$ ва $\frac{1}{3}$. **5.73.** $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\ \frac{1}{7}$. **5.74.** $P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$ тенгликдан фойдаланинг. **5.75.** 0,9. **5.76.** $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$; $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)P(AB)=P(A)+P(B)-$
$-P(A+B) \Rightarrow P(AB)=a+b-c \Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-a-b+c=c-b$. **5.77.** $\frac{5}{12}$.

5.78. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. **5.79.** 1) 1; 2) −1. **5.80.** 4. **5.81.** 1) $\sin x$; 2) $\operatorname{tg}2\varphi$. **5.82.** 0,5. **5.83.** $\frac{1}{3}$. **5.84.** 0,4. **5.85.** a. **5.86.** $\frac{\pi}{4}$.

5.87. 0,25. **5.88.** 1) $\frac{\pi\alpha^2}{4}$; 2) πa^2. **5.89.** 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 3) $\frac{2a\sqrt{R^2-\alpha^2}}{\pi R^2}$;

4) $\frac{(a+b)\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-b^2}\right)}{\pi R^2}$. **5.90.** 1) 0,25; 2) 0,75. **5.91.** 1) $\frac{1}{4}$;

2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{\pi}{16}$. **5.92.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{3\pi}{144}$. **5.93.** $\frac{1}{3}$. **5.94.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{32}$.

5.95. 1) $\frac{(a-r)^2}{a^2}$; 2) $\frac{(a-r)^2}{2a^2}$. **5.96.** 0,5. **5.97.** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9\pi}$. **5.98.** $\frac{1}{24}$.

5.99. 1) $\frac{7}{16}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{3}{4}$. **5.100** 1) −1; 0,2; 2) ±1. **5.101.** −3. **5.102.** 0,24.

5.103. $\{e; ce; cce; ccce; cccc\}$. **5.104.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{4}{9}$. **5.105.** Тахминан 15. **5.106.** $\frac{91}{216}$. **5.108.** Йўқ, бўлмайди. **5.109.** 1) 8^{10}; 2) A_{10}^{8}.
5.110. 1) 1320; 2) 40; 3) 111. **5.111.** 72. **5.112.** 1440. **5.113.** 144.
5.114. 252. **5.116.** 1) 3; 2) −12. **5.117.** 243. **5.120.** $\frac{(a-r)^2}{a^2}$.

5.121. 1) Бир қутига битта оқ ошиқ, иккинчисига эса қолган ошиқларни солиш керак; 2) $\frac{8\pi^2(4-\pi)^2}{128}$.

7—9-синфлар курсини такрорлашга доир машқлар

6.1. 4) 0; 5; 5) 2; 8; 7) 0; 8) 8. **6.10.** 1) a=32; b=56. **6.11.** 2) $\frac{1}{3}$; 5) 1,36. **6.12.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) 2; 4) −4; 5) 1; 6) 1; 7) 9. **6.17.** 1) $8(x+11)(x+2)$; 4) $(a-1)(a+9)$; 8) $2a\cdot(2^2+3b^2)$.

6.18. 2) $(5mn^2-7p^2q)(3m^2p+5nq^2)$. **6.19.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{9}$.
6.20. 3) $x^2+(1-8a)x+15a^2-a-2=0$; 5) $x^2-2x+1=0$. **6.21.** 1) (1; 6), (6;1); 2) (1; 3); (6; 05); 3) (1;−2), $\left(6;-\frac{1}{3}\right)$; 4) (1; 5); (5; 1), (2; 3),(3; 2).
6.32. 2) $x^7-1=(x^3+x+1)(x^4-x^2-x+1)+2x^2-2$. **6.33.** a=11.
6.34. 3) $(x-1)(x^2-4x-1)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^3-7x-4)$. **6.38.** 4) $\frac{2}{b}$; 5) 1.
6.39. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) ∅; 4) −3,5; 5) 4; 6) 2. **6.40.** 3) $a\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=a$; $x_2=a+1$; 4) $a\neq 3 \Rightarrow x=a$; $a=3\Rightarrow x\in\varnothing$. **6.41.** 1) ±1; ±2.
6.42. 1) $x=\frac{145}{19}$, $y=-\frac{29}{19}$; 2) чексиз кўп ечимлари мавжуд; 3) ∅; 4) (2,2; 0,4), (1;1). **6.43.** **Кўрсатма:** системанинг биринчи тенгламасини y га боғлиқ бўлган квадрат учҳад сифатида кўриб чиқинг. **6.49.** 1) $\left(\frac{1}{4};1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$; 4) $[3;+\infty)$. **6.51.** 2) $[-1;6]$; 3) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$; 5) $x=0$; $x\in[2;4]$; 6) $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(4;+\infty)$. **6.52.** $a\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.
6.53. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **6.54.** $a\in[4;+\infty)$. **6.55.** $a\in(-1;1)$.
6.56. 2) $-(a+b)$; 5) $\frac{1}{a^nb^n}$. **6.57.** 5) $\sqrt{x}$. **6.59.** 1) $xy=1$; 4) $4x=5y$.
6.61. 3) $[3;+\infty)$; 6) $[0;1)\cup(1;+\infty)$; 8) $(-\infty;3-\sqrt{5})\cup(3\sqrt{5};2)\cup$

$\cup[4;3+\sqrt{5})\cup(3+\sqrt{5};+\infty)$. **6.65.** 1) $a_n=\frac{1}{n^2}$; 2) $a_n=3\cdot2^{n-1}$; 4) $a_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **6.69.** 2) 90. **6.70.** $\frac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **6.71.** $a_n=18n-25$ ва $b_n=14n-17$. **6.72.** 1) $b_1=-49$; $q=-\frac{1}{7}$; 4) $b_1=\frac{1}{8}$, $q=7$. **6.74.** $a=32$ ёки $a=\frac{1}{2}$ ва ҳоказо. **6.75.** 3) $\frac{b_1^3}{1-q^3}$. **6.76.** $q=\frac{2}{3}$. **6.77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{4}$. **6.79.** $q=2\pm\sqrt{3}$. **6.80.** 3. **6.81.** 1) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{12}$. **6.82** $a=-\frac{15}{4}$. **6.84.** 2) 0; 3) $\frac{1}{\cos2\beta}$.

МУНДАРИЖА

5-бўлим. Эҳтимоллар назариясининг элементлари

6-бўлим. VII–IX синфлар курси материалларини такрорлашга доир машқлар

Оқу басылым

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Нұрланұлы
Жұмабаев Ринат Нұрланұлы

АЛГЕБРА

Умумтаълим мактабларининг 9-синфи учун дарслик

(өзбек тілінде)

Редакторы *Ж. Баданова*
Көркемдеуші редакторы
Техникалық редакторы *Ү. Рысалиева*
Корректоры *Б. Жанпейісова*
Компьютерде беттеген *А. Куватова*
Өзбек тілінің мәтінін аударған М. *Зайниддинова*
Өзбек тілінде компьютерде беттеген *Г.Жадыранова*

ИБ №7432
Басуға 16.09.2019 ж. қол қойылды.
Пішімі $60 \times 90^{1}/_{16}$. Офсеттік қағаз.
Баспа табағы 15,0. Шартты баспа табағы 15,0.
Таралым 5000 дана.
Тапсырыс №

«Атамұра» корпорациясы» ЖШС, 050000, Алматы қаласы,
Абылай хан даңғылы, 75.

«Жазушы» баспасы, 050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 143.
E-mail: zhazushi@mail.ru

ISBN 978-601-200-663-6