А. Н. ШИНИБЕКОВ

АЛГЕБРА

Умумтаълим мактабларининг 8-синфи
учун дарслик

8

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги
тавсия этган

Такомиллаштирилиб қайта ишланган нашр

Алмати «Жазушы» 2016

Фойдаланилган шартли белгилар:

$\boxed{?}$ – мавзунинг асосий материаллари бўйича саволлар;

$\boxed{\text{ПТ}}$ – амалий топшириқлар;

$\boxed{\text{Т}}$ – тарихий маълумотлар;

A – I даражали мисоллар;
B – II даражали мисоллар;
C – III даражали мисоллар;
*– ижодий ёки юқори мураккаб мисолар.

Таржимон: Янишбаева Баргида

Шинибеков А. Н.
Геометрия: Умумтаълим мактабларининг 8-синфи учун дарслик. Такомиллаштирилиб қайта ишланган нашр. – Алмати: Жазушы, 2017. – 288 бет.

КИРИШ

Умумтаълим мактабларининг 8-синфлари учун мўлжалланган мазкур дарслик ўзига хос хусусиятга эга. Чунончи, аввалги дарсликлар билан солиштирганда, бу дарсликда умумтаълим берувчи макатаблар ўқув дастуридан жой олган материаллар ва математика чуқурлаштирилиб ўқитиладиган синф ҳамда мактабларга мўлжалланган ўқув дастури асосидаги материаллар тўлиқ қамраб олинган. Шундай экан, бу дарсликдан фойдаланишнинг баъзи тартибларига тўхталиб ўтишимиз тақозо этилади.

Умумтаълим мактаблар ўқув дастуридан жой олмаган, яъни математика чуқурлаштирилиб ўқитиладиган синфлар ўқув дастурига хос материаллар махсус * белги билан берилган.

Шунга кўра **С** гуруҳида берилган мисоллар асосан математика чуқурлаштирилиб ўқитиладиган синф ўқувчилари учун мўлжалланган. Шундай бўлса-да, бу материлларни қобилияти ва малакаси юқори бўлган ўқувчилар синфдан ташқари вақтларда мустақил ҳолда ўрганишлари мумкин. Чунки математика олимпиадалар ҳамда турли танловларда иштирок этиб, натижали ўринлар эгаллаш учун бу каби малакаларларга эга бўлиш жуда зарур.

Математикани чуқурлаштирирриб ўрганадиган синфлар ўқув йилини 7-синф материалларини такрорлагандан сўнг, қўшимча материаллардан бошлаганлари яхши, шундан кейин ўқув жараёнини дарслик асосида давом эттирганлари маъқул.

Муаллаф

7-СИНФДА ЎТИЛГАН МАТЕРИАЛЛАРНИ ТАКРОРЛАШ

А

1. Ифодани a асосли даража кўринишида ёзинг:

1) $(a^5)^3 \cdot a$; 2) $a \cdot a^3 \cdot a^2$; 3) $((a^3)^2)^4$;
4) $(-a^3)^2$; 5) $(a^2 \cdot a^3)^2$; 6) $(a^2)^5 : (a^3)^2$;
7) $(a^3)^4 : (a^2)^5$; 8) $(a^3 : a)^5$; 9) $\left(\frac{a^4}{a^2}\right)^3$.

2. Ҳисобланг:

1) $\frac{15^9 \cdot 15^5}{15^3}$; 2) $5^{15} \cdot 5^{-17} \cdot 5^4$; 3) $\frac{0,4^{11}}{0,4^4 \cdot 0,4^5}$;
4) $8^{-2} \cdot 4^3$; 5) $9^0 : 9^{-2}$; 6) $7^8 \cdot 7^{-5} \cdot 7^{-4}$.

3. Ифодани соддалаштиринг:

1) $-0,4x^2y \cdot (-10xy^2)$; 2) $-0,2a^3b^4 \cdot 5a^2b^3$;
3) $(0,25x^{-2}y^{-1})^{-3}$; 4) $\left(\frac{x^{-3}a^4}{16}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{x^{-2}a^3}\right)^{-3}$;
5) $ab(-5ab^2) \cdot (4a^2b)$; 6) $m^2n \cdot (mn) \cdot (mn^2)$.

4. Кўрсатилган амални бажариб, кўпҳадни стандарт шаклга келтиринг:

1) $(4a^2b-3ab^2)+(-a^2b+2ab^2)$;
2) $(y^2-3y)(3y-2y^2)-(4-2y^2)$;
3) $2x^2-x(2x-5y)-y(2x-y)$;
4) $7m(3m+2n)-3m(7n-2m)$;
5) $(5p-4q)(2p-2q)$;
6) $(a^2-2ab)(a^2-5ab+3b^2)$.

5. Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқаринг:

1) $4x^3y-6x^2y^2$;
2) $5a^3-15a^2b+20ab^2$;
3) $6mn^2-9n^3+12m^2n^2$;
4) $-3xy^2-15x^2y-21x^2y^2$;

5) $12a^2b-18ab^2-30ab^3$;
6) $-6ax^2+9x^2-12x^4-3a^2x^2$.

6. $y=x^2$ функциянинг графигини ясанг. График бўйича:
$x=1$; $-0,5$; $0,5$; 2 қийматларига мос келувчи y нинг функциянинг қийматларини топинг.

7. $y=x^3$ функциянинг графигини ясанг. График бўйича:
функциянинг $x=-1$; $-0,5$; $0,5$; 2 қийматларига мос келувчи y нинг қийматларни аниқланг.

8. Қисқа кўпайтириш формулаларидан фойдаланиб, ифодани кўпҳад кўринишида ёзинг:

1) $(2a+b)^2$;
2) $(0,2x-y)^2$;
3) $(5a-3x)^3$;
4) $\left(\frac{1}{2}m+2n\right)^3$;
5) $(3ab-x)(3ab+x)$;
6) $(-x-2y)(-x+2y)$;
7) $(0,2p+3q)(q-0,2p)$;
8) $(3-a)(9+3a+a^2)$;
9) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

9. Қисқа кўпайтириш формулаларидан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $4x^2-6y^2$;
2) $-25a^2+b^2$;
3) $27x^3-y^3$;
4) $8a^2+b^3$;
5) $4m^2-4mn+n^2$;
6) $8xy+y^2+16x^2$;
7) m^2+125;
8) $8a^3-27b^3$.

10. Кўрсатилган амалларни бажаринг:

1) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$;
2) $\frac{2x+1}{a}+\frac{3x+1}{a}-\frac{x-2}{a}$;
3) $\frac{a}{12m}\square\frac{b}{18n}$;
4) $\frac{3xy}{4mn}\square\frac{10m^2n^2}{21x^2y}$;
5) $\square\frac{18a^2b^2}{5pq}:\frac{6ab}{5p^2q^2}$;
6) $\frac{x^2y-4y^3}{3xy^2}\cdot\frac{yx^2}{x^2-2xy}$.

11. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $2a^2-4ab+2b^2$; 2) a^2-y^2+x+y;
3) $5m^2+20mn+20n^2$; 4) $x^3+x^2y-xy^2-y^2$;
5) $(a-b)^3-3(a-b)^2$; 6) $(m+n)^2-n(m+n)^2$.

12. $y \square \frac{2}{x}$ функция графигини ясанг. $A(2;\ 1)$; $B(2;\ -1)$; $C(1;\ 2)$ ва $D(4;\ 2)$ нуқталардан қайси бири берилган функция графигида ётади?

13. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right)\cdot\frac{1+a}{2a+1}$; 2) $\left(\frac{m}{m^2}-\frac{1}{m}\right):\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$;

3) $\frac{b-2}{b-3}\cdot\left(b+\frac{b}{2-b}\right)$; 4) $\left(\frac{4x}{2-x}-x\right):\frac{x+2}{x-2}$.

14. Касрларни даврий ўнли касрларга айлантириб, уни 0,01 гача (юздан биргача) аниқликда яхлитланг. Тақрибий қийматнинг абсолют ва нисбий хатоларини топинг:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) $5\frac{7}{12}$; 4) $12\frac{1}{3}$.

B

15. Ифодани соддалаштиринг:
1) $2a-3b-(4a+7b+c+3)$;
2) $2xy-y^2+(y^2-xy)-(x^2+xy)$;
3) $(2x^2+x+1)-(x^2-x+7)-(4x^2+2x+8)$;
4) $(3a^2-a+2)+(-3a^2+3a-1)-(a^2-1)$;
5) $(1-x+4x^2-8x^3)(2x^3+x^2-6x-3)-(-5x^3-8x^2)$;
6) $(0{,}5a-0{,}6b+5{,}5)-(-0{,}5a+0{,}4b)+(1{,}3b-4{,}5)$.

16. Ифодани соддалаштиринг:
1) $(x^2)^4$; 2) $(a^2\cdot a^3)^4$;

3) $\frac{(mn)^2\cdot m^3n^4}{m\cdot(mn)^3}$; 4) $\frac{\left(x^2y^3\right)^5}{\left(x^2\right)^2\cdot y^5}$;

5) $\left(\frac{a^{-3}b^{4}}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{9}{a^{-2}b3}\right)^{-3}$; 6) $\left(\frac{p^{-4}}{10q^{5}k^{2}}\right)^{-2}:\left(5p^{2}q^{3}k\right)^{3}$.

17. Ифодани соддалаштиринг:

1) $(x-2)(x+3)+(x-3)(x+2)$; 2) $(y-1)(y+2)+(y+1)(y-2)$;
3) $(a+1)(a+2)+(a+3)(a+4)$; 4) $(c-1)(c-2)+(c-3)(c-4)$.

18. Ифодани кўпҳад кўринишига келтиринг:
1) $(x^2-x+4)(x-5)$; 2) $(2y-1)(y^2+5y-2)$;
3) $(2-3a)(-a^2+4a+8)$; 4) $(3-1c)(2c^2-c-1)$;
5) $(x^2-x+4)(2x^2-x+4)$; 6) $(-5a^2+2a+3)(4a^2-a+1)$;
7) $(8+4c)(2c^2-c-4)$; 8) $(c-4)(c+2)(c+3)$.

19. Тенгламани ечинг:
1) $(x+1)(x+2)=(x-3)(x+4)$;
2) $(3x-1)(2x+7)=(x+1)(6x-5)=16$;
3) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-1)+6$;
4) $(6y+2)(6-y)=47-(2y-3)(3y-1)$.

20. Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратинг:
1) a^3-2a^2-2a+4; 2) $x^3-12+6x^2-2x$;
3) $c^4+2c^2+a^3+2c$; 4) $-y^6-y^5+y^4+y^3$;
5) $a^2b-b^2c+a^2c-bc^2$; 6) $2x^3+xy^2-2x^2y-y^3$;
7) $16ab^2-10c^3+32ac^2-5b^2c$; 8) $6a^3-21a^2b+2ab^2-7b^3$;
9) $c^3+ac^2+4a-4c$.

21. Тенгламани ечинг:
1) $1{,}2x^2+x=0$; 2) $1{,}6x-x^3=0$; 3) $0{,}5x^2-x=0$;
4) $5x^2=x$; 5) $1{,}6x^2=3x$; 6) $x=x^2$.

21. Тенгламани ечинг:
1) a^k+a^{k+1}; 2) $1{,}6x-x^2=0$; 3) $0{,}5x^2-x=0$;
4) $y^{k+2}-y$; 5) $a^kb^{2k}+a^kb^k$; 6) $15x^{2k+1}-25x^{k+1}$.

23. 1) 41^3+19^3 ифоданинг қиймати 60 га; 2) 79^3-29^3 ифоданинг қиймати 50 га; 3) 66^3+34^3 ифоданинг қиймати 400 га; 4) 54^3-24^3 ифоданинг қиймати 1080 га бўлинишини кўрсатинг.

24. Айниятни исботланг:

1) $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$;
2) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b+ab^3+b^4)$;
3) $a^5+1=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$;
4) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b-ab^3+b^4)$

25. Квадрат учҳадлардан тўла квадратларни ажратинг:

1) $x^2-6x-16$; 2) $x^2+12x+20$;
3) x^2-5x+6; 4) x^2+x-20;
5) x^2-4x+3; 6) $x^2-3x-10$;
7) $x^2+9x+14$; 8) $x^2-2x-35$.

26. Касрнинг қийматини топинг:

1) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$; 2) $\frac{81^{25}}{27^{33}}$; 3) $\frac{15a^2 \square 10ab}{3ab \square 2b^2}$, бунда $a=-2$;

4) $\frac{9c^2 \square 4b}{18c^2 \square 12bc}$, бунда $b=0,5$, $c \square \frac{2}{3}$.

27. Касрни қисқартиринг:

1) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$; 2) $\frac{7p \square 35}{15 \square 3p}$; 3) $\frac{18a \square 3a^2}{8a^2 \square 48a}$;

4) $\frac{4 \square x^2}{10 \square 5x}$; 5) $\frac{a^2+3a+9}{27-a^3}$; 6) $\frac{x^6 \square x^4}{x^4 \square x^2}$;

7) $\frac{x^6 \square x^8}{x^4 \square x^2}$; 8) $\frac{b^7 \square b^{10}}{b^9 \square b^3}$; 9) $\frac{c^6-c^4}{c^3+c^2}$.

28. Касрни шундай шакл алмаштирингки, натижада:

1) $\frac{x}{a \square b}$ касрнинг махражи $(a-b)^2$;

2) $\frac{2y}{x \square 1}$ касрнинг махражи x^3-1;

3) $\frac{y}{x \square a}$ касрнинг махражи x^2-a^2;

4) $\frac{3a}{a^2 \square ab \square b^2}$ касрнинг махражи a^3-b^3;

5) $\dfrac{8}{3xy^2}$ касрнинг махражи $15x^2y^2$;

6) $\dfrac{6}{7a^2c}$ касрнинг махражи $35a^3c^3$;

7) $\dfrac{a}{a\square 2}$ касрнинг махражи a^2-2a;

8) $\dfrac{1}{x\square 1}$ касрнинг махражи x^3+1 бўлсин.

29. Ифодани кўпҳадга алмаштиринг:

1) $\dfrac{(y-b)^2}{y-b+1}+\dfrac{y-b}{y-b+1}$;

2) $\dfrac{(a+x)^2}{a+x-2}-\dfrac{2a+2x}{a+x-2}$;

3) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y+1}+\dfrac{x+y}{x-y+1}$;

4) $\dfrac{b^2-9c^2}{b+3c-2}+\dfrac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

30. Каср кўринишида ёзинг:

1) $x+y+\dfrac{x-y}{4}$;

2) $a-\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c}$;

3) $m+n-\dfrac{1+mn}{n}$;

4) $\dfrac{3ax-y^2}{3ax+y^2}-1$;

5) $a^2-b^2-\dfrac{a^3-b^3}{a+b}$;

6) $(1-x)^2-\dfrac{1+x^4}{(1+x)^2}$.

31. Каср кўринишида ёзинг:

1) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2b-b^3}\right)^2$;

2) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^2:\left[\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x}{y}\right)\cdot\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{y}{x}\right)\right]$;

3) $\left(\dfrac{1}{(2a-b)^2}+\dfrac{2}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{(2a+b)^2}\right)\cdot\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$;

4) $\dfrac{4c^2}{(c-2)^2}:\left(\dfrac{1}{(c+2)^2}+\dfrac{1}{(c-2)^2}+\dfrac{2}{c^2-4}\right)$.

32. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{1}{p-2u}+\dfrac{6u}{4u^2-p^2}-\dfrac{2}{p+2u}=\dfrac{1}{2p}\cdot\left(\dfrac{p^2+4u^2}{p^2-4u^2}+1\right)$;

2) $\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2:\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{x+y}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right)=1$;

3) $\dfrac{4x^2}{(x+y)^2+2\left(x^2-y^2\right)+(x-y)^2}=1$.

33. x^8 ифодании ккита кўпайтувчига шундай ажратингки, бунда битта кўпайтувчиси: 1) x^2; 2) x^5; 3) x^7; 4) x^8; 5) x^{10}; 6) x^{12} га тенг бўлсин.

C

34. Агар биз ўйлаган соннинг ўнг томонига ноль ёзилиб, натижа 143 сонидан айирилса, ўйланган сондан уч марта катта сон ҳосил бўлади. Биз қандай сон ўйладик?

35. Агар берилган соннинг ўнг томонига 9 рақамини ёзиб, ҳосил бўлган сонга берилган соннинг иккилангани қўшилса, у ҳолда йиғинди 633 га тенг бўлади. Берилган сонни топинг.

36. Агар уч хонали соннинг чап томонига 8 рақамини ёзиб, чиққан тўрт хонали сонга 5572 сони қўшилса, ҳосил бўлган йиғинди берилган уч хонали сондан 40 марта катта бўлади. Берилган сонни топинг.

37. Ҳар қандай натурал n сони учун қуйидаги формулаларнинг бажарилишини исботланг:

1) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$;

2) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$;

3) $x^{2n+1}+1=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}+\ldots-x+1)$;

4) $x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+\ldots-xy^{2n-1}+y^{2n})$.

38. 1) $143^{15}-81^{15}$ айирманинг 62 га; 2) $23^{13}+1$ йиғиндининг 12 га; 3) $16^{17}+1$ йиғиндининг 17 га бўлинишини кўрсатинг.

39. Ифодани соддалаштиринг:

1) $32a^5 \square \dfrac{16a^4b}{c} \square \dfrac{8a^3b}{c^2} \square \dfrac{4a^2b^3}{c^3} \square \dfrac{2ab^4}{c^4} \square \dfrac{b^5}{c^5}$;

2) $81x^4-54x^2yz+36x^2y^2z^2-24xy^3z^3+16y^4z^4$.

40. 1) $12^{31}+28^{31}$ йиғинди 80 га; 2) $125^{320}-15^{320}$ айирма 220 га; 3) $11^{11}+13$ йиғинди 12 га; 4) $6^{41}+8$ йиғинди 7 га каррали эканлигини исботланг.

41.* Ҳар бир натурал n учун : 1) 21^n+4^{n+2} ифода 17 га; 2) $5^{2n+1}+112^{n+1}+2$ ифода 6 га; 3) $5^n+8^n-2^{n+1}$ ифода 3 га; 4) $3^n+5^n+7^n+9^n$ ифода 4 га бўлинишини исботланг.

42.* Ихтиёрий натурал n учун $5^n-3^n+2^n$ ифода 4 га каррали эканлигини исботланг.

43. Айниятни исботланг:

$2b^5+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=(a^4-a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$

44. $2(3a-2)^2-3a(3a-2)+1$ ифодани икки ҳаднинг квадрати кўринишида ёзинг.

45.1) $2a^2+2b^2$ ифодани иккита кўпҳад квадратларининг йиғиндиси; 2) $4ab$ ифодани иккита кўпҳад квадратларининг айирмаси кўринишида ёзинг.

46. $x(8x+y)^2-2y(6x+0,25y)^2$ ифодани иккиҳаднинг куби кўринишида ёзинг.

47*. $2a(a^2+3b^2)$ ифодани икки кўпҳад кублари йиғиндиси кўринишида ёзинг.

48*. $2b(3a^2+b^2)$ ифодани икки кўпҳад кублари айирмаси кўринишида ёзинг.

49. a, b ва c нинг коэффициентларини шундай аниқлангки, бунда $2x^4+x^3-15x^2-83x-45=(ax^2+bx+c)(x^2+4x+9)$ тенглик бажарилсин.

50.* x га боғлиқ бўлган 6-даражали шундай кўпҳад тузингки, x нинг ҳар бир қийматида: 1) мусбат; 2) манфий қийматлар қабул қилсин.

51.* $2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2003+1$ сони қандайдир бир n натурал соннинг квадрати эканлигини исботланг ва n ни топинг.

52. Касрни қисқартиринг:

1) $\dfrac{(4x-y)(2x+y)+(4x+2y)^2}{4x^2+xy}$; 2) $\dfrac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}$;

3) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}$; 4) $\dfrac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}$.

53. $\dfrac{x+y}{y}=3$ бўлса, ифоданинг қийматини топинг:

1) $\dfrac{x}{y}$; 2) $\dfrac{y}{x\square y}$; 3) $\dfrac{x\square y}{y}$; 4) $\dfrac{y}{x}$.

54. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\dfrac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\dfrac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\dfrac{1}{a-1}\right):\dfrac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\dfrac{2p}{2p-u}-\dfrac{4p^2}{4p^2+4pu+u^2}\right):\left(\dfrac{2p}{u^2-4p^2}+\dfrac{1}{2p-u}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}-1\right)$;

4) $\left(\dfrac{p}{p^2-4}+\dfrac{2}{2-p}+\dfrac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\dfrac{10-p^2}{p+2}\right)$;

5) $\dfrac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+2ab+b^2}+\dfrac{2a}{b^2-a^2}$;

6) $\dfrac{a-5}{a^2-18a+81}+\dfrac{5-3a}{18a+81-a^2}+\dfrac{131+2a}{(9-a)^2}$;

7) $\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$;

8) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

55. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right);$

2) $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1}-\dfrac{2m-1}{2m+1}\right):\dfrac{4m}{10m-5};$

3) $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-1}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3};$

4) $\left(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right).$

I БОБ . КВАДРАТ ИЛДИЗ

1-§. Квадрат илдиз таърифи

1.1. Квадрат илдиз тушунчаси

Қуйидаги иккита мисолни кўриб чиқайлик.

1-мисол. Квадрат шаклидаги ер майдони томонининг узунлиги 9 м. Унинг юзини топиш керак.

Бу майдонининг S юзи унинг томони квадратига тенг экани маълум. Демак,

$S=9^2=81$(м^2).

2-мисол. Квадрат шаклидаги ер майдонининг юзи 121 м^2. Унинг томонини топиш керак.

Бу биринчи масалага тескари масала. Агар биринчи масалада квадратнинг томони берилиб, унинг юзини топиш керак бўлса, иккинчи масалада эса аксинча, квадратнинг берилган юзи бўйича унинг томонини топиш керак.

Квадратнинг номаълум томонининг узунлиги x метр бўлсин. У ҳолда квадратнинг юзи x^2 м^2 га тенг. Масаланинг шартига кўра квадратнинг юзи берилган, яъни у 121 м^2 га тенг. Демак, $x^2=121$ тенг-ламани оламиз. Яъни, бу масалани ечиш учун квадрати 121 га тенг бўладиган сонни топиш керак. Бундай сон иккита: 11 ва (-11). Демак, $11^2=121$ ва $(-11)^2=121$. Узунлик манфий сон билан ифодаланмайди, яъни (-11) сони масаланинг шартини қаноатлантирмайди. Демак, квадрат томонининг узунлиги 11 м.

$x^2=121$ тенгламанинг илдизлари, яъни квадрати 121 га тенг сонлар 121 сонининг ***квадрат илдизлари*** дейилади. Шу каби 5 ва (-5) сонлари 25 нинг 0,5 ва $(-0,5)$ сонлари 0,25 нинг квадрат илдизлари ҳисобланади. Чунки, $5^2=(-5)^2=25$; $0,5^2=(-0,5)^2=0,25$.

Таъриф, 1. *а сонининг* ***квадрат илдизи*** *деб квадратиага тенг бўлган сонга айтилади. Соннинг квадрат илдизини топиш амали сонни* ***квадрат илдиздан чиқариш*** *дейилади.*

Юқорида кўрилган иккита мисолдан квадрат илдиздан чиқариш амали квадрат даражага кўтариш амалига тескари амал бўлишини кўрдик. Шунинг учун, квадрат илдизни топишда натижанинг тўғрилигини текшириш учун топилган илдиз квадратга кўтарилади. Масалан, 49 сонининг квадрат илдизи 7 га тенг. Яъни,

$7^2=49$. Демак, таърифга кўра 7 сони 49 нинг квадрат илдизига тенг бўлади.

Ҳеч бир соннинг квадрати манфий сон бўла олмайди ($x^2 \square 0$). Чунки ***берилган сондан квадрат илдиз чиқариш учун бу сон манфий сон бўлмаслиги керак, яъни бу сон мусбат сон ёки нолга тенг бўлиши керак.***

1.2. Арифметик квадрат илдиз

Аввалги мавзуда $x^2=121$ тенгламани ечишда 121 сони иккита квадрат илдизга эга эканлигини аниқлаган эдик: 11 ва -11.

Умуман, агар b сони бирон a мусбат соннинг квадрат илдизи бўлса, у ҳолда $-b$ сони ҳам a сонининг квадрат илдизи бўлади. Яъни, $b^2=a$ тенгламадан $(-b)^2=(-b)(-b)=b^2=a$ тенглиги бажарилиши келиб чиқади. Агар $a=0$ бўлса, бу соннинг ягона квадрат илдизи мавжуд: $b=0$.

Таъриф, 2. *Номанфий соннинг мусбат (манфий эмас) квадрат илдизи унинг* ***арифметик квадрат илдизи*** *деб аталади.*

Агар $a \geqslant 0$ бўлса, a сонининг арифметик квадрат илдизи $\sqrt{a}$ кўринишида ёзилади. Бунда $\sqrt{\ }$ арифметик квадрат илдиз белгиси, баъзан у ***радикал***[1] ([1]Лотинча «Radix» – илдиз) деб аталади. a эса ***илдиз остидаги сон*** дейилади.

Масалан, $\sqrt{1} \square 1$.

$$\sqrt{0} \square 0; \qquad \sqrt{9} \square 3; \qquad \sqrt{0,64} \square 0,8; \qquad \sqrt{\frac{25}{16}} \square \frac{5}{4};$$

Демак, таърифга мувофиқ, $a \leqslant 0$ бўлганда $\sqrt{a} \square b$; тенглик тўғри бўлиши учун $b \geqslant 0$ ва $b^2=a$ шартлар бажарилиши керак.

Агар $a<0$ бўлса,у ҳолда $\sqrt{a}$ ифода маънога эга эмас, чунки ҳар қандай соннинг квадрати номанфий сон. Масалан, $\sqrt{\square 16}$, $\sqrt{\square 1,44}$ ифодаларнинг маъноси йўқ.

Ҳар қандай a сони учун

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{агар } a \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -a, & \text{агар } a<0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

формула бўйича ифодаланган $|a|$ сони a нинг ***абсолют***

катталиги ёки модули деб аталади. Таърифга асосан, ихтиёрий соннинг модули манфий сон эмас. Масалан, $|2| = 2$; $|0| = 0$; $|3| = 3$ ва ҳ.к. Юқоридаги мисоллардан ҳар қандай номанфий a сонининг илдизлари $\sqrt{a}$ ва $\square\sqrt{a}$ эканини кўрдик. У ҳолда, $x^2=a$, $a \geqslant 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 \square\sqrt{a}$ $x_2 = -\sqrt{a}$ бўлади. Демак, ҳар қандай x сони учун $\sqrt{x^2} \square|a|$ тенглик бажарилади. Чунки арифметик квадрат илдиз таърифига кўра, агар $x \geqslant 0$ бўлса, $\sqrt{x^2} \square x$; $x<0$ бўлганда $\sqrt{x^2} = -x$ бўлиши керак. Бунда модул таърифига асосан: $\sqrt{x^2} \square|x|$

Демак, 1) $\sqrt{a}$ нинг аниқланиш соҳаси манфий сонлар бўлмаган тўпламдан иборат: $a \geqslant 0$;

2) $\sqrt{a} \geqslant 0$ – арифметик квадрат илдиз номанфий;

3) $x^2=a$, а>0 тенгламанинг иккита илдизи бор: $x = \pm\sqrt{a}$

4) ҳар қандай x сони учун $\sqrt{x^2} \square|x|$ тенглик бажарилади.

?

1. Соннинг квадрат илдизи деб қандай сонга айтилади?
2. Соннинг квадрат илдизини топиш амали қандай аталади?
3. Соннинг квадрат илдизни топиш учун берилган сон қандай бўлиши керак? Манфий соннинг квадрат илдизи мавжудми?
4. Мусбат соннинг нечта квадрат илдизи бор?
5. Қайси соннинг фақат битта квадрат илдизи бор?
6. Берилган номанфий сониинг арифметик квадрат илдизи деб қандай сонга айтилади? У қандай белгиланади?
7. $x^2 = a$, $a \geqslant 0$ тенгламанинг нечта илдизи бор?

МИСОЛЛАР

А

56. 1) $\sqrt{64} \square 8$; 2) $\sqrt{225} \square 15$; 3) $\sqrt{0,09} \square 0,3$; 4) $\sqrt{1,21} \square 1,1$ тengликлари бажарилишини кўрсатинг.

57. 1) 7 сони 49 нинг; 2) –6 сони 36 нинг; 3) 0,1 сони 0,01 нинг; 4) $1\frac{1}{4}$ сони $1\frac{9}{16}$ нинг квадрат илдизи эканлигини исботланг.

58. Сонларнинг квадратларини топинг:

$\sqrt{64}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{81}$; $\square\sqrt{2}$; $\square\sqrt{1,2}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\square\sqrt{\frac{1}{2}}$.

59. Илдизнинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{64}$; 2) $\sqrt{25}$; 3) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{100}$; 5) $\sqrt{1600}$; 6) $\sqrt{400}$;

7) $\sqrt{10000}$; 8) $\sqrt{0,09}$; 9) $\sqrt{0,49}$; 10) $\sqrt{2,25}$; 11) $\sqrt{\frac{9}{4}}$; 12) $\sqrt{\frac{64}{25}}$.

60. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{900}$; 2) $\sqrt{2500}$; 3) $\sqrt{0,01}$; 4) $\sqrt{6,25}$; 5) $\sqrt{1,44}$;

6) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{\frac{25}{4}}$; 8) $\sqrt{\frac{81}{49}}$; 9) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 10) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

61. Жадвалдаги бўш катакчаларни тўлдиринг:

a	4	49		0,25	3600			5	99
$\sqrt{a}$;			11			$\sqrt{2}$	$\sqrt{0,4}$		

62. Ифода маънога эгами?

1) $\sqrt{64}$; 2) $\square\sqrt{64}$; 3) $\sqrt{\square 64}$; 4) $\square\sqrt{1,2}$; 5) $\sqrt{\square 1,2}$; 6) $\sqrt{3}$;

7) $\sqrt{4,9}$; 8) $\sqrt{\square 0,04}$; 9) $\square\sqrt{0,2}$; 10) $\sqrt{\square\frac{9}{4}}$?

63. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{64}\ \square\sqrt{9}$; 2) $5\ \square\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0,04}\ \square\sqrt{0,16}$;

4) $\sqrt{25} : \sqrt{100}$; 5) $\frac{1}{3}\ \square\sqrt{81}$; 6) $\sqrt{\frac{9}{16}}\ \square\sqrt{\frac{25}{4}}$.

64. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{a \square b}$, бунда, a=28; b=−12;

2) $\sqrt{x \square y}$, бунда, x=55; y=−9;

3) $x \square \sqrt{x}$, бунда, x=0,09;

4) $\sqrt{2a \square 5}$, бунда, a=9.

65. Тенгламани ечинг:

1) $x^2=64$; 2) $x^2=25$; 3) $x^2-0,09=0$; 4) $x^2=3$.

B

66. 1) 2; 2) 7; 3) −5; 4) 1,2; 5) $1\frac{1}{4}$; 6) $\square\frac{4}{7}$; 7) −0,2; 8) $\sqrt{3}$; 9) $\square\sqrt{1,5}$; 10) $\sqrt{2\frac{4}{7}}$ сонлар қандай сонларнинг квадрат илдизи бўла олади?

67. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 2) $\left(4\sqrt{3}\right)^2$; 3) $\sqrt{5} \square \sqrt{5}$;

4) $\left(-\sqrt{13}\right)^2$; 5) $\left(-\sqrt{13}\right)\cdot\sqrt{13}$; 6) $3\sqrt{7} \square \sqrt{7}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 8) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)^2$; 9) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right)^2$.

68. x ўзгарувчининг қандай қийматларида ифода маънога эга:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{\square x}$; 4) $\sqrt{\square 3x}$; 5) $\sqrt{25x}$;

6) $\sqrt{0,01x}$; 7) $\sqrt{\square\frac{7x}{5}}$; 8) $\sqrt{\square 81x^2}$.

69. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x} \square 2$; 2) $\sqrt{x} \square 25$; 3) $\sqrt{y} \square 12$;

4) $7\sqrt{y}\ \square 0$; 5) $7\sqrt{x}\ \square 2$; 6) $11\sqrt{x}\ \square 10$.

70. Сонни квадрат кўринишида ёзинг:

1) Намуна: $16=4^2$; 2) 1,21; 3) 625; 4) 0,16; 5) 7; 6) 2,5;

7) $\frac{49}{25}$; 8) $\frac{1}{3}$.

71. Тенгламани ечинг:

1) $x^2-7=0$; 2) $-y^2+6=0$;

3) $3x^2-7=0$; 4) $-4x^2+19=0$;

5) $-0,3y^2+0,39=0$; 6) $\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}=0$.

72. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{(7,2)^2}$; 2) $\sqrt{(-0,5)^2}$; 3) $\sqrt{41^2}$;

4) $\sqrt{(-22)^2}$; 5) $\sqrt{|\square 1,9|^2}$; 6) $\sqrt{|\square 7|^2}$.

73. Агар ўзгарувчилар фақат мусбат қийматлар қабул қилса, у ҳолда ифодани илдиздан чиқариб ёзинг:

1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{4x^2}$; 3) $\sqrt{0,01y^2}$; 4) $\sqrt{\frac{9b^2}{4}}$.

74. Ифодани ўзига айнан тенг бўлган илдиз қатнашмайдиган ифода билан алмаштиринг:

1) $\sqrt{(x-2)^2}$; 2) $\sqrt{(y+3)^2}$; 3) $\sqrt{(a-3)^2}$, $a<1$;

4) $\sqrt{(5-x)^2}$; 5) $\sqrt{4m^2 \square 4m\ \square 1}$; 6) $\sqrt{(b+6)^2}$, $b<-6$.

C

75. Касрни қисқартиринг:

1) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; 2) $\square\frac{7}{2\sqrt{7}}$; 3) $\frac{2x}{\sqrt{x}}$; 4) $\square\frac{a}{2\sqrt{a}}$;

5) $\frac{3\square\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,2}\square 0,2}{2\sqrt{0,2}}$; 7) $\frac{x\square 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 8) $\frac{a^2\square a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

76. Нима учун: 1) $\sqrt{x}=-4$; 2) $\sqrt{y}+4=0$; 3) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$; 4) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}=5$ тенгламалар илдизга эга эмас? Тушунтиринг:

77. Ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $\sqrt{x\square 5}$; 2) $\sqrt{x\square 5}$; 3) $\sqrt{2x\square\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x\square 3}}$.

78. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) a^2-3; 2) b^2-2c^2; 3) $-12x^2+13$; 4) $\frac{m^2}{5}\square\frac{n^2}{14}$.

79. Ифоданинг қиймати бутун сон эканини исботланг:

1) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$; 2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$;

3) $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)$ 4) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{3}+2\sqrt{10}\right)$.

80. 1) $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$; 2) $\sqrt{a^2-6a+9}=3-a$; 3) $\sqrt{y^2+4y^2+4}=y^2+2$ тенглик ўзгарувчининг қандай қийматларида бажарилади?

81. Касрни қисқартиринг:

1) $\frac{a\square 3}{\sqrt{a}\square\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2x-5}{\sqrt{2x}+\sqrt{5}}$; 3) $\frac{a\square b}{\sqrt{a}\square\sqrt{b}}$.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

82. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$; 2) $\left(m+1+\frac{1}{m-1}\right)\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

83. Модуль белгисисиз ёзинг:

1) $|a^2|$; 2) $|x^2|$; 3) $|y^2|$, $y>0$; 4) $|m^3|$, $m<0$.

84. 2 кг гуруч билан 3 кг унга 275 тенге тўланди. Агар бир килограмм гуруч бир килограмм ундан 50 тг қиммат бўлса, бир килограмм гуруч билан бир килограмм уннинг нарҳини топинг.

2-§. Иррационал сон тушунчаси

2.1. Квадрат илдизни тақрибий ҳисоблаш

$\sqrt{2}$ ни мисол тариқасида кўриб чиқиб, илдизнинг тақрибий қийматини топиш усулларига тўхталамиз.

Биринчидан, $1^2<2<2^2$ тенгсизликлар бажарилиши маълум, яъни $1<\sqrt{2}<2$.

Энди [1; 2] кесмада жойлашган 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2 сонлари орасидан $1{,}4^2<2<1{,}5^2$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи кетма-кет 1,4 ва 1,5 сонларни оламиз. Сўнг 1,4 билан 1,5 орасидаги юзлик улушлардан кетма-кет келган 1,41 ва 1,42 сонларини олсак, у ҳолда $1{,}41^2<1{,}42^2$ тенгсизликлар бажарилади. Бу жараённи давом эттириб, қуйидаги тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз:

$$1^2<2<2^2;$$
$$1{,}4^2<2<1{,}5^2;$$
$$1{,}41^2<2<1{,}42^2;$$
$$1{,}414^2<2<1{,}414^2;$$
$$1{,}4142^2<2<1{,}4142^2;$$
$$1{,}41421^2<2<1{,}41421^2.$$
$$1{,}414213^2<2<1{,}414214^2$$

Бу тенгсизликлардаги ўнли касрларнинг вергулдан кейинги рақамларини таққослаш натижасида, $2=(1{,}414213...)^2$ ёки $\sqrt{2}=1{,}414213...$ эканини кўрамиз.

Худди шундай ҳар қандай илдизнинг кўрсатилган аниқликкача тақрибий қийматларини топиш мумкин. Масалан, мазкур усул бўйича

$\sqrt{3}=1{,}7320508...$; $\sqrt{5}=2{,}2360679...$; $\sqrt{20}=4{,}472135...$, ва ҳ.к. тенгликлар бажарилишини кўрсатиш мумкин. Бунда кўп нуқталар ўнли касрларнинг хона улушлари чексиз (нодаврий) давом этишини кўрсатади. Амалда соннинг квадрат илдизлари керакли аниқликда яхлитланиб, чекли ўнли каср кўринишида қўлланилади. Масалан, 0,01 гача аниқликда оладиган бўлсак: $\sqrt{2}\approx 1{,}41$; $\sqrt{3}\approx 1{,}73$; $\sqrt{5}\approx 2{,}23$; $\sqrt{20}\approx 4{,}47$ ва ҳ.к. Бу олинган тақрибий қийматлар мос илдизлардан кичик. Шунинг учун булар ***ками билан олинган тақрибий қийматлар*** деб аталади. Шунингдек, илдизларни ортиғи билан ҳам яхлитлаш мумкин. Масалан, $\sqrt{2} \approx 1{,}42$; $\sqrt{3} \approx 1{,}74$; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$; $\sqrt{20} \approx 4{,}48$ ва ҳ.к. (1) тенгсизликлар системасидан $\sqrt{2}$ нинг ками ва ***ортиғи билан олинган тақрибий қийматларини*** исталган аниқликда осон топиш мумкин. Масалан, $\sqrt{2}$ нинг 0,0001 гача аниқликда ками ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари қуйидагича ёзилади: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $\sqrt{2} \approx 1{,}4143$.

Албатта, кўрсатилган усул бўйича илдизнинг тақрибий қийматларини топиш жуда ҳажмдор ва мураккабдир. Шунинг учун амалий топшириқларни бажаришда, умуман, амалиётда микрокалькуляторлардан кенг фойдаланилади. Бунинг учун илдиз остидаги сонни микрокалькуляторга киритиб, $\sqrt{}$ белгили тугмачани босиш кифоя. Бунда экранда берилган сон илдизининг ками билан олинган тақрибий қийматининг саккизта рақами кўринади ва вергул экрандаги саккиз рақам орасидан керакли жойга қўйилади. Масалан,

$\sqrt{41,26} \square 6,4233947$; $\sqrt{452} \square 21,260291$, ва ҳ.к.

Бу сонларнинг масалан, ўндан биргача яхлитланган тақрибий киймaтлари қуйидагича ёзилади: $\sqrt{41,26} \square 6,4$; $\sqrt{452} \square 21,3$.

2.2. Иррационал сонлар. Ҳақиқий сонлар тўплами

Рационал сонлар тўпламида барча ҳисоблар бажарилавермайди. Масалан, $x^2=4$ тенгламанинг илдизлари $x=2$ ва $x=-2$, $x^2=2$ тенгламанинг илдизларини эса рационал сонлар тўпламида аниқлаш мумкин эмас. Шунингдек, юзи 2 га тенг бўлган квадратнинг томонлари ҳам рационал сонлар билан ифодаланмайди. Яъни, квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд эмаслигини исботлаймиз.

Квадрати 2 га тенг бўлган рационал сон мавжуд, деб фараз қилайлик. У ҳолда бу рационал сонни қисқармас каср кўринишида ёзиш мумкин: $\frac{n}{m}$. Яъни $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$. Бундан $n^2=2m^2$ тенглик ҳосил бўлади. $2m^2$ жуфт сон, демак, n сони ҳам жуфт сон бўлади. Соннинг квадрати жуфт бўлса, берилган сон ҳам жуфт сон бўлади: $n=2k$.

Демак, $n^2=(2k)^2=4k=2m^2$, яъни $2k^2=m^2$ бўлиши керак. У ҳолда m^2 жуфт сон, демак, m ҳам жуфт сон бўлиши керак. Бу $\frac{n}{m}$ каср қисқармас деганимизга зиддир, чунки m ҳам, n ҳам жуфт сон экан. Демак, квадрати 2 га тенг бўлган сон рационал сон деган фаразимиз нотўғри.

Юқоридаги исботга кўра, $\sqrt{2}$ рационал сон эмас. Сиз 6-синфда ҳар бир рационал сон чекли ўнли каср ёки чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзилиши мумкинлигини кўриб чиққансиз. Демак, $\sqrt{2}=1,414213...$ рационал сон бўлмагани учун, чексиз нодаврий ўнли каср бўлади.

Таъриф. *Чексиз ўнли нодаврий касрлар* ***иррационал сонлар*** *деб аталади.*

Бу ерда «ир» лотинча сўз бўлиб, инкор маъносини англатувчи сўз кўшимчаси. Демак, «иррационал» сўзи «рационал эмас» деган маънони билдиради. Бу таърифга $\sqrt{2}$ ни чекли ёки чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин эмаслиги асос бўлди. Бинобарин, иррационал сонларнинг барчаси илдиз белгиси ёрдамида ёзилар экан деб ўйлаш нотўғридир. Масалан, сиз билган □=3,14159265... иррационал сон. Демак, чексиз нодаврий ўнли каср кўринишида ёзилган ҳар қандай сон иррационал сон бўлади. Масалан, 0,10110111011110...сони фақат 0 ва 1 рақамларидан тузилган бўлса ҳам, у иррационал сон, чунки бунда ҳар сафар нолдан кейин жойлашган бирликлар сони битта ортади, яъни 0 ва 1 рақамлари даврий равишда такрорланмайди.

Юқорида кўрилган мисолларда фақат мусбат иррационал сонларни кўриб чиқдик. Манфий иррационал сонлар ҳам худди шундай қаралади.

Масалан, $-\sqrt{2}=-1,4142...$; −□=−3,1415...; $-5,3030030003...$, ва ҳ.к.

Умуман, рационал ва иррационал сонлар биргаликда ***ҳақиқий сонлар*** деб аталади.

Барча ***ҳақиқий сонлар тўплами R*** ҳарфи билан белгиланади.

Демак, бизга қуйидаги белгилашлар маълум:

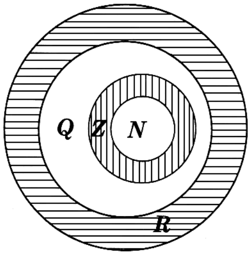
N= {1; 2; 3; 4;...} − натурал сонлар тўплами;

Z = {…, –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3;..} – бутун сонлар тўплами;

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{n}{m}; m \in N, n \in Z \right\}$ – рационал сонлар тўплами;

R– барча ҳақиқий сонлар тўплами.

Бу тўпламлар учун ***N*** □ ***Z*** □ ***Q*** □ ***R*** муносабатлар бажарилади.



1-расм

1-расмда бу муносабат Эйлер доиралари ёрдамида кўргазмали тасвирланган.

Демак, ҳақиқий сонлар тўплами рационал ва иррационал сонлар тўпламлари бирлашмасидан иборат.

Ҳақиқий сонларга бизга маълум арифметик амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш ва нолдан фарқли сонларга бўлиш) қўлланилади. Масалан, амалда, кундалик ҳаётда учрайдиган мисолларни ечиш мобайнида ҳақиқий сонларнинг керакли аниқликдаги тақрибий қийматлари олиниб, уларга чекли ўнли касрларга қўлланиладиган қоидалар бўйича амаллар қўлланилади.

1-мисол. □ + $\sqrt{3}$ йиғиндини топамиз.

0,01 гача аниқликда □ ≈ 3,14; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ бўлгани учун, □ + $\sqrt{3} \approx 3{,}14 + 1{,}73 = 4{,}87$.

Ҳақиқий сонларни таққослаш учун ҳам ўнли касрларни таққослаш қоидалари қўлланилади.

2-мисол. □ ва 3,(14)сонларини таққослаш керак.

□ = 3,14159… > 3,1415 > 3,141414… = 3(14).

Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцариялик математик. Кўп йиллар мобайнида Петербург Академиясииинг аъзоси бўлган. Инсоният тарихида математикадан энг йўп қўлёзма қолдирган олим. Леонард Эйлернинг илмий асарлари тўплами катта ҳажмдаги 60–80 томдан иборат деб тахмин қилинган.

Т Қадим замонларданоқ ҳаёт эҳтиёжидан келиб чиқадиган мисоллар соннинг квадрат илдизини топиш имконини яратган. Масалан, юзи берилган квадрат шаклидаги майдон томонининг узунлигини аниқлаш, квадрат тенгламаларни ечиш учун келтирилган масалалар ва ҳ.к. Масалан, эрамиздан аввалги II асрда қадимги хитойликларга соннинг квадрат илдизини топиш мумкин бўлган қоидалар маълум бўлган. Эрамизнинг IV–V асрларида яшаган ҳинд олимларига мусбат соннинг иккита квадрат илдизи бўлиши (мусбат ва манфий) ҳамда манфий соннинг квадрат илдизи мавжуд эмаслиги маълум эди.

Эрамиздан қарийб 3000 йил муқаддам қадимги Бобил қўлёзмаларида соннинг квадрат илдизини топишга мўлжалланган формула сақланган. Бу формула ҳозирги белгилашларда қуйидагича ёзилади:

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a} \qquad (2)$$

Масалан, (2) формуладан фойдаланиб, $\sqrt{19}$ нинг тақрибий қийматини аниқлаймиз:

$$\sqrt{19} = \sqrt{16+3} \approx 4 + \frac{3}{2 \cdot 4} = 4{,}375$$

$(4{,}375)^2=19{,}140625$ бўлгани учун, квадрат илдизнинг қиймати 0.1 гача бўлган аниқликда олинган. Албатта, бу аниқлик a сонининг танлаб олинишига боғлиқ. Агар $a^2=(4{,}2)^2=17{,}64$ деб олсак, у ҳолда $b=1{,}36$ бўлиб, тақрибий қиймат қуйидагича аниқланган бўлар эди:

$$\sqrt{19} = \sqrt{17{,}64+1{,}36} \approx 4{,}2 + \frac{1{,}36}{2 \cdot 4{,}2} = 4{,}3619047$$

Бунда $(4{,}361047)^2=19{,}026212...$, яъни яхлитлаш даражаси ортиб боради.

Уйғониш даврида ҳам Европа математиклари илдизни лотинча «Radix» (илдиз) деб, кейинроқ R ҳарфи билан белгилай бошлаганлар. Кейинроқ илдиз V белгиси билан, илдиз остидаги ифода эса устига чизиқча қўйилиб белгиланадиган бўлди. Илдизнинг $\sqrt{}$ шаклдаги намунасини француз математиги М. Ролл (1652–1719) ўзининг «Алгебрага шарҳлар» номли китобида кўрсатган.

Умуман, ҳақиқий сонлар тушунчаси рационал сонлар тушунчасини кенгайтириш жараёнида вужудга келди. Рационал сонлар тушунчасини кенгайтириш зарурати асосан математиканинг кундалик ҳаётда қўлланилиши ва математиканинг ички ривожланиши эҳтиёжидан (масалан, соннинг квадрат илдизнини аниқлаш) келиб чиққан. Қадимги грек олими Пифагор (эр. ав. VI аср) мактабида ўлчов бирлиги сифатида квадратнинг томони олинса, унинг диагоналини рационал сон билан ифодалаб бўлмаслиги исботланган. Бундай кесмалар (квадратнинг диагонали ва томони) ўзаро ўлчовдош бўлмаган кесмалар дейилган.

Шунингдек, Қадимги грек математиклари ўзаро ўлчовдош бўлмаган кесмалар назариясини ривожлантириш мобайнида умумий ҳақиқий сонлар тушунчасига келиб тўхташган. Демак, ҳақиқий сонларни тушунча тарзида дастлаб 17 асрда И. Ньютон (1646–1717) кўриб чиққан. Ҳақиқий сонларнинг қатъий назариясини эса XIX асрда немис математиклари К. Вейерштрасс (1815–1897), Р. Дедекинд (1831–1916) ва Г. Кантор (1845–1918) таклиф килишган.

$\boxed{?}$

1. Иррационал сон деб кандай сонга айтилади?
2. Иррационал соннинг ками ва ортиғи билан олинган ўнли яқинлашишлари деб қандай сонга айтилади? Мисол келтиринг.

3. $\sqrt{2}$ рационал сон эмаслигини исботланг.
4. Қандай сонлар ҳақиқий сонлар деб аталади?
5. Ҳақиқий сонлар тўплами деганда қандай сонлар тўплами тушунилади? У қандай белгиланади?
6. Натурал сонлар, бутун сонлар, рационал сонлар ва ҳақиқий сонлар тўпламлари кандай белгиланади? Уларни Эйлер доиралари ёрдамида тасвирлаб беринг.

МИСОЛЛАР

А

85. 1) 0,2664; 2) –1,2731; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $\square\frac{2}{7}$ сонларининг 0.1 ва 0,01 гача аниқликда ками ҳамда ортиғи билан яхлитланган тақрибий қийматларини топинг.

86. 2,6 ва 2,7 сонлари $\sqrt{7}$ сонининг 0,1 гача аниқликда ками ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматлари эканини кўрсатинг.

87. $\sqrt{5}$ = 2,23 тақрибий қийматнинг 0,01 гача аниқликда яхлитланганини кўрсатинг.

88. Сонларни ўнли каср кўринишида ёзинг:

1) $\frac{31}{20};\frac{7}{50};\frac{17}{200}$; 2) $\frac{8}{5};\frac{3}{2};\frac{13}{50}$; 3) $\frac{3}{150};\frac{21}{35};\frac{13}{65}$.

89. Амалларни бажаринг:

1) (0,6 · 0,1– 0,186:0,1)+1,575:1,5;

2) (0,137:0,01–14,2) · 2,44+1,23;

3) 00,025 · (134,7075+3,75:2,5–2,27);

4) $3,85\cdot 5\frac{1}{7}+69,25:27,7-14\frac{3}{20}$.

90. Ҳисобланг:

1) $\left(42\frac{5}{12}-21\frac{11}{8}\right)-\left(25-4\frac{1}{9}\right)$;

2) $\left(2\frac{1}{2}:3\frac{2}{3}\right):\left(7\frac{1}{2}:7\frac{1}{3}\right)\cdot\left(5\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{21}\right)$;

3) $1{,}5\cdot\left(\frac{3}{50}+0{,}2652:0{,}13-1\frac{17}{30}\right)+1\frac{13}{15}$;

4) $\dfrac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}-5{,}7\cdot\frac{2}{19}$.

Исаак Ньютон (1643–1723) – инглиз математиги, механиги, астрономи ва физик. Математик анализ асосларини яратувчилардан бири. Классик механиканинг асосий қонунларини кашф қилди, бутун олам тортишиш конунини ифодалади.

91. Чексиз даврий ўнли каср ўринишида ёзинг:

1) $\frac{1}{3};\frac{1}{17};\square\frac{20}{9};\frac{5}{6}$; 2) $\square\frac{8}{15};10{,}28;\ \square 17;\frac{3}{16}$;

3) $1\frac{3}{5};\frac{5}{016};\square 1\frac{5}{8};\frac{7}{30}$; 4) $1\frac{12}{25};\frac{5}{16};\frac{49}{80};\frac{17}{30}$.

92. Қуйидаги даврий ўнли касрларни оддий каср кўринишида ёзинг:

1) 0,(3); 0,2(5); 2) 7,(36); 4,2(25); 1,0(27);

3) 10,21(4); –2,1(12); 4) 0,(312); 0,0(2).

93. Микрокалъкулятор ёрдамида ҳисобланг:

1) $\sqrt{2112}$; 2) $\sqrt{72234}$; 3) $\sqrt{134{,}7075}$; 4) $\sqrt{0{,}28452}$.

B

94. 1) $\frac{1}{3}\square\frac{4}{7}$; 2) $\frac{2}{5}\square\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{3}\ \square\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{10}\ \square\sqrt{2}$

сонларни 0,01 гача аниқликда ками билан яхлитланг.

95. Рационал ва иррационал сонлар йиғиндиси рационал сон бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

96. Икки иррационал соннинг йиғиндиси рационал сон бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

97. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{2 \square \sqrt{3}}$ сонларининг рационал сон эканлигини исботланг.

98. *a* сонининг ками билан олинган ўнли яқинлашишида вергулдан кейин маълум жойдан бошлаб ёзиладиган рақамлар даврий равишда такрорланади. Бунда *a* сони рационал сон бўладими ёки иррационал сон бўладими?

99. *a* ва *b* рационал сонларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ҳамда бўлинмаси ($b \square 0$ бўлганда) рационал сон эканлигини исботланг.

100. Ҳисобланг:

1) $0,(3)+\frac{1}{3}$; 2) (2,(1)+3,(12)):0,5;

3) 1,(7)+8,(2); 4) 5,1(7)+0,(15)–1,3(21).

101. Сонларни таққосланг:

1) $\frac{1}{3}$ ва 0,375; 2) –1,174 ва $\square 1\frac{7}{40}$;

3) $\square 1\frac{3}{4}$ ва –1,75; 4) 0,437 ва $\frac{7}{15}$;

5) 0,1(3) ва 0,132; 6) 0,239 ва 0,23(8);

7) 0,(94) ва $\frac{34}{37}$; 8) $\frac{241}{33}$ ва 7,31(06).

102. Ифоданинг қийматини 0,001 гача аниқликда микрокалькулятор ёрдамида ҳисобланг:

1) $\sqrt{2,1} \square \sqrt{3,51}$; 2) $\sqrt{3 \square \sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{3,14^2 \square 2,1\sqrt{2}}$; 4) $1 \square \sqrt{2} \square \sqrt{3} \square \sqrt{4} \square \sqrt{5}$;

5) $\sqrt{2,1 \square \sqrt{3,1} \square \sqrt{4,1}}$; 6) $1 \square \frac{1}{\sqrt{2}} \square \frac{1}{\sqrt{3}} \square \frac{1}{\sqrt{4}} \square \frac{1}{\sqrt{5}}$.

103. Иккита қисқармас касрларнинг: 1) йиғиндиси; 2) айирмаси; 3) кўпайтмаси; 4) нисбати бутун сонга тенг бўладиган шартларни топинг.

104. Иккита қисқармас касрларнинг: 1) йиғиндиси уларнинг кўпайтмасига; 2) айирмаси уларнинг кўпайтмасига тенг бўладиган шартларни топинг.

105. (2) формуладан фойдаланиб: 1) $\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{125}$; 3) $\sqrt{5,7}$; 4) $\sqrt{521}$ сонларининг 0,1 гача; 0,01 гача аниқликдаги тақрибий қийматларини топинг.

106*. Агар x_1сони $\sqrt{a}$ нинг ($a>0$) ками билан олинган тақрибий қиймати бўлса, $\frac{a}{x_1}$ сони $\sqrt{a}$ нинг ортиғи билан олинган тақрибий қиймати эканини кўрсатинг.

107*. Агар x_1сони $\sqrt{a}$ нинг ($a>0$) ортиғи билан олинган тақрибий қиймати бўлса, x_1 сони $\sqrt{a}$ нинг ками билан олинган тақрибий қиймати эканини кўрсатинг.

108. 106 ва 107-мисоллар бўйича, агар x_1сони $\sqrt{a}$ нинг ($a>0$) ками (ёки ортиғи) билан олинган тақрибий қиймати бўлса, x_1 ва $\frac{a}{x_1}$ сонларидан бири $\sqrt{a}$ нинг ками билан олинган тақрибий қиймати бўлади, иккинчиси эса $\sqrt{a}$ нинг ортиғи билан олинган тақрибий қиймати бўлишини кўрамиз. У ҳолда бу тақрибий қийматларнинг ўрта арифметиги, яъни $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)$ сони $\sqrt{a}$ сонининг сонларга нисбатан аниқроқ қиймати эканлиги келиб чиқади. Ўз навбатида x_1, $\frac{a}{x_2}$ сонлари (105, 106-мисоллар бўйича) $\sqrt{a}$ нинг ками билан ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматларидир. Бундан $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)$ сони $\sqrt{a}$ нинг аниқроқ тақрибий қиймати экани намоён бўлади. Бу жараённи давомэттириб, $\sqrt{a}$ сонини кетма-кет яхлитловчи қуйидаги рекуррент формулани ҳосил қиламиз: $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$ **(3)**

Масалан, $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ сонининг ками билан олинган такрибий қиймати. Бунда **(3)** формуладан $\sqrt{5}$ нинг иккинчи тақрибий қиймати қуйидагича аниқланади:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2,25.$$

Энди навбатдаги тақрибий қийматларни топамиз:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(2,25 + \frac{5}{2,25}\right) = \frac{161}{72} = 2,236(1) \approx 2,2361;$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(2,2361 + \frac{5}{2,2361}\right) \approx 2,2361.$$

Демак, x_3 сони $\sqrt{5}$ ни 0,0001 гача аниқликда яхлитлайди.

(3) формула ёрдамида: 1) $\sqrt{24,24}$; 2) $\sqrt{3,81}$; 3) $\sqrt{516,3}$; 4) $\sqrt{0,721}$; сонларининг қийматини 0,001 гача аниқликда топинг.

109. 5 ва 5,01 сонлари орасида жойлашган рационал ва иррационал сонни топиб ёзинг.

110. 1) Йиғиндиси; 2) кўпайтмаси рационал сон бўладиган иккита иррационал сонларга мисол келтиринг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

111.* Бир метр газламани: 1) ярим; 2) чорак; 3) саккиздан бир метрини махсус ўлчов асбобисиз қандай қилиб ўлчаб, қирқиб олиш мумкин?

112. Ҳар қандай натурал n сони учун:

1) $\dfrac{10^n \square 2}{3}$; 2) $\dfrac{10^n \square 8}{9}$; 3) $\dfrac{10^n \square 5}{5}$; 4) $\dfrac{101 \cdot 10^{2n} + 9}{11}$.

касрнинг қийматлари бутун сон эканини исботланг.

113. 1) $A(-0{,}3;\ 0{,}09)$; 2) $B\left(1\dfrac{1}{2}; 2\dfrac{1}{4}\right)$; 3) $C\left(-3\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{9}\right)$

нуқталар $y = x^2$ функция графигига тегишли бўладими?

3-§. Ҳақиқий сонларнинг тўғри чизиқ нуқталарига мослиги

3.1. Соннинг бутун ва каср қисмлари

Ҳар қандай бутун бўлмаган r рационал сон қўшни иккита бутун сон орасида ётади: $n<r=n+1$. Масалан, $\dfrac{8}{3}$ сони 2 билан 3 нинг $\dfrac{79}{113}$ сони 0 билан 1 нинг, $\square\dfrac{7}{2}$ сони − 4 билан −3 нинг орасида ётади ва ҳ.к.

x сонининг ***бутун қисми*** деб, берилган сондан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади. Агар $n \leqslant x = n+1$ бўлса, у ҳолда x сонининг бутун қисми n га тенг. У қуйидагича белгиланади: $[x]=n$. Масалан:

$$\left[\frac{7}{2}\right] = 3;\quad \left[\frac{13}{19}\right] = 0;\quad \left[-\frac{5}{3}\right] = -2;\quad [4] = 4.$$

Берилган сон билан унинг бутун қисмининг айирмаси шу соннинг ***каср қисми*** деб аталади. У қуйидагича белгиланади: $\{x\}$. Демак, $\{x\}=x-\{x\}$ Масалан,

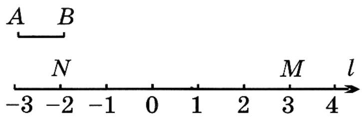
$$\left\{\frac{7}{2}\right\} = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}, \left\{\frac{13}{19}\right\} = \frac{13}{19}, \left\{-\frac{5}{3}\right\} = -\frac{5}{3} - (-2) = \frac{1}{3}, \{4\} = 0.$$

Исталган бутун соннинг каср қисми 0 га тенг, чунки бутун сон ўзининг бутун қисмига тенг. Ҳар қандай x учун $n \leqslant \{x\} < 1$ тенгсизлик бажарилади. Яъни ҳар қандай соннинг каср қисми номанфий 1 дан кичик каср сон бўлади. Исталган сон ўзининг бутун ва каср қисмлари йиғиндисига ажралади: $x = [x]+\{x\}$. Масалан,

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}; \quad \frac{13}{19} = 0 + \frac{13}{19}; \quad -\frac{5}{3} = -2 + \frac{1}{3}; \quad 4 = 4 + 0.$$ ¶

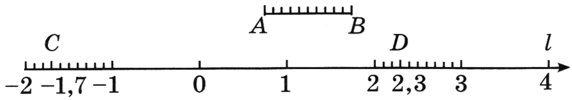
3.2. Ҳақиқий сонларнинг координата тўғри чизиғи нуқталарига мослиги

Сиз 6-синфда координата тўғри чизиғи (сон ўқи) ва унга тегишли нуқталар координаталарини аниқлаш усулини ўргандингиз. Энди шу тушунчаларни ҳақиқий сонлар асосида кўрамиз.



2-расм

Масалан, l тўғри чизиқ билан AB кесма берилган бўлсин. l тўғри чизиғида O нуқтани белгилаб оламиз. Бу нуқтани ***бошланғич нуқта*** деб олиб, унга мос 0 сонини қўямиз. O нуқта тўғри чизиқни иккита нурга ажратади. Бу нурларнинг бирини ***мусбат***, иккинчисини эса ***манфий йўналиш*** деб ҳисоблаймиз. Одатда, мусбат йўналиш чизмада йўналиш белгиси билан кўрсатилади (2-расм). Берилган AB кесмани бирлик кесма деб, ҳар бир ҳақиқий сонга l тўғри чизиғидан битта нуқтани қуйидаги усулда мослаб қўямиз. Агар n натурал сон бўлса, у ҳолда O нуқтадан бошлаб AB кесмани n марта ўлчаб қўямиз. Ҳосил бўлган кесма учига мос n сонини қўямиз. Манфий $-m$ сонига (m − натурал сон) l ўқидан манфий йўналишдаги нуқтани мос қўямиз. Бунинг учун AB кесмани O нуқтадан бошлаб m марта ўлчаб қўйиб, қўйилган кесманинг чап томондаги учига $-m$ сонини мос қўямиз. Демак, ҳар бир бутун сонга l тўғри чизиғида ягона нуқта мос қўйилди. Масалан, 3 га 2-расмда M нуқта, -2 га N нуқта мос қўйилган. Энди l ўқидан мос келувчи нуқтани аниқлаймиз. Бунинг учун r сонини бутун ва каср қисмларга ажратамиз: $r = k + \frac{m}{n}$, $k = [r]$, $0 \le \frac{m}{n} = \{r\} < 1$ Агар k (манфий) бўлса, у ҳолда l ўқининг мусбат (манфий)

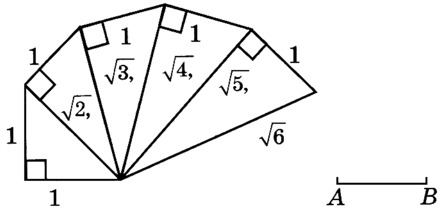


3-расм

йўналишидан шу сонга мос келадиган нуқтани топиб, бу нуқтадан ўнгга қараб (k−манфий сон бўлса ҳам) AB кесманинг $\frac{m}{n}$ қисмини ўлчаб қўямиз. Бу олинган кесманинг ўнг томони учи r сонига мос қўйилади. Масалан, 2,3 сонига 3-расмда D нуқта, −1,7 сонга эса C нуқта мос қўйилган. Бунда $2{,}3=2+0{,}3$; $-1{,}7=-2+0{,}3$.

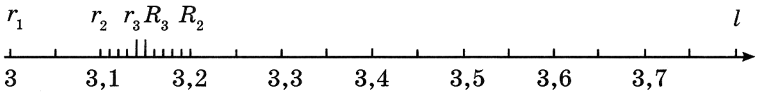
Демак, ҳар қандай сонга l ўқида AB бирлик кесма бўйича ягона нуқтани мос қўйиш мумкин. Шу каби, a иррационал сон бўлса, унинг мусбат ёки манфий бўлишига боғлиқ. O нуқтадан бошлаб, мос ҳолда l ўқининг мусбат ёки манфий қисмидан узунлиги $|a|$ га тенг кесмани ўлчаб қўйиб, ҳосил бўлган кесманинг иккинчи учини a сонига мос қўямиз. Масалан, 4-расмда AB бирлик кесма бўйича узунликлари $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$, ва ҳ.к. сонларга тенг кесмаларни ясаш усули кўрсатилган. Шунингдек, узунликлари ҳар қандай иррационал сонга тенг кесмани шу тариқа циркуль ва чизғичдан фойдаланиб ясаш мумкин деган фикр нотўғри.

Масалан, узунлиги n сонига тенг бўлган кесмани циркуль ва чизғич ёрдамида ясаб бўлмайди. Ваҳоланки, бундай сонларга мос келувчи нуқталарнинг l ўқидаги аниқ ўрнини назария бўйича кўрсатиш мумкин деб ҳисоблаймиз (амалиётда бундай ясаш ишларини бажариш мумкин эмас). Масалан, $\square=3{,}1415926\ldots$ сонига мос қўйилувчи нуқта ўрнини кўрсатиш мумкин эканлигини қараймиз.



4-расм

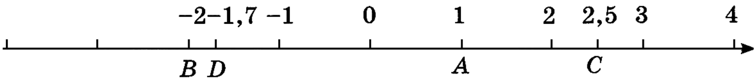
Бунинг учун r_1=3; r_2=3,1; r_3=3,14;... ва R_1=4; R_2=3,2; R_3=3,15; R_4=3,142... сонларини кўриб чиқамиз. $r_1 r_2 r_3$... сонлари $\square$ ни ками билан яхлитласа, $R_1 R_2 R_3$... сонлари ортиғи билан яхлитлаб олинган. $r_1<\square<R_1$; $r_2<\square<R_2$; $r_3<\square<R_3$... тенгсизликлар бажарилганлиги учун, $\square$ га мос қўйилган нуқта r_k ва R_k (k=1, 2, 3...) мос келадиган нуқталар орасида жойлашади. $r_1 r_2 r_3$ ва $R_1 R_2 R_3$ рационал сонлар бўлгани учун, уларга мос қўйиладиган нуқталарнинг ўрнини олдидан берилган, ҳар қандай (0,1 гача,0,01 гача, 0,001 гача ва ҳ. к.) аниқликда топа оламиз. Ушбу жараённи чексиз давом эттириб, *n* сонига мос келадиган нуқтанинг *l* ўқидаги ўрнини *AB* бирлик кесма бўйича аниқ топиш мумкин деб ҳисоблаймиз (5-расм).



5-расм

Шу тариқа, ҳар бир иррационал сонга ҳам *l* ўқида биттагина нуқтани мос қўйиш мумкин. Демак, биз *l* ўқида ҳар қандай ҳақиқий сонга фақат битта нуқта мос келишини исботладик.

Энди аксинча, *l* ўқидаги ҳар бир нуқтага фақат битта ҳақиқий сон мос келишини кўрсатамиз. Масалан, *M* нуқта *l* тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин ва *OM* кесма узунлиги *AB* бирлик кесма бўйича *a* сонига тенг бўлсин. Агар *M* нуқта *l* ўқининг ўнг қисмида ётса, бу нуқтага *a* сонини мос қўямиз, аксинча, *M* нуқта *l* ўқининг чап қисмида жойлашса, у ҳолда манфий $-a$ сонини мос қўямиз. Шу каби, *l* ўқининг ҳар бир нуқтасига маълум бир ҳақиқий сон мос қўйилади. У ҳолда, *l* ўқининг нуқталари билан барча ҳақиқий сонлар тўплами орасида ***ўзаро бир қийматли мослик*** ўрнатилади, яъни ҳар қандай ҳақиқий сонга *l* тўғри чизиқнинг фақат битта нуқтаси мос келади ва аксинча, *l* ўқининг ҳар бир нуқтасига фақат битта ҳақиқий сон мос қўйилади. Мана шундай тўғри чизиқ ***сон ўқи*** деб аталади. Агар сон ўқининг *M* нуқтасига *a* сони мос қўйилса, *a* сони *M* нуқтанинг *l* ўқдаги ***координатаси*** деб аталади ва у қуйидагича белгиланади: *M*(*a*). Кўп



6-расм

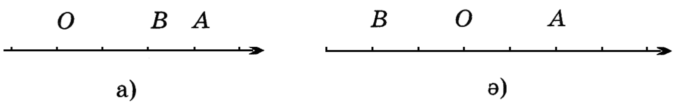
ҳолларда $M(a)$ нуқта эмас, сон ўқидаги a нуқта деб айтилади. 6-расмда $A(1)$, $B(-2)$, $C(2,5)$, $D(-1,7)$ нуқталар белгиланган.

Энди сон ўқида жойлашган нуқталар орасидаги масофани аниқлаймиз. Сон ***ўқидаги*** $A(a)$ ***ва*** $B(b)$ ***нуқталар орасидаги масофа***

$$AB=|a-b| \qquad (1)$$

формула орқали ифодаланади.

Агар A ва B нуқталар сон ўқининг мусбат қисмида жойлашган бўлса, B нуқта A ва O нуқталар орасида ёки A нуқта B ва O нуқталар орасида жойлашади. Аниқлик учун, B нуқта A ва O нуқталар орасида ётсин. Бунда $a>b>0$ бўлади (7, а-расм) ва $AB=OA-OB$ тенглик бажарилади. $OA=a$, $OB=b$ бўлгани учун. $AB=a-b=|a-b|$ тенглик бажарилади. Энди A ва B нуқталар O нуқтанинг икки турли қисмида жойлашган бўлсин. Масалан, A ўнг қисмида, B эса чап қисмида жойлашсин. Бунда $a>0$, $b>0$, (7, б-расм). $AB=OA+OB$ ва $OA=a$, $OB=|b|=-b$ бўлганлиги учун, $AB=OA+OB=a-b=|a-b|$ тенглик бажарилади. A ва B нуқталар бошқа кўринишда жойлашган ҳолларда ҳам (1) формула шу каби исботланади.



7-расм

1-мисол. $A(-3)$ ва $B(0,5)$ нуқталар орасидаги масофани топиш керак.

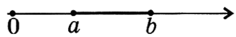
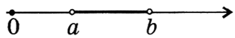
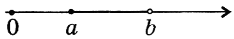
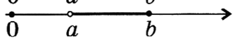
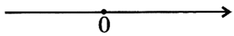
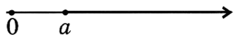
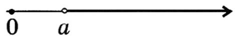
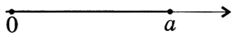
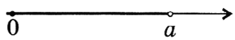
Ечилиши. (1) формула бўйича

$AB=|-3-0,5|=|-3,5|=3,5$ (бирлик)

тенгликни оламиз.

3.3. Баъзи сонли оралиқлар ва уларни тенгсизликлар ёрдамида ифодалаш

Сиз 6-синфда тўпламлар билан танишиб, улар устида амаллар қўллашни ўргандингиз. Шунингдек, сон ўқида берилган тўпламларни (сонли оралиқларни) кўриб, уларни ёзиш усулларини, тенгсизликлар ёрдамида ёзишни ва сон ўқидаги тасвирларини кўрсата олишни ўргандингиз. Энди мазкур маълумотларга таянган ҳолда ўтилган материалларни такрорлаш мақсадида қуйидаги жадвалдан фойдаланинг. Чунки бу материаллар кейинги бобларда берилган масалаларни ечишда кўп қўлланилади.

Тенгсизликлар	Сонли оралиқлар	Оралиқларнинг сон ўқидаги тасвири
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$ – ёпиқ оралиқ, кесма	
$a < x < b$	$(a; b)$ – кесма – очиқ оралиқ	
$a \leqslant x < b$ $a < x \leqslant b$	$\left.\begin{matrix}[a;b)\\(a;b]\end{matrix}\right\}$ – ярим очиқ оралиқлар	 
$-\square < x < +\square$	$(-\square;\ +\square)$ – сонлар ўқи	
$a \leqslant x < +\square$ $a < x < +\square$ $-\square < x \leqslant a$ $-\square < x < a$	$\left.\begin{matrix}[a;+\infty)\\(a;+\infty)\\(-\infty;a]\\(-\infty;a)\end{matrix}\right\}$ чексиз сонли оралиқлар нурлар	   

?

1) Соннинг бутун қисми нима?
2) Соннинг каср қисми нима?
3) Сонлар ўқи қандай аниқланади?
4) Сон ўқида берилган сонга мос келувчи нуқта қандай топилади?
5) Сон ўқида берилган нуқтага мос келувчи сон қандай аниқланади?
6) Сон ўқидаги нуқтанинг координатаси деб нимага айтилади ва у қандай ёзилади?
7) Қандай сонли оралиқлар бор? Уларни тенгсизликлар ёрдамида ёзиб кўрсатинг.

МИСОЛЛАР

А

114. 1) $2\frac{7}{17}$; 2) $\square 3\frac{4}{5}$; 3) 5; 4) 122,31; 5) −17,32; 6) $\frac{1}{2}\square\frac{2}{3}\ \square\frac{3}{4}$ сонларининг бутун ва каср қисмларини ёзинг.

115. Координаталари $\frac{2}{3}$, $\square\frac{3}{4}$, $\sqrt{3}$; −1,6; 0,7 бўлган нуқталарни маълум бир бирлик кесма бўйича сон ўқида тасвирлаб кўрсатинг.

116. A ва B нуқталар орасидаги масофани топинг:

1) $A(1{,}5)$; $B(-2)$; 2) $A(-10{,}3)$; $B(6{,}2)$;

3) $A(-3{,}6)$; $B(0)$; 4) $A(-5{,}7)$; $B(-1)$.

117. Агар:

1) $AB=5$; $B(5)$; 2) $AB<3{,}5$; $B(-1)$;

3) $AB<0{,}2$; $B(-4{,}5)$; 4) $AB<\frac{1}{48}$; $B(-12)$

бўлса, $A(x)$ нуқта координатасини қаноатлантирадиган шартларни тенглама ёки тенгсизлик кўринишида ёзинг.

118. Сон ўқида $A(-7)$, $B(5)$, $C(2)$ нуқталарни белгилаб, AB, AC ва BC кесма узунликларини топинг.

119. 1) $x>5$; 2) $x<3$; 3) $-3<x<7$; 4) $-3<x<3$; 5) $x>-2$; 6) $-\square<x<11$; 7) $-5<x<0$ тенгсизликлар билан берилган тўпламни оралиқлар билан ёзинг:

120. 1) $[2;+\square)$; 2) $[-5;\ 3]$; 3) $(-2;\ 0)$; 4) $(-\square;-1)$; 5) $(-\square;5]$; 6) $(-3;+\square)$; 7) $[2;\ 4)$; 8) $(-2;\ 1]$ оралиқларни сон ўқида тасвирлаб, уларни тенгсизликлар ёрдамида ёзинг.

121. 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{69}$; 4) $\sqrt{111}$; 5) $\sqrt{250}$; 6) $\sqrt{1221}$ сонларидан кичик энг катта натурал сонни топинг.

122. 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{23}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) $\sqrt{113}$; 5) $\sqrt{250}$; 6) $\sqrt{2112}$ сонларидан катта энг кичик натурал сонни топинг.

B

123. Қуйидаги сонларни бутун қисми билан каср қисмларининг йиғиндисига ажратиб ёзинг:

$$\frac{3}{4}, \frac{21}{19}, -\frac{1}{6}, -\frac{81}{20}, \frac{1}{3}+\frac{5}{2}, \frac{3}{5}-\frac{7}{3}, -\frac{2}{5}+\frac{20}{27}, -\frac{5}{6}-\frac{215}{183}.$$

124. Сонларни таққосланг:

1) 3 ёки $\sqrt{8,5}$; 2) $3\sqrt{2}$ ёки $\sqrt{17}$;

3) $5\sqrt{3}$ ёки $6\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ ёки 2?.

125. Сонларнинг бутун қисмини топинг:

1) $\sqrt{14}$; 2) $\square\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{238}$; 4) $\square\sqrt{105}$.

126. Қуйида берилган сонлардан қайси бири рационал сон, қайсилари иррационал сон бўлади:

1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{1,44}$; 3) $\sqrt{18}$; 4) $\square\sqrt{7}$; 5) 0,6161; 6) –2,3(74);

7) 0,0202002000...; 8) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$.

127. Агар a ва b ($b \,\square\, 0$) – рационал сонлар бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ ҳам рационал сон эканини исботланг.

128. Координаталари: 1) $\sqrt{2}$ ва $\square\frac{2}{3}$; 2) 0,5 ва $\sqrt{2}\,\square\sqrt{5}$ бўлган нуқталар орасидаги масофани 0,01 гача аниқликда топинг.

129. Қуйидаги нуқталарнинг қайси бири 0 нуқтадан узоқроқда жойлашган?

1) 5,2397 ва 4,4996; 2) –15,001 ва –15,100;
3) –0,3567(8) ва 0,3559; 4) 2,103 ва –2,093?

130. 1) [5;+□] билан (7;+□); 2) [–3; 5] билан (–□; 0); 3) (–□; 4) билан [0; +□); 4) (–□; 10) билан (0; 5); 5) (–□; 5) билан [–1; 3]; 6) (–4; 0) билан (3; 4) сонли оралиқларнинг кесишмаси (иккала оралиққа умумий бўлган нуқталар тўплами) ни топинг.

131. 1) [2; 4] билан (–7; 3); 2) (–2; 0) билан [0; +□); 3) (–1; 5) билан (0; 3); 4) (–□; 15] билан [2; 4]; 5) (–□; 4] билан [0; +□); 6) (–3; 0] билан [5; +□) сонли оралиқларнинг бирлашмаси (икки оралиқнинг камида биттасига тегишли бўлган нуқталар тўплами) ни топинг.

132. Шундай кетма-кет натурал сонни топингки, улар орасида:1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) $\sqrt{123}$; 5) $\sqrt{222}$; 6) $\sqrt{720}$ сони жойлашсин.

С

133. 4-расмда узунликлари $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,... сонларига тенг кесмаларни ясаш усуллари кўрсатилган. Узунликлари:1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{101}$; 3) $\sqrt{85}$ га тенг кесмаларни қулай усуллар ёрдамида ясаш мумкинми?

134.* Агар координатаси *a* га тенг бўлган нуқта берилган бўлса, циркуль ва чизғич ёрдамида координатаси $\frac{1}{a}$ бўлган нуқта қандай ясалади?

135*. Координаталари: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;; 2) □$\frac{\sqrt{5}}{5}$ бўлган нуқталарни сон ўқида белгиланг.

136. 1) $|x| < 5$; 2) $|x| > 2$; 3) $|x-3| < 3$; 4) $|x+2|>4$ тенгсизликларни оралиқлар ёрдамида ёзиб, уларни сон ўқида тасвирланг.

137. 1) $(x-1)(x+2)<0$; 2) $(x-2)(x-5)>0$; 3) $(x-3)^2<9$; 4) $(x+1)^2>1$ тенгсизликлар ечимларини сонли оралиқлар ёрдамида ёзинг.

138. Ҳеч бир натурал n сони учун $\frac{n \square 6}{15}$, $\frac{n \ \boxed{5}}{24}$ каср-ларнинг қийматлари бир хил бутун қийматлар қабул қилмаслигини исботланг.

139. Берилган тенгсизликни ечиб, жавобни сонли оралиқлар ёрдамида ёзинг:

1) $\sqrt{(x-3)^2} \leq 2$; 2) $\sqrt{(x+3)^2} \leq 2$;

3) $\sqrt{(5-x)^2} < 3$; 4) $\sqrt{(2x+3)^2} < 1$.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

140. Бир соат вақтнинг: 1) ярмида; 2) чорагида; 3) учдан бирида; 4) йигирмадан бирида неча дақиқа бор?

141. 3 кг ундан ўзаро тенг 5 та нон ёпилади. Ҳар бир нонга неча килограмм ун ишлатилади?

142. 1) $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{10}{14}, \frac{7}{8}$; ; 2) $\frac{271}{300}, \frac{7}{8}, \frac{47}{60}, \frac{17}{20}$; касрлардан энг каттасини ва энг кичигини топинг.

143. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x} \square 5$; 2) $\sqrt{x-1} = 3$;

3) $\sqrt{3x+2} = 6$; 4) $\sqrt{7x-8} = 12$.

144. x ўзгарувчининг қандай қийматларида $y = \frac{x}{2} + 2$ тенглик билан аниқланган функция қийматлари $[-2;\ 2]$ оралиққа тегишли бўлади?

4-§. Квадрат илдизнинг хоссалари

4.1.Квадрат илдизнинг хоссалари

1-§ да квадрат илдизларнинг қуйидаги хоссалари мавжуд эканини кўриб ўтдик:

1) $\sqrt{a}$ *ифоданинг аниқланиши соҳаси (маънoли қийматлар тўплами) номанфий ҳақиқий сонлар тўплами бўлади:* $a \geqslant 0$;

2) $\sqrt{a} \geqslant 0$ – *арифметик илдиз номанфий сон*;

3) $x^2=a,\ a\geqslant 0$ *тенгламанинг иккита илдизи бор:* $x = \pm\sqrt{a}$.

4) *ҳар қандай а сони учун* $\sqrt{a^2}$ □$|a|$ *тенглик бажарилади.*

Энди квадрат илдизларнинг бошқа хоссаларини кўрамиз:

5) *Кўпайтманинг квадрат илдизи кўпайтувчиларнинг квадрат илдизлари кўпайтмасига тенг, яъни, агар бўлса, у ҳолда* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Масалан, $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$. У ҳолда арифметик илдиз ягона бўлганлига учун, $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ тенгликни оламиз.

6) *Касрнинг квадрат илдизи квадрат илдизларнинг нисбатига тенг, агар,* $a \geqslant 0$, $b > 0$ *бўлса,* $\sqrt{\frac{a}{b}}$ □$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *тенглик бажарилади.*

5-хосса каби исботланади.

7) *Даражанинг илдизи илдизнинг даражасига тенг, яъни, агар* $a \geqslant 0$ *бўлса, ҳар қандай натурал n сони учун* $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$ *тенглик бажарилади.*

Демак, $\left(\sqrt{a}\right)^n = a^n \Rightarrow \left(\left(\sqrt{a}\right)^n\right)^2 = \left(\left(\sqrt{a}\right)^n\right)^2 = a^n$.

Натижа. *Агар n жуфт сон бўлса, демак, = тенглик бажарилади.*

Демак, агар n жуфт сон бўлса, у ҳолда $\frac{n}{2}$ бутун сондир. Чунки, $\left(|a|^{\frac{n}{2}}\right)^2 = |a|^n = a^n$ тенглик бажарилади.

1-мисол. $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 36} = \sqrt{9}\sqrt{25}\sqrt{36} = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$.

2-мисол. $\sqrt{\frac{121}{324}} \square \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{324}} \square \frac{11}{18}$.

3-мисол. $\sqrt{7^6} \square 7^{\frac{6}{2}} \square 7^3 \square 343$.

4-мисол. $\sqrt{a^{10}b^6}$, $(a > 0, b < 0)$ ифодани соддалаштирамиз.

$$\sqrt{a^{10}b^6} = \sqrt{a^{10}}\sqrt{b^6} = |a|^5 |b|^3 = a^5(-b)^3 = -a^5b^3.$$

5-мисол. $\sqrt{288}$ ва $13\sqrt{2}$ сонларини таққослаш керак.

1-усул. (Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқариш усули).

$$\sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = \sqrt{144}\sqrt{2} = 12\sqrt{2} < 13\sqrt{2}.$$

2-усул. (Кўпайтувчини илдиз белгси остига киритиш усули).

$$13\sqrt{2} = \sqrt{169}\sqrt{2} = \sqrt{169 \cdot 2} = \sqrt{338} > \sqrt{288}.$$

4.2. Квадрат илдиз қатнашган ифодаларни шакл алмаштириш

Квадрат илдиз қатнашган ифодаларни шакл алмаштиришга доир мисоллар кўрамиз.

6-мисол. $\sqrt{15} - \sqrt{60} + 3\sqrt{135}$ ифодани соддалаштириш керак.

Ечилиши. Аввал иккинчи ва учинчи қўшилувчиларни соддалаштирамиз:

$$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} = 2\sqrt{15};$$

$$3\sqrt{135} = 3 \cdot \sqrt{9 \cdot 15} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{15} = 9\sqrt{15}.$$

Демак, $\sqrt{15} - \sqrt{60} + 3\sqrt{135} = \sqrt{15} - 2\sqrt{15} + 9\sqrt{15} = 8 \cdot \sqrt{15}$.

7-мисол. $\frac{2}{\sqrt{5} \square \sqrt{3}}$ касрни махражида илдиз белгиси бўлмайдиган қилиб шакл алмаштирамиз. Бу амал ***каср махражидаги иррационалликдан қутулиш*** деб аталади.

Ечилиши. Касрнинг сурат ва махражини махражининг боғланган (йиғинди) ифодасига, яъни $\sqrt{5} \square \sqrt{3}$ ифодага кўпайтирамиз.

У ҳолда, $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$

$$=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

8-мисол. $\dfrac{a^2 \square 5}{a \square \sqrt{5}}$ касрни қисқартириш керак.

Ечилиши. $a^2-5=a^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)$ бўлгани учун $\dfrac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}=\dfrac{\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)}{a-\sqrt{5}}=a+\sqrt{5}$ тенгликни оламиз.

9-мисол. $a>0$ бўлганда, $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ ифодани соддалаштириш керак.

Ечилиши. $\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=a-3$ тенгликни назарда тутган ҳолда, берилган ифодани қуйидагича шакл алмаштирамиз:

$$\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}=\sqrt{a^2+a+4+a-3}=\sqrt{a^2+2a+1}=$$

$$=\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|=a+1.$$

?

1. Квадрат илдизларнинг қандай хоссаларини биласиз?
2. 5) –7) хоссаларни умумлаштириб, исботланг.
3. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутулиш деганда нимани тушунасиз?

МИСОЛЛАР

А

145. Илдизнинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{121 \square 64}$; 2) $\sqrt{0,36 \square 49}$; 3) $\sqrt{12\dfrac{1}{4}}$;

4) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; 5) $\sqrt{0,04\square 81\ \square 25}$; 6) $\sqrt{0,09\square 16\ \square 0,04}$;

7) $\sqrt{1\frac{7}{9}\square\frac{4}{25}}$; 8) $\sqrt{\frac{121}{144}\square 2\frac{1}{4}}$.

146. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{810\square 40}$; 2) $\sqrt{75\ \square 12}$; 3) $\sqrt{72\square 32}$; 4) $\sqrt{45\ \square 80}$;

5) $\sqrt{2,5\square 14,4}$; 6) $\sqrt{4,9\ \square 360}$; 7) $\sqrt{90\square 6,4}$; 8) $\sqrt{160\square 6,4}$.

147. Илдизнинг қийматини ҳисобланг:

1) $\sqrt{13^2-12^2}$; 2) $\sqrt{21,8^2-18^2}$; 3) $\sqrt{313^2-312^2}$;

4) $\sqrt{17^2-64}$; 5) $\sqrt{45,8^2-44,2^2}$; 6) $\sqrt{117^2-108^2}$;

7) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$; 8) $\sqrt{\left(2\frac{3}{5}\right)^2-\left(2\frac{2}{5}\right)^2}$.

148. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{2}\sqrt{8}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; 3) $\sqrt{27}\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$;

5) $\sqrt{28}\sqrt{17}$; 6) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; 7) $\sqrt{13}\sqrt{52}$; 8) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$.

149. Кўпайтувчини квадрат илдиз белгиси остидан чиқаринг:

1) $\sqrt{27}$; 2) $\sqrt{98}$; 3) $\sqrt{80}$; 4) $\sqrt{160}$;

5) $\sqrt{432}$; 6) $\sqrt{675}$; 7) $3\sqrt{12}$; 8) $2\sqrt{18}$;

9) $4\sqrt{24}$; 10) $7\sqrt{75}$; 11) $\frac{3}{2}\sqrt{200}$; 12) $0,2\sqrt{300}$.

150. Кўпайтувчини квадрат илдиз белгиси остига киритинг:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $3\sqrt{5}$; 4) $4\sqrt{7}$;

5) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; 6) $5\sqrt{92}$; 7) $\frac{2}{3}\sqrt{18}$; 8) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{32}{3}}$;

9) $5\sqrt{\frac{13}{25}}$; 10) $0,5\sqrt{60}$; 11) $0,3\sqrt{200}$; 12) $10\,\square\sqrt{0,07}$.

151. Кўрсатилган амалларни бажаринг:

1) $6\sqrt{2}+5\sqrt{18}$; 2) $5\sqrt{75}-2\sqrt{27}$;

3) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$; 4) $3\sqrt{20}+5\sqrt{45}-2\sqrt{80}$;

5) $2\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{12}$; 6) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$.

152. Сонларни таққосланг:

1) $2\sqrt{5}$ ва $\sqrt{45}$; 2) $\sqrt{27}$ ва $4\sqrt{3}$;

3) $5\sqrt{7}$ ва $\sqrt{63}$; 4) $7\sqrt{2}$ ва $\sqrt{72}$.

153. Ифода таркибидаги ҳарфлар мусбат қийматлар қабул қилади деб олиб, уни соддалаштиринг:

1) $\sqrt{16x^2}$; 2) $\sqrt{0,25a^2b^4}$; 3) $\sqrt{1,44a^2x^6}$;

4) $\sqrt{\frac{1}{9}m^2n^2}$; 5) $\sqrt{\frac{9x^2y^4}{16p^2q^2}}$; 6) $\sqrt{\frac{64a^4c^6}{81x^4y^2}}$.

154. Кўрсатилган амалларни бажаринг:

1) $\left(\sqrt{20}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)$;

3) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)$; 4) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)$.

B

155. Ўзгарувчининг барча қабул қиладиган қийматларини топинг:

1) $\sqrt{x^2+9}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; 3) $\sqrt{|x|}$; 4) $\frac{4}{\sqrt{x}}$;

5) $\sqrt{|x|+1}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; 7) $\sqrt{(4-x)^2}$; 8) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$.

156. # белгиси ўрнига тегишли белгини (<, =, >) қўйиб ёзинг:

1) $\sqrt{7,5}\ \#\ \sqrt{7,6}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\ \#\ \sqrt{0,3}$; 3) $\sqrt{0,1}\ \#\ \sqrt{0,01}$;

4) $\sqrt{2,16}\ \#\ \sqrt{2\frac{1}{6}}$; 5) $\sqrt{7}\ \#\ 2,6$; 6) $\sqrt{\frac{5}{6}}\ \#\ \sqrt{\frac{6}{11}}$;

7) $3,2\ \#\ \sqrt{9,8}$; 8) $\sqrt{\frac{1}{3}}\ \#\ \sqrt{0,(3)}$.

157. Илдизнинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{\frac{165^2 \square 124^2}{164}}$; 2) $\sqrt{\frac{98}{176^2 \square 112^2}}$;

3) $\sqrt{\frac{149^2 \square 76^2}{457^2 \square 384^4}}$; 4) $\sqrt{\frac{145,5^2 \square 96,5^2}{193,5^2 \square 31,5^2}}$.

158. Илдизнинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{0,87\cdot 49 + 0,82\cdot 49}$; 2) $\sqrt{1,44\cdot 1,21 - 1,44\cdot 0,4}$.

159. Ўзгарувчининг қандай қийматларида тенглик бажарилади:

1) $\sqrt{y^2} = -y$; 2) $\sqrt{y^4} = y^2$; 3) $\sqrt{x^6} = x^3$; 4) $\sqrt{c^{10}} = -c^5$?

160. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$.

161. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{64a^{10}b^6}$, $a > 0$, $b > 0$; 2) $\sqrt{25a^{10}x^{10}}$, $x < 0$;

3) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2}{b^4}}, a>0$; 4) $4x^2y\sqrt{\frac{x^{10}}{36y^{12}}}, \quad x<0$.

162. Кўпайтувчини илдиз белгиси остидан чиқаринг:

1) $0,5\sqrt{60a^2}$; 2) $2,1\sqrt{300x^4}$; 3) $\sqrt{-3c^3}$; 4) $\sqrt{9a^2b}, \quad a<0$;

5) $0,2\sqrt{225a^5}$; 6) $a\sqrt{18a^2b}$; 7) $-b\sqrt{48ab^4}$; 8) $\sqrt{-5m^7}$.

163. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг:

1) $x\sqrt{\frac{1}{x}}$; 2) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}, a>0, b<0$; 3) $2ab\sqrt{\frac{a}{2b}}, a<0, b<0$;

4) $-x^2\sqrt{5}$; 5) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$; 6) $-ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, a>0, b>0$.

164. Сонларни таққосланг:

1) $0,2\sqrt{200}; 10\sqrt{3}$; 2) $0,5\sqrt{108}; 9\sqrt{3}$; 3) $2,5\sqrt{63}; 4,5\sqrt{28}$.

165. Сонларни ўсиш тартибида жойлаштиринг:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$; $\sqrt{30}$; $7\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$; $\sqrt{17}$; $\frac{1}{2}\sqrt{62}$;

3) $8\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\sqrt{41}$; $\frac{2}{5}\sqrt{250}$.

166. Кўпайтиришни бажаринг:

1) $\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\sqrt{mn}$;

3) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; 4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)$.

167. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}+x\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(m+n+\sqrt{mn}\right)$;

3) $\left(\sqrt{a}+2\right)\left(a-2\sqrt{a}+4\right)$; 4) $\left(x+\sqrt{y}\right)\left(x^2-x\sqrt{y}+y\right)$.

168. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-4}-\dfrac{1}{3\sqrt{2}+4}$; 2) $\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}$;

3) $\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}-\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

169. Касрларни қисқартиринг:

1) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$;

4) $\dfrac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$; 5) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; 6) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; 8) $\dfrac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; 9) $\dfrac{\left(\sqrt{10}-1\right)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

170. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутулинг:

1) $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\dfrac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{b}}$; 3) $\dfrac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

4) $\dfrac{a^2b+2a\sqrt{b}+4}{a\sqrt{b}+2}$; 5) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$; 6) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$;

7) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}$; 8) $\dfrac{\sqrt{mn}+1}{mn+\sqrt{mn}+1}$; 9) $\dfrac{a+2\sqrt{2a}+2}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$;

10) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; 11) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$; 12) $\dfrac{x-2\sqrt{3x}+3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$.

C

171. Ифодани соддалаштиринг:

1) $a^2+a\sqrt{3a}+3a+3\sqrt{3a}+9, \quad a>0$;

2) $4x^2-2x\sqrt{2x}+2x-\sqrt{2x}+1, \quad x>0$.

172*. Функция графигини ясанг:

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y=-\dfrac{2\sqrt{x^2}}{x}$; 3) $y=x\sqrt{x^2}$.

173. $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ бўлганда, $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ ифоданинг қийматини топинг.

174. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$;

2) $\dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}+\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}}$..

175. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $x\geq 2$.

176. $\dfrac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$ ифодани соддалаштиринг, бунда $0{,}5<a<3$.

177. Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{\sqrt{a^2-3a}+\sqrt{a^2-4a+3}}{\sqrt{6-2a}}$$

178. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутулинг:

1) $\dfrac{y}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$;

3) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$; 4) $\dfrac{50}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.

179.* «Мураккаб радикал формулалар» ни исботланг:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, a > 0, a^2 > b > 0.$$

180. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{12 + \sqrt{63}} - \sqrt{10,5}$; 2) $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{\left|12\sqrt{3} - 21\right|} - \sqrt{12\sqrt{3} + 21}$; 4) $\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}$.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

181. x=8,4; y=–0,6 бўлса, $\frac{(y - x)^2}{x + y} : \left(\frac{2xy}{y^2 - x^2} + \frac{x}{x + y} - \frac{y}{y - x}\right)$ ифоданинг қийматини топинг.

182. Агар икки соннинг йиғиндиси $\sqrt{10}$ га, айирмаси эса $\sqrt{6}$ га тенг бўлса, уларнинг кўпайтмаси 1 га тенг эканини исботланг.

183. Тенгламани ечинг:

1) $x^2 - 8x = 0$; 2) $4y^2 - 1 = 0$; 3) $4x^2 + 1 = 0$.

5-§. $y = \sqrt{x}$ функциянинг графиги

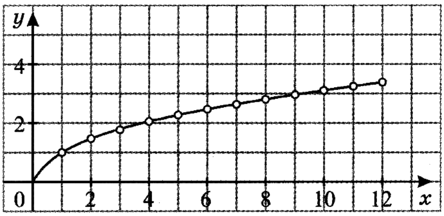
5.1. $y = \sqrt{x}$ функция ва унинг графиги

$x \geqslant 0$ бўлганда $\sqrt{x}$ ифода маънога эга, яъни x нинг ҳар бир номанфий қийматига фақат битта мусбат $\sqrt{x}$ сони мос келади. Шунинг учун функция $y = \sqrt{x}$ формула билан ифодаланади. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси [0; +□) – номанфий ҳақиқий сонлар тўпламидир.

Энди $y= \sqrt{x}$ функциянинг графигини ясаш учун 0,01 гача бўлган аниқликда унинг қийматлари жадвалини тузамиз:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16

Координата текислигида координаталари жадвалда кўрсатилган нуқталарни белгилаб, уларни силлиқ эгри чизиқ билан бирлаштирамиз. Ҳосил бўлган график 8-расмда кўрсатилган, бу $y = \sqrt{x}$ функциянинг графиги.



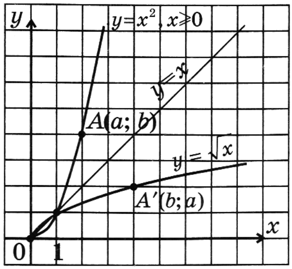
8-расм

Энди $y = \sqrt{x}$ функциянинг баъзи хоссаларини кўриб ўтамиз.

1) ***Агар x=0 бўлса, у ҳолда y=0, яъни координаталар боши функциянинг графигига тегишли бўлади.*** 2) ***Агар x*>0 *бўлса, y*>0 *бўлади, яъни функция графиги I координата чорагида жойлашади.*** 3) ***$x \geqslant 0$ бўлганда $y = x^2$ функция графиги ҳам I координата чорагида жойлашиши ва параболанинг ўнг қисмидаги бир тармоғи бўлиши яхши маълум.*** $y = \sqrt{x}$ ва $y=x^2$, $(x \geqslant 0)$ функцияларнинг графиклари $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади.

Яъни, $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан $A(a;b)$ нуқтага симметрик бўлган A□ нуқтанинг координаталари A□$(b;a)$ бўлади.

Агар $A(a;b)$ нуқта $y=x^2$, $x \geqslant 0$ функция графигига тегишли бўлса, $b=a^2$ тенглик бажарилади. Бундан квадрат илдиз таърифига кўра $a = \sqrt{b}$ тенглик бажарилади, яъни A□ $(b; a)$ нуқта $y = \sqrt{x}$ функция графигига тегишли.



9–расм

Аксинча, агар $B(u;\ v)$ нуқта $y=\ \sqrt{x}$ функция графигига тегишли бўлса, $u\ \square\sqrt{u}$ тенглик бажарилади. Бундан $u=v^2$, яъни нуқта $y=x^2$, $x\geqslant 0$ функциянинг графигига тегишли.

Демак, исботимизга асосан, агар $A(a;\ b)$ нуқта $y=\ \sqrt{x}$ ва у=x^2, ($x\geqslant 0$) функциялардан бирининг графигига тегишли бўлса, у ҳолда $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик $A\square(b;\ a)$ нуқта иккинчи функция графигига тегишли. Демак, бу функцияларнинг графиклари $y=x$ тўғри чизиқка нисбатан симметрик бўлади (9–расм).

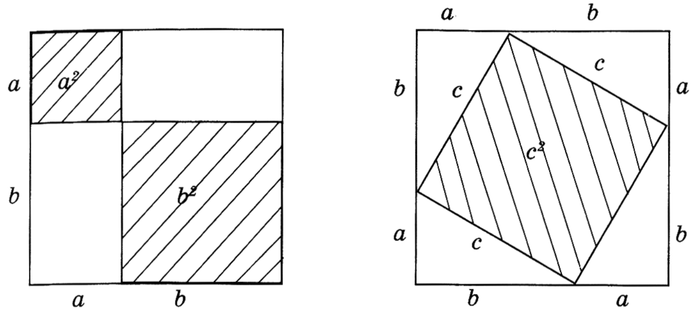
Рене Декарт (1596–1650) – француз математиги ва файласуфи. Фанга декарт координаталар системасини киритиб, аналитик геометрия асосчиларидан бири бўлган.

5.2. Квадрат илдизнинг геометрияга татбиқ этилиши

Қадим замонлардаёқ соннинг квадрат илдизини топиш зарурати геометрия эҳтиёжларидан келиб чиққан.

Масалан, геометрия курсида Пифагор теоремаси исботланган: ***Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати унинг катетлари квадратларининг йиғиндисига тенг.***

Бу теоремани қадимги ҳиндистонликлар 10-расмга асосан исботлай олишган. Бу расмларда штрихланган



а) б)

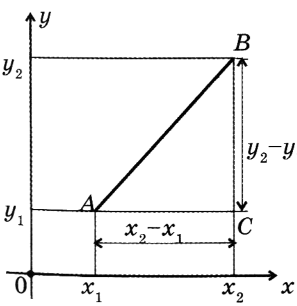
10-расм

фигураларнинг юзлари тенг. Агар 10, а-расмдаги штрихланган фигура юзи a^2+b^2 бўлса, 10, б*расмдаги штрихланган фигура юзи c^2 га тенг. Демак, $c^2=a^2+b^2$. Бу ерда ава b – тўғри бурчакли учбурчак катетлари, c – унинг гипотенузаси.

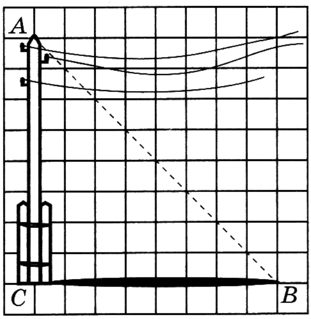
Пифагор теоремасидан $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ нуқталар орасидаги масофани топиш мумкин. Пифагор теоремасига кўра $AB^2=AC^2+BC^2$ (11-расм) ёки $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$. Бунда $AC=|x_2-x_1|$ ва $BC=|y_2-y_1|$ бўлгани учун,

$$AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \qquad (1)$$

формулани ҳосил қиламиз.



11-расм



12-расм

1-мисол. $A(-3;\ 0)$ ва $B(9;5)$ нуқталар орасидаги масофани топиш керак.

Ечилиши. (1) формула бўйича

$$AB = \sqrt{\left(9-(-3)\right)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169} = \sqrt{13}$$

2-мисол. Агар узунлиги 8 м бўлган устун соясининг узунлиги 6 м бўлса, бу соя учидан устун бошигача бўлган масофани топиш керак (12-расм).

Ечилиши. Пифагор теоремасига асосан, AC=8м, BC=6м бўлгани учун,

$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = \sqrt{10}$$

$\boxed{?}$

1. $y \square \sqrt{x}$ функциянинг қандай хоссаларини биласиз?
2. $y \square \sqrt{x}$ ва $y=x^2$, $(x\geqslant 0)$ функцияларнинт графиклари ўзаро қандай жойлашган?
3. Пифагор теоремасига хулоса чиқаринг.
4. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласини ёзинг.

МИСОЛЛАР

А

184. Квадратнинг юзи S, томонининг узунлиги a га тенг.

1) S нинг a га; 2) aнинг S га боғлиқлик формуласини ёзинг.

185. $y=\sqrt{x}$ функциянинг графиги бўйича: 1) x=0,5; 1,5;2,5 даги y нинг; 2) y=0,5; 1,5; 2,5 даги x нинг мос тақрибий қийматларини топинг.

186. $y=\sqrt{x}$ функциянинг графиги бўйича: 1) функциянинг x=1,4; 2,3; 5,5 даги қийматини; 2) аргументнинг y=1,2; 1,8; 2,5 қийматга мос келадиган тақрибий қийматларини топинг.

187. $A(16;\ 4)$, $B(16;\ -4)$, $C(0{,}09;\ 0{,}3)$, $D(-15;\ 5)$ нуқталардан қайси бири $y=\sqrt{x}$ функциянинг графигига тегишли?

188. Агар тўғри тўртбурчакнинг томонлари 3 см ва 4см бўлса, тўғри тўртбурчак диагонали узунлиги қандай?

189. 1) $O(0;\ 0)$ ва $A(4;\ 3)$;2) $B(5;\ 2)$ ва $C(1;\ -1)$; 3) $D(-5;6)$ ва $E(2;\ 6)$; 4) $M(-6;\ 0)$ ва $N(2;\ 6)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

190. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси c га, катетлари эса a ва b га тенг бўлса, унинг ноъмалум томонларини топинг:

1) a=12 см, b=5 см; 2) a= 3 м, c= 5 м; 3) b= 7 м; c=25 м.

B

191. Радиуси r га тенг бўлган доира юзи $S=\square r^2$ формуладан топилади. 1) S ни доира диаметри d орқали; 2) r ни S орқали; 3) d ни S орқали ифодалайдиган формулани ёзинг.

192. Агар кубнинг қирраси a, тўла сиртининг юзи S бўлса, у ҳолда: 1) S ни a ёрдамида; 2) a ни S ёрдамида ифодалайдиган формулани ёзинг.

193. 1) $A(a;\ 2)$;2) $B(a;\sqrt{5})$; 3) $C(25;\ a)$;4) $D(7;\ a)$ нуқталар $y=\sqrt{x}$ функция графигига тегишли бўладиган бўлса, a сонини топинг.

194. Агар $x\ \square\ [1;\ 4]$ бўлса, $y=\sqrt{x}$ функциянинг қийматлари қандай оралиқда ўзгаради?

195. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x}\ \square 5$; 4) $\sqrt{x}\ \square 11$; 3) $\sqrt{x}\ \square\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{x}\ \square 2\sqrt{3}$.

196. Қуйидаги тўғри чизиқлар $y=\sqrt{x}$ функциянинг графигини кесиб ўтадими? Агар кесиб ўтса, қайси нуқтада кесиб ўтди: 1) y=1; 2) y=5; 3) y=−3.

197. Бир-биридан 24 м узоқликда жойлашган ва баландликлари 5 м ва 12 м бўлган устунларнинг учларидан сим тортилган. Шу симнинг узунлигини топинг.

198. Учлари $A(-2;3)$, $B(3;\ 3)$ ва $C(-1;\ -2)$ нуқталарда жойлашган учбурчак томонларининг узунлигини топинг.

199. Учлари $A(0;0)$, $B(3;1)$ ва $C(1;\ 7)$ нуқталарда жойлашган учбурчакнинг тўғри бурчакли учбурчак эканлигини кўрсатинг.

200. Радиуси 5 см бўлган доирага унинг марказидан 13 см масофада жойлашган нуқтадан уринма ўтказилган. Шу нуқталардан уриниш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

C

201. Агар P нуқтанинг абсциссаси 5 га ва шу нуқтадан $Q(-1;\ 3)$ нуқтагача бўлган масофа 10 га тенг бўлса, P нуқтанинг ординатасини топинг.

202. $y = \sqrt{x}$ функциянинг қийматлари: 1) $[0;\ 4]$; 2) $[0,04;\ 1]$; 3) $[25;\ 225]$ оралиққа тегишли бўлиши учун унинг аргументи қандай қийматлар қабул қилиши керак?

203*. 1) $y=-\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{\square x}$; 3) $y=\sqrt{|x|}$; 4) $y = 2\sqrt{x}$ функциянинг графигини ясанг.

204. a нинг қандай қийматларида: 1) $y \square a\sqrt{x}$; 2) $y \square \sqrt{ax}$; 3) $y \square \sqrt{a|x|}$ функция-ларнинг графиги $A(3;\ 1)$ нуқтадан ўтади?

205.* Ясаш ва ўлчаш ишлари орқали (икки турли усулда): 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{34}$; 3) $\sqrt{125}$; 4) 229 ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

206. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $2\sqrt{0,09} - 0,2\sqrt{225}$; 2) $0,1\sqrt{400} + 2,1\sqrt{\frac{1}{9}}$.

207. Ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $\sqrt{4-3x}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{y-5}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-5}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+5}$.

208. Қирғоқдаги манзилдан тезлиги 10 км/соат бўлган моторли қайиқ дарё оқимига қарши йўналишда сузиб чиқди. 45 Дақиқадан сўнг қайиқнинг мотори бузилиб, дарё оқими бўйича 3 соатдан сўнг ўзи чиққан манзилга етиб келди. Дарё оқимининг тезлиги қандай?

209*. Агар $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ бўлса, $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ тенгсизлик тўғрилигини исботланг.

I БОБ ЮЗАСИДАН ҚЎШИМЧА МИСОЛЛАР

210. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$;

3) $\sqrt{\sqrt{28 \square 16\sqrt{3}}}$; 4) $\sqrt{\sqrt{68\ \ \square 4608}}$.

211. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $7-\sqrt{14}+\sqrt{7}$;

2) $\sqrt{6}+\sqrt{27}-\sqrt{18}$;

3) $\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x+y}, x>0, y>0$;

4) $\sqrt{ab+ac}-\sqrt{b^2+bc}, a>0, b>0, c>0$;

5) $2+y\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-\sqrt{y}$;

6) $mn+m\sqrt{m}+n\sqrt{n}+\sqrt{mn}$.

212. Ўзгарувчининг қандай қийматларида тенглик бажарилади:

1) $\sqrt{x^6}=-x^3$; 2) $\sqrt{6}+\sqrt{27}-\sqrt{18}$;

3) $\sqrt{c^4}=-c^2$; 4) $\sqrt{4m^4-4m+1}=1-2m$;

5) $\sqrt{n^4+6n^2+9}=n^2+3$; 6) $mn+m\sqrt{m}+n\sqrt{n}+\sqrt{mn}$.

213. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{146,5^2 - 109,5^2 + 27 \cdot 256}$; 2) $\sqrt{117,5^2 - 26,5^2 - 1440}$;

3) $\sqrt{\dfrac{149^2 - 76^2}{37^2 - 36^2}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{129^2 - 8^2}{93^2 - 44^2}}$.

214. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{\dfrac{a^{10}}{16b^6}}, a < 0, b < 0$; 2) $\sqrt{121a^{16}b^{10}}, a > 0; b < 0$;

3) $\dfrac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}, a < 0; b < 0$; 4) $\dfrac{\sqrt{ab} - \sqrt{ab}}{b} + \sqrt{\dfrac{a}{b}}, a < 0; b < 0$.

215. Амалларни бажаринг:

1) $3\sqrt{48} - \sqrt{75} + \dfrac{1}{7}\sqrt{147}$;

2) $\sqrt{25a^2} + 4a\sqrt{a^3} - a^2\sqrt{a}$;

3) $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{5} + 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2} - \dfrac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2$;

4) $\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

216. Ифоданинг қийматини топинг:

$x^2 + 2x + 3$, бунда $x = \sqrt{3} - 1$; 2) $x^2 - 6x + 3$, бунда $x = 3 - \sqrt{7}$.

217. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{7 + \sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{7 - \sqrt{24}}$;

3) $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$; 4) $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$

5) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$; 6) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

218. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутулинг:

1) $\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\frac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$; 3) $\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

219. Сонларни таққосланг:

1) $\sqrt{17}\,\square\,\sqrt{15}$ ва $\sqrt{7}\,\square\,\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3}\,\square\,\sqrt{5}\;\;\square\,\sqrt{8}$ ва $1\,\square\,\sqrt{2}$.

220. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг:

1) $2xy\sqrt{\frac{x}{2y}}; x<0, y<0;$ 2) $mn\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}, m<0, n>0;$

3) $(y-1)\sqrt{\frac{3y}{1-y^2}}, 0<y<1;$ 4) $(2-x)\sqrt{\frac{5x}{x^2-4}}, -2<x<0.$

221. Тенгламани ечинг:

1) $10\sqrt{(x-3)^2}=8;$ 2) $(x+1)\sqrt{3}=x+3;$

3) $\left(2-x\sqrt{6}\right)\sqrt{2}=2\cdot\left(x-\sqrt{6}\right);$ 4) $\left(x\sqrt{5}-2\right)\sqrt{10}=5x-2\sqrt{5}.$

222. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}};$ 2) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}};$

3) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^4;$ 4) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^6.$

223. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x-6\sqrt{x}-7;$ 2) $m+\sqrt{m}-6;$

3) $a-6\sqrt{a}+5;$ 4) $2y+\sqrt{y}-3.$

224. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\sqrt{x}+2;$ 2) $y=\sqrt{x}-2;$ 3) $y=3\sqrt{x};$ 4) $y=-3\sqrt{x}.$

225. Агар m, n ва $\sqrt{m} \square \sqrt{n}$ – рационал сонлар бўлса, у ҳолда $\sqrt{m}$ ва $\sqrt{n}$ сонлари ҳам рационал сонлар бўлишини исботланг.

226. 1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$ сонининг иррационал сон эканини кўрсатинг.

227. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{15+2\sqrt{26}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{1+2\sqrt{26}}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{1+2\sqrt{26}}}$;

2) $\sqrt{\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}} + \sqrt{\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}}$.

228. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}} + \dfrac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}} - \dfrac{10}{\sqrt{19}+3}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2} \square 1} \square \dfrac{1}{\sqrt{3} \square \sqrt{2}} \square \dfrac{1}{\sqrt{4} \square \sqrt{3}} \square .. \square \dfrac{1}{\sqrt{100} \square \sqrt{99}}$.

229. $a = \dfrac{1}{2}\left(m + \dfrac{1}{m}\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$ экани маълум бўлса;

1) $ab - \sqrt{a^2-1} \cdot \sqrt{b^2-1}$;

2) $ab + \sqrt{a^2-1} \cdot \sqrt{b^2-1}$ ифодани соддалаштиринг.

II боб . КВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Квадрат тенглама ва унинг илдизлари

1.1. Квадрат тенгламанинг таърифи

Тажрибада учраб турадиган кўплаб масалаларни ечиш, масалан, $x^2-3x+2=0$, $3x^2-x-4=0$, $3x^2+7x+4=0$ каби тенгламаларнинг илдизларини топишга келиб тақалади. Бу тенгламалар ҳар бирининг тенгликдан чап қисмлари x га боғлиқ бўлган 2-даражали кўпҳадлар, тенгликнинг ўнг томонлари нолга тенг. Бундай тенгламалар ***квадрат тенгламалар*** деб аталади.

Таъриф: $ax^2+bx+c=0$ ($a \square 0$) кўринишдаги тенглама ***квадрат тенглама*** дейилади. Бунда a, b ва c – берилган сонлар, x – ўзгарувчи.

Бу ерда a – квадрат тенгламанинг биринчи коэффициенти, b – иккинчи коэффициенти, c сони эса ***озод ҳад*** дейилади. Квадрат тенгламаларда $a \square 0$ бўлиши шарт. Чунки, агар $a=0$ бўлса, у ҳолда бу тенглама $bx+c=0$ кўринишда ёзилиб, у чизиқли тенглама (квадрат тенглама эмас) бўлиб қолади. Масалан, $5x^2-x-4=0$ $-4=0$ квадрат тенглама, бунда $a=5$, $b=-1$,$c=-4$.

Квадрат тенгламанинг тенгликдан чап қисми, яъни ax^2+bx+c кўпҳад квадрат учҳад деб аталади.

Агар $x=u$ сони квадрат тенгламада тенгликнинг чап қисмини нолга айлантирса, яъни $au^2+bu+c=0$ айният бажарилса, у ҳолда u сони квадрат тенгламанинг ***илдизи*** дейилади. Масалан, $x=2$ сони $2x^2+3x-14=0$ тенгламанинг илдизи бўлади, чунки $2\cdot 2^2+3\cdot 2-$ $-14=8+6-14=14-14=0$. $x=5$ сони учун эса $2\cdot 5^2+3\cdot 5-$ $-14=50+15-14=51\square 0$ тенгсизлик бажарилганлиги учун, $x=5$ сони $2x^2+3x-14=0$ квадрат тенгламанинг илдизи бўла олмайди.

Квадрат тенгламаларни кўраётганимизда, $a>0$ деб олиш мумкин.Масалан, $-3x^2+5x-6=0$ тенгламани (-1) га кўпайтириш орқали унга тенг кучли $3x^2-5x+6=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Бу квадрат тенгламаларнинг илдизлари бир хил. Квадрат учҳад тарзидаги $-3x^2+5x-6=0$ ва $3x^2-5x+6=0$ кўпҳадлар эса ҳар хил ва уларни ***айнан тенг ифодалар*** деб қараш мумкин эмас.

Агар $a=1$ бўлса, бундай квадрат тенглама келтирилган

квадрат тенгламалар дейилади. Масалан, $x^2-5x+6=0$, $x^2-5x+1=0$ – келтирилган квадрат тенгламалар.

Демак, 1) $ax^2+bx+c=0$ (a □ 0) – квадрат тенгламанинг умумий кўриниши;

2) $x^2+px+q=0$ –келтирилган квадрат тенгламалар. Бу ерда p ва q – берилган сонлар.

1.2. Чала квадрат тенгламаларни ечиш

Квадрат тенгламаларнинг хусусий ҳолларида b ва c ёки иккаласи ҳам нолга тенг бўлиши мумкин. 1) $ax^2+bx=0$, $c=0$; 2) $ax^2+c=0, b=0$; 3) $ax^2=0$, $b=0$, $c=0$. Булар ***чала квадрат тенгламалар*** дейилади. Масалан, $3x^2-9x=0$, $2x^2-12=0$ – чала квадрат тенгламалар. Одатда, чала квадрат тенгламаларнинг илдизларини топиш осонроқ бўлади. Энди шу тенгламаларни ечиш йўлларини қараб чиқамиз.

1) $ax^2+bx=0$, (с=0) тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг чап қисмидаги х ни қавсдан ташқарига чиқариб, $x(ax+b)=0$ тенгламадан $x=0$ ёки $ax+b=0$ иккита тенглама ҳосил қилинади. Бундан берилган тенгламанинг иккита: 0; □$\frac{b}{a}$ илдизи топилади.

2) $ax^2+c=0$, ($b=0$) тенгламани ечамиз.

Берилган тенгламадан $x^2=-\frac{c}{a}$ тенглик ҳосил бўлади ва унинг илдизи фақат $-\frac{c}{a}\geq 0$ бўлганда мавжуд бўлади. У ҳолда, a ва c коэффициентларнинг ишоралари ҳар хил бўлиши керак. Чунончи, агар $-\frac{c}{a}\geq 0$ бўлса, берилган тенгламанинг илдизлари $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ формула ёрдамида топилади. Агар a ва c нинг ишоралари бир хил бўлса, у ҳолда $-\frac{c}{a}<0$, $(c\neq 0)$ бўлиб, берилган тенглама илдизга эга бўлмайди.

3) $ax^2=0$, ($b=0$, $c=0$) тенглама ўзаро тенг иккита илдизга эга деб ҳисоблаймиз: $x_1=x_2=0$.

1-мисол. $5x^2+4x=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Бунда a=5, b=4, c=0, яъни квадрат тенгламадаги озод ҳад нолга тенг. Демак, юқорида айтилганларга асосан тенгламанинг иккита илдизи бор: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{4}{5}$.

2-мисол. $-x^2+3=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Бунда a=–1, b=0, c=3. a ва c коэффициентларнинг ишоралари ҳар хил. Бундан тенгламанинг илдизлари юқорида кўрсатилгандай $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ формула билан ифодаланади, яъни $x_1 = -\sqrt{3}$ ва $x_2 \square\sqrt{3}$.

Жавоби $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 \square\sqrt{3}$.

3-мисол. $3x^2+2=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Бунда a=3, b=0, c=2, яъни a ва c коэффициентларнинг ишоралари бир хил. Шунинг учун бу тенглама илдизга эга эмас. Демак, берилган тенгламани $5x^2=-2$ ёки $x_2 = -\frac{2}{3}$ кўринишида ёзамиз. Соннинг квадрати манфий сон бўла олмайди, яъни берилган тенглама иддизга эга эмас.

?

1. Қандай тенглама квадрат тенглама деб аталади?
2. Квадрат тенгламадаги биринчи коэффициент $a \square 0$ шарти нима учун зарур?
3. Қандай сонлар квадрат тенгламанинг илдизлари деб аталали?
4. Квадрат учҳад нима?
5. Қандай тенгламалар чала квадрат тенгламалар деб аталади?
6. Чала квадрат тенгламалар қандай ечилади?
7. Чала квадрат тенгламаларнинг илдизлари ҳар доим топиладими? Қандай тенгламанинг доимо иккита илдизи бўлади?

МИСОЛЛАР

А

230. Квадрат тенгламаларнинг коэффициентларини айтинг:

1) $x^2-2x-1=0$; 2) $3x^2+x+1=0$; 3) $-2x^2+3x=0$;
4) $x^2-5=0$; 5) $-x^2+6x-7=0$; 6) $12x^2=0$.

231. Чала квадрат тенгламаларни аниқлаб, нолга тенг бўлган коэффициентини кўрсатинг:

1) $7x^2-3x=0$; 2) $2x+5=0$; 3) $x^2+x-1=0$;

4) $-x^2-x+3=0$; 5) $-4x^2+1=0$; 6) $8x^2=0$.

232. Тенгламани $ax^2+bx+c=0$ кўринишда ёзинг:

1) $(2x-1)(2x+1)=x(2x+3)$; 2) $(3x+2)^2=(x+2)(x-3)$;

3) $(x+1)(x+2)=(2x-1)(x-2)$; 4) $4x^2-2x(3x+1)=5$;

5) $(x+3)(3x-2)=(4x+5)(2x-3)$; **6**)$x^2+(1-x)(1-3x)=x$.

233. Берилган тенгламани унга тенг кучли квадрат тенгламага алмаштиринг:

1) $-5x(x+6)=4(x-3)-10$; 2) $(x-8)(2x+3)=(3x-5)(x+4)$;

3) $(x-3)(3x+9)=(x-8)(x+9)$; 4) $(y-7)(7y+49)=(y+8)(y-7)$.

234. Тенгламани ечинг:

1) $x^2=64$; 2) $y^2=0,09$; 3) $3x^2=48$; 4) $x^2=3$;

5) $y^2-10=39$; **6**) $x^2+5=30$; 7) $5t^2-3=77$; 8) $\frac{1}{2}x^2 \square \frac{8}{9}$.

235.Тенгламанинг илдизини топинг:

1) $2x^2-5x=0$; 2) $5x^2+7x=0$; 3) $2x-5x^2=0$;

4) $4m^2-3m=0$; 5) $y^2-2y-8=2y-8$; 6) $3u^2+7=6u+7$.

236. Агар берилган тенглама илдизга эга бўлса, унинг илдизларни топинг:

1) $4x^2+1=0$; 2) $2m^2-3m=8-3m$;

3) $5n^2-1=(n-1)(n+1)$; 4) $10-2x^2=x^2-x+10$;

5) $3y^2+4y+4=3+4y$; 6) $(2x-3)^2+4=0$.

237.Тенгламани ечинг:

1) $3x^2-4x=0$; 2) $4x^2-9=0$; 3) $-5x^2+6x=0$; 4) $-x^2+3=0$;

5) $y^2-\frac{1}{9}=0$; 6) $6u^2-u=0$; 7) $6m^2-1=0$; **8**) $2y+y^2=0$.

B

238. Тенгламани $ax^2+bx+c=0$ кўринишга келтиринг:

1) $(x-3)(3x+2)=(5x-4)(3x-2)$;

2) $(2x+7)(7-2x)=49+x\cdot(x+2)$;

3) $\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{2x+3}{2x-1}$; 4) $\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{5x-4}{4x+1}=1$;

5) $(x-3)(x^2+3x+9)=x(x-8)(x+9)$;

6) $(x+7)(x^2-7x+49)=x(x+8)(x-7)$.

239. Тенгламани ечинг:

1) $\dfrac{1}{5}x^2-5=0$; 2) $9y^2-6{,}25=0$;

3) $1{,}44-x^2=3x^2$; 4) $-x^2=-3{,}5+x^2$;

5) $(2y-1)^2=10-4y$; 6) $(3m-2)(3m+2)=5m^2$.

240. Тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $\dfrac{x^2-2x}{4}=\dfrac{3x^2+2x}{3}$;

2) $\dfrac{5y-y^2}{2}=\dfrac{y^2+3y}{5}$;

3) $(4y-3)^2+(y+2)^2=13$;

4) $(7m+6)(6-7m)=36-m(m+1)$.

241. Тенгламани ечинг:

1) $(x-2)^2-49=0$; 2) $9(2x+3)^2-25=0$;

3) $2(3x+5)^2=7(3x+5)$; 4) $(3x-1)^2=4-12x$.

242.Тенгламани ечинг:

1) $\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{2x+4}{x-3}$; 2) $\dfrac{2-3y}{3-y}=\dfrac{y+2}{y+3}$;

3) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+2}{x-1}+3=0$; 4) $\dfrac{7x+5}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}=-5$.

243. Қандай соннинг квадрати ўзидан 2 марта катта? Шу сонни топинг.

244. Кетма-кет иккита натурал соннинг кўпайтмаси уларнинг кичигидан уч марта катта. Шу сонларни топинг.

245. Тўғри тўртбурчак шаклидаги ер майдонининг бўйи энидан 5 марта узун. Унинг эни 9 метр узайтирилганда, юзи 4 марта ортди. Ер майдонининг дастлабки ўлчамларини топинг.

246. Тўғри тўртбурчакнинг эни бўйидан 5 марта кичик, юзи эса 720 см^2. Тўғри тўртбурчакнинг эни ва бўйини топинг.

C

247. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=2\frac{2}{3}$; 2) $\frac{y-2}{y+2}+\frac{y+2}{y-2}=3\frac{1}{3}$;

3) $\frac{5m+7}{m-2}-\frac{2m+21}{m+2}=8\frac{2}{3}$; 4) $\frac{x+2}{2}+\frac{2}{x+2}=\frac{x+2}{3}+\frac{3}{x+2}$;

248*. Тенгламани ечинг:

1) $x^2-3|x|=0$; 2) $5y^2+4|y|=0$;

3) $5y^2-4|y|=0$; 4) $2u^2+3|u|-5u=0$;

5) $4t^2-3|t|+t=0$; 6) $2m^2+|m|-7m=0$.

249*. Тенгламани ечинг:

1) $x|x|-5x=0$; 2) $2x^2-3x|x|+1=0$; 3) $9x^2+\frac{x}{|x|}=0$;

4) $9x^2-\frac{x}{|x|}=0$; 5) $3x^2-\frac{4x^2}{|x|}=0$; ; 6) $5x^2+\frac{x^2}{5|x|}=0$..

250*. Тенгламани ечинг:

1) $x(x-1)(x-3)-25=(x-5)(x+5)+3x$;

2) $|x-2|\cdot(x+2)2=4x-8$.

251. 1) Битта илдизи нолга тенг; 2) илдизларининг модуллари тенг, лекин ишоралари қарама-қарши; 3) иккала илдизи ҳам нолга тенг бўлган квадрат тенгламанинг умумий кўринишини ёзинг.

252*. a нинг қандай қийматларида тенгламанинг битта илдизи нога тенг бўлади? Унинг иккала илдизи ҳам нолга тенг бўлиши мумкинми?

1) $6x^2-5x+a-3=0$; 2) $3x^2+x-a^2+9=0$;

3) $4x^2+(a-1)x+1-a^2=0$; 4) $x^2+(a+3)x+|a|-3=0$?

253. c нинг қандай қийматларида тенглама илдизларининг модуллари тенг, ишоралари қарама-қарши бўлади:

1) $x^2-(c+3)x+4c+3=0$; 2) $2x^2+(|c|-3)x-32=0$?

254. Иккита йўл ўзаро тўғри бурчак остида кесишади. Йўлларнинг кесишиш нуқтасидан 80 км/соат ва 60 км/соат тезлик билан автомашиналар турли йўллар бўйича бир вақтда жўнаб кетди. Қанча вақт ўтгандан сўнг улар орасидаги масофа 100 км бўлади?

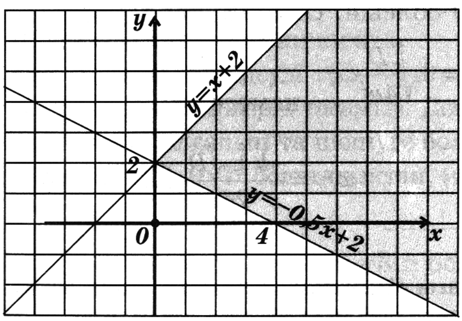
ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

255. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутулинг:

1) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$; 2) $\frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}$; 3) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{8}}}{\sqrt{\sqrt{17}-\sqrt{8}}}$

256. 1) x^2+4; 2) x^2-4; 3) $\sqrt{x}$ □1 ифоданинг энг кичик қийматини топинг:

257. 13-расмда тасвирланган бўялган соҳани тенгсизликлар системаси ёрдамида ёзинг.



13-расм

2-§. Квадрат тенглама илдизлари формуласи

2.1. Умумий кўринишдаги формула

Энди умумий кўринишдаги квадрат тенгламанинг идизларини топиш формуласини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг тўла квадратини ажратиб оламиз:

$$ax^2+bx+x=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)+c=$$

$$a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b}{4a^2}\right)+c-\frac{b}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

У ҳолда

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

квадрат тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \text{ ёки}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгламалар тенг кучли. $4a^2>0$ бўлгани учун, (2) тенглама илдизга эга ёки эга эмаслиги $D=b^2-4ac$ соннинг ишорасига боғлиқ. Бу сон квадрат тенгламанинг ***дискриминанти***[1] дейилади.

Демак, (1) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}. \tag{3}$$

а) $D>0$ бўлсин. У ҳолда (3) тенгламадан

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

ёки

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\quad D=b^2-4ac \tag{4}$$

[1] Лотинча *discriminatio* (фарқловчи, аниқловчи) сўзидан олинган. Дискриминантнинг ишорасига караб, квадрат тенгламанинг нечта илдизи бор эканлиги аниқланади (фарқланади).

формулани ҳосил қиламиз. Демак, бу ҳолда квадрат тенглама иккита илдизга эга:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac. \qquad (5)$$

(4) *ёки* (5) – *квадрат тенглама илдизлари формулаларидир.*

б) 1) D=0 бўлсин, у ҳолда $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ тенгламадан $x = -\frac{b}{2a}$ тенгликни оламиз. У ҳолда тенглама ўзаро тенг иккита илдизга эга деб ҳисобланади: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

в) D<0 бўлганда $\frac{D}{4a^2} < 0, \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ тенгсизликлардан (3) тенглама x ўзгарувчининг ҳеч бир ҳақиқий қийматларида бажарилмаслигини кўрамиз. Демак, бундай ҳолда квадрат тенглама ҳақикий сонлар тўпламида илдизга эга бўлмайди.

1-мисол. $4x^2-5x-21=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $a=4, b=-5, c=-21$ бўлгани учун,

$D = (-5)^2-4\cdot 4\cdot(-21)=25+336=361=19^2$.

(4) формула бўйича $x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{19^2}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 19}{8}$.

Бундан $x_1 = \frac{5-19}{8} = -\frac{7}{4}, \quad x_2 = \frac{5+19}{8} = 3.$

2-мисол. $2x^2-7x=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Чала квадрат тенгламани $x(2x-7)=0$ кўринишда ёзиб, $x_1=0$, $x_2=3{,}5$ бўлган илдизларини топамиз. Яъни, бу тенгламани (4) формуладан фойдаланиб ечиш ҳам мумкин. $a=2$, $b=7$, $c=0$. $D=49-4\cdot 2\cdot 0=7^2$ бўлганиучун (4) формула бўйича

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{7+7}{4}$ ёки $x_1=0$, $x_2=3{,}5$ бўлади.

3-мисол. $3x^2-2x+7=0$ тенглама учун $D^2=2^2-4\cdot 3\cdot 7=-80<0$ бўлади ва унинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас.

4-мисол. $9x^2-12x+4=0$ тенглама учун $D=144-4\cdot4\cdot9=0$ бўлади. Демак, тенглама ўзаро тенг иккита илдизга эга:

$$x_1=x_2=\frac{12}{2\cdot 9}=\frac{2}{3}.$$

5-мисол. $4x^2-12x+7=0$.

Ечилиши. $D=144-4\cdot4\cdot7=144-112=32>0$ бўлгани учун, берилган тенгламанинг турли иккита илдизи мавжуд:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{32}}{2\cdot 4}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{2} \text{ ва } x_1=\frac{3-\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$$

яъни бундан квадрат тенгламаларнинг дискриминантлари ҳамиша рационал сонларнинг квадратлари бўлавермаслиги келиб чиқади.

2.2. *b* жуфт сон учун квадрат тенглама илдизлари формуласи

Агар b жуфт сон бўлса, у ҳолда (4) формулани қулай усулда ёзиш мумкин. Маслан, $b=2k$ бўлсин. У ҳолда $D=b^2-4ac=4k^2-4ac=4(k^2-ac)$ тенглик ва (4) формуладан

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4\left(k^2-ac\right)}}{2a}=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},$$

яъни

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},\quad b=2k \qquad (6)$$

формула ҳосил бўлади.

6-мисол. $9x^2-14x+5=0$ тенгламани ечиш керак.

Ечилиши. $b=-14=-2\cdot7$. Бунда (6) формула бўйича

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-9\cdot5}}{9}=\frac{7\pm2}{9}\Rightarrow x_1=\frac{5}{9};\, x_2=1.$$

МИСОЛЛАР

А

258. $ax^2+bx+c=0$ кўринишда берилган тенгламанинг a, b ва c коэффициентларини ёзиб кўрсатинг, унинг дискриминантини ҳисобланг ва илдизлари сонини айтинг.

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2-5x+4=0$;
3) $2x^2+x-3=0$; 4) $3x^2-2x-1=0$;
5) $3x^2-13x+14=0$; 6) $5x^2-9x-2=0$;
7) $y^2-y-20=0$; 8) $16x^2-8x+1=0$.

259. Тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $x^2+7x-60=0$; 2) $y^2-10y-24=0$;
3) $m^2+m-90=0$; 4) $3t^2+7t+4=0$;
5) $3x^2+32x+80=0$; 6) $2x^2+9x-486=0$;
7) $3x^2-6x+3=0$; 8) $9x^2+6x+1=0$.

260. Тенгламани ечинг:

1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2+x+2=0$;
3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $x^2+5x-6=0$.

261. Тенгламани ечинг:

1) $14x^2-5x-1=0$; 2) $2x^2+x+67=0$; 3) $2p^2+7p-30=0$;
4) $y^2-3y-5=0$; 5) $5x^2-11x+2=0$; 6) $9y^2-30y+25=0$;
7) $81y^2-18y+1=0$; 8) $y^2-11y-152=0$; 9) $8z^2-7z-1=0$.

262. (6) формуладан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

1) $3x^2-20x+14=0$; 2) $x^2+2x-80=0$; 3) $15y^2-22y-37=0$;
4) $5x^2-6x+1=0$; 5) $4x^2-36x+77=0$; 6) $x^2-22x-23=0$.

263. Тентламани ечинг:

1) $7x^2-20x+14=0$; 2) $y^2-10y-25=0$; 3) $8z^2-14z+5=0$;
4) $x^2-8x-84=0$; 5) $x^2+6x-27=0$; 6) $5t^2+26t-24=0$.

264. Тенгламани ечинг:

1) $(x+3)(x-4)=-12$; 2) $18-(x-5)(x-4)=-2$;
3) $(3x-1)^2=1$; 4) $5x+(2x+1)(x-3)=0$;
5) $(2x+3)(3x+1)=11x+30$; 6) $x^2-5=(x-5)(2x-1)$.

265. Илдизлари: 1) 1 ва 2 га; 2) -3 ва 3 га; 3) -10 ва 4 га;4) $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{3}$ га тенг келтирилган квадрат тенглама тузинг.

266. Тенгламани ечинг:

1) $(x+4)^2=3x+40$; 2) $(2x-3)^2=11x-19$;
3) $(x+1)^2=7918-2x$; 4) $(x+2)^2=3137-2x$.

267. Тенгламани ечинг:

1) $x^2-0{,}6x+0{,}08=0$; 2) $7=0{,}4y+0{,}2y^2$;

3) $x^2-1{,}6x-0{,}36=0$; 4) $z^2-2z+2{,}91=0$;

5) $0{,}2y^2-10y+125=0$; 6) $\frac{x^2}{3}=9-2x$.

268. Ўзгарувчининг қандай қийматларида тенглик бажарилади:

1) $\frac{x^2}{7}=2x-7$; 2) $\frac{x^2}{3}=\frac{10}{3}-x$;

3) $x^2+1{,}2=2{,}6x$; 4) $4x^2=7x+7{,}5$?

269. x нинг қандай қийматларида тенглик бажарилади:

1) $(5x+3)^2=5x+3$; 2) $(3x+10)^2=3x+10$;

3) $(3x-8)^2=3x^2-8x$; 4) $(4x+5)^2=5x^2+4x$?

270. $ax^2-3x-5=0$ тенгламанинг битта илдизи 1 га тенг экани маълум бўлса, a ни топинг.

271. $x=1$ сони $ax^2-(a+c)x+c=0$ тенгламанинг илдизи бўла оладими? Иккинчи илдизи қандай?

272. Тенгламани ечинг:

1) $4x^2-4ax+a^2-b^2=0$; 2) $ax^2-(2a+1)x+2=0$;

3) $abx^2+2(a+b)\sqrt{abx}+(a-b)^2=0$;

4) $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x=2$;

5) $(a+b)x^2+2ax+a-b=0$; 6) $mnx^2-(an+bm)x+ab=0$.

273. Тенгламашг ечинг:

1) $6x+5mx+m^2=0$; 2) $x^2+2(a-b)x-4ab=0$;

3) $56y^2+ay-a^2=0$; 4) $abx^2-(a^2-b^2)x-ab=0$;

5) $2y^2-(b-2c)y=bc$; 6) $(m-n)x^2-nx-m=0$.

274. a нинг қандай қийматларида тенглама: 1) ўзаро тенг; 2) модуллари тенг, ишоралари қарама-қарши бўлган иккита илдизга эга?

275. k нинг қандай қийматларида $x=-2$ сони $x^2-7x+k=0$ тенгламанинг илдизи бўлади?

276. Тенгламанинг ечинг:

1) $x^2-7|x|+6=0$; 2) $3x^2-4|x|+1=0$;

3) $x^2-2|x|-15=0$; 4) $2x^2+3|x|-5=0$.

277. 1) $m^2-6mn+8n^2=0$; 2) $8m^2-14mn+5n^2=0$;

3) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2-2\left(\frac{m+n}{m-n}\right)=3$ тенгликлар берилган. m нинг n га нисбатини топинг.

278. n нинг қандай қийматларида $(n-1)x^2-2(n+1)x+n+4=0$ тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг бўлади?

279. $(p+k+n)x^2-2(p+k)x+(p+k-n)=0$ тенгламанинг илдизларини топинг, бундар, p, k, n – рационал сонлар.

280. Бир текисликда берилган бир нечта нуқталарнинг исталган учтаси бир тўғри чизиқда ётмайди. Бу нуқталарнинг ҳар иккитасини бирлаштирувчи 28 та тўғри чизиқ ўтказиш мумкин бўлса, берилган нуқталарнинг сони нечта?

281. 280-мисолда берилган тўғри чизиқлар сонини m га тенг деб, мисолни умумий ҳолда ечинг.

282. Барча диагоналларининг сони 12 га тенг бўлган (мунтазам) қавариқ кўпбурчак мавжудми? 13 га тенг бўлгани-чи?

283. y нинг қандай қийматларида y^2-6 ифоданинг қиймати $5|y|$ га тенг?

284. Агар икки сон кўпайтмасининг улар квадратларининг йиғиндисига нисбати 0,3 га тенг бўлса, бу сонларнинг ўзаро нисбати қандай?

285. $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 бўлса, у ҳолда $x_1+x_2=-p$; $x_1 \cdot x_2=q$ бўлишини исботланг.

286. Илдизлари $\dfrac{1}{10-\sqrt{72}}$, $\dfrac{1}{10+\sqrt{72}}$ сонларига тенг квадрат тенглама тузинг.

287. Илдизлари $\dfrac{a}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-b}}$ бўлган квадрат тенглама тузинг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

288. $m^2-12n+40$ ифода n нинг ҳар қандай қийматида фақат мусбат қийматлар қабул қилишини кўрсатинг.

289. Ифоданинг қийматини топинг:

$$\frac{(b-a)^2}{a+b}:\left(\frac{2ab}{b^2-a^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}\right),$$ бунда $a=8{,}4$; $b=-0{,}6$.

290. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

1) $y=\sqrt{\dfrac{3x-6}{4}}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}+x^2}$.

3-§. Виет теоремаси

3.1. Виет теоремаси

*Агар $ax^2+bx+c=0$ тенгламада $a=1$ бўлса, бу тенглама **келтирилган квадрат тенглама** дейилади ва у қуйидагича ёзилади:*

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

Масалан, $x^2+7x+12=0$ – келтирилган квадрат тенглама. $D=49-4\cdot12=1$ бўлгани учун, унинг илдизлари: $x_1=\dfrac{7-1}{2}=-3$, $x_2=\dfrac{7+1}{2}=4$ бўлади. Бундан $3+4=7=-(-7)$ ва $3\cdot4=12$ бўлишини кўрамиз. Яъни, келтирилган квадрат тенгламанинг коэффициентлари билан илдизлари орасида мустаҳкам боғланиш бўлар экан. Энди шу боғланишни умумий ҳолда тасдиқлайдиган Виет теоремасини исботлаймиз.

Теорема 1. *Келтирилган квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси қарама-қарши ишора билан олинган иккинчи коэффициентига тенг, илдизларининг кўпайтмаси эса озод ҳадга тенг*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \qquad (2)$$

Исботи: $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$; $x_2 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ тенгликлардан топилади. Бунда

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} + \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} =$$

$$= \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{(-p)^2+\left(p^2-4q\right)}{4} =$$

$$= \frac{4q}{4} = q.$$

Теорема исботланди.

$ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ келтирилган квадрат тенгламага тенг кучли бўлгани учун, Виет теоремасига кўра: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Бу ерда x_1 ва x_2 берилган $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг илдизлари.

3.2. Тескари теорема

Виет теоремасига тескари хулоса ҳам тўғри.

Теорема 2. (Тескари теорема). Агар $u+v=-p$, $uv=q$ бўлса, у ҳолда u ва v сонлари $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари бўлади.

Исботи. Шартга кўра, $u+v=-p$, $uv=q$. Демак, $x^2+px+q=0$ тенгламадан қуйидагини ҳосил киламиз.

$u^2+pu+q=u^2-u(u+v)+uv=u^2-u^2-uv+uv=0$,

$u^2+pv+q=v^2-v(u+v)+uv=v^2-vu-v^2+uv=0$,

яъни u ва v сонлари $x^2+px+q=0$ тенгламани қаноатлантиради. Теорема исботланди.

1-мисол. $x^2+2x-15=0$ тенгламани Виет теоремасига тескари теоремани қўллаб ечамиз. $3+(-5)=-2$ ва $3(-5)=-15$ бўлгани учун, 2-теоремага кўра $x_1=-5$, $x_2=3$ сонлари тенгламанинг илдизлари бўлади.

2-мисол. Илдизлари 2 ва 7 бўлган квадрат тенглама тузиш керак.

Виет теоремасига асосан бу тенгламани $x^2-(2+7)x+2 \cdot 7=0$ ёки $x^2-9x+14=0$ кўринишида ёзамиз.

3-мисол. Қуйидаги тенгламалар системасини ечамиз.

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = -21. \end{cases}$$

Виет теоремасига кўра x ва y сонлари $t^2-4t-21=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлиши керак.

$D=(-4)^2-4(-21)=100$ бўлгани учун, $t_1=-3$, $t_2=7$. Бундан берилган системада x ва y ўзгарувчилар ўзаро симметрик бўлгани учун, системанинг ечимлари $x_1=-3$, $y_1=7$ ва $x_2=7$, $y_2=-3$ бўлади. Жавоби: (−3; 7), (7; −3).

3.3. $a \pm b + c = 0$ бўлган ҳол.

$ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама учун $a+b+c=0$ ёки $a-b+c=0$ тенгликлардан бири бажарилган вақтда берилган квадрат тенглама илдизларини оғзаки топиш қийин эмас. Жумладан, қуйидаги теорема бажарилади.

Теорема, 3.1. Агар $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама учун $a+b+c=0$ тенглик бажарилса у ҳолда $x_1=1$ ва $x_2 \,\square\, \frac{c}{a}$ сонлар шу тенгламанинг илдизлари бўлади.

II. Агар $ax^2+bx+c=0$ квадрат тенглама учун $a-b+c=0$ *тенглик бажарилса*, $x_1=-1$ ва $x_2 \,\square\, \frac{c}{a}$ *сонлари шу тенгламанинг илдизлари бўлади.*

Франсуа Виет (1540–1603) – француз математиги, алгебраик символлар системасини киритди, элементар алгебра асосларини ишлаб чиқди. У сонларни ҳарфлар билан белгилай бошлаганларнинг бири эди, бу эса тенгламалар назариясини кескин ривожлантирди.

Исботи. I. $a+b+c=0$ бўлсин. У ҳолда $x_1=1$, $x_2 \square \frac{c}{a}$ сонлари $ax^2+bx+c=0$ тенгламани қаноатлантиришини кўрсатиш, етарли. Демак, $x_1=1 \square a \cdot 1^2+b \cdot 1+c= a+b+c=0$

I теорема исботланди. II теорема ҳам шундай исботланади.

4-мисол. 3-теорема бўйича тенгламанинг илдизларини топиш керак:

1) $7x^2-13x+6=0$; 2) $9x^2+20x+11=0$;
3) $12x^2-7x-5=0$; 4) $5x^2+3x-2=0$.

Ечилиши. 1) $7-13+6=0 \square x_1=1$; $x_2 \square \frac{6}{7}$;

2) $9-12+11=0 \square x_1=-1$; $x_2=-\frac{11}{9}$;

3) $12-7-5=0 \square x_1=1$; $x_2=-\frac{5}{12}$;

4) $5-3-2=0 \square x_1=-1$; $x_2 \square \frac{2}{5}$.

?
1) Виет теоремаси ҳақида хулоса чиқаринг.
2) Виет теоремасига тескари теоремани исботланг.
3) $ax^2+bx+c=0$ тенглама учун Виет теоремаси қандай қўлланилади?
4) $a\pm b+c=0$ бўлган ҳол учун квадрат тенгламанинг илдизларини топишга мўлжалланган теоремани айтинг ва уни исботланг.

МИСОЛЛАР

А

291. Тенглама илдизларининг йиғиндиси ва кўпайтмасини топинг:

1) $x^2-37x+27=0$; 2) $x^2-210x=0$; 3) $y^2-y=0$;
4) $x^2+41x-371=0$; 5) $y^2-19=0$; 6) $3x^2-10x=0$.

292. Виет теоремасига тескари теоремадан фойдаланиб, тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2+4x+3=0$; 3) $x^2-16x+48=0$;
4) $x^2-2x-3=0$; 5) $x^2+3x-4=0$; 6) $x^2+12x+27=0$.

293. Тенгламанинг илдизларини оғзаки аниқланг:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$;

3) $x^2-7ax+12a^2=0$; 4) $x^2+2x-24=0$;

5) $x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x+2\sqrt{3}=0$; 6) $x^2+5bx+6b^2=0$.

294. Илдизлари бўйича квадрат тенглама тузинг:

1) -7 ва -2; 2) $-3{,}4$ ва 6; 3) $\frac{4}{3}$ ва 2;

4) 8 ва -3; 5) $\frac{4}{7}$ ва $\frac{4}{7}$; 6) $\square\frac{8}{3}$ ва $\square\frac{8}{3}$;

7) $\sqrt{2}$ ва $\sqrt{5}$; 8) $3-\sqrt{5}$ ва $3+\sqrt{5}$; 9) $\square\sqrt{7}$ ва $\sqrt{2}$.

295. Тенгламани ечинг ва уни Виет теоремаси бўйича текширинг:

1) $x^2-37x+10=0$; 2) $x^2-2x-9=0$;

3) $2x^2+7x+6=0$; 4) $3x^2-4x-4=0$.

296. Тенгламанинг илдизларини 3-теоремадан фойдаланиб аниқланг:

1) $3x^2-13x+10=0$; 2) $5x^2+12x+7=0$;

3) $5x^2-\left(5+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$; 4) $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}=0$;

5) $7x^2-3x-4=0$; 6) $9x^2+\left(9-\sqrt{3}\right)x-\sqrt{2}=0$.

297. Берилган илдизлар бўйича квадрат тенглама тузинг.

1) 2; 7; 2) -1; 4; 3) -3; -4; 4) 0; 6; 5) -5; 5;

6) 9; 7) $2\pm\sqrt{3}$; 8) $5\pm\sqrt{5}$; 9) $\pm\sqrt{5}$; 10) 0.

B

298. Битта илдизи: 1) $\square\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $2-\sqrt{5}$; 4) $3+\sqrt{3}$ га тенг бўлган рационал коэффициентли квадрат тенглама тузинг.

299. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a + b = 2, \\ ab = -48; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y + z = -5; \\ yz = 6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} m + n = -3, \\ mn = -18; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u + v = 15, \\ uv = 56. \end{cases}$

300. $x^2+8x-1=0$ тенгламанинг x_1, x_2 илдизларини топмасдан туриб: 1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1x_2^3+x_2x_1^3$; 3) $\frac{x_1}{x_2}$ □ $\frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1^4+x_2^4$ ифодаларнинг қийматларини топинг.

301. Агар u ва v сонлари $ax^2+bx+c=0$, (a □ 0) тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда: 1) u^4+v^4; 2) u^6+v^6 йиғиндиларни a,b ва c орқали ифодаланг.

302. $x^2-4rx+7r=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1^2+x_2^2=2$ шартни қаноатлантирганда, r ни аниқланг.

303. $3x^2-5x-6=0$ тенгламанинг илдизлари x_1, x_2 учун $x_1^7x_2^2+x_1^2x_2^7$ йиғиндини топинг.

304. 1) Агар u ва v сонлари $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари, $u+1$ ва $v+1$ сонлари $x^2-p^2x+pq=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, p ва q ни топинг;

2) агар u ва v сонлари $x^2-8x+12=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, илдизлари $\frac{1}{u^3}$ ва $\frac{1}{u^3}$ бўлган квадрат тенглама тузинг.

305. $x^2-4x+p=0$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси 16 га тенг. p ни топинг.

306. a нинг қандай қийматларида $x^2+2a(x-1)+1=0$ тенглама илдизларининг йиғиндиси улар квадратларининг йиғиндисига тенг?

307. m нинг қандай қийматларида: 1) $x2-2mx+m=0$ тенгламанинг битта илдизи $a-b$ га; 2) $z^2+mz-18=0$ тенгламанинг битта илдизи -3 га; 3) $mx^2-15x-7=0$ тенгламанинг битта илдизи $-$ 7 га; 4) $y^2+my+a^2+5a+6=0$ тенгламанинг битта илдизи $a+3$ га тенг бўлади?

308. a нинг қандай қийматларида $3x^2+2x-a=0$ тенглама илдизларининг нисбати 2:3 каби бўлади?

C

309. Агар a ва c сонлари $3x^2+2x+k=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, k нинг: 1) $a-c=6$; 2) $3a-c=4$; 3) $a^2+c^2=34$; 4) $a:c=-2:5$ тенглик бажариладиган қийматини топинг.

310. Агар m ва n сонлари $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, илдизлари $(m+n)^2$ ва $(m-n)^2$ сонларига тенг квадрат тенглама тузинг.

311. $x^2 - 3|x| + 1 = 0$ тенгламанинг барча илдизлари квадратларининг йиғиндисини топинг.

312. a нинг қандай қийматларида $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ тенгламанинг бир илдизи иккинчисидан икки марта катта бўлади?

313. k нинг қандай қийматларида тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси энг кичик қийматни қабул қилади?

314. Агар $2p$ билан $\frac{q}{2}$ сонлари $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, p ва q ни топинг.

315. $x^2+px+q=0$ тенгламанинг шундай коэффициентларини топингки, бунда унинг илдизлари p ва q га тенг бўлсин.

316*. $x^2-13x+b=0$ тенгламанинг илдизлари $x^2+ax+b=0$ тенгламанинг мос илдизлари квадратларига тенг. a билан b ни ва ҳар қайси тенгламанинг илдизларини топинг.

317*. $2x^2-5x+1=0$ тенгламани ечмасдан, унинг илдизлари квадратларининг айирмасини топинг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

318. Айниятнинг тўғрилигини исботланг:

1) $\frac{37}{7+2\sqrt{3}} + \frac{37}{7-2\sqrt{3}} = 14;$ 2) $\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3} + \frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3} = 38.$

319. Агар: 1) $a>0$, $b<0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{5a^2b}{a^2 \square b^2}$ ифоданинг;

2) $a<0$, $b<0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{2a^3b^2}{a \square b}$ ифоданинг ишорасини аниқланг.

320. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг нисбати 5:12 каби нисбатга тенг, гипотенузаси 26 см. Учбурчакнинг кичик катетини топинг.

4-§. Квадрат тенглама илдизларининг хоссалари

4.1. Квадрат тенглама илдизларини текшириш

Айтайлик, $ax^2+bx+c=0$ тенгламани ечиш керак бўлсин. У ҳолда бу тенглама ҳақиқий сонлар тўпламида илдизга эга ёки эга бўлмаслигини $D=b^2-4ac$ дискриминантга қараб топиш мумкин. Аниқроқ айтганда: агар $D>0$ бўлса, тенгламанинг турли иккита илдизи бўлади:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Агар $D=0$ бўлса, тенгламанинг ўзаро тенг иккита илдизи мавжуд: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Агар $D=0$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг ҳақиқий сонлар тўпламида илдизи бўлмайди. Шунингдек, квадрат тенгламани ечмасдан аввал, унинг илдизлари ҳакидаги баъзи маълумотларни тенгламанинг коэффициентларига қараб айтиш мумкин.

Аввал $x^2+px+q=0$ ($p \square 0$, $q \square 0$) келтирилган квадрат тенгламани қараб чиқамиз.

1) Айтайлик, $q<0$ бўлсин. У ҳолда $D=p^2-4q<0$ (чунки $4q<0$) ва тенг-лама иккита ҳақиқий илдизга эга. Иккинчи томондан, Виет теоремасига кўра $x_1 \cdot x_2=q<0$. Демак, тенглама илдизларининг ишоралари ҳар хил экан, яъни унинг битта илдизи манфий, иккинчиси мусбат бўлади.

2) Агар $q>0$ бўлса, у ҳолда берилган квадрат тенгламанинг $D\geqslant 0$ бўлгандагина ҳақиқий илдизлари мавжуд. Бу ерда $x_1 \cdot x_2=q>0$ тенгсизликда бу илдизларнинг ишоралари бир хил бўлади. а) Айтайлик, $p>0$ бўлсин. У ҳолда $x_1 \cdot x_2=-p<0$ тенгсизликда тенгламанинг иккала илдизи ҳам манфий бўлади. б) Агар $p<0$ бўлса, у

ҳолда $x_1 \cdot x_2 = q > 0$ тенгсизликда тенгламанинг иккала илдизи ҳам мусбат бўлади.

Энди квадрат тенгламани умумий кўринишда кўриб чиқамиз: $ax^2+bx+c=0$, $(a>0)$. Бу тенгламани a га бўлиб, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Буерда $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ деб белгиласак, p ва q нинг ишоралари b ва c нинг ишораларига мос келишини кўрамиз. Шундай қилиб, юқоридаги фикрлардан қуйидаги қоидалар келиб чиқади:

1) *Агар $c<0$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама қарама-қарши иккита ишорали илдизга эга бўлади.*

2) *Агар $c>0$, $D=b^2-4ac>0$ ва $b>0$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг иккита манфий илдизи мавжуд.*

3) *Агар $c>0$, $D=b^2-4ac>0$ ва $b<0$ бўлса, у ҳолда тенглама иккита мусбат илдизга эга бўлади.*

Масалан, $x^2-11x-26=0$ тенгламада $q=-26$ бўлгани учун, унинг турли ишорали иккита илдизи мавжуд: $x_1=-2$, $x_2=13$.

$x^2-10x+16=0$ тенгламада $q=16>0$, $D=36>0$ ва $p=-10<0$ бўлгани учун, унинг иккита мусбат илдизи мавжуд: $x_1=2$, $x_2=8$.

$2x^2+15x+7=0$ тенгламада $c=7>0$, $b=15>0$, $D=169>0$ бўлгани учун, унинг иккита манфий илдизи мавжуд: $x_1=-7$, $x_2=-0{,}5$.

4.2. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратиш

Аввал x^2+px+q келтирилган квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз. Бундан буён x^2+px+q квадрат тенгламанинг илдизларини x^2+px+q квадрат учҳаднинг ***илдизлари*** деб атаймиз. Бу квадрат учҳаднинг илдизлари x^2+px+q тенгламанинг илдизларига тенг бўлгани учун, $-(x_1+x_2)=p$, $x_1 \cdot x_2=q$ тенгликлар бажарилади. Бундан $x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=(x-x_1)(x-x_2)$ тенглик ҳосил бўлади. Шунингдек, ***агар x_1 ва x_2 сонлари x^2+px+q квадрат учҳаднинг илдизлари бўлса, унда*** $x^2+px+q^2=(x-x_1)(x-x_1)$ ***тенглик бажарилади.***

Умумий ҳолда эса ax^2+bx+c квадрат учҳад илдизлари $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг ёки $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

тенгламанинг илдизларига тенг бўлади. Агар унинг илдизлари x_1, x_2 бўлса, у ҳолда юқоридаги каби $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)$ тенглик бажарилади. Шунинг учун $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2)$ бўлади. Демак, x_1 ва x_2 сонлари ***ax^2+bx+c* квадрат учҳаднинг илдизлари бўлса, у ҳолда *$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$* тенглик бажарилади.**

1-мисол. x^2-6x+8 квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз. Унинг илдизлари $x_1=2$, $x_2=4$ бўлгани учун, $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ тенгликни оламиз.

2-мисол. $2x^2-x-6$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз. Унинг илдизлари: $x_1=-1,5$; $x_2=2$ бўлгани учун, $2x^2-x-6=2(x-2)=2(2x+1,5)(x-2)=(2x+3)(x-2)$ тенглик бажарилади.

T Квадрат тенгламаларга келтириладиган мисолларни ечишни қадимги бобилликлар қўллаганлар. Уларнинг эрамиздан аввалги 2000 йилларда чала квадрат тенгламаларни еча олганликларини исботловчи қўлёзмалари сақланган. Қадимги грек математиклари ҳам баъзи квадрат тенгламаларни геометрик ясашга келтириб еча олишган. Масалан, александриялик Диофант (III аср) $ax=b$ ва $ax^2=b$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш усулларини (геометрияга боғламай) кўрсата билган. VII асрда хинд олими Брахмагупта $ax^2+bx=c$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш қоидаларини кўрсатган. Буюк ўзбек математик олими ал Хоразмий (XII аср) ўзининг машҳур «Ал-жабр вал-муқобала китоби» деган асарида $x^2+px+q=0$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш формуласининг $\left(x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$ иборали хулосаси келтирган. Квадрат тенгламаларни ечишнинг умумий кўриниши ва унинг илдизларининг тенглама коэффициентларига боғлиқлигини ифодаловчи формулаларни Ф. Виет 1591 йилда тавсия этган. Бироқ у тенгламаларнинг фақат мусбат илдизларини қараган. Квадрат тенгламаларнинг манфий илдизлари мавжудлигини итальян олимлари Н.Тарталья (1499–1557), Кардано (1501–1576), Бомбелли (1530–1572) биринчилардан бўлиб кўрсатишган.

?
1) Қандай шарт бажарилганда $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг:
   а) қарама-қарши ишорли иккита илдизи; б) иккита манфий илдизи; в) иккита мусбат илдизи бўлади.
2) ax^2+bx+c квадрат учхадни кўпайтувчиларга ажратиш формуласини ёзиб, уни исботланг.

МИСОЛЛАР

A

321. Тенгламаларни ечмасдан, улар илдизларининг ишораларини аниқланг:

1) $x^2+7x-1=0$; 2) $x^2-7x+1=0$; 3) $5x^2+17x+16=0$;
4) $x^2-18x+17=0$; 5) $x^2-2x-1=0$; 6) $x^2-15x+56=0$;
7) $19x^2-23x+5=0$; 8) $2x^2+5x+6=0$; 9) $11x^2-9x-0{,}02=0$;
10) $5x^2-x-108=0$; 11) $x^2-2{,}7x+1=0$; 12) $3x^2-12x-7=0$.

322. Агар $a>0$ ва $b>0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+abx-b=0$ тенгламанинг илдизлари бўладими?

323. a нинг қандай қийматларида $x^2+6x+a=0$ тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг бўлади?

324. Агар $|a|<|b|$ бўлса, у ҳода $bx^2-2ax+b=0$ тенгламанинг илдизлари мавжудми?

325. c нинг қандай қийматларида $2x^2-4x+c=0$ тенглама иккита турли мусбат илдизга эга?

326. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^2-2x-48$; 2) $2x^2-5x+3$ 3) $3x^2-10x+3$;
4) $5x^2-x-42$; 5) $3x^2-8x+5$ 6) $36x^2-12x+1$;
7) $2x^2-7x+6$; 8) $x^2+9x-22$ 9) $x^2-8x-84$;
10) $4x^2-11x+7$; 11) $5x^2+9x+4$; 12) $2x^2-7x+5$.

B

327. c нинг қандай қийматларида $5x^2-4x+c=0$ тенгламанинг: 1) турли иккита илдази мавжуд; 2) ўзаро тенг иккита илдизи мавжуд; 3) ҳакиқий илдизлари мавжуд эмас; 4) $x^2+13x-30=0$ тенглама билан камида битта умумий илдизи мавжуд бўлади?

328. b нинг қандай қийматларида $x^2+bx+4=0$ тенгламанинг: 1) битта илдизи 3 га тенг; 2) турли хил иккита илдизга эга; 3) ўзаро тенг иккита илдизга эга; 4) ҳақиқий илдизга эга бўлмайди?

329. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $4x^2+7x+3$; 2) x^2+x-56; 3) x^2-x-56;
4) $5x^2-18x+16$; 5) $8x^2+x-75$; 6) $3x^2-11x-14$;
7) $3x^2+11x-34$; 8) x^2-x-1; 9) $4y^2-7y+1$.

330. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $ax^2-(a+c)x+c$; 2) $6x^2+5mx+m^2$;

3) $56y^2+ay-a^2$; 4) $(m-n)x^2-nx-m$.

B

331. a нинг қандай қийматларида $(a+2)x^2+2(a+2)x+2=0$ тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг бўлади?

332. a нинг қандай қийматларида $(a^2-6a+8)x^2+(a^2-4)x+(10-3a-a^2)=0$ тенглама илдизларининг сони иккитадан ортиқ бўлади?

333. a нинг қандай қийматларида $4x^2+(3a^2-5|a|+2)x-3=0$ тенглама илдизларининг модуллари тенг, ишоралари эса карама-қарши бўлади?

334. k нинг шундай энг кичик бутун қийматини топингки, бунда $x^2+x+k=0$ тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмасин.

335. a нинг қандай қийматларида: 1) $2x^2+x-a=0$ ва $2x^2-7x+6=0$; 2) $x^2+ax+1=0$ ва $x^2+x+a=0$ тенгламаларнинг камида битта умумий илдизи бўлади?

336. a нинг қандай қийматларида $x^2+2(a-3)x+a^2-7a+12)=0$ ва $x^2+(a^2-5a+6)x=0$ тенгламалар тенг кучли?

337. a, b ва c сонларнинг қандай қийматларида $0{,}75x^2+(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$ тенглама битта илдизга эга? Бу тенглама турли иккита илдизга эга бўла оладими?

338. a нинг қандай қийматларида: 1) $4x^2+ax+9=0$; 2) $ax^2+4x+1=0$; 3) $x^2-2(1-3a)x+7(3+2a)=0$ илдизлари ўзаро тенг бўлади?

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

339. Тенгламани ечинг:

1) $(2x-1)^2=2x-1$; 2) $(x-3)^2=2(x-3)$;

3) $4(x-3)^2=(2x+6)^2$; 4) $(3x+4)^2=3(x+4)$.

340. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x-y=-8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=2, \\ 2x+y=13. \end{cases}$

341. Илдизлари бўйича тенгламалар тузиб, уларни кўпҳад кўринишида ёзинг:

1) −3; 8; 2) 0; 12; 3) 5; −5; 4) 1; 2,3; 5) $\frac{1 \square \sqrt{5}}{2}$.

5-§. Рационал тенгламалар. Квадрат тенгламаларга келтириладиган масалалар

5.1. Рационал тенгламалар

Қуйидаги тенгламаларни қараймиз: 1) $3x-2=2(x+1)+5$; 2) $x+\frac{1}{x}=2x-1$; 3) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{3}{x+1}$. Бу тенгламалар ***рационал тенгламалар*** деб аталади. Агар рационал тенгламанинг чап ва ўнг қисмларида ҳам бутун ифодалар бўлса, бундай тенглама ***бутун тенглама*** деб аталади. Агар тенгламанинг чап ёки ўнг қисмида каср ифода катнашса, у ҳолда бундай рационал тенгламалар ***каср рационал тенгламалар*** деб аталади. Масалан, 1) тенглама − бутун рационал тенглама, 2) ва 3) тенгламалар − каср рационал тенгламалар. Одатда, каср рационал тенгламалар тенг кучли тенгламаларнинг хоссаларидан фойдаланилиб, бутун ифодаларга келтирилиб ечилади. Тенгламани ечиш давомида турли шакл алмаштиришларни қўллашимизга тўғри келади. Бунда тенгламанинг охирида чет илдизлар, яъни берилган тенгламани қаноатлантирмайдиган илдизлар пайдо бўлиши мумкин. Чет илдизларни эътиборга олиш учун тенгламанинг охирида чиққан илдизлар қабул қиладиган қийматлар тўпламида таққосланиб, берилган тенгламанинг жавоби олинади ёки чиққан илдизларни тенгламага қўйиб текшириш орқали чет илдизларни ажратиб олиш мумкин.

1-мисол. $2-\frac{x-7}{x-5}=\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{1}{x}$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Бу тенглама таркибидаги касрларнинг махражлари нолга тенг бўлмаслиги керак. У ҳолда, $x-5=0$, $x^2-5x=0$ ва $x=0$ тенгламаларни қаноатлантирадиган барча x лар тўплами берилган тенгламанинг қабул қиладиган қийматлари тўпламига (ҚҚҚТ) кирмайди. Бу тенгламаларнинг илдизлари $x=0$ ва $x=5$. Шунинг учун берилган тенгламанинг ҚҚҚТ $x \square 0$, $x \square 5$. деб ҳисобланади. Энди берилган каср ифодаларни умумий махражга келтириб, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз: $\frac{2x(x-5)-x(x-7)}{x(x-5)}=$ $=\frac{x+5-(x-5)}{x(x-5)}$. Бу касрларнинг махражлари бир хил бўлгани учун, $2x(x-5)-x(x-7)=(x+5)=(x-5)$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $x^2-3x-10=0$ чиқади. Унинг илдизлари: $x_1=-2$, $x_2=5$. -2 сони ҚҚҚТ да ётади, 5 эса ҚҚҚТ га тегишли бўлмаганлиги учун, тенгламанинг илдизи: $x=-2$.

Умуман, каср тенгламаларни ечишда қуйидаги қоидаларга риоя қилиш мақсадга мувофиқдир:

а) Тенглама таркибига кирган касрлар махражларини нолга айлантирадиган x нинг қийматларини аниқлаб, тенгламанинг ҚҚҚТ ни топиш керак.

б) Берилган тенгламалардаги касрларнинг умумий махражлари топилиб, тенглама шу умумий махражга кўпайтирилади. Бундай берилган тенгламани бутун тенгламага алмаштириш керак.

в) Ҳосил қилинган бутун тенгламани ечиб, унинг илдизларини топиш керак.

г) Топилган илдизлардан ҚҚҚТ га тегишлиларини топиб, уларни тенглама жавобига ёзиш керак.

5.2. Квадрат тенгламаларга келтириладиган масалалар

Рационал тенгламалар каби кўплаб бошқа масалалар квадрат тенгламалар ёрдамида ечилади. Энди шундай масалаларга қуйидаги мисолларни кўриб чиқамиз.

2-мисол. Икки хонали соннинг ўнли рақами унинг бирлигидан 2 та ортиқ. Агар шу сонни ўз рақамлари йиғиндисига кўпайтирсак, натижа 900 га тенг бўлади. Шу икки хонали сонни топиш керак.

Ечилиши. Агар шу икки хонали соннинг ўнли рақами x га тенг бўлса, у ҳолда бу соннинг бирлиги $x-2$ га тенг. Бундан бизга керак бўлган икки хонали сон $10x+x-2=11x-2$ кўринишда ёзилади. Шунингдек, масала шартига кўра $(11x-2)(x+x-2)=900$ бўлиши керак.Бундан $11x^2-13x-448=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг илдизлари $x_1=-\frac{64}{11}, x_2=7$ бўлади. Масаланинг шартига кўра $x=-\frac{64}{11}$ илдиз тенгламани қаноатлантирмайди. У ҳолда $x=7$ ва $x-2=5$ бўлиши керак, яъни 75 – изланган сон. Демак, $75(7+5)=900$. Жавоби:75.

3-мисол. Биринчи ишчи 60 та детални иккинчисига қараганда 3 соат аввал ясаб битирди. Агар иккаласи биргаликда ишлаб 30 та детални 1 соатда ясашса, иккинчи ишчи 90 та детални неча соатда ясайди?

Ечилиши. Биринчи ишчи 1 соатда x деталь ясайдиган бўлса, иккинчи ишчи эса 1 соатда $30-x$ деталь ясайди. Бундан, биринчи ишчи 60 та детални $\frac{60}{x}$ соатда, иккинчиси эса $\frac{60}{30 \square x}$ соатда ясаши келиб чиқади. Демак, масаланинг шартига кўра $\frac{60}{30-x}-\frac{60}{x}=3$ бўлиши керак. Тенгламани умумий махражга келтириб, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз: $x^2+10x-600=0$. Бу тенгламанинг илдизлари 20 ва -30. -30 сони масала шартини қаноатлантирмагани учун, $x=20$ тенгламанинг илдизи бўлади. У ҳолда иккинчи ишчи бир соатда $(30-x)=30-20=10$ деталь ясар экан. Демак, у 90 детални 9 соатда ясайди.

Жавоби: 9 соат.

МИСОЛЛАР

А

342. Тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{x}{x-2}$; 2) $\frac{y^2-6y}{y-5}=\frac{5}{5-y}$;

3) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$; 4) $\frac{2y-1}{y+7}=\frac{3y+4}{y-1}$;

5) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{6-7x}{y+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{5x-6}{x-2}$;

7) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{6-7x}{2-x}$; 8) $\frac{1+3y}{1-3y}=\frac{5-2y}{1+2y}$.

343. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4$; 2) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$

3) $\frac{3}{1-x}+\frac{1}{x+1}=\frac{28}{1-x^2}$; 4) $\frac{x+15}{4}+\frac{21}{x+2}=2$;

5) $\frac{16}{x-3}+\frac{30}{1-x}=3$; 6) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+3}=\frac{20}{x^2-4}$.

344. Функцияларнинг графиклари билан Ox ўқининг кесишиш нуқталарини топинг:

1) $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$; 2) $y = \dfrac{(x-4)(3x-15)}{x-9}$;

3) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $y = \dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-3}$.

345. 1) $y=2x+3$ ва $y = \dfrac{34}{x-5}$; 2) $y = \dfrac{x^2-5x}{x+3}$ ва $y=2x-35$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталарини топинг.

346. y нинг қандай қийматларида:

1) $\dfrac{3y+9}{3y-1}$ ва $\dfrac{2y-13}{2y+5}$ касрларнинг йиғиндиси 2 га тенг бўлади;

2) $\dfrac{5y \square 13}{5y \square 4}$ ва $\dfrac{4 \square 6y}{3y \square 1}$ касрларнинг айирмаси 3 га тенг бўлади?

347. Тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $\dfrac{x-4}{x-5} + \dfrac{x-6}{x-5} = 2$;

2) $\dfrac{1}{2-x} - 1 = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{6-x}{3x^2-12}$;

3) $\dfrac{7y-3}{y-y^2} = \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{5}{y(y-1)}$;

4) $\dfrac{3}{y-2} + \dfrac{7}{y+2} = \dfrac{10}{y}$;

5) $\dfrac{30}{y^3+27} = \dfrac{2}{y+3} - \dfrac{y-5}{y^2-3y+9}$;

6) $\dfrac{3x+2}{x^3-8} = \dfrac{5}{x^2+2x+4} - \dfrac{1}{x-2}$.

348. Тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $\dfrac{6}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1} = 2 - \dfrac{x+4}{x+1}$; 2) $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

3) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$; 4) $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}=\frac{1}{7}$;

5) $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{6-y}{1-y^2}-\frac{y+3}{y-y^2}=\frac{y+5}{y+y^2}$.

B

349. Тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$; 2) $1-\frac{2a}{x-a}=\frac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}$;

3) $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4\left(x^2-a^2\right)}$; 4) $\frac{2x}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4\left(x^2-b^2\right)}$;

5) $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}-\frac{x}{bc}$; 6) $\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}$.

350. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}=\frac{3(2x-1)}{7(2x+1)}$;

2) $\frac{y}{y^2-9}=\frac{1}{y^2+3y}-\frac{3}{6y+2y^2}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x^2+4x+16}=\frac{1}{x-4}$;

4) $\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10x}{3x^2-2}$.

351. *A* пунктдан 72 км масофада жойлашган *B* пунктга қараб икки автомашина йўлга чиқди. Биринчи автомашинанинг тезлиги иккинчисиникига қараганда 4 км/соат ортиқ бўлгани учун, биринчиси иккинчисига қараганда В пунктга 15 Дақиқа аввал етиб келди. Иккала автомашинанинг тезликларини топинг.

352. Томошабинлар залида тенг каторларда жойлаштирилган 320 та жой бор. Ҳар бир қатордаги жойлар сонини 4 тага орттириб, яна бир қатор қўшилгандан сўнг жойлар сони 420 та бўлди. Энди залдаги қаторлар сони нечта бўлди?

353. Ҳовуздаги сувни 1 соат давомида ўзгартирмай оқизгандан сўнг унда 400 м^3 сув қолди, яна 3 соат шу тарзда оқизилгандан сўнг ҳовуздаги сув ҳажми 250 м^3 бўлди. Ҳовузда дастлаб қандай ҳажмда сув бўлган?

354. Бир даврадаги шахмат турнирида (ҳар бир шахматчи ҳар қайси шахматчи билан бир мартадан ўйнайди) жами 78 партия ўйналган. Бу турнирга қатнашган шахматчилар сонини топинг.

355. Катер дарё оқими бўйича 18 км, дарё оқимига қарши 20 км сузиб ўтиб, бутун йўлга 2 соат сарфлади. Катернинг турғун сувдги тезлиги 20 км/соат бўлса, дарё оқимининг тезлигини топинг.

356. *A* ва *B* шаҳарлар орасидаги масофа 260 км. Автобус *A* шаҳардан *B* шаҳарга қараб 2 соат юргандан сўнг 30 Дақиқа тўхтади. Шунинг учун *B* шаҳарга жадвалда кўрсатилган вақтда етиб келиш учун тезликни 5 км/соатга оширишга мажбур бўлди. Автобуснинг бошланғич тезлиги қандай эди?

357. *A* ва *B* темир йўл бекатлари орасидаги масофа 120 км. *A* дан *B* бекатга қараб поезд жўнаганидан 3 соат ўтгандан кейин, поезднинг тезлигидан 10 км/соат ортиқ тезлик билан иккинчи поезд йўлга чиқди. Агар иккинчи поезд *B* бекатга биринчисига қараганда 2 соат кейин етиб келган бўлса, у ҳолда иккинчи поезд *A* бекатдан *B* бекатга қанча вақтда етиб келган?

C

358. Қайиқнинг кўл бўйлаб 25 км ва дарё оқимига карши 9 км масофани сузиб ўтишга сарфлаган вақти унинг дарё оқими бўйича 56 км масофани сузиб ўтишга сарфлаган вақтига тенг. Агар дарё оқимининг тезлиги 2 км/соат бўлса, қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги қандай?

359. Аэропортдан бир вақтда учиб чиққан самолётларнинг бири ғарбга, иккинчиси эса жануб томон учди. 2 соат учгандан сўнг улар орасидаги масофа 2000 км бўлди. Агар бир самолётнинг тезлиги иккинчиси тезлигининг 75% ини ташкил этса, иккала самолётнинг тезлигини топинг.

360. Икки тракторчи қўриқ ерни биргаликда ҳайдашса, фақат биринчи тракторчининг ёлғиз ўзидан 18 соат олдинроқ ва фақат иккинчи тракторчининг ёлғиз ўзидан 32 соат аввалроқ ҳайдаб тугатишган бўлар эди. Шу қўриқ ерни ҳар бир тракторчи қанча вақтда ҳайдаб битиради?

361. Икки бригада ҳосилни 12 кунда йиғиб олиши керак. Улар биргаликда 8 кун ишлагандан кейин, биринчи бригада бошқа ишга алмашиб, қолган ишни иккинчи бригада 7 кунда тугатди. Шу бригадаларнинг ҳар бири ҳосилни неча кунда йиғиб олади?

362. Икки ишчига маълум бир деталлар ясаш топширилди. Биринчи ишчи 7 соат, иккинчиси эса 4 соат ишлагандан кейин буюрт-манинг $\frac{5}{9}$ қисми бажарилди. Улар биргаликда яна 4 соат деталь ясашгандан кейин буюртманинг $\frac{1}{18}$ қисми қолди. Ҳар бир ишчи алоҳида ишлаб, буюртмани неча соатда бажариши мумкин?

363. Агар йўловчилар поезди устун ёнидан 7 секундда, платформадан эса 25 секундда ўтса, поезднинг узунлиги ва тезлигини топинг. Платформа узунлиги 180 м.

364. Бир экин майдонидан 2880 ц буғдой, ундан кичик экин майдонидан 2160 ц буғдой йиғиб олинди. Биринчи майдоннинг ҳар гектаридан иккинчисига қараганда 4 ц буғдой ортиқ йиғиб олинса ва биринчи майдоннинг юзи иккинчисидан 12 га катта бўлса, ҳар бир экин майдонининг юзини топинг.

365. Алюминий ва магний қотишмасида 22 кг алюминий бор. Бу қотишмага 15 кг магний қўшилиб, қайта эритилди. Бундан чиққан янги қотишма таркибидаги магнийнинг улуши 45% га ортди. Дастлабки қотишманинг оғирлиги қандай бўлган?

366. Турғун сувдаги тезлиги 25 км/соат бўлган катер 2 соатда дарё оқими бўйича 30 км ва оқимга карши 25 км сузиб ўтди. Дарё оқимининг тезлигини топинг.

367. Айлана бўйлаб ҳаракатланадиган икки фигуранинг бири иккинчисидан 2 секунд тезроқ ҳаракатланади. Агар икки фигура бир йўналишда ҳаракатланиб, ҳар 60 секундда учрашиши маълум бўлса, уларнинг ҳар бири 1 секундда айлананинг қандай қисмини босиб ўтади?

368. а) $x(x-10)=24$; б) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$ тенгламалар бўйича ечиладиган масала тузинг.

ТАКРОЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

369. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=0, \\ x+3y=5. \end{cases}$

370. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{35}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}+\sqrt{20}$;

2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{75}$.

6-§. Иккинчи даражали тенгламалар системасини ечиш

7-синфда ўтилган бирҳадлар ва кўпҳадлар тўғрисидаги баъзи маълумотларни ёдга туширамиз.

x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ ax^ky^p (бунда a – берилган ҳақиқий сон) бирҳаднинг ***даражаси*** деб $k+p$ сонга айтилади. Масалан, $2x^2y^3$ бирҳаднинг даражаси 5 га, $0{,}5xy^3$ нинг даражаси 4 га, $3x^3$ нинг даражаси эса 3 га тенг.

Кўпҳаднинг даражаси деб шу кўпҳад таркибидаги барча бирҳадлар даражаларининг энг каттасига айтилади. Масалан, $2xy^2+x^2+6y+20$ кўпҳаднинг даражаси 3 га, $2x^2y^2+x^3+5y^3$ кўпҳаднинг даражаси 4 га, $xy+5$ кўпҳаднинг даражаси эса 2 га тенг. Агар тенгламалар системасида бир тенгламанинг даражаси 2 га тенг, иккинчи тенгламанинг даражаси 2 дан ортиқ бўлмаса, у ҳолда бундай тенг-ламалар системаси ***иккинчи даражали*** тенгламалар системаси деб аталади. Масалан,

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 3 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x^2 + 3y^2 + xy = 4, \\ 2x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

– иккинчи даражали тенгламалар системалари. Тенгламалар сис-темасининг ечими деб, шу системанинг ҳар бир тенгламасини айниятга айлантирадиган x ва y нинг қийматларига айтилади. Масалан,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

система иккита ечимга эга: 1) $x_1=-1$, $y_1=-2$; 2) $x_2=2$, $y_2=1$. Бу сонлар берилган системанинг ечими эканига бевосита ўрнига қўйиб текшириш орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$1) \begin{cases} (-1)^2 + (-2)^2 = 5, \\ (-1) - (-2) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 5, \\ 1 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2^2 + 1^2 = 5, \\ 2 - 1 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 5, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Иккинчи даражали тенгламалар системасини ечишнинг бир неча усуллари мавжуд. Энди шу усулларни мисоллар ёрдамида кўрсатамиз.

1-мисол. *Бир ўзгарувчини иккинчиси орқали ифодалаш (ўрнига қўйиш) усули.*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

системани ечамиз.

Ечилиши. Иккинчи тенгламадаги y ни x орқали ифодалаймиз: $y=3x-1$, уни биринчи тенгламада ўрнига қўямиз. Бунда $x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0$ ёки $x^2-1=0$ ҳосил бўлади. Бу тенглама иккита илдизга эга: $x_1=-1$, $x_2=1$. Бунда y нинг мос қийматларини $y=3x-1$ тенг-ламадан топамиз: $y_1=-4$, $y_2=2$. Демак, $x_1=-1$, $y_1=-4$ ва $x_2=1$, $y_2=2$.

Баъзи ҳолларда, бир ўзгарувчини иккинчиси орқали ифодалаш ўрнига тенгламалар системасини бошқа усуллардан фойдаланиб ечиш қулайроқ. Шундай усуллардан бири Виет теоремасини қўллаш усулир. Ушбу усулга мисоллар келтирамиз.

2-мисол. Тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Ечилиши. Виет теоремасига кўра берилган системани қаноатлантирувчи x ва y сонлари $z^2-5z+6=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади. Бу тенгламанинг илдизлари эса $z_1=2$, $z_2=3$ ва берилган системада x билан y тенг ҳуқуқли бўлгани учун, уларни z_1 ва z_2 нинг исталганига тенглаштириш мумкин. Демак, система иккита ечимга эга: $x_1=2$, $y_1=3$ ва $x_2=3$, $y_2=2$.

3-мисол. Тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10. \end{cases}$$

Ечилиши. Берилган системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = -10. \end{cases}$$

Бунда x ва $(-y)$ сонлари $z^2-7z+10=0$ тенгламанинг илдизлари бўлади. Демак, тенгламанинг жавоби қуйидагича: $x_1=2$, $y1=-5$; $x_2=5$, $y_2=-2$

4-мисол. Тенгламалар системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Ечилиши.*1-усул.* Бу системадаги иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, уни биринчисига кўшсак, $(x+y)^2=36$ ёки $x+y=\pm6$ тенгламаларни оламиз. Бунда берилган тенгламалар системасини қуйидаги иккита системага ажратиш мумкин:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$

Иккала система ҳам 2-мисолдаги система каби ечилади.

Демак, масаланинг 4 та ечими бор: $x_1=-4$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=4$.

2-усул. $x2=uy2=v$ деб белгиласак, у ҳолда системани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} u + v = 20, \\ uv = 64. \end{cases}$$

Бундан 2-мисолда кўрсатилган усул бўйича $u_1=16$, яъни яъни $x_1=\pm4$; $v_1=4$, яъни $y_1=\pm2$, $u_2=4$, яъни $x_2=\pm2$, $v_2=16$, яъни $y_2=\pm4$ илдизларга эга бўламиз.

5-мисол. Энди қуйидаги системани ечамиз:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

Ечилиши. Системадаги биринчи тенгламани 5 га, иккинчисини эса 3 га кўпайтириб, уларнинг иккинчисидан биринчисини айирсак, $x^2+2xy-8y^2=0$ тенгламалар ҳосил бўлади. $y=0$ қиймат системанинт ечими

бўла олмайди, Шунинг учун $y \square 0$ деб олиб, бу тенгламани y^2 га бўлсак, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 8 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бундан $\frac{x}{y} \square z$ белгилашни киритиб, $z^2+2z-8=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари $z_1=-4$, $z_2=2$ бўлгани учун, $\frac{x}{y} = -4$, $\frac{x}{y} = 2$ ёки $x=4y$, $x=2y$ тенгликларни ҳосил киламиз. Бунда берилган система қуйидагича иккита системага ажралади:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = -4y \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Бу системаларии 1-мисол каби ечадиган бўлсак, 4 та ечимга эга бўламиз:

$$x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}}, x_{3,4} = \pm2, y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}, y_{3,4} = \pm1.$$

МИСОЛЛАР

А

371. Кўпҳадлар ва тенгламаларнинг даражасини аниқланг:

1) $4xy+xy^2-5x^2+y$; 2) $8x^4y+5x^2y^3-11$;

3) $2xy=x^3+y^3$; 4) $xy-x+y-1$;

5) $xy-x+y-1$;   6) $1-3x$;

7) $6x^6+2y^6+x^4y^4=0$;   8) $5xy^2+6x^2y=0$.

372–383-мисолларда берилган тенгламалар системасини ечинг:

372.

1) $\begin{cases} x^2-y^2=-21, \\ x+y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ x-y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+4y^2=34, \\ x+y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1, \\ x+y=2. \end{cases}$

373.

1) $\begin{cases} x+2y=13, \\ xy=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=2, \\ xy=12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y, \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$

374.

1) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64, \\ x-y=-7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0, \\ x-y+1=0. \end{cases}$

B

375.

1) $\begin{cases} 2x-3y=-18, \\ xy=-12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=-19, \\ xy=-6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=65, \\ xy=28. \end{cases}$

376.

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=3, \\ x+y=2. \end{cases}$

377.

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 2, \\ \dfrac{10x + y}{xy} = 3. \end{cases}$

378.

1) $\begin{cases} xy = 36, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

C

379.

1) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \dfrac{5}{6}xy + \dfrac{7}{8}y^2 = 18. \end{cases}$

380.

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy = 12, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

381.

1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 3xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2 + 3xy} - \dfrac{1}{y^2 - xy} = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

382.

1) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x - y} + \dfrac{x - 2y}{x + y} = 4, \\ x^2 + xy + y = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x - 9y}{x + y} + \dfrac{2x + y}{x - y} = 4, \\ x^2 - y^2 = 48. \end{cases}$

383.

1) $\begin{cases} x + y + xy = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2 - x^2y^2 = 36, \\ 2x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

384*.

1) $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

системалар a нинг қандай қийматларида фақат битта ечимга эга бўлади?

II БОБ ЮЗАСИДАН ҚЎШИМЧА МИСОЛЛАР

385. Тенгламани тўла квадратга ажратиш орқали ечинг:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2+3x-40=0$; 3) $5x^2+3x-2=0$;

4) $4x^2-3x-22=0$; 5) $x^2+px+q=0$; 6) $ax^2+bx+c=0$.

386. Тенгламани ечинг:

1) $9x^2-4x-2=0$; 2) $7x^2+18x+5=0$;

3) $x^2 - 3\sqrt{2x} + 4 = 0$; 4) $x^2 + 2\left(1 + \sqrt{8}\right)x + 8\sqrt{2} = 0$;

5) $x^2 - 3x - 5 - \sqrt{7} = 0$; 6) $x^2-13x+4=0$.

387. Квадрат тенгламага келтириб ечинг:

1) $(3x-2)(x-3)=20$; 2) $(x+2)(4x-5)=-3$;

3) $\frac{(x-1)^2}{5} - \frac{x+4}{6} = \frac{2x-2}{3}$; 4) $\frac{x^2+3x}{5} = \frac{10-x}{2} - \frac{3x^2+8x}{14}$.

388. Тенгламани ечинг:

1) $x^2-cx-2c^2=0$; 2) $x^2+5ax-6a^2=0$;

3) $ax^2-(a+1)x+1=0$; 4) $(a+1)x^2-2x+1-a=0$.

389. Қуйидаги тengликларда a ни b орқали ифодаланг:

1) $a^2-3ab-4b^2=0$; 2) $21x^2-4ab-b^2=0$;

3) $\left(\frac{a+2b}{a-b}\right)^2 - 2\left(\frac{a+2b}{a-b}\right) = 3$; 4) $\frac{a-2b}{3a+b} + 3 \cdot \frac{3a+b}{a-2b} = 4$.

390. Икки сон кўпайтмасининг улар квадратларининг айирмасига нисбати 0,375 га тенг. Шу сонларнинг нисбатини топинг.

391. Агар икки сон квадратларининг йиғиндиси улар айирмасининг чала квадратларидан 2 марта ортиқ бўлса, шу сонлар нисбатини топинг,

392. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{x^2}{|x|} - 7x + 12 = 0;$ 2) $x|x| + 7x + 12 = 0;$

3) $|x + 3| = |x^2 + x - 5|;$ 4) $|3x^2 - 6x - 1| = 2|3 - x|.$

393. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{30}{x^2 - 1} + \frac{7 - 18x}{x^3 + 1} = \frac{13}{x^2 - x + 1};$ 2) $\frac{1}{1 - x} - \frac{2}{x^2 + x + 1} = \frac{1x + 1}{1 - x^3};$

3) $\frac{2x - 7}{x^2 - 9x + 14} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 1};$

4) $\frac{2x + 7}{x^2 + 5x - 6} + \frac{3}{x^2 + 9x + 18} = \frac{1}{x + 3}.$

394. x_1 ва x_2 сонлари тенгламанинг илдизлари бўлсин. У ҳолда илдизлари: 1) $x_1 - 2$, $x_2 - 2$; 2) $2x_1 + 3$, $2x_2 + 3$; 3) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$; 4) $x_1 \square \frac{1}{x_2}$, $x_2 \square \frac{1}{x_1}$ сонларига тенг бўладиган квадрат тенглама тузинг.

395. 1) a нинг қандай қийматларида $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ тенгламанинг илдизлари квадратларининг йиғиндиси энг кичик қийматни қабул қилади? 2) анинг шундай энг катта бутун қийматини топингки, бунда $x^2 + x - a = 0$ тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмасин.

396. k нинг қандай қийматларида $x^2 + 2(k - 3)x + (k^2 - 7k + 12) = 0$ ва $x^2 - (k^2 - 5k + 6)x = 0$ тенгламалар тенг кучли бўлади?

397. Шаҳар аҳолисининг сони 2 йилда 20000 дан 22050 га қадар ўсди. Шу шаҳар аҳолиси сонининг йиллик ўсиш процентини топинг.

398. Мактаб битирувчилари бир-бирларига фотосуратларини беришди. Агар фотосуратлар сони жами 992 та бўлса, мактаб битирувчилари сони нечта?

399. x нинг қандай қийматида:

1) $\dfrac{6}{x \square 1}$ ва $\dfrac{x}{x \square 2}$ касрларнинг ииғиндиси;

2) $\dfrac{x+12}{x-4}$ ва $\dfrac{x}{x \square 4}$ касрларнинг айирмаси уларнинг кўпайтмасига тенг бўлади?

400. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} |x| + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$

III БОБ . КВАДРАТ ФУНКЦИЯ

1-§. Квадрат функция ва унинг графиги

$$y=ax^2+bx+c, \ (a \square 0) \qquad (1)$$

функция ***квадрат функция*** деб аталади. Бунда a, b, c – ҳақиқий сонлар. (1) формулада x ўзгарувчи ҳар қандай ҳақиқий қийматларни қабул қилиши мумкин. Демак, бу функция барча сонлар ўқида аниқланган, яъни функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\square, +\square)$ тўпламдан иборат. Квадрат учҳаднинг тўла квадратини ажратиб олиш орқали (1) функцияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \left(D = b^2 - 4ac\right). \qquad (2)$$

Бу формула ихчамроқ бўлиши учун $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{D}{4a}$, деб белгилаймиз. У ҳолда (2)

$$y=a(x-m)^2+n \qquad (3)$$

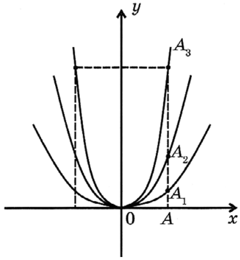
кўринишга келади. Демак, (1) квадрат функцияни текшириш учун (3) формулада берилган функцияни текшириш етарли. Бу функциянинг графигини ясаш учун $y=ax^2$ функциянинг графигини ясашни билиш шарт. Сиз уни 7-синфда ясаб ўргангансиз. Энди шу материалларни қискача такрорлаймиз.

1.1. $y=ax^2$ функциянинг графиги

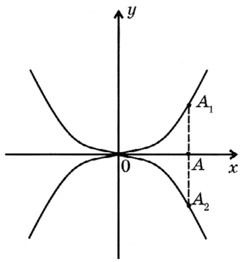
Агар $a=1$ бўлса, у ҳолда $y=x^2$ функцияни ҳосил қиламиз. Бу функциянинг графиги парабола бўлади. Энди $a>1, 0<a<1$ ва $a<0$ бўлган ҳолларни алоҳида-алоҳида қараб чиқамиз.

1) $a>0$ бўлсин. У ҳолда x нинг ҳар бир қийматида $y=ax^2$ функциянинг қиймати $y=x^2$ функциянинг мос қийматларидан a марта ортиқ бўлади. Шунинг учун $y=ax^2$ функциянинг графиги $y=x^2$ функция графигини Oy ўқига нисбатан параллель a марта чўзиш орқали ҳосил қилинади. Масалан,14-расмда $y=2x^2$ ва $y=x^2$ функцияларнинг графиклари тасвирланган. $x=2$ бўлганда биринчи функциянинг қиймати 8 га, иккинчи функциянинг қиймати эса 4 га тенг, яъни $y=2x^2$ ва $y=x^2$ нинг мос қийматларини таққослаганда Oy ўқига нисбатан 2 марта чўзилган.

2) $0<a<1$ бўлсин. Бу ҳолда $y=ax^2$ функциянинг графиги $y=x^2$ функция графигидан мос нуқталарнинг ординаталарини Oy ўқига параллель $\frac{1}{a}$ марта ***қисиш*** орқали олинади. 14-расмда $y=x^2$, $y=2x^2$ ва $y \square \frac{x^2}{2}$ функцияларнинг графиклари тасвирланган. Бунда $AA_1=0{,}5\ AA_2$ ва $AA_3 = 2AA_2$ эканини кўрамиз.



14-расм



15-расм

3) а<0 бўлсин. –а>0 бўлгани учун, $y=-ax^2$ функция графигини ясай оламиз. x нинг ҳар бир қийматида $y=ax^2$ ва $y=-ax^2$ функциялар қийматларининг модуллари тенг, ишоралари қарама-қарши бўлгани учун, уларнинг графиклари Ox ўқига нисбатан симметрик бўлади. 15-расмда абсциссанинг ҳар бир A нуқтасида $AA_1=AA_2$ бўлишини кўрамиз. Демак, агар $a<0$ бўлса, параболанинг тармоқлари пастга қараб, $a>0$ бўлганда эса параболанинг тармоқлари юқорига қараб йўналади.

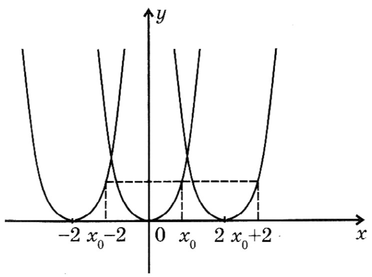
1.2. $y=a(x-m)^2$ функциянинг графиги

Кўргазмали бўлиши учун $y=2(x+2)^2$, $y=2(x-2)^2$ функцияларни $y=2x^2$ функция билан таққослаймиз. Аргументнинг $x=x_0$ қийматида $y=2x^2$ функция $2x_0^2$ га тенг қиймат қабул қилади. $y=2(x+2)^2$, $y=2(x-2)^2$ функциялар аниқ шу қийматни қабул қилиши учун аргументнинг қиймати мос равишда $x=x_0-2$, $x=x_0+2$ бўлиши керак. Бунда у$=2(x+2)^2$ функциянинг графигшш ясаш учун $y=2x^2$ функциянинг графигини Ox ўқи бўйича ўнгга қараб 2 бирликка силжитиш кифоя (16-расм).

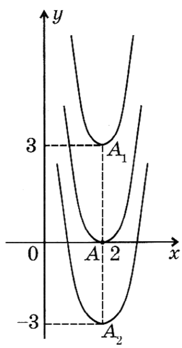
Умумий ҳолда, $y=a(x-m)^2$ функциянинг графигини ясаш учун $y=ax^2$ функциянинг графигини $m>0$ бўлганда Ox ўқи бўйича m бирлик ўнгга, $m<0$ бўлганда эса Ox ўқи бўйича $|m|$ бирликка чапга параллель кўчириш керак.

1.3. $y=a(x-m)^2+n$ функциянинг графиги

Агар $n>0$ бўлса, у ҳолда ҳар бир x учун $y=a(x-m)^2+n$ функциянинг қиймати $a(x-m)^2+n$ функциянинг мос қийматидан n бирликка ортиқ бўлади. $n<0$ бўлганда $a(x-m)^2+n$ функциянинг ҳар бир x учун олинган қиймати $a(x-m)^2$ функциянинг мос қийматидан $|n|$ бирликка кам бўлади. Шундай экан, $a(x-m)^2+n$ функциянинг графигини ясаш учун у$=a(x-m)^2+n$ бўлганда $n>0$ функциянинг графигини n бирликка Oy ўқи бўйлаб юқорига, $n<0$ бўлганда $|n|$ эса шу функция графигини бирликка Oy ўқи бўйлаб пастга параллель кўчириш керак. 17-расмда мисол тариқасида $y=2(x-2)^2+3$, $y=2(x-2)^2$ ва $y=2(x-2)^2-3$ функцияларнинг графиклари тасвирланган. Бу функциялар мос $A_1(2;3)$, $A(2;0)$ ва $A_2(2;-3)$ нуқталарда энг кичик қийматларни қабул қилади ва бу параболалар $x=2$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир. A_1,A,A_2 нуқталар мос келувчи параболаларнинг ***учлари*** деб, $x=2$ тўғри чизиқ уларнинг **ўқи** деб аталади.



16-расм



17-расм

Умумий ҳолда, $y=a(x-m)^2$ функциянинг графиги парабола бўлади. Бу параболанинг учи $A(m;n)$ нуқтада, ўқи $x=m$ тенглама билан берилади. Шу билан бирга, агар $a>0$ бўлса, параболанинг тармоқлари юқорига, агар $a<0$ бўлса, параболанинг тармоқлари пастга йўналган бўлади. Маълумки, $y=ax^2+bx+c$ квадрат учҳад орқали берилган функцияни $y=a(x-m)^2+n$ кўринишда ёзиш мумкин:

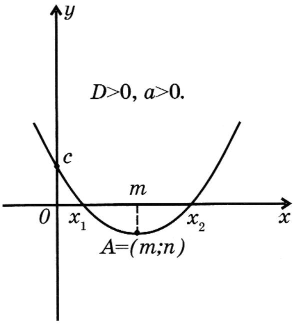
$\left(m=-\dfrac{b}{2a}, n=-\dfrac{D}{4a}\right)$. Унинг учи $A\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$ нуқтада, ўқи $x=-\dfrac{b}{2a}$ тўғри чизиқ бўлади. Агар $a>0$ бўлса, бу параболанинг тармоқлари юқорига, агар $a<0$ бўлса, параболанинг тармоқлари пастга йўналган бўлади.

Иккинчидан, агар $D=b^2-4ac>0$ бўлса, у ҳолда квадрат учҳаднинг турли иккита x_1, x_2 ҳақиқий илдизи мавжуд. Бу илдизлар $ax^2+bx+c=0$ тенгламани қаноатлантиргани учун, парабола Ox ўқи билан $B(x_1;0)$, $C(x_2;0)$ нуқталарда кесишади. Oy $(x=0)$ ўқи билан $D(0;c)$ нуқтада кесишади (18 ва 19-расмлар).

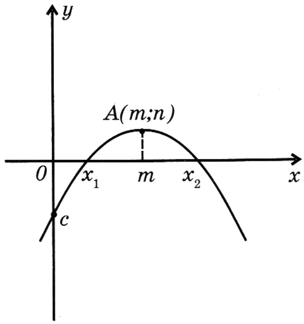
Агар $D=0$ бўлса, квадрат учҳад ўзаро тенг иккита илдизга эга бўлади: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. Бунда парабола Ox ўқи биланфакат битта умумий нуқтага эга, яъни парабола Ox ўқига $A\left(-\dfrac{b}{2a};0\right)$ нуқтада уринади (20- ва 21-расмлар).

Агар $D<0$ бўлса, у ҳолда $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас, яъни парабола Ox ўқи билан кесишмайди. Шунинг учун $a>0$ бўлганда параболанинг учи Ox ўқидан юқорида, $a<0$ бўлганда эса Ox ўқидан пастда жойлашади (22–23-расмлар).

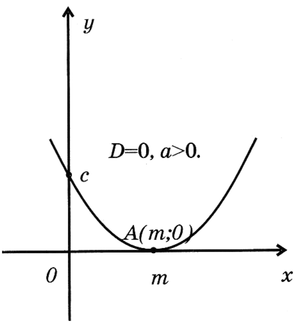
Демак, $y=ax^2+bx+c$ функциянинг графигини ясаш учун, уни $y=a(x-m)^2+n$, $\left(m=-\dfrac{b}{2a}, n=-\dfrac{D}{4a}\right)$ кўринишга келтириб, $y=ax^2$ функциянинг графигини Ox ўқи билан, $m>0$ бўлса, унга, агар $m<0$ бўлса, у то-



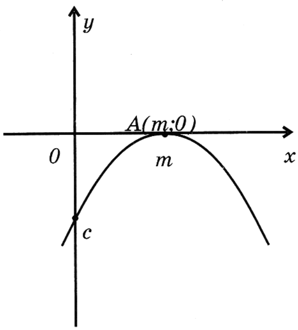
18-расм



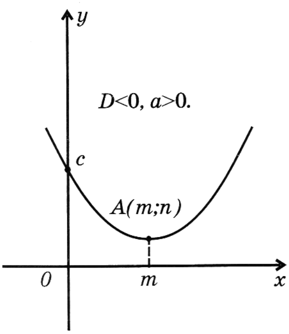
19-расм



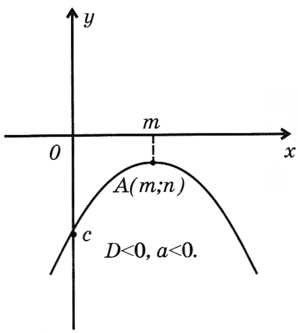
20-расм



21-расм



22-расм



23-расм

мон $|m|$ бирлик силжитиб, Oy ўқи бўйлаб $n>0$ бўлса, юқори, $n<0$ бўлса, қуйи томон $|n|$ бирлик силжитиш керак.

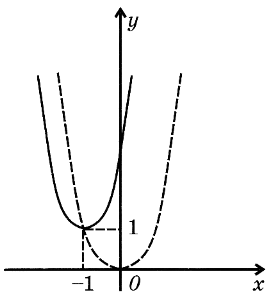
1-мисол. $y=2x^2+4x+3$. Функциянинг графигини ясаш керак.

Ечилиши. $y=2x^2+4x+3=2(x^2+2x+1=2(x+1)^2+1$. Бунда $y=2x^2$ функция графигини чапга бир бирликка ва юқорига бир бирликка параллель кўчириш керак.

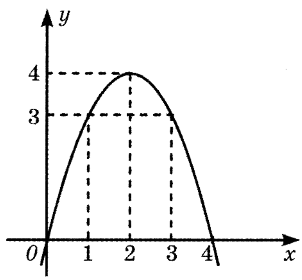
Эслатма: Квадрат функциянинг графигини аниқроқ ясаш учун унинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини ва графикка тегишли бир нечта нуқталарини топиш керак.

2-мисол. $y=x(4-x)$ функциянинг графигини ясаш керак.

Ечилиши. $y=x(4-x)=4x-x^2=-(x-2)^2+4$. Бунда $a=1<0$, $m=2$, $n=4$. Демак, параболанинг тармоқлари пастга йўналади, учи $A(2;4)$ нуқтада, симметрия ўқи $x=2$ тўғри чизиқ бўлади. $x(4-x)=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1=0$, $x_2=4$ бўлгани учун, бу парабола Ox ўқини (0,0) ва (4,0) нуқталарда кесиб ўтади. Шунингдек, $x=1$ бўлганда, $y=3(4-3)=3$ бўлади, яъни (1;3) ва (3;3) нуқталар функция графигида ётади (25-расм).



24-расм



25-расм

?

1. Қандай функция квадрат функция деб аталади?
2. $a \square 1$ бўлганда $y=ax^2$ функциянинг графиги қандай ясалади?
3. $y=a(x-m)^2$ функциянинг графиги $y=ax^2$ функция графигига нисбатан қандай жойлашади?
4. $y=a(x-m)^2+n$ функциянинг графигини қандай ясаш мумкин?

МИСОЛЛАР

A

401. $y=3x^2-x-2$ функциянинг графиги $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 8)$, $C(0;\ 3)$ ва $D(1;\ 4)$ нуқталар орқали ўтадими?

402. $y=x^2+2x-2$ функция графигига тегишли бўлган бир нечта нуқталар координаталарини топинг.

403. Абсциссалари: 1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1,5; 5) 2 га тенг ва $y=2x^2-x-1$ функция графигига тегишли нуқталарнинг мос ординаталарини топинг.

404. Ординаталари: 1) -4; 2) $-2{,}5$; 3) 0; 4)1; 5) 3га тенг ва $y=-x^2+x+2$ функция графигига тегишли нуқталар мавжудми? Агар мавжуд бўлса, уларнинг координаталарини топинг.

405. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

1) $y=-2x^2+1$; 2) $y=(x-2)^2+3$; 3) $y=-2(x+1{,}5)^2+1$;

4) $y=-3x^2+8x+3$; 5) $y=0{,}5x^2-2$; 6) $y=(x+1)^2-2$.

406. Қуйидаги функциялар билан берилган параболанинг учлари билан симметрия ўқларини топиб, уларнинг графикларини ясанг:

1) $y=3(x-2)^2-2$; 2) $y=3-2x-x^2$; 3)$y=x^2+12x+22$;

4) $y=-(x+1)^2+3$; 5) $y=2x^2-2x-4$; 6) $y=x(1-x)$;

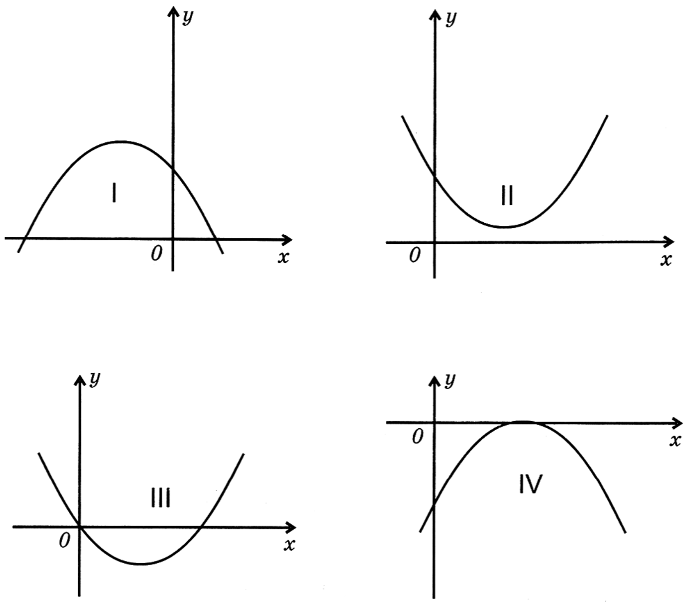
B

407. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=3x(x+2)$; 2) $y=(3-x)(x-4)$;

3) $y=(x^2-4)^2-(x^2+1)$; 4) $y=(x-1)^2-4(x-1)+3$.

408. 26-расмда $y=ax^2+bx+c$ функциянинг турли ҳоллардаги графиклари тасвирланган. Расмдаги ҳар бир график учун a, b ва c коэффицентларнинг ишораларини аниқланг.



26-расм

409. 1) $A(-1;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-4)$; 2) $A(3;0)$, $B(1;0)$, $C(0;3)$; 3) $A(-5;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;-5)$ нуқталарнинг иккитаси Ox ўқида, биттаси Oy ўқида ётади. Графиклари берилган шу учта нуқта орқали ўтадиган квадрат функция мавжудми? Мавжуд бўлса, у ягона бўладими?

410. 1) $A(0;1)$, $B(1;3)$; 2) $A(8;1)$, $B(5;-2)$; 3) $A(2;4)$, $B(0;0)$ нуқталар берилган. Учи A нуқтада бўлган ва графиги B нуқта орқали ўтадиган квадрат функция мавжудми? Мавжуд бўлса, у ягона бўладими?

411. p нинг барча шундай қийматларини топингки, бунда $x^2+2px+1$ квадрат учҳад ҳар қандай x учун фақат мусбат қийматлар қабул қилсин.

412. Агар $y=2x^2-(a+2)x+a$ функциянинг графиги Ox ўқини x_1 ва x_2 нуқталарда кесиб ўтса ва $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$ тенглик бажарилса, a нинг қийматини топиб, шу функциянинг графигини ясанг.

C

413. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=|2-x^2|$; 2) $y=|x^2+x-2|$; 3) $y=6x^2-7|x|+2$;
4) $y=|2x^2-1|$; 5) $y=2x^2-2|x|-4$; 6) $y=2x^2-5|x|-3$.

414. p нинг қандай қийматларида $y=x^2+4x+p$ параболанинг учи билан координаталар боши орасидаги масофа 4 га тенг бўлади?

415. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\dfrac{x^3}{\left(\sqrt{x}\right)^2}-1$; 2) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2}}-1$.

416. a нинг қандай қийматида $y=x^2-7x+a$ ва $y=-3x^2+5x-6$ функциялар графикларининг фақат битта умумий нуқтаси мавжуд? Шу нуқтанинг координаталарини топинг.

417. a, b ва c сонларининг ҳар қандай қийматларида $y=(x-a)(x-b)-c^2$ функциянинг графиги ва Ox ўқи камида битта умумий нуқтага эга эканини исботланг.

418*. Агар бирор u сони учун, $af(u)<0$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат учҳаднинг турли иккита илдизи мавжуд бўлиб, бу илдизларнинг бири u дан кичик, иккинчиси эса u дан катта бўлишини исботланг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

419. $y \square \dfrac{2}{x}$ функциянинг графигини ясанг. Графикнинг $y=2x$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини топинг.

420. Агар $3<a<4$ ва $4<b<5$ бўлса, у ҳолда: 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a\cdot b$; 4) $\dfrac{a}{b}$ ифодани баҳоланг.

2-§. Функция графигини шакл алмаштириш

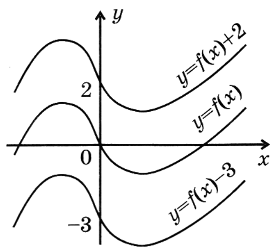
2.1. Функция графигини параллель кўчириш

1-параграфда $y=ax^2$ функциянинг графиги бўйича $y=a(x-m)2+n$ функциянинг графигини ясаш усулини кўрсатдик. Шу каби, ҳар қандай $y=f(x)$ функциянинг графиги бўйича $y=f(x)+b$ функциянинг графигини ясаш мумкинлигини кўриб чиқамиз. Функция графигини бундай алмаштириш параллель кўчириш деб аталади.

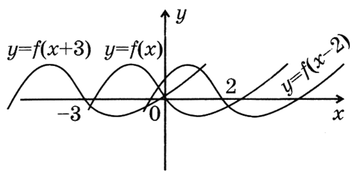
1. $y=f(x)+b$ функциянинг графиги. $y=f(x)$ функция билан $y=f(x)+b$ функциянинг қандайдир бир $x=x_0$ нуқтадаги қийматлари бир-биридан фақат b сонига фарқ қилади. Бундан $y=f(x)+b$ функциянинг графигини ясаш учун $y=f(x)$ функциянинг графигини Oy ўқи бўйича $|b|$ катталикка: а) $b>0$ бўлганда юқорига; б) $b<0$ бўлганда пастга параллель кўчириш керак. Масалан, 27-расмда $b=2$ ва $b=-3$ бўлгандаги $y=f(x)$, $y=f(x)+2$ ва $y=f(x)-3$ функцияларнинг графиклари тасвирланган.

2. $y=f(x-a)$ функциянинг графиги. $y=f(x-a)$ функция $y=f(x)$ функциянинг $x=x_0$ нуқтадаги қийматини x_0+a нуқтада қабул қилади. Демак, $f(x-a)$ функциянинг графиги $f(x)$ функциянинг графигини $a>0$ бўлганда Ox ўқи бўйича ўнгга қараб $|a|$ бирликка, $a<0$ бўлганда чапга томон $|a|$ бирликка параллель кўчириш орқали ҳосил қилинади. Масалан, 28-расмда $a=2$ ва $a=-3$ бўлганда $y=f(x)$, $y=f(x-2)$ ва $y=f(x+3)$функцияларнинг графиклари тасвирланган.

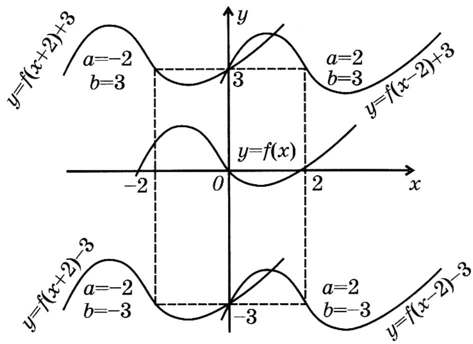
3. $y=f(x-a)+b$ функциянинг графиги. Бу функциянинг графигини ясаш учун 1- ва 2-пунктлардаги маълумотлардан фойдаланиб, $y=f(x)$ функциянинг графигини: а) $a>0$, $b>0$ бўлганда Oy ўқи бўйича юқорига $|b|$ бирликка кўтариб, сўнгра Ox ўқи бўйича a бирликка ўнгга қараб параллель кўчириш керак; б) $a>0$, $b<0$ бўлганда Oy ўқи бўйича пастга $|b|$ бирликка, кейин Ox ўқи бўйича $|b|$ бирликка ўнгга қараб параллель кўчириш керак; в) $a<0$, $b<0$ бўлганда Oy ўқи бўйича



27-расм



28-расм



28-расм

пастга $|b|$ бирликка, Ox ўқи бўйича $|a|$ бирликка чапга қараб параллель кўчириш керак; г) а<0, b>0 бўлганда Oy ўқи бўйича юқорига b бирликка, Ox ўқи бўйича чапга $|a|$ бирликка параллель кўчириш керак.

Масалан, 29-расмда $y=f(x)$, $y=f(x-2)+3$, $y=f(x-2)-3$, $y=f(x-+2)-3$ ва $y=f(x+2)+3$ функциялар графиклари тасвирланган.

2.2. Каср-чизиқли функциянинг графиги

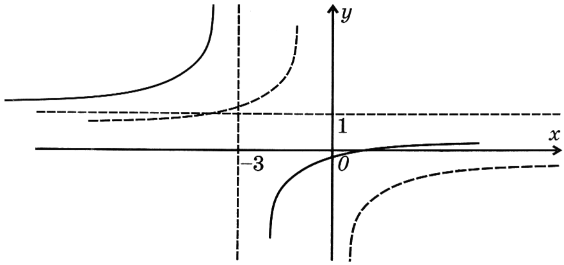
$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\left(c\neq 0,\quad ad-bc\neq 0\right)$$

функция ***каср-чизиқли функция*** деб аталади. Каср-чизиқли функция x нинг $\square\frac{d}{c}$ қийматидан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган. Энди каср-чизиқли функциянинг графиги $y\,\square\frac{k}{x}$ тескари пропорционаллик функцияси графигини Ox ва Oy ўқларига нисбатан параллель кўчириш орқали ясалишини мисол ёрдамида кўрсатамиз.

1-мисол. $y=\frac{x-1}{x+3}$ функциянинг графигини ясаш керак.

Ечилиши. $\frac{x-1}{x+3}=\frac{x+3-4}{x+3}=\frac{4}{x+3}+1$ бўлгани учун, берилган функцияни $y=-\frac{4}{x+3}+1$ кўринишида ёзамиз. У ҳолда бу функциянинг графигини $y=-\frac{4}{x}$

функциянинг графигини Oy ўқи бўйича юқорига бир бирликка ва Ox ўқи бўйича чапга 3 бирликка параллель кўчириш орқали ясаймиз (30-расм). $x=-3$, $y=1$ тўғри чизиқлар берилган функциянинг асимптоталаридир.



30-расм

Эслатма. $y = \frac{k}{x}$ функциянинг асимптоталари координата ўқлари бўлгани учун, $y = \frac{k}{x+m} + n$ функциянинг асимптоталари $x=-m$ ва $y=n$ тўғри чизиқлари бўлади. Яъни тес-кари пропорционаллик графигини параллель кўчириш мобайнида координата ўқларига мос келадиган тўғри чизиқлар каср-чизиқли функция графигининг асимптоталари бўлади. Тескари пропорционаллик функциясининг, умуман, каср-чизиқли функциянинг графиги ***гипербола*** деб аталади.

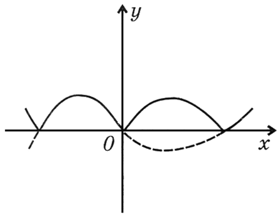
2.3.* Модул белгиси қатнашган функциялар графиги

Бу параграфда $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$ ва $y=|f(|x|)|$ функцияларнинг графикларини $y=f(x)$ функциянинг графиги бўйича ясашни ўрганамиз.

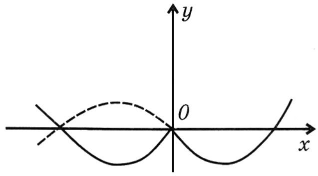
1. $y=|f(x)|$ функциянинг графиги. Албатта, $y=f(x)$ ва $y=|f(|x|)|$ функцияларнинг аниқланиш соҳаси бир хил бўлади. Модул белгисининг таърифига кўра

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{агар, } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{агар, } f(x) < 0, \end{cases}$$

бўлгани учун, $f(x) \geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар тўпламида $y=f(x)$ ва $y=|f(x)|$ функцияларнинг графиклари устма-уст тушади. $f(x)<0$ бўлган нуқталарда эса $y=|f(x)|=-f(x)$ тенглик бажарилгани учун, $y=|f(x)|$ ва $y=f(x)$ функцияларнинг графиклари Ox ўқига нисбатан симметрик бўлади.



31-расм



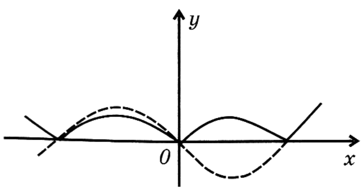
32-расм

Яъни, *$y=f(x)$ функция графигининг Ох ўқидан пастда жойлашган қисмларини шу ўққа нисбатан юқорига симметрик равшида алмаштириш етарли* (31-расм).

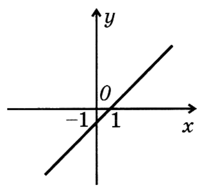
2. $y=f(|x|)$ функциянинг графиги. Бу функциянинг графигини ясаш учун x нинг барча номанфий қийматлари ($x\geqslant 0$, $|x|=x$) тўпламида $f(|x|)=y=f(x)$ тенглик бажарилишини таъкидлаш лозим. Бундан *Ох* ўқининг ўнг қисмида $y=f(|x|)$ ва $y=f(x)$ функцияларнинг графиклари устма-уст тушади. $x<0$ ($|x|=-x>0$) бўлганда абсциссалар ўқининг чап қисмидаги графиги унинг ўнг қисмидаги графигини *Оу* ўқига нисбатан симметрик равишда такрорлайди. Буни $f(|x|)=y=f(|-x|)$ тенглик билан (x; $f(|x|)$) ва ($-x$; $f(|-x|)$) нуқталар *Оу* ўққа нисбатан симметрик жойлашганлигидан кўриш мумкин. Демак, x; $f(|x|)$ ***функциянинг графигини ясаш учун $x\geqslant 0$ бўлгандаги $y=f(x)$ функциянинг графигини ясаб, уни Оу ўқига нисбатан симметрик унинг иккинчи томонига алмаштириш кифоя*** (32-расм).

3. $y=|f(|x|)|$ функциянинг графиги. Бу функциянинг графигини ясаш учун, аввалги пунктдаги маълумотлардан фойдаланиб, аввал $y=f(|x|)$ функциянинг графигини ясаб, унинг абсциссалар ўқидан пастда жойлашган қисмларини *Ох* ўқига нисбатан симметрик тарзда юқорига силжитиш етарли (33-расм).

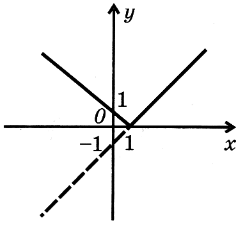
1-мисол. а) $y=x-1$; б) $y=|x-1|$; в) $y=|x|-1$; г) $y=||x|-1|$ функцияларнинг графикларини ясаш керак.



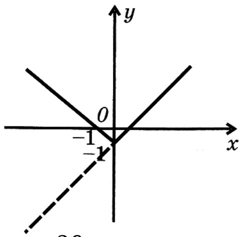
33-расм



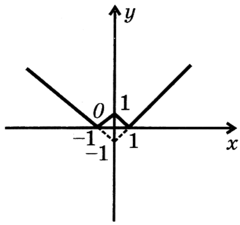
34-расм



35-расм



36-расм

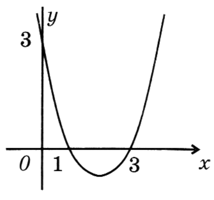


37-расм

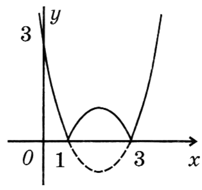
Ечилиши. Бу функцияларнинг ҳар бири барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган. $y=x-1$ функциянинг графигига асосланиб, юқорида кўрсатилган усуллар бўйича, бошқа функцияларнинг графикларини ясаймиз. а) $y=x-1$ функциянинг графиги 34-расмда кўрсатилган тўғри чизиқдир. б) функциянинг графигини ясаш учун $y=|x-1|$ функция графигининг $y=x-1$ абсциссалар ўқидан пастда жойлашган қисмини Ox ўқига нисбатан симметрик равишда юқорига алмаштириш кифоя (35-расм). в) $y=|x|-1$ функциянинг графигини ясаш учун $y=x-1$ функция графигининг Ox ўқидан ўнгда жойлашган қисмини шу ўққа нисбатан симметрик равишда унинг чап қисмига алмаштириш кифоя (36-расм). г) $y=||x|-1|$ функциянинг графигини ясаш учун, $y=|x|-1$ функция графигининг Ox ўқидан пастда жойлашган қисмини шу ўққа нисбатан симметрик равишда юқорига алмаштириш керак (37-расм).

2-мисол. а) $y=x^2-4x+3$; б) $y=|x^2-4x+3|$; в) $y=x^2-4|x|+3$; г) $y=|x^2-4|x|+3|$ функциянинг графикларини ясаш керак.

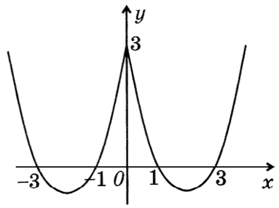
Ечилиши. а) $y=x^2-4x+3$ функцияни $y=(x-2)^2-1$ кўринишда ёзсак, бу функциялар графигининг учи $(2;-1)$ нуқтада бўлган парабола эканини кўрамиз (38-расм). б) $y=|x^2-4x+3|$ функциянинг графиги 39-расмда тасвирланган. в) $|x^2|=x^2$ бўлгани учун, $y=x^2-4|x|+3$ функцияни $y=|x|^2-4|x|+3$ кўринишида ёзиш мумкин.



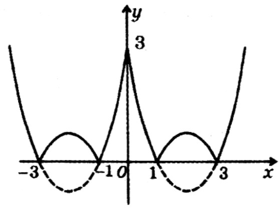
38-расм



39-расм



40-расм



41-расм

Бунда $y=f(|x|)$ функциянинг графигини ясаш усулини қўллаш мумкин. Бу функция графиги 40-расмда тасвирланган. г) $y=|x^2-4|x|+3|$ функциянинг графиги 41-расмда кўрсатилган.

?

1. Функциянинг графигини параллель кўчириш бўйича алмаштириш деганда нимани тушунасиз?
2. Қандай функция каср-чизиқли функция деб аталади?
3. Каср-чизиқли функциянинг графиги қандай ясалади?
4. $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$ ва $y=|f(|x|)|$ функцияларнинг графиклари қандай ясалади?

МИСОЛЛАР

А

421. (Оғзаки.) $y=f(x)$ функция графигига нисбатан қуйидаги функцияларнинг графиклари қандай жойлашган:

1) $y=f(x-1)$; 2) $y=f(x+3)$; 3) $y=f(x)-2$;
4) $y=f(x)+1$; 5) $y=f(x-2)+1$; 6) $y=f(x+1)-2$;
7) $y=f(x+3)+2$; 8) $y=f(x-1)-2$; 9) $y=f(x-2)+3$.

422. $y=0,5x^2$ параболадан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

1) $y=0,5(x-1)^2+2$; 2) $y=0,5x^2+4)$;
3) $y=0,5(x+2,5)^2-3$; 4) $y=0,5(x+4)^2$.

423. $y=2x^2$ параболадан фойдаланиб, берилган функцияларнинг графикларини ясанг:

1) $y=-2x^2$; 2) $y=2x^2-1$; 3) $y=-2(x-4)^2-4$; 4) $y=-2(x+3)^2$.

424. 1) $y=3(x-5)^2-2$; 2) $y=2x^2-1$; 3) $y=-2(x+1)^2+3$; 4) $y=(x-5)^2$ параболанинг учи билан симметрия ўқини аниқлаб, унинг графигини схематик равишда ясанг.

425. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=\frac{x^2}{2}-4x+6$; 3) $y=-2x^2-5x-2$;

4) $y=-x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

426. Электр занжиридан ток ўтиб турибди. Реостат ёрдамида занжирнинг қаршилиги орттирилди. Бунда: 1) ток кучи; 2) кучланиш ўзгарадими?

427. ABC учбурчакнинг B учи диаметри AC асоси билан устма-уст бўлган айлана бўйлаб силжийди. Бунда учбурчакнинг қайси элементлари ўзгармас бўлади ва қайси элементлари ўзгариб туради?

428. $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ функция учун: 1) $f(0)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-2)$; 4) $f(\mathrm{a})$; 5) $f(\frac{1}{a})$ қийматларни топинг.

429. $f(x)=x^3-10$ функцияучун: 1) $f(5)$; 2) $f(4)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$; 5) $f(a-1)$ қийматларни топинг.

430. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\frac{1}{x}-3$; 2) $y=\frac{1}{x-1}$;

3) $y=\frac{1}{x}-3$; 4) $y=2-\frac{2}{x-3}$.

B

431. 1) $f(x)=x(x+4)$; 2) $f(x)=\frac{x+1}{5-x}$ функция учун $f(x)=0$ тенгликни қаноатлантирувчи x нинг қийматини топинг.

432. $f(x)=\sqrt{x}$ учун $f(a)$ ва $f\left(\frac{1}{a}\right)$ ифодалар a нинг қандай қийматларида аниқланган?

433. $f(x)=\frac{1}{\left(x^2-2\right)}$ учун $f(a)$ ва $f\left(\frac{1}{a}\right)$ ифодалар a нинг қандай қийматларида аниқланган?

434. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{2}{\sqrt{x-4}}$; 2) $F(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$;

3) $h(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$; 3) $D(x) = \sqrt{(1-x)(1+5x)}$.

435. Агар $f(x)=x^2+x+1$ бўлса, у ҳолда $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ ифоданинг қийматини топинг.

436. $f(x)=2x-3$ функция учун : 1) $f(x)=12$; 2) $f(x)=-1$; 3) $f(x)=0$; 4) $f(x)=2a-1$ тенгламани қаноатлантирувчи x нинг қийматини топинг.

437. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = \begin{cases} -1, & \text{агар } x < 0; \\ 0, & \text{агар } x = 0; \\ 1, & \text{агар } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -1, & \text{агар } x < -1; \\ x, & \text{агар } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{агар } x > 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{агар } x < 0; \\ x^2, & \text{агар } x < 0; \end{cases}$ 4). $y \square \dfrac{x^3}{|x|}$.

438. Функцияларнинг графикларини ясанг:

1) $y = \dfrac{2}{2x+3}$; 2) $y = \dfrac{2x-1}{x-3}$; 3) $y = \dfrac{3x+1}{2x-5}$; 4) $y = \dfrac{1-2x}{x-2}$.

439. Берилган функциялар графикларининг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг (агар кесишадиган бўлса);

1) $y = \dfrac{2x-1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1-3x}{x+2}$;

3) $y = \dfrac{2x-3}{3x+2}$; 4) $y = 1 + \dfrac{x-1}{x+1}$.

440. Асимптоталари $x=3$ ва $y=2$ тенгламалар билан берилган ва $A(-2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи каср-чизиқли функцияни топинг.

441. k нинг қандай қийматларида $y = \dfrac{2x - k}{x + 2}$ функциянинг графиги: 1)$A(-1;3)$; 2) $B(2;2)$; 3) $C(-3;-4)$ нуқталардан ўтади?

442. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=|x|-2$; 2) $y=|x-2|$; 3) $y=x^2-4|x|+3$; 4) $y=|x^2-4x+3|$.

C

443–447-мисолларда берилган функцияларнинг графикларини ясанг.

443. 1) $y=|x|$; 2) $y=|1-x|$; 3) $y=1-|x|$; 4) $y=|1-|x||$; 5) $y=-0,5|x|+2$.

444.

1) $y=x^2-|x|$; 2) $y=4|x|-x^2-3$; 3) $y=|x^2-3x+2|$; 4) $y=|3|x|-x^2+2|$.

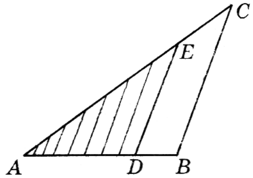
445. 1) $y = -\dfrac{1}{|x|}$; 2) $y \square \dfrac{|x|}{x}$; 3) $y = \dfrac{|x| - 2}{|x|}$.

446. 1) $y = \dfrac{1}{|x - 2|}$; 2) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$; 3) $y = \left|\dfrac{1}{|x| - 2}\right|$.

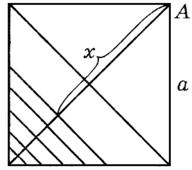
447*. 1) $y = \dfrac{3|x| + 2}{|x| - 1}$; 2) $y = \left|\dfrac{3|x| + 2}{|x| - 1}\right|$; 3) $y = \left|\dfrac{3x + 2}{x - 1}\right|$.

448*. 4-расмда штрихланган учбурчакнинг $P(x)$ периметрини $ED=x$ га боғлиқ бўлган формула билан ифодаланг. Бунда $AB=8$, $BC=6$, $AC=10$ ва $EDBC$.

449*. Томони a га тенг бўлган квадратни унинг диагоналига параллель тўғри чизиқ кесиб ўтганда ҳосил бўлган кесимнинг юзи $S(x)$ ни квадратнинг учидан тўғри чизиққача бўлган x масофага боғлиқ функция кўринишида ёзинг. $S(x)$ функциянинг аниқланиш ва қийматлар соҳасини топинг (43-расм).



42-расм



43-расм

3-§*. Функциянинг баъзи хоссалари

3.1. Функциянинг ноллари ва узлуксизлик тушунчаси

Таъриф. *Агар x=a нуқтада f(x) функциянинг қиймати нолга тенг, яъни. f(a)=0 бўлса, у ҳолда a нуқта f(x)* ***функциянинг ноли*** *дейилади.*

Масалан, x=1 нуқта $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ функциянинг ноли бўлади. Чунки $f(1)=\dfrac{1-1}{1^2+1}=0.$

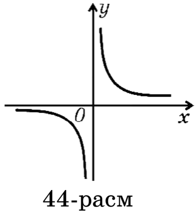
Умуман, $y=f(x)$ функциянинг нолларини аниқлаш учун $f(x)=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак. Бу тенглама илдизларга эга бўлса, у ҳолда улар $y=f(x)$ функциянинг ноллари бўлади. Масалан, $y=x^2+2x-3$ функциянинг нолларини топиш учун $x^2+2x-3=0$ тенгламанинг илдизларини топамиз: $x_1=-3$, $x_2=1$. Бунда $x_1=-3$ ва $x_2=1$ нуқталар берилган квадрат функциянинг ноллари бўлади.

Энди функциянинг «узлуксизлиги» тушунчасига тўхталамиз. Умуман, бу тушунча юқори синфларда қатъий математик асосда ўрганилади. Ҳозир функциянинг узлуксизлиги тушунчасини унинг графиги орқали кўрсатамиз.

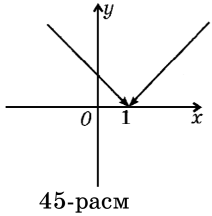
Аввал бир нечта мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. $f(1)\square\dfrac{1}{x}$ функция x=0 нуқтада аниқланмаган.Унинг аниқланиш соҳаси $(-\square;\ 0)\square(0;\ +\square)$ бўлади ва бу функциянинг графиги – I ва III чоракларда жойлашган гиперболадир (44-расм). Яъни $\dfrac{1}{x}$ функциянинг графиги ўзаро «узилишга эга» икки бўлак чизиқлардан иборат бўлишини биламиз. Демак, бу функциянинг графиги x=0 нуқтада «узилиш» га эга бўлади.

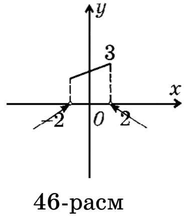
2-мисол. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$ функция x=1 нуқтадан бош-



44-расм



45-расм



46-расм

қа нуқталарда аниқланган: $D(f)=(-\square;\, 1)\square\, (1;\, +\square)$. У ҳолда бу функцияни модуль белгисининг таърифидан фойдаланиб, $f(x) = \begin{cases} (x-1), & \text{агар } x > 1, \\ 1 - x, & \text{агар } x < 0 \end{cases}$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу функциянинг графиги ҳам иккита бўлакдан иборат (45-расм). Демак, бу функциянинг графиги ҳам $x=1$ нуқтада «узилиш»га эга.

3-мисол.

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1, & \text{агар } x < -2, \\ 0,5x + 3, & \text{агар } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -0,5x + 1, & \text{агар } x > 2 \end{cases}$$

функция $(-\square;\, +\square)$ тўпламда аниқланмагани билан унинг графиги бир нечта эгри чизиқларнинг бўлакларидан иборат эканини кўрамиз (46-расм). Функциянинг графиги $x=-2$ ва $x=2$ нуқталарда «узилган».

Юқорида келтирилган учта мисолдаги каби функция графикларининг «узиладиган» нуқталари функциянинг у***зилиш нуқталари*** дейилади. Агар $[a;\, b]$ оралиқда $y=f(x)$ функция аниқланиб, шу оралиқда унинг узилиш нуқталари бўлмаса, у ҳолда $f(x)$ оралиқда $[a;\, b]$ функция ***узлуксиз*** дейилади. Масалан, $y=2x^2-3x+1$; функциялар сонлар ўқининг барча нуқталарида узлуксиз бўлади. $f(x) \square \frac{1}{x}$ функция $(-\square;\, 0)$ ёки $(0;\, +\square)$ оралиқларнинг ҳар бирида узлуксиз бўлади, $(-\square;\, +\square)$ тўпламда эса узилиш нуқтаси мавжуд ($x=0$). Шунинг учун $(-\square;\, +\square)$ тўпламда узлуксиз эмас.

3.2. Функциянинг ўзгармас ишора оралиқлари

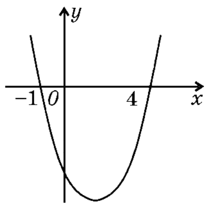
Таъриф: *Агар $y=f(x)$ функция $(a;b)$ оралиқда аниқланиб, шу оралиқшнг барча нуқталари учун $f(x)=0$ ва $f(x)<0$ тенгсизликларнинг фақат биттаси бажарилса, у ҳолда $(a;b)$ оралиқ $f(x)$ функциянинг* ***ўзгармас ишорали оралиғи*** *деб аталади.*

Масалан, $f(x) \square \frac{1}{x}$ функция учун $(-\square;\, 0)$ ёки $(0;\, +\square)$ орлиқларнинг ҳар бири унинг ишорасининг ўзгармас оралиғи бўлади. Чунки $(-\square;\, 0)$оралиқда $\frac{1}{x} \square 0$ тенгсизлик, $(0;\, +\square)$ оралиқда эса $\frac{1}{x} \square 0$ тенгсизлик бажарилади.

Худди шундай $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$ функция учун (−□; 1) ва (1; +□) оралиқлар, 3-мисолда кўрилган функция учун (−□; −2) (−2; 2) ва (2; +□) оралиқлар ўзгармас ишора оралиқлари бўлади.

Юқоридаги мисоллардан функциянинг узилиш нуқталари унинг ўзгармас ишорали оралиқлари чегараларидан бири бўлишини кўрамиз. Шунингдек, функциянинг ноллари ҳам унинг ўзгармас ишорали оралиқлари чегараларининг бири бўлишини кўриш қийин эмас. Бунинг учун, аввал қуйидаги мисолни кўриб чиқамиз.

4-мисол. $f(x)=x^2-3x-4$ функция барча сонлар тўпламида аниқланган ва узлуксиз. Унинг ноллари $x=-1$ ва $x=4$ нуқталаридир.Бу функциянинг графиги (−1;0) ва (4;0) нуқталардан ўтадиган, тармоқлари юқорига йўналган парабола (47 расм). Бунда $x<-1$, ёки $x>4$ бўлганда функция мусбат қийматлар қабул қилишини, $-1<x<4$ бўлганда эса манфий қийматлар қабул қилишини кўрамиз. Яъни, (−□; −1), (−1; 4) ва (4; +□) оралиқлар − функциянинг ўзгармас ишорали оралиқлари.



47-расм

Энди умумий ҳолда $y=f(x)$ функция берилсин. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ орқали шу функциянинг ноллари билан узилиш нуқталарининг (агар узилиш нуқталари мавжуд бўлса) ўсиш тартибида жойлашган кетма-кетлигини белгилаймиз. Бунда ҳар бир $(x_k; x_{k+1})$, ($k=1, 2, \ldots n-1$) оралиқлар билан (−□; x_1) ва (x_n; +□) оралиқларда берилган функция узлуксиз ва бу оралиқларда функциянинг бошқа ноллари ҳамда узилиш нуқталари мавжуд эмас. У ҳолда, шу оралиқларда функция графиги Ox ўқидан ё юқорида, ёки пастда жойлашади, яъни $(x_k; x_{k+1})$ оралиқларда $f(x)$ функциянинг ишораси ўзгармас бўлади. Агар тескарисини фараз қилиб, $f(u)$ ва $f(v)$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи u ва v нуқталар топилсин, дейлик. Айтайлик, $u<v$ бўлсин. $(x_k; x_{k+1})$ оралиқда функция узлуксиз бўлгани учун ҳамда ($u; f(u)$) ва ($v; f(v)$) нуқталар Ox ўқининг икки томон қисмида жойлашгани учун, шу нуқталарни бирлаштирувчи функция графигининг қисми Ox ўқи билан камида бир марта кесишиши керак, яъни $(u;v)$ оралиқда функциянинг камида бит-

та ноли мавжуд. Бу функциянинг $(x_k;\ x_{k+1})$ оралиқда нолга эга эмас деганига зид келади. Бу зидлик $(x_k;x_{k+1})$ оралиқда $f(x)$ функциянинг ишораси ўзгармай, функция ўзгармас бўлишини исботлайди. Бундан, агар қандайдир бир c□$(x_k;\ x_{k+1})$, $(k=1,2,\ \ldots\ n-1)$ нуқта учун $f(c)<0$ (ёки $f(c)>0$) тенгсизлик бажарилса, у ҳолда шу оралиқнинг барча нуқталарида функция ишораси манфий (мос ҳолда мусбат) бўлади.

5-мисол. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}$ функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини топамиз.

Ечилиши. x^2+x-2 квадрат учҳаднинг илдизлари -2 ва 1 га тенг, x^2+3x-4 квадрат учҳаднинг илдизлари $-$ 4 ва 1 га тенг бўлгани учун, берилган функцияни $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ кўринишда ёзамиз. Бундан функция $x=1$ ва $x=-2$ нуқталарда аниқланмагани учун (функциянинг узилиш нуқталари), $x=4$ нуқта эса функциянинг ноли бўлишини кўрамиз. Бунда -4, -2 ва 1 нуқталар сонлар ўқини тўрт қисмга ажратади: $(-$□$;\ -4)$, $(-4;-2)$, $(-2;1)$ ва $(1;\ +$□$)$. Шу оралиқларнинг ҳар бирида берилган функция ишораси ўзгармас бўлади. -5□$(-$□$;\ -4)$ учун $f(-5)=\dfrac{1}{3}>0$ бўлгани сабабли, бу оралиқда функция ишораси мусбат бўлади. -3□$(-4;-2)$ учун $f(-3)=1<0$ бўлиб, бу оралиқда функция ишораси манфий бўлади. 0□$(-2;\ 1)$ учун эса $f(0)=2>0$, бу оралиқда функция ишораси мусбат бўлади. Худди шундай, $(1;\ +$□$)$ оралиқда ҳам функция ишораси мусбат бўлади, чунки $f(2)=3>0$. Демак, берилган функциянинг ўзгармас ишорали оралиғини қуйидаги жадвалдан кўриш мумкин:

x	$(-$□$;\ -4)$	$(-4;\ -2)$	$(-2;\ 1)$	$(1;\ +$□$)$
$f(x)$	+	–	+	+

3.3. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқлари. Функциянинг экстремумлари

Таъриф. *Агар $y=f(x)$ функция оралиқнинг $x_1<x_2$ бўладиган ҳар бир x_1 ва x_2 нуқталари учун,*

$$f(x_1)<f(x_2) \qquad (1)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда бу функция оралиқда ***ўсувчи*** *дейилади, агар*

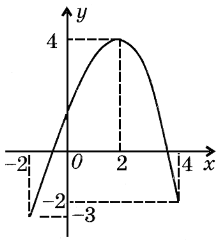
$$f(x_1)>f(x_2) \qquad (2)$$
тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $y=f(x)$ функция оралиқда ***камаювчи*** *дейилади.*

Яъни, $[a;\ b]$ оралиқда олинган исталган иккита аргументнинг катта қийматига функциянинг катта қиймати мос келса, у ҳолда $y=f(x)$ функция шу оралиқда ***ўсувчи*** деб аталади, аргументнинг, катта қийматига функциянинг кичик қиймати мос келса, функция ***камаювчи*** деб аталади.

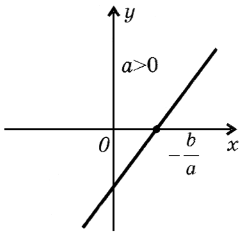
Масалан, графиги 48-расмда тасвирланган функция $[-2;\ 2]$ оралиқда ўсувчи, $[2;\ 4]$ оралиқда эса камаювчи эканини кўрамиз.

Энди $y=ax+b$ (a □ 0) чизиқли функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини аниқлаймиз.

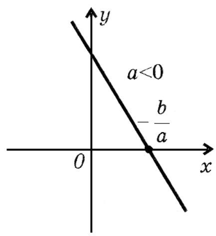
Айтайлик, $x_1<x_2$ бўлсин. У ҳолда мос функция қийматлари $y_1=ax_1+b$ ва $y_2=ax_2+b$ бўлади. Бундан $y_2-y_1=a(x_2-x_1)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда $x_2-x_1>0$ бўлгани учун, y_2-y_1 нинг ишораси a коэффициентнинг ишорасига боғлиқ.



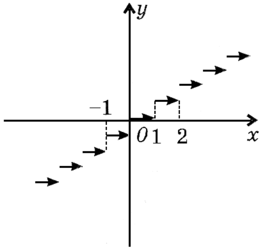
48-расм



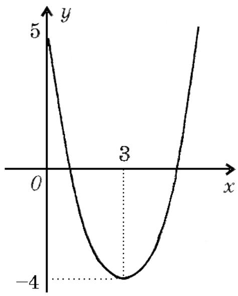
49-расм



50-расм



51-расм



52-расм

Демак, агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $y_2-y_1>0$, ёки $y_2>y_1$ бўлиб, функция ўсувчи, агар $a<0$ бўлса, $y_2>2y_1$, тенгсизлик бажарилиб, функция камаювчи бўлади (49- ва 50-расмлар).

Агар таърифдаги (1) тенгсизлик ўрнига $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда функция ***камаймайдиган*** функция деб аталади. (2) тенгсизлик ўрнига $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, функция ***ўсмайдиган*** функция деб аталади. Масалан, $f(x_1) = [x]$ (x нинг бутун қисми) функция камаймайдиган функция бўлади. Чунки, ҳар қандай $x_1<x_2$ нуқталар учун $[x_1]\leqslant[x_2]$ тенгсизлик бажарилади. Унинг графиги 51-расмда кўрсатилган.

1-мисол. $y=x^2-6x+5$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини аниқлаймиз. Бунинг учун функцияни тўла квадратга ажратиб, $y=(x-3)^2-4$ кўринишга келтирамиз. У ҳолда бу функциянинг графиги учи $(3;-4)$ нуқтада жойлашган ва тармоқлари юқорига йўналган парабола бўлади (52-расм). Бундан бу квадрат функциянинг $(-\square; 3)$ оралиқда камаювчи, $(3; +\square)$ оралиқда эса ўсувчи бўлишини кўрамиз.

Энди функция экстремумлари тушунчасини қараб чиқамиз. Бунинг учун $y=f(x)$ функция $[a; b]$ оралиқда аниқланган ва графиги узлуксиз чизиқ бўлади деб ҳисоблаймиз.

Таъриф. *Агар функция x_0 нуқтада аниқланса ва шу нуқта орқали чапдан ўнгга ўтганда x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг ўсувчи ва камаювчи оралиқларининг чегараси бўлса, у ҳолда x_0 нуқта функциянинг* ***максимум нуқтаси*** *деб аталади. Агар $x_0 f(x)$ функциянинг камайиш ва ўсиш оралиқларининг чегараси бўлса, у ҳолда x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг* ***минимум нуқтаси*** *деб аталади. Функциянинг максимум ва минимум нуқталари бир сўз билан унинг* ***экстремум нуқталари*** *деб аталади.*

Агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг максимум нуқтаси бўлса, $f(x_0)$ нинг қиймати функциянинг ***максимуми*** дейилади ва у қуйидагича белгиланади: $max\ f(x)$. Агар x_0 минимум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f(x_0)$даги қиймат функциянинг ***минимуми*** дейилади ва у $min\ f(x)$ деб белгиланади. Масалан, графиги 48-расмда тасвирланган функция учун $x=2$ нуқта максимум нуқта бўлади, чунки $[-2; 2]$ оралиқда функция ўсувчи, $[2; 4]$ оралиқда эса камаювчи бўлади. Демак, $max\ f(x)=f(2)=4$. $y=x^2-6x+5$ квадрат функция учун эса $x=3$ нуқта минимум нуқта бўлади, яъни $min(y)=y(3)=-4$.

Шунингдек, функциянинг берилган оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш мумкин. Бунинг учун функциянинг $[a; b]$ оралиқдаги барча минимум ва максимум нуқталарини топамиз. x_1, x_2, ..., x_n – функциянинг $[a; b]$ оралиқда ўсиш тартибида жойлашган экстремум нуқталари бўлсин. Бунда шу нуқталарга a ва b нуқталарни қўшиб, $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...,$f(x_n)$, $f(b)$ қийматларни ҳисоблаб, улар орасидан энг каттасини ва энг кичигини оламиз. Масалан, графиги 48-расмда тасвирланган функциянинг $[-2; 4]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматлари мос $f(2)=4$ ва $f(-2)=-3$ бўлади. $y=x^2-6x+5$ квадрат функциянинг $[0; 5]$ оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз (52-расм). $x=3$ функциянинг минимум нуқтаси бўлгани учун, функциянинг 0; 3 ва 5 нуқталардаги қийматларини аниқлаймиз: $f(0)=5$; $f(3)=-4$; $f(5)=0$. Демак, $f(0)=5$ функциянинг энг катта қиймати, $f(3)=-4$ эса функциянинг энг кичик қиймати бўлади.

3.4. Жуфт ва тоқ функциялар

Таъриф. 1: Агар $y=f(x)$ *функция учун*

$$f(-x)=f(x) \qquad (1)$$

тенглик бажарилса, бу функция ***жуфт функция*** *деб аталади.*

Масалан, $y=x^2$, $y=|x|$ – жуфт функциялар, чунки $(-x^2)=x^2$ ва $|-x|=|x|$ тенгликлар бажарилади.

Агар $M(a;b)$ нуқта $y=f(x)$ жуфт функциянинг графигига тегишли бўлса, у ҳолда $b=f(a)$ тенглик бажарилади. (1) тенглик бўйича $f(-a)=f(a)=b$ бўлади. Демак, $N(-a;b)$ нуқта ҳам $y=f(x)$ функциянинг графигига тегишли. Бундан *жуфт функцияларнинг графиклари Оу ўқига нисбатан ситметрик* бўлишини кўрамиз (53-расм).

Таъриф, 2: Агар $y=f(x)$ функция учун

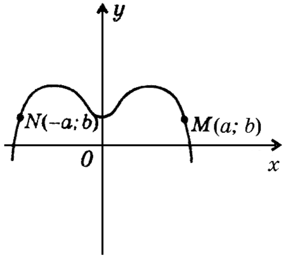
$$f(-x)=-f(x) \qquad (2)$$

тенглик бажарилса, бу функция ***тоқ функция*** дейилади.

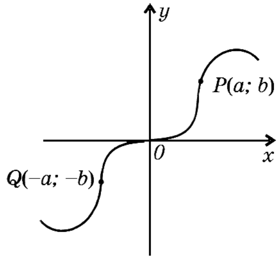
Масалан, $y=x$, $y=x^3$ – тоқ функциялар.

Агар $P(a;b)$ нуқта $y=f(x)$ тоқ функция графигига тегишли бўлса, $b=f(a)$ тенглик бажарилади. Таърифга кўра, $f(-a)=-f(a)=-b$ бўлади. Бундан функция графигига $Q(-a;-b)$ нуқта ҳам тегишли экани келиб чиқади, *яъни тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик* бўлади (54-расм).

Юқоридаги фикрлардан, ҳар қандай функция тоқ ёки жуфт бўлади, деб ўйлаш нотўғри. Масалан,$f(x)=x+x^2$ –



53-расм



54-расм

функция тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. Чунки $f(-x)=x+x^2$, яъни $f(-x)=x+x^2$ ва $f(-x)=f(x)$ тенг-ликлардан бирортаси ҳам бажарилмайди.

Шунингдек, функция тоқ ёки жуфт бўлиши учун y нинг аниқланиш соҳаси координаталар бошига нисбатан симметрик бўлиши керак. Чунки функциянинг аниқланиш соҳасига a нуқта билан бирга $-a$ нуқта ҳам тегишли бўлиши керак. Шу ҳолдагина функциянинг тоқ ёки жуфтлигини (1) ва (2) тенгликлар ёрдамида текшира оламиз.

Тоқ ҳам, жуфт ҳам бўлмаган функциялар ***умумий ҳолдаги функциялар*** (УҲФ) деб аталади. Бу ерда $f(x)=x^2+x$ функция – умумий ҳолдаги функция.

?

1. Функциянинг ноли деб нимага айтилади?
2. Қандай нуқталар функциянинг узилиш нуқталари деб аталади? Узлуксиз функция деганда нимани тушунасиз?
3. Функциянинг ўзгармас ишорали оралиқлари қандай аниқланади?
4. Ўсувчи ва камаювчи функцияларга таъриф беринг.
5. Қандай нуқталар функциянинг максимум (минимум) нуқталари деб аталади?
6. Функциянинг оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматлари қандай аниқланади?
7. Қандай функциялар жуфт (тоқ) функция деб аталади?
8. Умумий ҳолдаги функция (УҲФ) дегани нима?

МИСОЛЛАР

А

450. Функциянинг нолларини топинг:

1) $f(x)=2x-3$; 2) $\square\,(x)=3+|x|$;

3) $h(x)=2x^2+5x-7$; 4) $v(x)=4-x+3x^2$;

5) $\psi(x) = \sqrt{x^2 + x}$; 6) $F(x) = \sqrt{x - x^2 + 2}$;

7) $g(x) = \dfrac{x+1}{2x^2 + 5x + 3}$; 8) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$;

9) $h(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 5x + 3}$.

451. Функциянинг узлуксиз эканини исботланг ёки узилиш нуқталарини кўрсатинг:

1) $y = 2x^2 + x + 1$; 2) $y = 3 - x$; 3) $y = \dfrac{21x - 9}{3x - 1}$;

4) $y = \dfrac{4x + 31}{x + 7}$; 5) $y = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$; 6) $y = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$;

7) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$; 8) $y = \dfrac{\left(x^3 + 8\right)\left(x - 4\right)}{x^2 + 2x - 8}$.

452. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $f(x)=2x-3$; 2) $g(x)=-3x+2$; 3) $f(x)=|x|$;

4) $u(x)=|x-2|$; 5) $h(x) \square \dfrac{x^2}{2}$; 6) $r(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$.

453. Функциянинг ўсши ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $f(x)=(x-2)^2$; 2) $g(x)=-(x-3)^2$; 3) $u(x)=(x-1)^2-3$;

4) $h(x)=3-(x-3)$; 5) $r(x)=x^2-4x+5$; 6) $h(x)=-2x^2+6x-7$.

454. Сизга маълум қандай функциянинг бутун сонлар ўқида: 1) экстремум нуқталари бўлмайди; 2) фақат битта экстремум нуқтаси бўлади?

455. Функциянинг экстремумларини топинг:

1) $y=(x-1)^2+5$; 2) $y=12x^2-x-1$;

3) $y=3-(x+2)^2$; 4) $y=(x-1)(x-3)$.

456. $y=(x-3)(x-5)$ функциянинг: 1) [2; 3]; 2) [3; 4]; 3) [4; 5]; 4) [2; 5] оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини аниқланг.

457. Функциянинг тоқ ёки жуфт эканини айтинг (оғзаки):

1) $y=x^{10}$; 2) $y=x^6$; 3) $y=x^4-2x^2+3$; 4) $y=x^3-5x$.

458. Функциянинг ўзгармас ишора оралиқларини топинг:

1) $y=x-2$; 2) $y=2-3x$; 3) $y=x^2-3x+2$;

4) $y=-3x^2+5x-2$; 5) $y=(3x-10)(x+6$; 6) $y = \frac{(6-x)}{x}$.

459. Ўсувчи ва камаювчи функцияларнинг таърифларига асосан: 1) $y \square \frac{5}{2x}$ функция $(-\square;\ 0)$ оралиқда камаювчи; 2) $y = -\frac{4}{x}$ функция $(0;\ +\square)$ оралиқда ўсувчи эканини исботланг.

B

460. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

1) $g(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = -\frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{x}$;

4) $h(x) = -\sqrt{x}$; 5) $g(x) = \sqrt{|x|}$; 6) $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

461. 1) $y = \frac{5}{2x+1}$ функция $(-\square;\ 0{,}5)$ оралиқда камаювчи; 2) $y = \frac{4}{2-x}$ функция $(2;\ +\square)$ оралиқда ўсувчи; 3) $y = 3\sqrt{4x+1} - 1$ функция $(-0{,}25;\ +\square)$ оралиқда ўсувчи; 4) $y=3x^2-4x+7$ функция $\left(-\square;\ \frac{2}{3}\right]$ оралиқда камаювчи эканини исботланг.

462. Функциянинг аниқланиш соҳасини, қийматлар соҳасини (мавжуд бўлса), узилиш нуқталарини ва ўзгармас ишора оралиқларини топинг:

1) $y=x^2+2$; 2) $y=3-4x^2$; 3) $y=3x^2-6x+1$;

4) $v(x) \square \frac{|x|}{x}$; 5) $y = \frac{4+2x}{5+x}$; 6) $y = \frac{6}{(x-1)(x+8)}$.

463. $f(x)$ ва $\square(x)$ функциялар тенгми?

1) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$; $\varphi(x)=\sqrt{x(x-1)}$;

2) $f(x)=|x|\sqrt{x+1}$; $\varphi(x)=\sqrt{x^3+x^2}$?

464. Функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқланг:

1) $y=\dfrac{3}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;

3) $y=2+\dfrac{1}{x-2}$; 4) $y=3+\dfrac{x+1}{x+3}$.

465. Функциянинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуқталарини топинг:

1) $y=3x-x^2$; 2) $y=3x^2-6x+1$; 3) $y=\sqrt{x-2}-3$;

4) $y=5-\sqrt{2x+1}$; 5) $y=|x-4|-2$; 6) $y=3-|2x+3|$;

7) $y=\begin{cases}(x-1)^3, & \text{агар } x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{агар } x<0;\end{cases}$ 8) $y=\begin{cases}-x^2-2x, & \text{агар } x<1.\\ -\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x\geqslant 0.\end{cases}$

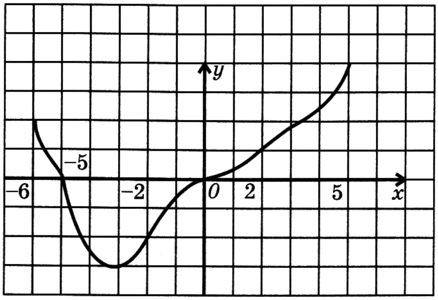
466. $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{агар } -3\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & \text{агар } 0<x<1,\\ 1, & \text{агар } 1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$

функция учун $f(-2)$; $f(0)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$; $f(1)$; $f(4)$ қийматларни топинг.

467. $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & \text{агар } x\leqslant 2,\\ 1, & \text{агар } x>2\end{cases}$

функция учун $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(5)$ қийматларни ҳисобланг.

468. 55-расмда кўрсатилган график бўйича $y=\square(x)$ функция берилган: 1) $\square(-5)$, $\square(-2)$, $\square(3)$, $\square(5)$ қийматларни; 2) $\square(x)=2$, $\square(x)=0$, $\square(x)=-1$ тенгликларни қаноатлантирувчи x нинг қийматларини топинг.



55-расм

469. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x)=x-1$; 2) $g(x)=\sqrt{x+3}$; 3) $h(x)=\sqrt{x^2-1}$;

4) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$; 5) $g(x)=\sqrt{5-10x}$; 6) $\varphi(x)=\sqrt{10x-5}$;

7) $F(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}$; 8) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$; 9) $g(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-3x+2}$.

470. Функциянинг тоқ ёки жуфт эканлигини текширинг:

1) $f(x)=9$; 2) $g(x)=0$; 3) $h(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;

4) $f(x)=(3x-2)^4+(3x+2)^4$;

5) $f(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$.

471. Функциянинг тоқ ёки жуфтлигини текширинг:

1) $y=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$;

2) $y=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;

3) $y=\dfrac{|x-7|}{x+1}+\dfrac{|x+7|}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{|x-4|}{x+2}+\dfrac{|x+4|}{x-2}$;

5) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x+1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$;

6) $g(x)=\dfrac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}-\dfrac{(x+1)^5}{(3x-4)^3}$.

472. $\square(x)=3x+5x^3-2x^5$ функция учун $\square(-x)=-\square(x)$ тенглик бажарилишини исботланг.

473. $\square(x)=x^4-2x^2-3$ функция учун $\square(-x)=\square(x)$ тенглик бажарилишини исботланг.

C

474. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a;\ b]$ оралиқда ўсувчи бўлса, шу оралиқда: 1) $f(x)+g(x)$ функциянинг ўсувчи; 2) $f^2(x)$ функциянинг ўсувчи; 3) $-f(x)$ функциянинг камаювчи; 4) $\dfrac{1}{f(x)}$ функциянинг камаювчи бўлишини исботланг.

475. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $f(x)=\sqrt{4x^2-12x+9}-2$; 2) $g(x)=3+\sqrt{x^2-3x+2}$;

3) $h(x)=-\dfrac{2}{x^2+1}$; 4) $u(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+5}$.

476. Агар $f(x)$ функциянинг графиги сонлар ўқининг барча нуқталарида узлуксиз ва ўсувчи (камаювчи) бўлса, $f(x)=0$ тенглама нечта илдизга эга бўлиши мумкин? Илдизга эга бўлмаслиги мумкинми?

477*. Агар $f(x)$ функция тоқ бўлса ва: 1) $f(x)=x^2$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2$, $x\leqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-3x$, $x\geqslant 0$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ экани маълум бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция учун битта формула ёзиб, унинг графигини ясанг.

478*. Агар $y=f(x)$ функция жуфт ва:

1) $f(x)\,\square\sqrt{x}$, $x\geqslant 0$; 2) $f(x)=x^2-3x$, $x\geqslant 0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\geqslant 0$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, экани маълум бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция учун битта формула ёзиб, унинг графигини ясанг.

479–482-мисоллардаги функцияларни текшириб, уларнинг графикларини ясанг.

479. $$y=\begin{cases}3, \text{ агар } x\leqslant -4,\\ \left|x^2-4\left|x\right|+3\right|, \text{ агар } -4\leqslant x\leqslant 4,\\ 3-(x-4)^2, \quad \text{агар } x>4.\end{cases}$$

480. $$y=\begin{cases}8-(x+6)^2, \quad \text{агар } x\leqslant -6,\\ \left|x^2-6\left|x\right|+8\right|, \text{ агар } -6\leqslant x\leqslant 5,\\ 3, \text{ агар } x\geqslant 5.\end{cases}$$

481. $$y=\begin{cases}\left|\left|\left|x\right|-1\right|-1\right|, \text{ агар } \left|x\right|<2,\\ \sqrt{\left|x\right|-2}, \quad \text{агар } x\geqslant 2.\end{cases}$$

482*. $$y=\begin{cases}2-\sqrt{4-\left|x\right|}, \text{ агар } \left|x\right|\leqslant 4,\\ \dfrac{8}{x}, \quad \text{агар } \left|x\right|>4.\end{cases}$$

4-§. Тенгламалар, икки ўзгарувчили тенгламалар системаларини график усулда ечиш

4.1. Тенгламани график усулда ечиш

Бунда биз $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ функциялар графиклари ёрдамида $f_1(x)=f_2(x)$ тенгламанинг илдизларини топиш мумкинлигини кўриб чиқамиз.

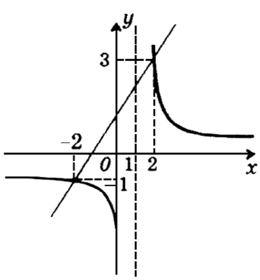
Агар x_0 сони $f_1(x)=f_2(x)$ тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда x_0 сони $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ функцияларнинг аниқланиш соҳасида ётиши ва $f_1(x_0)=f_2(x_0)$ тенглик бажарилиши келиб чиқади. Агар $y_0=f_1(x_0)=f_2(x_0)$да ётади. Демак, бу функцияларнинг графиклари $(x_0;y_0)$ нуқтаси $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ функциялар графикларида ётади.

Аксинча, агар $y=f_2(x)$ ва $y=f_2(x)$ функцияларнинг графиклари $(y_0;\ x_0)$ нуқтада кесишадиган бўлса, у ҳолда $y_0=f_1(x_0)=f_2(x_0)$ тенглик бажарилади. Демак, x_0 сони $f_1(x)=f_2(x)$ тенгламанинг илдизи бўлади.

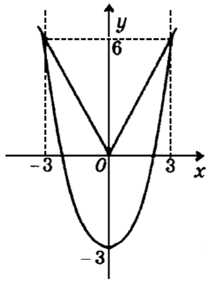
Шундай қилиб, ***$f_1(x)=f_2(x)$ тенгламанинг илдизларини топиш учун $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топиш керак.***

Кўп ҳолларда, тенгламаларни график усулда ечганда, улар илдизларининг аниқ қийматларини топиш мумкин бўлавермайди. Чунки биз функциялар графикларининг тахминий лойиҳасини схематик равишда ясаб оламиз. Шунинг учун, тенгламаларни график усулда ечганда улар нечта илдизга эга эканлигини ва бу илдизларнинг фақат тақрибий қийматларини аниқлай оламиз.

Шунингдек, график усулда $f(x)=0$ кўринишдаги тенгламанинг ҳам илдизини топиш мумкин. Бу ерда $f_1(x) = f(x)$ ва $f_2(x)=0$ деб олсак, юқорида кўрилган $f_1(x) = f_2(x)$ тенгламанинг хусусий ҳолини оламиз, яъни бу тенгламанинг илдизлари мос функция графигининг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталари бўлади.



56-расм



57-расм

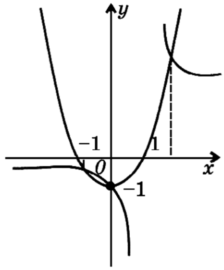
1-мисол. $\dfrac{3}{x-1} = x + 1$ тенгламани график усулда ечамиз.

Ечилиши. 56-расмдан $y = \dfrac{3}{x-1}$ ва $y=x+1$ функцияларнинг графиклари $(-2;-1)$ ва $(2;3)$ нуқталарда кесишишини кўрамиз. Демак, тенгламанинг иккита илдизи мавжуд: $x=-2$; $x_2=2$.

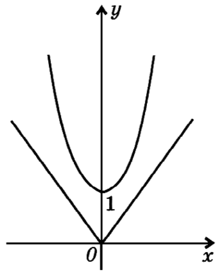
2-мисол. $x^2-2|x|-3=0$ тенгламанинг илдизини топиш керак.

Ечилиши. Берилган тенгламани $x^2-3=2|x|$ кўринишида ёзиб, $y=x^2-3$ ва $y=2|x|$ функциялар кесишиш нуқталарини топиш керак. 57-расмдан бу функцияларнинг графиклари $(-3;\ 6)$ ва $(3;\ 6)$ нуқталарда кесишишини кўрамиз. Демак, тенгламанинг иккита илдизи мавжуд: $x_1=-3$; $x_2=3$.

3-мисол. $x^2 - 1 = \dfrac{1}{x-1}$ тенгламани ечамиз.



58-расм



59-расм

Ечилиши. 58-расмдан $y=x^2$ ва $y=\dfrac{1}{x-1}$ функцияларнинг графиклари уч нуқтада кесишадиганини кўрамиз. Демак, берилган тенгламанинг учта илдизи мавжуд. Бу илдизларнинг тақрибий қийматлари қуйидагича: $x_1 \square -0,6$; $x_2=0$; $x_3 \square 1,6$.

4-мисол. $x^2+1=|x|$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечилиши. $y=x^2+1$ ва $y=|x|$ функцияларнинг графиклари кесишмайди (59-расм). Демак, берилган тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас.

4.2. Икки ўзгарувчили тенгламалар системасини график усулда ечиш

Тенгламалар каби икки ўзгарувчили тенгламалар системасини ҳам график усулда ечиш мумкин. Шу усулда ечиладиган бир неча мисолларни кўриб чиқамиз.

4-мисол. $\begin{cases} x-y=1, \\ y=x^2+2x-3 \end{cases}$

тенгламалар системасини график усулда ечиш керак.

Ечилиши. Бу системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} y=x-1, \\ y=x^2+2x-3. \end{cases}$$

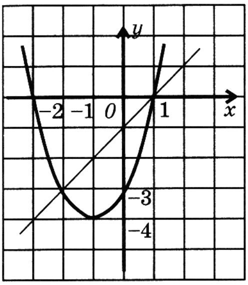
У ҳолда системадаги ҳар бир тенглама билан функция аниқланади. Яъни, системадаги биринчи тенглама $y=x-1$ тўғри чизиқни, иккинчи тенглама эса $y=x^2+2x-3$ параболани ифодалайди. $x^2+2x-3=x+1)^2-4$ бўлгани учун параболанинг учи $(-1;\ -4)$ нуқтада, ўқи $x=-1$ тўғри чизиқ бўлади. Шундай қилиб, қурилаётган тўғри чизиқ ва параболанинг графиги 60-расмда тасвирланган. Бу графиклар (−2; −3) ва (1; 0) нуқталарда кесишади. Демак, бу нуқталарнинг координаталари системадаги иккала тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Жавоби: (−2; −3) ва (1; 0).

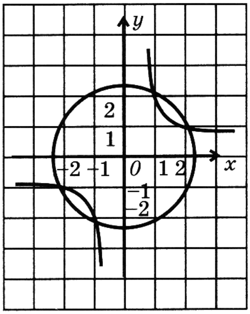
5-мисол. $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

тенгламалар системасини график усулда ечамиз.

Ечилиши. Системадаги биринчи тенгламани $y \square \dfrac{2}{x}$



60-расм



61-расм

кўринишида ёзиб, унинг графиги гипербола (тескари пропорционаллик графиги) эканини кўрамиз. Радиуси $x^2+y^2=5$ га тенг ва маркази координаталар бошида бўлган айлана $\sqrt{5}$ тенглама билан ифодаланади.

Умуман, маркази (a; b) нуқтада, радиуси эса R га тенг айлана тенгламаси $(x-a)^2+(y-b)^2=R$ кўринишда ёзилади. Бу тенгламани қуйидагича олиш мумкин: агар $M(x,y)$ айлананинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, шу нуқтадан айлана маркази $C(a;b)$ нуқтагача бўлган масофа R га тенг, яъни $CM=R-C(a;\ b)$ ёки $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$ тенглик бажарилади. Бундан $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Демак, системани ечиш учун гипербола билан айлананинг кесишиш нуқталарининг координаталарини аниқлаш керак, 61-расмдан бу икки график 4 та нуқтада кесишишини кўрамиз: (1;2), (2;1), (−1;−2), (−2;−1).

?

1. Тенгламани график усулда ечиш деганда нимани тушунасиз?
2. Агар $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ функцияларнинг графиклари m нуқтада кесишиши маълум бўлса, $f(x)=g(x)$ тенгламанинг нечта илдизи бор?
3. Агар $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ функцияларнинг графиклари $M(a;b)$ нуқтада кесишадиган бўлса: а) $f(x)=g(x)$ тенгламанинг;

б) $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$

системанинг ечими қандай ёзилади?

МИСОЛЛАР

А

483–493-мисолларда берилган тенгламаларни ёки тенгламалар системасини график усулда ечинг.

483. 1) $(x-3)^2=25$; 2) $(2x+7)^2=100$; 3) $(x+4)^2=9$;
4) $(x-6)^2=7$; 5) $(3x+1)^2=10$; 6) $(x-2)^2=6$.

484. 1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2+x+2=0$;
3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $x^2+5x-6=0$.

485. 1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3y - x = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + y = 5, \\ |x + 4y = 5. \end{cases}$

486. 1) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 5x^2 + 2y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + y = 100. \end{cases}$

В

487. 1) $x^2-1=2x+2$; 2) $2x^2=5x-2$;
3) $x^2+2=|2-x|$; 4) $3x^2-1=2-|x|$.

488. 1) $\dfrac{1}{x} = 2x + 1$; 2) $\dfrac{1}{x+1} = 2 - x$; 3) $\dfrac{2x+1}{x+2} = 3 - x$.

489. 1) $|2x-1|=2-0{,}5x$; 2) $3|x-3|=2x$; 3) $3 - x^2 = \dfrac{6}{2-x}$.

490. $[2;+\square)$ тенгламанинг $(x-2)^2 = \dfrac{6}{x+3}$ оралиқдаги илдизларини топинг.

491. (−□; 3] тенгламанинг $x^2-6x+9=\dfrac{2}{4-x}$ оралиқдаги илдизларини топинг.

C

492.

1) $\dfrac{|x|}{|x|-1}=3x-1;$ 2) $\dfrac{|x|}{|x-1|}=2x+1;$

3) $\dfrac{3x+4}{x+1}=2|x|-2;$ 4) $\dfrac{1}{x+1}=3|x|-2.$

493. 1) $|2|x|-1|=2-0{,}5|x|;$ 2) $\left|2-\left|1-|x|\right|\right|=1{,}5;$

3) $|3-x|-3=2|x|-x^2;$ 4) $|2-x|=2x-x^2.$

494. a нинг қандай қийматларида $|x+3|=a|x-2|$ тенглама битта илдизга эга? Шу илдизни топинг.

495*. Агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ оралиқда ўсувчи, $g(x)$ функция эса шу оралиқда камаювчи бўлса, у ҳолда $f(x)=g(x)$ тенгламанинг $[a;\ b]$ оралиқда биттадан ортиқ илдизи бўлмаслигини исботланг.

496*. $y=(x-1)|x+1|+|x-1|(x+1)$ функциянинг графигини ясанг.

497*. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}+\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$ функциянинг графигини ясанг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

498. $y=x^2-4x+3$ функциянинг графиги: 1) $A(2;-1)$; 2) $B(2;\ 1)$ нуқтадан ўтадими?

499. Ясашни бажармасдан: 1) $y=x^2+4$; 2) $xy=-4$ функциянинг графиги қайси координата чоракларида жойлашганини айтинг.

III БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МИСОЛЛАР

500. Функциянинг графигини ясанг:

1) $f(x)=x^2-4x+3;$ 2) $g(x)=-4x^2+12x-9;$

3) □$(x)=-x^2+7x-12;$ 4) $h(x)=3x^2-5x+2.$

501. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{5-3x}{2x+1}$; 3) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

502. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=x^2-2x-3$; 2) $y=3x^2-x-2$; 3) $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$; 4) $y=\dfrac{x-2}{3-x}$.

503*. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\dfrac{3|x|-1}{|x|+1}$; 2) $y=\left|\dfrac{x-2}{3-x}\right|$;

3) $y=\big||x-2|-3\big|$; 4) $y=\big|4-|2-|x-1||\big|$.

504*. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\dfrac{|x|-2}{|x|+1}=|x-1|+2$; 2) $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|=|x|-5$.

505. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $x^3+x=1$; 2) $x^3=(x-2)^2$; 3) $x^3-3x-2=0$.

506. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

1) $\begin{cases} xy=3, \\ y-x^2=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-y=0, \\ y-x=6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ y=\dfrac{1}{2}x^2-10. \end{cases}$

507–511-мисолларда берилган функциянинг графигини ясанг.

507. 1) $y=x+|x+3|$; 2) $y=x+|2x+3|$;
3) $y=2x-|x+1|+2$; 4) $y=|x|+2-x$.

508. 1) $y=(x-1)(2-|x|)$; 2) $y=(1+|x|)+(2-|x|)$;
3) $y=|x^2-5x+6|-x$; 4) $y=x^2-|x-1|$.

509. 1) $y=\dfrac{|x|}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{|x|}{|x|-1}$; 3) $y=\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$; 4) $y=\dfrac{x}{|x-1|}$.

510. 1) $y=\big|||x|-2|-1\big|$; 2) $y=\big|2-|1-|x||\big|$; 3) $y=\big||1-x^2|-3\big|$;
4) $y=\big||x^2-2x|-3\big|$; 5) $y=x\left(|x+2|+|x-4|\right)$; 6) $y=x|x-1|+x^2$.

511. 1) $y = \dfrac{5}{x-2}$; 2) $y = \dfrac{x}{x+1}$; 3) $y = \dfrac{x+1}{x}$;

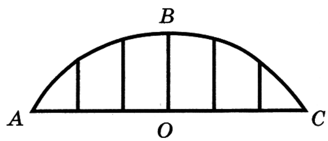
4) $y = \begin{cases} x-1, \text{агар } x \geqslant 0, \\ -x^2, \text{ агар } x < 0, \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} x^2, \text{агар } x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x-1}, \text{агар } x < 0, \end{cases}$

512*. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

1) $\begin{cases} y = |x^2 + 6x + 5|, \\ y - x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3, \\ x = y^2 + 2x - 1; \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y - 4x - 7, \\ |x - 2| = x + 3. \end{cases}$

513*. Кўприк аркаси парабола ёйи шаклида бўлиб келган. Бу арка ўзаро бир хил масофаларда жойлашган 5 та вертикаль устунлар билан тиралган бўлиб, улар арканинг ватарини 6 та тенг кесмага ажратади (62-расм). Агар AB= 12 м, BO=3м бўлса, колган устунларнинг баландлиги қандай?



62-расм

IV боб . КВАДРАТ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1-§. Тенгсизликларни исботлаш

1.1. Сонли тенгсизликларнинг хоссалари

Сиз 6-синфда сонли тенгсизликларни қараб, уларнинг хоссаларини ўқиб ўргандингиз. Энди шу хоссаларни ёдимизга тушириб, уларни кенг кўламда такрорлаймиз.

Ҳар қандай иккита ҳақиқий сонни таққослаш мумкин. Яъни, ҳар қандай a ва b сонлар учун $a<b$, $a=b$ ёки $a>b$ муносабатларнинг фақат биттаси бажарилади. Агар а мусбат сон бўлса, у ҳолда $a>0$, агар a манфий сон бўлса, $a<0$ деб ёзилади.

Таъриф. *Агар $a-b>0$ $(a-b<0)$ бўлса,* ***у ҳолда а сони b сонидан катта (кичик)*** *дейилади. Булар мос равишда қуйидагича ёзилади:* $a>b$ $(a<b)$.

Масалан, $\frac{7}{8}$ ва $\frac{8}{9}$ сонларни таққослаймиз:

$\frac{7}{8}-\frac{8}{9}=\frac{7\cdot 9-8\cdot 8}{72}=-\frac{1}{72}<0$ бўлгани учун, таърифга асосан $\frac{7}{8}\square\frac{8}{9}$ бўлади.

Кўп ҳолларда $a>b$ (ёки а$<b$) белгилар билан бирга $a\geqslant b$ $(a\leqslant b)$ белгилашлар ҳам қўлланилади. $a\geqslant b$ ёзувни: «a сони b сонидан катта, ёки тенг» деб, $a\leqslant b$ ёзувни эса: «a сони b сонидан кичик, ёки тенг» деб ўқилади.

Умуман, таркибида $<$, $>$, $\geqslant$, $\leqslant$ белгилари қатнашган сонли ифодалар ***сонли тенгсизликлар*** деб аталади. Бунда $<$ ва $>$ белгилари ***қатъий***, $\leqslant$ ва $\geqslant$ белгилари ***ноқатъий*** тенгсизлик белгилари деб аталади. $a>b$ ва $c>d$ тенгсизликлар ***бир хил ишорали***, $a>b$ ва $c<d$ тенгсизликлар ***қарама-қарши ишорали тенгсизликлар*** деб аталади.

Юқорида кўрилган тенгсизликлар каторида ***қўш тенгсизликлар*** деб аталадиган $a<c<b$, $a\leqslant c<b$, $a<c\leqslant b$ ва $a\leqslant c\leqslant b$ кўринишдаги тенгсизликлар ҳам кўп қўлланилади. Таърифга асосан, $a<c<b$ тенгсизликда $a<c$ ва $c<b$ тенгсизликларнинг ҳар иккаласи ҳам бажарилади, деб тушуниш керак. Энди сонли тенгсизликларнинг кўп учрайдиган хоссаларини келтирамиз.

1□. Агар $a<b$ ва $b<c$ бўлса, у ҳолда $a<c$ бўлади.

Исботи. Бунинг учун $a-c$ айирма манфий сон эканлигини кўрсатиш, кифоя: $a-c=a-b+b-c=(a-b)+(b-c)$. Шартга кўра $a<b$, $b<c$ бўлгани учун, $a-b<0$, $b-c<0$ тенгсизликлар бажарилади. Демак, иккита манфий сонниng йиғиндиси ҳам $a-c<0$ бўлади.

2□. *Агар $a<b$ бўлса, ҳар қандай с сони учун $a+c<b+c$ тенгсизлик бажарилади.*

И с б о т и. $(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b<0$. Бинобарин, таърифга мувофиқ $(a+c)<(b+c)$ бўлади.

Натижа, 1. *Агар $a+c<b$ тенгсизлик бажарилса, $a<b-c$ тенгсизлик бажарилади, яъни тўғри тенгсизликларнинг бир қисмидаги ҳадлари унинг иккинчи қисмига қарама-қарши ишорада ўтказилганда тўғри тенгсизлик ҳосил бўлади.*

2-хоссага асосан, $a+c<b$ тенгсизликнинг иккала қисмига ҳам $-c$ сонини қўшиш етарли.

3□. Агар $a<b$ ва $c<b$ бўлса, у ҳолда $a+c<b+d$ тенгсизлик бажарилади, яъни бир хил ишорали тўғри тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиш мумкин.

Исботи. $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$ тенгсизликдан ҳосил бўлади.

Натижа, 2. Агар $a<b$, $c<d$ бўлса, у ҳолда $a-b<b-c$ тенгсизлик бажарилади.

Исботи. 1-натижа билан 3□ хоссага асосан исботланади.

4□. *Агар $a>b$ ва $c>0$ бўлса, $ac>bc$ тенгсизлик, $c<0$ бўлса, у ҳолда $ac<bc$ тенгсизлик бажарилади. Яъни, тенгсизлик мусбат сонга кўпайтирилгани билан, унинг ишораси (маъноси) ўзгармайди, агар манфий сонга кўпайтирилса, тенгсизликнинг ишораси қарама-қаршисига ўзгаради.*

Исботи. $ac-bc=c(a-b)$ ва $a-b>0$ тенгсизлик бажарилади. Агар $c>0$ бўлса, у ҳолда $ac-bc>0$ ёки $ac>bc$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Агар $c<0$ бўлса, у ҳолда $c(a-b)<0$ тенгсизлик бажарилади.

Демак, $ac<bc$ бўлиши керак.

5□. *Агар $a>b$ ва $c>0$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{c}\square\frac{b}{c}$ тенгсизлик, $c<0$ бўлганда $\frac{a}{c}\square\frac{b}{c}$ тенгсизлик бажарилади, яъни тенгсизликни мусбат сонга бўлганда унинг ишораси (маъноси) ўзгармайди, манфий сонга бўлганда эса тенгсизликнинг ишораси қарам-қаршисига ўзгаради.*

Исботи. 4-хосса каби исботланади.

6□. Агар $a>b>0$ ва $c>b>0$ бўлса, у ҳолда $ac>bd$ бўлади, яъни бир хил ишорали ва мусбат ҳадли тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириш мумкин.

Исботи. $ac-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=c(a-b)+b(c-d)>0$ тенгсизлик бажарилади.

7□. Агар $a\geqslant b>0$ ва $c>d>0$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{d}$ □$\frac{b}{c}$ бўлади.

Исботи. $\frac{a}{d}-\frac{b}{c}=\frac{ac-bd}{cd}$ ифодада $cd>0$ ва 6°-хоссага асосан $ac-bd>0$ бўлгани учун, $\frac{a}{d}-\frac{b}{c}>0$ бўлади.

Натижа, 3. *Агар бўлса, у ҳолда* $\frac{1}{c}$ □$\frac{1}{d}$ *бўлади.*

Исботи. 7□– хоссага кўра $a=b=1$ шартни олиш, кифоя.

Натижа, 4. Агар $a>b>0$ бўлса, у ҳолда $a^n>b^n$ тенгсизлик бажарилади. Бунда n – натурал сон.

Исботи. 6□– хоссага асосан исботланади.

Тенгсизлик таркибидаги ўзгарувчининг барча маънога эга қийматларида бажариладиган тенгсизликлар ***тўғри тенгсизликлар*** деб аталади. Берилган тенгсизликнинг тўғрилигини кўрсатиш жараёни тенгсизликларни исботлаш деб аталади.

1-мисол. $(a-3)(a-5)<(a-4)^2$ тенгсизликни исботлаймиз.

Исботи. $(a-3)(a-5)-(a-4)^2=a^2-a^2+8a+15-a^2+8a-16=$ $=-1<0$. Демак, берилган тенгсизлик ҳар қандай a учун бажарилади.

2-мисол. Ҳар қандай a ва b сонлари учун $a^2+b^2\geqslant 2ab$ тенгсизлик бажарилишини исботлаймиз.

Исботи. $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$ бўлгани учун, таърифга асосан берилган тенгсизлик тўғри.

1.2.* Тенгсизликларни исботлаш усуллари

Умуман, тенгсизликларни исботлашда, унинг таркибида қатнашган ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳалари кўрсатилади. Бунда бу тенгсизликларни ўзгарувчиларнинг кўрсатилган қийматлари учун исботлаш керак. Масалан, $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ тенгсизликнинг тўғрилиги ҳар бир $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ учун исботланади. Бунда a ва b нинг ўзгариш соҳаси [0; +□) бўлади. Агар тенгсизликда бундай соҳалар махсус кўрсатилмаган бўлса, у ҳолда тенгсизлик таркибидаги ўзгарувчиларнинг ҳар қандай ҳақиқий қийматлари учун исботланиши керак.

Тенгсизликларни исботлашнинг бир неча усуллари мавжуд. Уларни мисоллар ёрдамида кўриб чиқамиз.

1. Тенгсизликларни таъриф бўйича исботлаш. Мазкур бобнинг биринчи мавзусидаги 1- ва 2- мисолларни мана шу усулда исботлаган эдик. Энди ушбу усулга яна битта мисол келтирамиз.

3-мисол. Агар $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ тенгсизлик бажарилишини исботлаймиз.

Исботи. Таърифга асооан, агар $a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ тенгсизлик тўғри бўлади:

$$a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\,\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

2. Тенгсизликларни тескарисини фараз килиш усулида исботлаш.

4-мисол. Агар $ab \geqslant 0$ бўлса, у холда $\frac{a}{b} \square \frac{b}{a} \geqslant 2$ тенгсизликни исботлаш керак.

Исботи. $ab>0$ бўлганда, берилган тенгсизлик бажарилмайди деб тескари фараз қилсак, у ҳолда a ва b нинг қандайдир бир қийматларида $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}<2$ тенгсизлик бажарилиши керак. Бундан $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2<0, \Rightarrow \frac{a^2+b^2-2ab}{ab}<0, \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}<0$ ҳосил бўлади. Лекин $(a-b)^2 \geqslant 0$, $ab>0$ бўлгани учун, охирги тенгсизлик бажарилиши мумкин эмас. Ҳосил бўлган зидлик a ва b нинг ҳеч бир қийматларида $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}<2$ тенгсизликнинг бажарилмаслигини кўрсатади. У ҳолда, a ва b нинг ҳар қандай бир хил ишорали қийматларида $\frac{a}{b} \square \frac{b}{a} \geqslant 2$ тенгсизлик бажарилади.

3. Таянч тенгсизликлар усули. Бу – берилган тенгсизликни бирор бир тўғри тенгсизлик ёки аввал иоботланган тенгсизликлар ёрдамида исботлаш усулидир. Бундай ёрдамчи тенгсизликлар ***таянч тенгсизликлар*** деб аталади. Масалан, $a^2>0$; $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$; $\frac{a}{b} \square \frac{b}{a} \geqslant 2$, $(ab>0)$ тенгсизликларни таянч тенгсизликлар тарзида караш мумкин. Энди мисоллар келтирамиз.

5-мисол. Ҳар бир номанфий a, b ва c сонлари учун $(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатамиз.

Исботи. Таянч тенгсизликлар сифатида 3-мисолда исботланган $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$; $a+c \geqslant 2\sqrt{ab}$; $b+c \geqslant 2\sqrt{ab}$ тенгсизликларни оламиз. 6-хоссага асосан, тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириш орқали

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 2\sqrt{ab}\,2\sqrt{ac}\,2\sqrt{bc} \square 8\sqrt{a^2b^2c^2} \quad \square 8abc$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Берилган тенгсизлик исботланди.

6-мисол. Ҳар бир номанфий *a, b, c* сонлари учун $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$ тенгсизлик бажарилишини исботлаймиз.

Исботи. 2-мисолда исботланган $\frac{a}{b}\square\frac{b}{a} \geqslant 2$; $\frac{a}{c}\square\frac{c}{a} \geqslant 2$; $\frac{b}{c}\square\frac{c}{b} \geqslant 2$ тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб $\frac{a}{b}\square\frac{b}{a}\ \square\frac{a}{c}$ $\square\frac{c}{a}\ \frac{b}{c}\square\square\frac{c}{b} \geqslant 6 \Rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geqslant 6$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликнинг ҳар иккала қисмини 3 сонини қўшиш натижасида $\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+$ $+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geqslant 9$ ёки $\frac{a\square b\ \square c}{a}\square\frac{a\square b\ \square c}{b}\square\frac{a\square b\ \square c}{c} \geqslant 9$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$ тенгсизлик келиб чиқади.

4. Тенгсизлик ҳадларини яхлитлаб баҳолаш усули. Бу усул сонли ифодалар билан берилган тенгсизликларни исботлаш учун қулайдир.

7-мисол. $\sqrt{27}\square\sqrt{6}\ \square 1$ ва $\sqrt{48}$ сонларидан кайси бири катта?

Исботи. $\sqrt{27} > \sqrt{25} = 5$ ва $\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$ бўлгани учун, $\sqrt{27}+\sqrt{6}+1 > 8$ бўлади. $\sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$ тенгсизликдан эса $\sqrt{27}+\sqrt{6}+1 > \sqrt{48}$ экани келиб чиқади.

8-мисол. $\frac{198}{199}$ ва $\frac{197}{198}$ сонларни таққослаймиз.

Исботи. Албатта, бу сонларни умумий махражга келтириб таққослаш мумкин. Бу ҳисоблашларни калькуляторсиз бажариш жуда ҳам мураккаб. Лекин, мисолни осон йўл билан ечиш мумкин. Бунинг учун берилган сонларни 1 билан таққослаш керак.

$\frac{198}{199} = 1 - \frac{1}{199}$, $\frac{197}{198} = 1 - \frac{1}{198}$ ва $\frac{1}{199} \square \frac{1}{198}$ бўлгани учун, $\frac{198}{199} \square \frac{197}{198}$ тенгсизлик бажарилади.

Умуман, сонли тенгсизликларни исботлашда кўп қўлланиладиган яна бир усул мавжуд. Бу усул ***математик индукция усули*** деб аталади. Бу усул билан юқори синфларда танишасиз.

? 1. Қандай шарт бажарилганда a сони b сонидан катта деб ҳисобланади? У қандай белгиланади?
2. Қатъий ва ноқатъий тенгсизлик белгиларини ёзиб кўрсатинг.
3. Сонли тенгсизликларнинг қандай хоссаларини биласиз? Уларни исботлаб кўрсатинг.
4. Тенгсизликни исботлаш деганда нимани тушунасиз?
5. Тенгсизликни исботлаш усулларини атанг, уларнинг маъносини айтиб беринг.

МИСОЛЛАР

A

514. Агар $a<b$, $c>b$, $c<b$, $a>e$ бўлса, у ҳолда a, b, c, d ва e сонларни сон ўқида тасвирланг.

515. Агар: 1) $a-3>b-3$ ва $b>-3$; 2) $7a>7b$ ва $b>1$; 3) $a-8b-8$ ва $a<-12$; 4) $-2a>-2b$ ва $b<-0{,}3$ бўлса, a ва b сонларнинг ишораларини аниқланг.

516. $a>b$ тенгсизликнинг иккала қисмига: 1) 5 ни қўшганда; 2) -2 ни кўшганда; 3) 0,5 га кўпайтирганда;

4) -3 га кўпайтирганда; 5) 4 га бўлганда; 6) $-0{,}1$ га бўлганда ҳосил бўладиган тўғри тенгсизликларни ёзинг.

517. Агар $3<a<4$ экани маълум бўлса, у ҳолда: 1) $5a$; 2) $-a$; 3) $a+2$; 4) $a-2$; 5) $5-a$; 6) $0{,}2+3$ ифодалар учун қандай кўш тенгсизликлар бажарилади?

518. $5<x<8$ экани маълум. Ифоданинг қийматини баҳоланг:

1) $6x$; 2) $-10x$; 3) $x-5$; 4) $3x+2$.

519. $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ тенгсизликни 1–, 2–, 3– усуллар билан исботланг.

520. Агар $a>b$ ва $b^2-4ac<0$ бўлса, $ax^2+bx+c>0$ тенгсизлик бажарилишини исботланг.

521. Тенгсизликларни исботланг:

1) $x^2+2x+2>0$; 2) $y^2-6y+10>0$;

3) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$; 4) $a^2-ab+b^2\geqslant 0$.

B

522. 1) $5<y<8$; 2) $0{,}125<y<0{,}25$ экани маълум, $\frac{1}{y}$ ифодани баҳоланг.

523. Таърифдан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

1) $3(a+1)+a<4(2+a)^2$; 2) $(7p-1)(7p+1)<49p^2$;

3) $(a-2)^2>a(a-4)$; 4) $(2a+3)(2a+1)>4a(a+2)$;

5) $2b^2-6b+1>2b(b-3)$; 6) $(c+2)(c+6)<(c+3)(c+5)$;

7) $p(\mathrm{p}+7)>7p-1$; 8) $8e(3e-10)<(5e-8)^2$.

524. x нинг ҳар қандай қийматларида қуйидаги тенгсизликлар бажариладими:

1) $4x(x+0{,}5)>(2x+3)(2x+3)$;

2) $(3x+8)^2>3x(x+16)$;

3) $(5x-1)(5x+1)<25x^2+2$;

4) $(7+2x)(7-2x)<49-x(4x+1)$.

525. Тенгсизликларни исботланг:

1) $a(a+b)\geqslant ab$; 2) $a(a-b)\geqslant b(a-b)$;

3) $2bc\leqslant b^2+c^2$; 4) $m^2-mn+n^2\geqslant mn$;

5) $10a^2-5a+1\geqslant a^2+a$; 6) $a^2-a\leqslant 50a^2-15a+1$;

7) $\frac{c^2 \square 1}{2}\geqslant c$; 8) $\frac{c}{c^2 \square 1}\leqslant\frac{1}{2}$.

526. Агар a ва b сонлари ўзаро тенг бўлмаган мусбат сонлар бўлса, a^3 ва b^3 ифодалардан қайси бири катта?

527. Тенгсизликларни таъриф бўйича исботланг:

1) $(6y-1)(y+2)<(3y+4)(2y+1)$;

2) $(3x-1)(2x+1)<(2x-1)(2+3x)$;

3) $x^2+4y^2+3z^2>2x+12y+6z-14$;

4) $a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$;

528. Тескари фараз усулида исботланг:

1) $a+\dfrac{1}{a}\geq 2(a>0)$; 2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 4(a>0, b>0)$;

3) $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ad}\,\square\sqrt{cd}$ ($a\geqslant0$, $b\geqslant0$, $c\geqslant0$, $d\geqslant0$);

4) $\dfrac{a^2}{a^4\,\square 1}\leqslant 0{,}5$; 5) $ab(a+b)\leqslant a^3+b^3$ ($a\geqslant0$, $b\geqslant0$);

6) $a^5+b^5\geqslant a^4b+ab^4$ ($a\geqslant0$, $b\geqslant0$).

529. Таянч тенгсизликлар усулидан фойдаланиб исботланг:

1) $x^2+2y^2+2xy+6y+10\geqslant0$; 2) $a^2+b^2+c^3\geqslant ab+bc+ca$;

3) $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}\,\square\sqrt{bc}\,\,\square\sqrt{ca}$ ($a\geqslant0$, $b\geqslant0$, $c\geqslant0$);

4) $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$ ($a\geqslant0$, $b\geqslant0$, $c\geqslant0$, $a+b+c=1$);

5) $\dfrac{x^2\,\square 2}{\sqrt{x^2\,\square 1}}\geqslant 2$; 6) $\dfrac{x\,\square y}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2\,\square y^2}{2}}$ ($x\geqslant0$, $y\geqslant0$).

530. Сонларни таққосланг:

1) $\dfrac{86}{87}$ ва $\dfrac{87}{88}$; 2) $\dfrac{113}{112}$ ва $\dfrac{112}{111}$;

3) $436\cdot438$ ва 437^2; 4) 74^2-27^2 ва 73^2-26^2;

5) $\sqrt{23}\,\square\sqrt{11}$ ва $\sqrt{22}\,\square\sqrt{10}$;

6) $\sqrt{38}\,\square\sqrt{20}$ ва $\sqrt{37}\,\square\sqrt{21}$.

531. Ифодаларни таққосланг:

1) $(a-1)(a+2)$ ва $(a-3)(a+4)$; 2) a^2+1 ва $2|a|$;

3) a^2+5 ва $2a+3$; 4) $1-a$ ва $\dfrac{1}{a}\,\square 1$ ($a>0$);

5) a^2+25 ва $10a$; 6) $(b+3)^2$ ва $(b+2)(b+4)$;

7) $(a-2)^2$ ва $4(1-a)$; 8) b^4+1 ва $2a|a|$.

C

532. Агар $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ бўлса, $\sqrt{a}\,\square\sqrt{b}\geqslant\sqrt{a\,\square b}$ тенгсизликни исботланг.

533. Агар $a>0$, $b>0$ бўлса, $\dfrac{a}{\sqrt{b}}\,\square\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}\,\square\sqrt{b}$ тенгсизликни исботланг.

534. Агар $a>0$, $b>0$, $c>0$ бўлса, $\frac{bc}{a} \square \frac{ac}{b} \square \frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$ тенгсизликни исботланг.

535. Агар $x^2+y^2=1$ бўлса, у ҳолда $-\sqrt{2} \leqslant x+y \leqslant \sqrt{2}$ тенгсизликни исботланг.

536. Агар $a^2+b^2=2$ бўлса, у ҳолда $a^4+b^4 \geqslant 2$ тенгсизликни исботланг.

537. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}>2$ тенгсизликни исботланг.

538. Тенгсизликни исботланг: $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geqslant 16abc$ бунда $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

539. Учбурчакнинг ҳар бир томони унинг ярим периметридан кичик эканини исботланг.

540. Агар a, b, c сонлари учбурчак томонларининг узунликларига тенг бўлса, $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$ тенгсизликни исботланг.

541. Моторли қайиқнинг турғун сувда 20 км масофани сузиб ўтишга сарфлаган вақти билан дарё оқимига қарши 10 км ва оқим бўйича 10 км масофани сузиб ўтишга сарфлаган вақтларини таққосланг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

542. Тенгсизликни ечинг:

1) $\frac{3x-2}{5}-\frac{x+6}{10}>1$; 2) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<1$.

543. Турғун сувдаги тезлиги 20 км/соат бўлган катер дарё оқимига қарши 36 км ва оқим бўйича 22 км масофани 3 соатда сузиб ўтди. Дарё оқимининг тезлигини топинг.

544. b нинг қандай қийматларида $2x^2+bx+18=0$ тенгламанинг иккита илдизи мавжуд бўлади?

2-§. Квадрат тенгсизликларни ечиш

2.1. Тенгсизликларни ечиш тушунчаси

«Тенгсизликларни ечиш» деган тушунчани аввалги параграфда қаралган «тенгсизликларни исботлаш» тушунчаси билан чалкаштирмаслик лозим. Агар тенгсизликларни исботлашда унинг таркибига кирадиган барча ўзгарувчи (ҳарфларнинг) қабул қиладиган қийматларида берилган тенгсизликни исботлаш лозим бўлса, у ҳолда тенгсизликларни ечиш принципи бундан бирмунча ўзгачадир. Тенгсизликни ечиш учун таркибидаги уни маънога эга келадиган ўзгарувчиларнинг барча қийматларини топиш керак. Ўзгарувчининг тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматлари унинг ***ечимлари*** (илдизлари) деб аталади. Масалан $x^2-2x+3>2x^3-1$, $\frac{x-1}{x^2+1}>1$, $ax+b<x^2$, (a, b – берилган сонлар) ва шу каби бир ўзгарувчили тенгсизликлардир. $x=1$ сони $-x^2-2x+3>2x^3-1$ тенгсизликнинг ечими. Бунга бевосита текшириш орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин: $1^2-2\cdot1+3>1^3-1\square2>0$.

Демак, ***тенгсизликларни ечиш – унинг барча ечимларини топиш ёки ечимлари йўқлигини исботлаш*** демакдир. Айни бир хил ечимга эга бўлган тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлар деб аталади. Масалан, $x^2+2x>(x-1)(x+1)$ ва $2x>-1$ тенгсизликлар тенг кучли. Ечимга эга бўлмаган тенгсизликлар ҳам тенг кучли ҳисобланади. Масалан, $x^2+1<0$ ва $x^4+x^2+3<1$ тенгсизликлар тенг кучли, чунки тенгсизликларнинг ечимлари йўқ.

Умуман, тенгсизликларни ечишда ҳам 1-параграфда қаралган хоссалардан фойдаланилади.

1. Агар тенгсизликнинг иккала қисмига айни бир сон ёки ифода қўшилса (айирилса), унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

2. Агар тенгсизликнинг бир қисмидан иккинчисига қўшилувчи қарама-қарши ишора билан ўтказилса, унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

3. Агар тенгсизликнинг иккала қисми айни бир мусбат сонга кўпайтирилса ёки бўлинса, унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

4. Агар тенгсизликтшг иккала қисми айни бир манфий сонга кўпайтирилса ёки бўлинса ва тенгсизликнинг ишораси қарама-қаршисига ўзгартирилса, унга тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

2.2. Бир ўзгарувчили квадрат (иккинчи даражали) тенгсизликларни ечиш

$ax^2+bx+c<0$ ва $ax^2+bc+c>0$ кўринишдаги тенгсизликлар бир ўзгарувчили ***квадарт*** (***иккинчи даражали***)

тенгсизликлар деб аталади. Энди бир ўзгарувчили иккинчи даражали тенгсизликларни ечамиз.

1-мисол. $2x^2-3x+1>0$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. $2x^2-3x+1$ квадрат учҳаднинг илдизлари $x_1=05$, $x_2=1$ бўлгани учун, уни кўпайтувчиларга ажратиш орқали берилган тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$2(x-0,5)(x-1)>0$

Бу тенгсизликнинг ўнг қисмининг ишораси $x-0,5$ ва $x-1$ иккиҳадларнинг ишораларига боғлиқ. Бунда шу иккиҳадларнинг кўпайтмаси мусбат бўлиши учун уларнинг иккаласи ҳам мусбат қийматлар қабул қилиши ёки иккаласи ҳам манфий қийматлар қабул қилиши керак. Чунки иккита манфий ифодаларнинг кўпайтмаси мусбат бўлади. Демак, берилган квадрат тенгсизлик қуйидагича бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликлар системасига тенг кучли.

$$\begin{cases} x-0,5>0, \\ x-1>0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x-0,5<0, \\ x-1<0. \end{cases}$$

Бундай чизиқли тенгсизликлар системаларини ечиш усулларини сиз 6-синфда ўргангансиз. Бу системаларни $\begin{cases} x>0,5, \\ x>1 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x<0,5, \\ x<1 \end{cases}$ кўринишда ёзиб, биринчи системанинг ечими $x<1$ тенгсизлик билан, иккинчисининг ечими $x>1$ тенгсизлик билан ифодаланишини кўрамиз, яъни x□(1; +□) ёки x□(−□; 0,5) бўлади. Шу олинган ечимларнинг бирлашмаси берилган тенгсизликнинг жавобидир. Чунки бу системалар ҳар иккаласининг ечимлари берилган тенгсизликнинг ечими бўлади. Жавоби: x□(−□; 0,5)□(1; +□).

2-мисол. $4x^2+4x+3>0$ тенгсизликни ечиш керак.

Ечилиши. Тенгсизликнинг ўнг қисмидаги квадрат учҳадни тўла квадратга ажратиб ёзиш орқали берилган тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$(2x+1)^2+2>0$.

Бу тенгсизлик x ўзгарувчининг ҳар қандай қийматида бажарилади, яъни тенгсизликнинг ечими: x□(−□; +□).

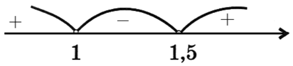
Квадрат тенгсизликларни яна бир қулай усулда ечиш мумкин. Бу усул ***оралиқлар усули*** дейилади ва бу усулни кейинги параграфда ўрганамиз.

3-мисол. $2x^2-5x+3<0$ тенгсизликни ечамиз.

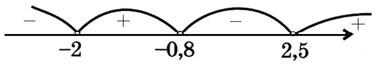
Ечилиши. $D=25-24=1>0$ бўлгани учун, квадрат учҳад иккита илдизга эга: $x_1=1$, $x_2=1,5$. Бунда $2x^2-$

$5x+3=2(x-1)\square(x-1{,}5)$ тенглик бажарилиб, берилган тенгсизлик $2(x-1)\square(x-1{,}5)=0$ кўринишида ёзилади. 1 ва 1,5 сонлари сонлар ўқини уч қисмга ажратади: $(-\square; -1)$, $(1; 1{,}5)$ ва $(1{,}5; +\square)$. Қуйидаги жадвалда $(x-1)$,$(x-1{,}5)$ ва $(x-1)(x-1{,}5)$ ифодаларнинг шу оралиқлардаги ишоралари кўрсатилган:

Оралиқлар	$(-\square; -1)$	$(1; 1{,}5)$	$(1{,}5; +\square)$
$x-1$	−	+	+
$x-1{,}5$	−	−	+
$(x-1)(x-1{,}5)$	+	−	+



63-расм



64-расм

Бундан, агар $x\square(-\square; 1)$ бўлса, у ҳолда $2x^2-5x+3>0$; агар $x\square(1; 1{,}5)$ бўлса, у ҳолда $2x^2-5x+3<0$; агар $x\square(1{,}5; +\square)$ бўлса, у ҳолда $2x^2-5x+3>0$ тенгсизлик бажарилишини кўрамиз. Бу маълумотлар 63-расмда схематик равишда тасвирланган. Демак, жавоби: $x\square(1; 1{,}5)$.

4-мисол. $(x+2)(x+0{,}8)(x-2{,}5)>0$ тенгсизликни ечиш керак.

Ечилиши. Бу тенгсизликни оралиқлар усулидан фойдаланиб ечиш қулайдир. Тенгсизликнинг чап қисмида жойлашган ифода $x_1=-2$; $x_2=-0{,}8$ ва $x_3=2{,}5$ нуқталарда нолга айланади. Бу нуқталар эса сон ўқини тўрт оралиққа ажратади. Шу оралиқлардаги $(x+2)$ $(x+0{,}8)(x-0{,}8)(x-2{,}5)$ кўпайтманинг ишораси 64-расмда тасвирланган. Жавоби: $x\square(-2; -0{,}8)\square(2{,}5; +\square)$.

2.3. Бир ўзгарувчили квадрат тенгсизликларни график усулда ечиш

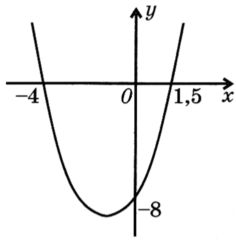
Бир ўзгарувчили квадрат тенгсизликни график усулда ечишнинг маъносини тушуниш учун асосан $y=ax^2+bx+c$ $(a\square 0)$ квадрат функция хоссаларидан фойдаланамиз.

5-мисол. $3x^2+10x-8<0$ тенгсизликни ечамиз.

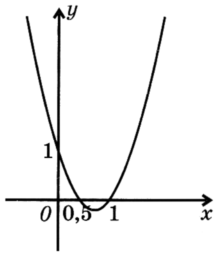
Ечилиши. $y=3x^2+10x-8$ функциянинг графиги – тармоқлари юқорига йўналган параболадир. $3x^2+10x-8$ квадрат учҳаднинг илдизлари $x_1=-4$ ва $x_2=\frac{2}{3}$ бўлгани учун, бу парабола Ox ўқини $A(-4;0)$ ва $B(\frac{2}{3}; 0)$ нуқталарда кесиб ўтади (65-расм). Расмдан $-4<x<\frac{2}{3}$ бўлганда

$3x^2+10x-8$ квадрат учҳад манфий қийматлар қабул қилишини кўрамиз. Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлари $(-4;\ \frac{2}{3})$ сонли ораликдир.

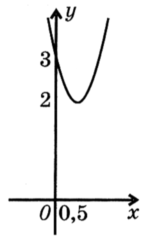
Шунга ўхшаш, 2-мисолда қаралган $2x^2-3x+1>0$ тенгсизликни ҳам график усулда ечиш мумкин. Бунда $y=2x^2-3x+1$ квадрат функциянинг графиги абсциссалар ўқини $x_1=0,5$ ва $x_2=1$ нуқталарда кесиб ўтишини ҳамда $x<0,5$ ёки $x>1$ бўлганда бу квадрат учҳад мусбат қийматлар қабул қилишини кўрамиз.



65-расм



67-расм

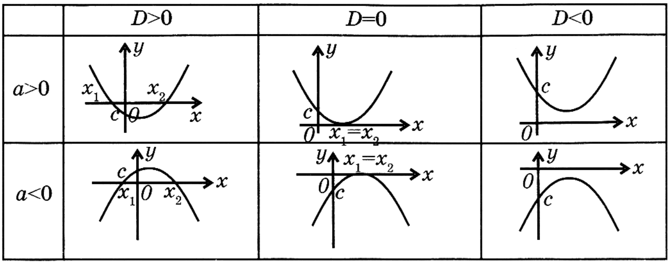


66-расм

Демак, бу тенгсизликнинг ечими (−□;0,5) ва (1;+□) ораликларнинг бирлашмасидан иборат: x□(−□;0,5)□(1;+□) (66-расм).

2-мисолда қаралган квадрат учҳаднинг графиги *Ox* ўқи билан кесишмайдиган, тармоқлари юқорига йўналган пароболадир. Бунда $4x^2+4x+3$ квадрат учҳад фақат мусбат қийматларни қабул қилади, яъни жавоби: x□(−□;+□) (67-расм).

Шундай қилиб, биз юқорида квадрат тенгсизликларни ечиш учун мос квадрат функция графигининг *Ox* ўқига боғлиқ ҳолда жойлашиш хусусиятларини қўлладик. Бу хусусиятлар а коэффициентнинг ишораси билан D дискриминантнинг қийматига боғлиқ. a нинг ишорасига қараб, пароболанинг тармоқлари ё юқорига ёки пастга йўналгани, D нинг ишорасига қараб, пароболанинг *Ox* ўқига нисбатан жойлашиши аниқланади (агар $D>0$ бўлса, у ҳолда парабола *Ox* ўқи билан иккита нуқтада кесишади, агар $D=0$ бўлса, парабола билан *Ox* ўқи фақат битта умумий нуқтага эга бўлади, $D<0$ бўлса, парабола билан *Ox* ўқи кесишмайди). 68-расмда $y=ax^2+bx+c$, a□0 функция графигининг *Ox* ўқига нисбатан жойлашиши кўрсатилган.



68-расм

2.4. Бир ўзгарувчили тенгсизликлар системасини ечиш

Сиз 6-синфда бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликлар системасини ечишни ўргандингиз. Энди биз, асосан, бир ўзгарувчили квадрат тенгсизликлар системасини ечишни кўриб чиқамиз.

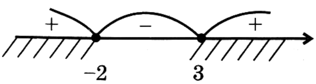
Бир ўзгарувчили тенгсизликлар системасини ечиш учун унинг таркибидаги ҳар бир тенгсизлик алоҳида ечилади ва топилган ечимларнинг кесишмаси берилган системанинг жавоби сифатида олинади. Мисол келтирамиз.

6-мисол. $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 4x - 6 < 0 \end{cases}$

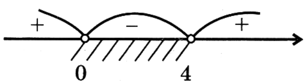
тенгсизликлар системасини ечамиз.

Ечилиши. Системанинг ҳар бир тенгсизлиги квадрат тенгсизликдир. Уларнинг ҳар бирини оралиқлар усулида ечамиз. квадрат учҳаднинг илдизлари −2 ва 3 сонлари бўлгани учун, тенгсизликнинг ечими x□(−□;−2]□[3; +□) бўлади (69-расм). $x^2-4x=0$ тенгламанинг илдизлари 0 ва 4 га тенг бўлгани учун, $x^2-4x<0$ тенгсизликнинг ечими x□(0;4) сонли оралиқдан иборат (70-расм). Бундан берилган система ечими қуйидагича бўлади:

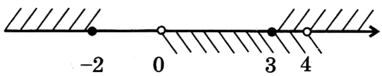
{(−□; −2]□[3; +□)□(0; 4)=[3; 4) (71-расм).



69-расм



70-расм



71-расм

T

1. Тенгсизликни ечиш деганда нимани тушунасиз?
2. Тенгсизликнинг ечими нима?
3. Қандай тенгсизликлар тенг кучли тенгсизликлар дейилади?
4. Қандай тенгсизликлар квадрат тенгсизликлар дейилади?
5. Квадрат тенгсизликлар қандай ечилади? Оралиқлар усули қандай қўлланилади?
6. Квадрат тенгсизликларнинг геометрик маъносини тушунтиринг.
7. Бир ўзгарувчили тенгсизликлар системаси қандай ечилади?

МИСОЛЛАР

А

545–548, 552–554-мисолларда берилган тенгсизликларни ечинг.

545. 1) $x^2<9$; 2) $x^2\geqslant4$;
3) $(3x-5)^2<1$; 4) $(2-5x)^2\geqslant16$;
5) $(x-7)^2+1>0$; 6) $49-(3x+2)^2\geqslant0$.

546. 1) $(x-1)(2x-3)<0$; 2) $(x+3)(x-1)\geqslant0$;
3) $5(x \square \frac{1}{5})(x+4)>0$; 4) $(x+2)(2x+7)\geqslant0$;
5) $(3x+1)(x+3)<0$; 6) $(5x-3)(2x-3)\leqslant0$.

547. 1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4\geqslant0$;
3) $x^2-8x-9<0$; 4) $-x^2-2x-5\geqslant0$;
5) $-x^2+x+6\geqslant0$; 6) $2x^2+3x-5\geqslant0$.

548. 1) $6x^2-7x+1<0$; 2) $25x^2-10x+1\geqslant0$;
3) $49x^2-28x+4<0$; 4) $8x^2+10x-3\geqslant0$;
5) $2y^2+9y+9\leqslant0$; 6) $x^2+7x-60<0$.

549. 1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2\leqslant0$; 3) $x^2-4\leqslant0$; 4) $5-x^2>0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча бутун сонларни топинг.

550. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\sqrt{(x-3)(x+1)}$; 2) $y=\sqrt{(2x-1)(x+4)}$;
3) $y=\sqrt{(x-2)(5-x)}$; 4) $y=\sqrt{(4x+3)(3-2x)}$.

551. Тенгсизликлар системасини ечинг ва ечимларини сонлар ўқида тасвирланг:

1) $\begin{cases} 17x - 2 > x - 4; \\ 3 - 9x < 1 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 25 - 6x \le 4 + x, \\ 3x + 7,7 > 1 + 4x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 5 \ge 4 - x, \\ 7 - 3x < 12 + x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 4 < 8, \\ 2x + 5 < 13, \\ 3 - x > 1; \end{cases}$; 5) $\begin{cases} 2x - 1 < x + 3, \\ 5x - 1 > 6 - 2x, \\ x - 3 < 0; \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 3x - 5 < x - 3, \\ 2x + 4 < 3x + 5, \\ 7 - 2x > x - 2. \end{cases}$

B

552. 1) $3x^2+40x+10<x^2+11x+3$;
2) $9x^2-x+9\geqslant 3x^2+18x-6$;
3) $2x^2-8x-111<(3x-5)(2x+6)$;
4) $(5x+1)(3x-1)<(4x-1)(x+2)$;
5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$;
6) $(3x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

553. 1) $(x-3)^2(x+1)<0$; 2) $(2x+3)^2(x-5)>0$;
3) $|x-3|(x+1)\geqslant 0$; 4) $|x-5)(2x+3)\leqslant 0$.

554. 1) $(x^2-4)(2x-1)<0$; 2) $(9-y^2)(6-5x)\geqslant 0$;
3) $(x-1)(x+2)(3x-1)>0$; 4) $(2x-5)(x+0,5)(3x+7)\leqslant 0$.

555. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:
1) $y = \sqrt{144 - 9x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 63}$;
3) $y = \sqrt{x(x + 16) + 64}$; 4) $y = \sqrt{36 - 5x - x^2}$.

556. 1) $x^2<a^2$ тенгсизлик $|x|<a$, $(a>0)$ тенгсизликка; 2) $x^2>a^2$ тенгсизлик $|x|>a$, $(a>0)$ тенгсизликка тенг кучли эканини исботланг.

557. 1) $|x|<a$, $(a>0)$ тенгсизлик $-a<x<a$ тенгсизликлар билан; 2) $|x|>a$, $(a>0)$ тенгсизлик $x<-a$ ва $x>a$ тенгсизликлар бирлашмаси билан тенг кучли эканини исботланг.

558. Тенгсизликни ечинг:
1) $|x-3|<2$; 2) $|x+1|>3$; 3) $|2x+1|/\leqslant 1$; 4) $\left|x + \frac{1}{2}\right| \ge 4$.

559. x нинг қандай қийматларида: 1) $y=-x^2+8x+2$

(a>0) функциянинг қиймати 9 дан катта; 2) $y=x^2+x-6$ функциянинг қиймати 4 дан кичик бўлади?

560. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x-42}}{x-11}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+2}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{4x-5x^2}}{2x-1}$; 5) 4) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-16x}}{x+3}$.

561. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ 7x>0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-35x-4<0, \\ 3x-12>0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+7x+10<0, \\ 4x-3,6>0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+7>0, \\ x^2+5x\le 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2+5x+20\le 0, \\ x-1,5\ge 0. \end{cases}$

C

562. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}$; 2) $y=\sqrt{7x-14}-\sqrt{x^2-15x+56}$;

3) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-x^2}$; 4) $y=\dfrac{2}{x}-\sqrt{x^2-5x+6}$;

5) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-12x-7}}{x}-6x$; 6) $y=\dfrac{\sqrt{15-19x+6x^2}}{x-1}+\dfrac{6}{x}$.

563*. a нинг қандай қийматларида $x^2-(a^2-2a-3)x-a^3+3a+2\leqslant 0$ тенгсизликнинг ечимлари [2; 4] оралиқда ётади?

564. Агар $a^2+12b<0$ бўлса, $3x^2-b\leqslant ax$ тенгсизликни ечинг.

565. Агар $b>0,05a^2$ бўлса, у ҳолда $5x^2-ax+b>0$ тенгсизликни ечинг.

566. Тўғри тўртбурчакнинг бўйи унинг энидан 5 см узун. Шу тўғри тўртбурчакнинг юзи 36 см2 дан кичик бўлмаслиги учун унинг эни қандай бўлиши керак?

567. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2-2x+3>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}\geq\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

568. Тенгсизликлар тенг кучлими?

1) $\dfrac{x-3}{x+1}\geq 0$ ва $(x-3)(x+1)\geqslant 0$;

2) $\dfrac{x+5}{x-8}<0$ ва $(x+5)(x-8)<0$?

569. a нинг қандай қийматларида: 1) $(x+4)^2>a$; 2) $(2x-3)^2\geqslant 3a-12$; 3) $4x^2-4x+1+a>0$; 4) $x^2-8x+a\geqslant 0$ тенгсизлик ҳар қандай x учун бажарилади?

570. a нинг қандай қийматларида:

1) $x^2+ax+7=0$; 2) $x^2-(a-2)x+1=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари бўлмайди?

571. a нинг қандай қийматларида: 1) $2x^2-ax+2=0$; 2) $x^2-(2-3a)x+1=0$ тенглама турли иккита илдизга эга?

572. Тенгсизликни квадратга кўтариш усулида ечинг:

1) $|x+1|<3x-1$; 2) $|x-3|<6-2x$;

3) $|x-2|\geqslant 3x-1$; 4) $|2x+3|\leqslant x+4$.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

573. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 5(x+2)-9(x+1)-3<1-4(x+3), \\ 7(3+5x)<3x-5(x-2); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{4}>\dfrac{5x}{2}-\dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{(2x+1)}{4}<5\dfrac{1-2x}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-1>3-5x, \\ 3x+2>3-4x, \\ 5x-3<2x+5. \end{cases}$

574. Тенгламани квадратга кўтариб ечинг:

1) $|2x-4|=10-5x$; 2) $|-4-x|=\frac{3x}{2}+1$.

575. Ўйланган икки хонали сон рақамларининг йиғиндисини 6 марта орттириб, чиққан сондан икки айирилса, ўйланган соннинг ўзи ҳосил бўлади. Ўйланган сонни топинг.

3-§. Рационал тенгсизликларни ечиш

Агар $f(x)<g(x)$ кўринишда берилган тенгсизликдаги $f(x)$ ва $g(x)$ рационал ифодалар бўлса, бу тенгсизлик ***рационал тенгсизлик*** деб аталади. Масалан,

$$\frac{3x+2}{x-1}>0,\quad \frac{1}{x-1}<\frac{2x+1}{x^2-1},\quad x^2+x-2\geqslant 0,\quad \frac{3-2x}{x^2-3x+2}\leq 4$$

рационал тенгсизликлар ҳисобланади. Кўп ҳолларда рационал тенгсизликлар оралиқлар усулида ечилади. Бунга мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $\frac{x-2}{x+2}\geq\frac{2x-3}{4x-1}$ тенгсизликни ечиш керак.

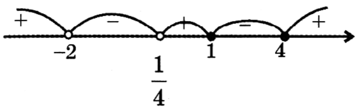
Ечилиши. Берилган тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $x+2\square 0$ ва $4x-1\square 0$, яъни $x\square -2$, $x\square \frac{1}{4}$ тенгсизликлар билан аниқланади.

Энди берилган тенгсизликни $\frac{x-2}{x+2}-\frac{2x-3}{4x-1}\geq 0$ кўринишда ёзиб, уни умумий махражга келтирамиз:

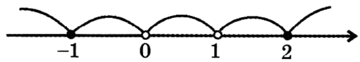
$$\frac{(x-2)(4x-1)-(2x-3)(x+2)}{(x+2)(4x-1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-5x+4\right)}{(x+2)(4x-1)}\geq 0.$$

Бунда x^2-5x+4 квадрат учҳаднинг илдизлари 1 ва 4 бўлгани учун, $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ тенглик бажарилади.

Шунингдек, $4x-1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ тенгликка асосан сўнгги тенгсизликни $\frac{(x-1)(x-4)}{2(x+2)(x-\frac{1}{4})}\geq 0$ кўринишга келтириб ёзамиз. Бу тенгсизликка оралиқлар усулини қўллаш учун касрнинг сурат ва махражидаги туб кўпайтувчиларни нолга айлантирадиган -2; $\frac{1}{4}$; 1; 4 нуқталар ёрдамида сонлар ўқини 5 та оралиққа ажратамиз (72-расм). Бу оралиқларнинг ҳар бирида 3-§, 3-мисолда кўрсатилгандай, ҳар бир



72-расм



73-расм

кўпайтувчиларнинг ишораларини аниқлаб, «+» ва «−» ишораларини қўйиб чиқамиз (72-расм). Жавоби: $x\square(-\square; -2)\square\left(\frac{1}{4}; 1\right]\square[4; +\square)$.

72-расмда $x=1$ ва $x=4$ нуқталар бўялган, $x=-2$ ва $x=\frac{1}{4}$ нуқталар эса бўялмаган. Бўялган нуқталар мисол жавобига тегишли эканини, бўялмаган нуқталар мисол жавобига тегишли эмаслигини билдиради. $x=-2$ ва $x=\frac{1}{4}$ нуқталар аниқланиш соҳасига кирмаганлиги учун, улар мисол жавобида ҳам кўрсатилмайди. Тенгсизликнинг ишораси ноқатъий бўлгани учун, $x=1$ва $x=4$ нуқталар берилган тенгсизликни қаноатлантиради. Шунинг учун, бу нуқталар мисол жавобига киради.

2-мисол. $\frac{(x+1)^2(x^3-8)}{(x-1)^4\cdot x^3}\le 0$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $x\square 0, x\square 0$ бўлади. Берилган тенгсизликни $\frac{(x+1)^2(x-2)(x^3+2x+4)}{(x-1)^4\cdot x^3}\le 0$ кўринишда ёзамиз. $x^2+2x+4(x+1)^2+3>0$ бўлгани учун, бу квадрат учҳад тенгсизлик ишорасига таъсир қилмайди. Шунинг учун берилган тенгсизлик $\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^4\cdot x^3}\le 0$ тенгсизликка тенг кучли. Бунда $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$ нуқталар сонлар ўқини 5 оралиққа ратади. 73-расмда $\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)^4\cdot x^3}$ ифоданинг қабул қиладиган ишоралари кўрсатилган. $x=-1$, $x=2$ нуқталар мисол жавобига киради, $x=0$, $x=1$нуқталар эса кирмайди.

Жавоби: $x\in\{-1\}\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2]$.

Бу мисолдан тенгсизликнинг ўнг кисмидаги ифода $x=a$ нуқта атрофида ишорасини ўзгартириши ёки ўзгартирмаслиги унинг таркибидаги $x-a$ иккиҳаднинг даража кўрсаткичига боғлиқ эканини кўрамиз. Умуман олганда, агар даража кўрсаткичи тоқ сон бўлса, ифода $x=a$ нуқта атрофида ўз ишорасини ўзгартиради, даража кўрсаткичи жуфт сон бўлганда эса ифода $x=a$ нуқта атрофида ўз ишорасини ўзгартирмайди. Масалан, $(x+1)^2\geqslant 0$ ва $(x-1)^2>0$ бўлганда, $x=-1$, $x=1$ нуқталарнинг иккала томонида ҳам бир хил ишоралар тасвирланган, $x=0$, $x=2$ нуқталар атрофидаги ишоралар эса ҳар турли (чунки x^3, $x-2$ – тоқ даражали).

? 1. Қандай тенгсизликлар рационал тенгсизликлар дейилади?
2. Рационал тенгсизликларнинг аниқланиш соҳаси қандай топилади?
3. Оралиқлар усулининг маъноси қандай?

МИСОЛЛАР

А

576–590-мисоллардаги тенгсизликларни ечинг.

576. 1) $(x-1)(x+1)\leqslant 0$; 2) $x(7-x)>0$;
3) $x^2(x-1)(x+2)\geqslant 0$; 4) $x^2(3-x)(x+1)\leqslant 0$;
5) $-x^2+5x+6\geqslant 0$; 6) $3x^2-7x+2<0$.

577. 1) $\dfrac{x+2}{3+x}>0$; 2) $\dfrac{x-10}{2-x}<0$; 3) $\dfrac{1}{x-3}\leq-\dfrac{1}{10}$; 4) $\dfrac{3-2x}{x^2+3}\geq 1$.

578. 1) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}\leq 0$; 2) $\dfrac{x^2+9x+20}{x+4}>0$;
3) $\dfrac{x^2-6x}{4-3x-x^2}\geq 0$; 4) $\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+x+1}<1$.

579. 1) $\dfrac{1}{x}\ \square\ \dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{x-1}{x+5}\geq 2$;
3) $\dfrac{x^2-36}{x^2+6x}<0$; 4) $\dfrac{x-1}{x+3}>3$.

580. 1) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2}>0$; 2) $\dfrac{(2x-3)(3x-17)}{(x+1)(x+4)}\leq 0$;

3) $\dfrac{(1-x)(x+1)}{x(5x+1)} \ge 0$; 4) $\dfrac{(2-x)(3+2x)}{x(1-x)} < 0$.

581. 1) $\dfrac{2x^2+16x-3}{x^2+8x} > 2$; 2) $\dfrac{2x^2+x-1}{5x+x^2+7} > 0$;

3) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} < 0$; 4) $\dfrac{x^4+x^2+3}{-x^2+x+2} > 0$.

582. 1) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2} > 0$; 2) $\dfrac{(x^3-64)(-x^2-1)}{x^3+1} \ge 0$;

3) $\dfrac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2-x+1} \le 0$; 4) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4} \ge 0$.

583. 1) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1} \ge \dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{x+7} \le 0$;

3) $1+\dfrac{x^2}{(1+x)^2} \ge \dfrac{5}{4}$; 4) $\dfrac{(x+6)^3(x+4)}{(2-x)^6} \ge 0$.

B

584. 1) $\dfrac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)} > 0$; 2) $\dfrac{(x-1)^2}{(5x+10)^2(-1-3x)^2} < 0$;

3) $\dfrac{x^2(6-x)^3(x+3)}{(x+7)^5} \ge 0$; 4) $\dfrac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5} \le 0$;

585. 1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1} \ge \dfrac{1}{x+2}$; 2) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x} > \dfrac{3}{x-1}$;

3) $\dfrac{6}{x-1} \le \dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$; 4) $\dfrac{21}{x+1} < \dfrac{16}{x-2}-\dfrac{6}{x}$.

586. 1) $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1} < \dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$;

2) $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3} \le \dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$;

3) $\dfrac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2+6x+9} > \dfrac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$;

4) $\dfrac{(x^2-6x+9)(3x^2-2x-1)}{5-x} > \dfrac{(x^2-6x+9)(2+2x-4x^2)}{5-x}$.

587. 1) $\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)^2 > 0$; 2) $\dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{6}{x-2} + 9 > 0$;

3) $(x+3)^2+(x^2+6x+9)^{-1}>2$; 4) $x^2 + \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-2x+1} > \dfrac{8x-2x^2}{x-1}$.

588. 1) $\dfrac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+2)^2(5-x)} \geq 0$; 2) $\dfrac{(x^2+2x-8)(x^3-4x)}{x^2+7x+10} > 0$.

589. 1) $\dfrac{(2x^2+4x)(3x-x^2)}{(2x+5)^2} \leq 0$; 2) $\dfrac{x^2-2x-1}{(2x+5)(x+2)^2} < 0$.

590. 1) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x-1} \leq 1$; 2) $3x + \dfrac{x-1}{2x-1} \geq \dfrac{2x^2-1}{2x-1}$.

591. Тенгсизликнинг барча бутун ечимларини йиғиндисини топинг:

1) $\dfrac{x^3+2x^2+7}{7-x} \geq 1$; 2) $\dfrac{x^3+17x}{x+8} \leq 2x$.

C

592. $1 \leq \dfrac{5x-8}{2x+1} \leq 2$ тенгсизликни каноатлантирадиган x нинг барча бутун қийматларини топинг.

593. $y = \dfrac{x-13}{x^2+x-6}$ функциянинг графиги x нинг қандай қийматларида $0 \leqslant y \leqslant 1$ ораликда ётади?

594. x нинг қандай қийматларида: 1) $y=1-\frac{4}{x-2}$ функциянинг графиги $y=\frac{5}{x^2-4x+4}$ функциянинг графигидан пастда;

2) $y=\frac{2}{x-3}$ функциянинг графиги $y=\frac{8}{x^2-6x+9}-1$ функциянинг графигидан юқорида жойлашади?

595. Тенгсизликни ечинг:

1) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\geq 1;$ 2) $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|>2.$

596. Тенгсизликни ечинг:

1) $x^2-2x-8<|x-4|;$ 2) $|x-2x^2|>2x^2-x.$

597. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}\frac{3x-2}{2}-\frac{x}{3}\geq\frac{2-x}{6},\\ x\geq 1-\frac{1-8x^2}{x-4};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x^2-7}{2}>1,\\ \frac{3x-8}{5}-\frac{6-x}{2}\geq 2x-7.\end{cases}$

598. Тенгсизликни ечинг:

1) $\begin{cases}x\leq 3-\frac{1}{x-1},\\ |x+1|<4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x+7}{x-5}+\frac{3x+1}{2}\geq 0,\\ |5-x|\leq 2.\end{cases}$

599. $\frac{x^2-4x}{x-1}\leq 0$ тенгсизликнинг $(x^2-1)(3-x)\geqslant 0$ тенгсизликни каноатлантирувчи барча ечимларини топинг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

600. 10 сони $y=\sqrt{x^2-2x+12}$ функциянинг қийматлар соҳасида ётадими?

601. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$; 2) $y=\sqrt{x(x-4)}$.

4-§. Текисликдаги фигураларнинг икки ўзгарувчили тенг-ламалар, тенгсизликлар ва уларнинг системалари орқали берилиши

4.1. Икки ўзгарувчили тенгламалар

Агар тенгламанинг таркибида бир эмас, ***бир неча ўзгарувчи қатнашса, бу тенглама бир неча ўзгарувчили тенгламалар*** деб аталади. Масалан, $x^2+y^2+z^2-xy+xz+2yz+2=0$, $xyz+9=0$ тенгламалар уч ўзгарувчили тенгламалардир. $x^2+y^2+z^2-xy+z^2-xy+xz+2yz+2=0$, $xyz+9=0$ кўринишдаги тенгламалар икки ўзгарувчили тенгламалар. Кўп ўзгарувчили тенгламаларнинг даражасини топиш учун унинг таркибидаги ҳар бир бирҳаднинг даражаси аникланади. Аниқланган даражалар таққосланиб, улар орасидан энг каттаси топилади. Топилган бу сон тенгламанинг ***даражаси*** дейилади. Масалан, $x^2+y^2+xyz+2z-2=0$ – тенглама уч ўзгарувчили учинчи даражали тенглама бўлса, $xy^2+x^2-4=0$ –икки ўзгарувчили учинчи даражали тенглама ҳисобланади, $x^2+3xy-y+4=0$, $2xy=5$, $x^2+3xy-y+4=0$ – икки ўзгарувчили иккинчи даражали тенгламалардир.

Умуман, икки ўзгарувчили иккинчи даражали тенглама

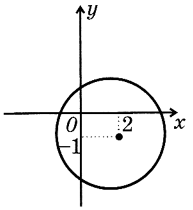
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k=0 \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади. Бунда a, b, c, d, e, k – берилган сонлар ва a, b, c сонларнинг ҳаммаси бараварига нолга тенг бўлмайди деб ҳисобланади, чунки $a=b=c=0$ бўлганда (1) тенглама иккинчи даражали тенглама бўлмайди. k сони ***озод ҳад*** дейилади.

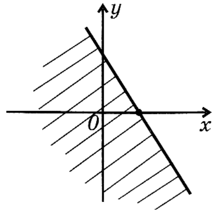
Энди иккинчи даражали тенгламаларнинг геометрик маъносини ўрганамиз. Бунинг учун мисол тариқасида $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ тенгламани кўриб чиқамиз. Бу тенгламанинг чап қисмидаги ифодани шакл алмаштириб, $x^2+y^2-4x+2y-4=x^2-4x+4+y^2+2y+1-9=(x-2)^2+(y+1)^2-9$ ифодани ҳосил қиламиз. Бунда берилган тенгламани

$$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2 \qquad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Oxy декарт координаталар системасида маркази $(2;-1)$ нуқтада, радиуси 3 га тенг айлана (2) тенглама билан ифодаланади. Яъни, шу ай-



74-расм



75-расм

ланага тегишли ҳар бир нуқтанинг координаталари берилган тенгламани қаноатлантиради (74- расм).

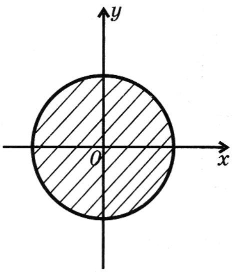
Шу каби, $y=ax^2$ ва $xy=k$ тенгламаларнинг графиклари мос ҳолда парабола ва гипербола экани бизга маълум.

Умуман, олий математика курсида иккинчи даражали тенгламалар билан ё эллипс, ёки гипербола, ёки параболанинг ифодаланиши исботланади. Тўғри чизиқ эса биринчи даражали икки ўзгарувчили тенгламалар билан ифодаланишини биз яхши биламиз.

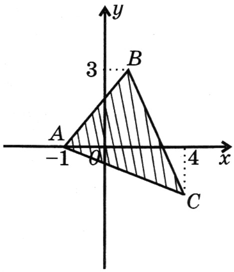
4.2. Икки ўзгарувчили тенгсизликларнинг геометрик маъноси

Энди икки ўзгарувчили тенгсизликларнинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Масалан, $2x+y-3\leqslant0$ тенгсизликни кўриб чиқамиз. $2x+y-3=0$ ёки $y=-2x+3$ тенглама – тўғри чизиқ тенгламасидир (75-расм). $2x+y-3\leqslant0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $(x;y)$ нуқталар тўплами шу тўғри чизиқдан пастда ёки ўша тўғри чизиқда ётади. Масалан, (0; 0) нуқта тенгсизликни қаноатлантиради: $2\cdot0+0-3<0$. У ҳолда, берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами шу текисликдаги $y=2x+3$ тўғри чизиқдан пастда жойлашган ярим текисликдир. $2x+y-3>0$ тенгсизлик билан шу тўғри чизиқдан юқорида жойлашган ярим текислик аниқланади.

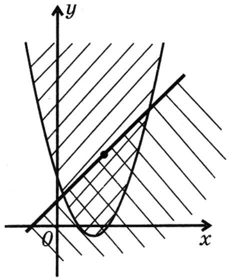
Энди $x^2+y^2<4$ тенгсизликни қараб чиқамиз. Радиуси 2 га тенг, маркази координаталар бошида бўлган айлана $x^2+y^2<4$ тенглама билан ифодаланади. Агар $(x_0;\ y_0)$



76-расм



77-расм



78-расм

нуқта учун x_0^1 тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $(x_0;\ y_0)$ нуқтагача бўлган масофа 2 дан кичик бўлиши аниқ. Демак, $(x_0;\ y_0)$ нуқта шу айлана билан чегараланган доирада жойлашади. Демак, $x^2+y^2<4$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар тўплами маркази координаталар бошида, радиус 2 га тенг бўлган доирани (бу тўпламага айлана нуқталари тегишли эмас, чунки тенгсизлик ишораси қатъий) ифодалайди (76-расм). Демак, $x^2+y^2<4$ тенгсизлик билан шу айлананинг ташқи қисми ифодаланади. Бунга яна бир неча мисол келтирамиз.

1-мисол. Учлари $A(-1;0)$, $B(1;3)$, $C(4;-2)$ нуқталарда бўлган учбурчакни тенгсизликлар ёрдамида ифодалаш керак.

Ечилиши. Иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ формуласи бўйича учбурчакнинг AB, AC ва BC томонларидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаларини ёзамиз:

AB тўғри чизиқ: $3x-2y+3=0 \Rightarrow y=\dfrac{3x+3}{2}$;

AC тўғри чизиқ: $2x+5y+2=0 \Rightarrow y=\dfrac{-2x-2}{5}$;

BC тўғри чизиқ: $5x+3y-14=0 \Rightarrow y=\dfrac{-5x+14}{3}$.

Учбурчак AB ва BC тўғри чизиқлардан пастда, AC тўғри чизиқдан юкорида жойлашгани учун, уни

$$\begin{cases} y \le \dfrac{1}{2}(3x+3), \\ y \ge \dfrac{1}{5}(-2x-2), \\ y \le \dfrac{1}{3}(-5x+14) \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 3 \ge 0, \\ 2x + 5y + 2 \ge 0, \\ 5x + 3y - 14 \le 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси ёрдамида аниқлаймиз (77-расм).

2-мисол.

$$\begin{cases} x^2 - y - 2x - 1 \le 0, \\ x - y + 3 \ge 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан берилган фигуранинг графигини (тасвирини) ясаш керак.

Ечилиши. $x^2-y-2x-1\leqslant 0$ тенгсизликни $y\geqslant x^2-2x-1$ ёки $y\geqslant(x-1)^2-2$ кўринишда ёзамиз, бунда бизга керакли фигура $y=(x-1)^2-2$ параболадан юқорида жойлашади. $x-y+3\geqslant 0$ ёки $y\leqslant x+3$ бўлгани учун, фигура $y=x+3$ тўғри чизиқдан пастда жойлашади. Демак, фигура $y=(x-1)^2-2$ – парабола ва $y\leqslant x+3$ – тўғри чизиқлар билан чегараланган (78-расм).

МИСОЛЛАР

А

602. Тенгламанинг даражасини аниқланг:

1) $4x^6-3x^7+x-1=0$; 2) $5x^2-y-2=0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y=0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2=11$;
5) $xy+xz+zy=1$; 6) $xyz-x^2-y^2+z^2=0$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z=z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2=xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3=x^2y^3z^4+1$.

603. Маркази $(x_0;\ y_0)$ нуқтада, радиуси R га тенг айлана тенгламасини ёзинг: 1) (0;0), R=4; 2) (–1;0), 3) (2; 3), R=3.

604. Координата текислигида: 1) $y>3x-4$; 2) $y\leqslant 5-x$; 3) $x+y\geqslant 2$; 4) $0,5y-x<3$ тенгсизликлар билан ифодаланган фигурани тасвирланг.

605. Тенгсизликнинг графигини ясанг:

1) $x^2+y^2\leqslant 81$; 2) $x^2+y^2>9$; 3) $(x-3)^2+(y+1)^2<25$.

606. Координата текислигида қуйидаги тенгсизликлар билан ифодаланган фигурани тасвирланг:

1) $\begin{cases} y \le x+3, \\ y \ge 5-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 1 \le y \le 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -1 < x \le 2, \\ -5 \le y < -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-2x+4 \ge 0, \\ 3y-9x+6 < 0. \end{cases}$

B

607. 1) $A(-1;\ 2)$; 2) $B(0;\ -5)$; 3) $(\frac{1}{3};4)$; 4) $D(2;\ 2)$ нуқталар маркази координаталар бошида ва радиуси 3 га тенг бўлган доирага тегишлими?

608. Тенгсизликлар графигани ясанг: 1) $y=3x^2$; 2) $y=2x^2-3$; 3) $y<x^2-3x+2$; 4) $x^2+y^2-2x+4y\geqslant 4$; 5) $xy<5$; 6) $y\geqslant\frac{x-1}{x+1}$.

609. Тенгсизликлар системасининг графигини ясанг:

1) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 64, \\ x>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 25, \\ y \ge 5-x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4 \le x^2+y^2 \le 16, \\ x \le y. \end{cases}$

610. Тенгламалар билан ифодаланган фигураларнинг графигини ясанг:

1) $2x-y=3$; 2) $x+y-2=0$; 3) $2|x|-y=3$;
4) $|x|+y-2=0$; 5) $2x-y=3, -1\leqslant x\leqslant 3$;
6) $x+y=2, -1\leqslant x\leqslant 2$; 7) $|x|+y=2, -1\leqslant x\leqslant 2$.

611. Тенгламалар билан ифодаланган фигуранинг графигини ясанг:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x-1)^2+(y+1)^2=9$;

3) $x^2+y^2-4x+6y=12$; 4) $x^2+y^2-x-y=\frac{7}{4}$;

5) $x^2+2x+y=0$; 6) $2x^2-4x-y=5$.

612. Тенгсизликлар билан ифодаланган фигурани координата текислигида тасвирланг:

1) $x+2y+1\geqslant 0$; 2) $2x+y\leqslant^4$; 3) $|x|-2y+1<0$;

4) $2|x|+y>4$; 5) $y+x^2\leqslant 2x$; 6) $y-x^2+x>1$;

7) $x^2+y^2-2x+4y\leqslant 4$; 8) $(x+1)^2+(y-1)^2>4$; 9) $xy\leqslant 2$;

10) $(x-2)y>1$.

C

613*. Учлари: 1) $A(-3;4)$, $B(2;1)$, $C(4;-2)$; 2) $A(-4;0)$, $B(0;5)$, $C(4;0)$, $D(0;-5)$; 3) $A(-4;-1)$, $B(-2;2)$, $C(2;3)$, $D(4;0)$, $E(1;-4)$ нуқталарда жойлашган кўпбурчакларни тенгсизликлар орқали ифодаланг.

Координата текислигида қуйидаги тенгсизликлар билан ифодаланган фигураларни тасвирланг **(614–617** мисоллар**)**.

614. 1) $(x-2)(|y|-3)\geqslant 0$; 2) $(|x|-1)(x+3)\leqslant 0$; 3) $|y|<2|x|-3$.

615. 1) $xy\leqslant 1$; 2) $|x|y\leqslant 1$; 3) $x|y|\leqslant 1$; 4) $|xy|\leqslant 1$.

616. 1) $y\geqslant x^2-5|x|+6$; 2) $y<|x^2-5x+6|$.

617*. 1) $\begin{cases} x^2+y^2\le 4(x+y-1), \\ y\ge |x-2|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-y|\le 2, \\ (x+y)\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right|\le 0. \end{cases}$

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

618. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=\dfrac{4}{3}x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=96, \\ x-y=8. \end{cases}$

619. Тенгсизликни ечинг:

1) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2x-1} \le 0$; 2) $\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4+5x} > 0$; 3) $\dfrac{2x+1}{x-2} < 2$.

5-§. Статистик тавсифлар

5.1. Умумий жамланма ва танлама

Кундалик турмушда, ишлаб чиқаришда ва фаннинг барча соҳаларида сонлар билан ифодаланадиган турли маълумотлар қайд қилиниб, улар махсус яратилган усулларда қайта ишланиш орқали халқ хўжалиги учун жуда муҳим башоратлар ва хулосалар қилинади. Одатда, бу маълумотлар статистик тавсифлар ёрдамида қайта ишланади. Сиз 6-синфда статистик тавсифларнинг қуйидаги содда турлари билан танишдингиз: **ўрта арифметик, ўзгариш кенглиги мода ва медиана.** 7-синфда эса ***тасодифий ҳодиса*** ва унинг ***частотаси*** тушунчасини ўзлаштирдингиз. Энди навбатдаги статистик тавсифлар билан танишиш учун тасодифий ҳодисаларнинг алоҳида тури – ***тасодифий катталиклар*** тушунчасини қараймиз.

Масалан, ўқувчининг III чоракда алгебрадан олган баҳолари рўйхатини келтирамиз: 4, 4, 5, 5, 4, 3, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 4. Албатта, бу баҳолар сон қийматлари билан ифодаланган тасодифий ҳодисадир.

Сон қийматларига эга бўладиган тасодифий ҳодиса ***тасодифий катталик*** *деб аталади.* Масалан, тез ёрдам бекатига маълум бир вақт оралиғида келиб тушадиган чақириқлар сони, маълум бир йўналишда юрадиган автобусни кутувчи йўловчилар сони ва бошқалар тасодифий катталиклардир. Чунки улар сон қийматлари билан ифодаланади.

Кўпинча тасодифий катталиклар чекли қийматлар қабул қилади. *Тасодифий катталикнинг барча қабул қиладиган қийматлари тўплами* ***умумий жамланма*** *деб аталади*. Баъзан умумий жамланманинг ҳар бир элементи эътиборга олинган ҳолда, бутунлигича текширилади. Масалан, ўқувчининг III чоракда алгебрадан олган баҳоларини тўлиқ кўриб, ундан керакли хулосалар чиқарамиз. Шунингдек, унинг олган баҳоларининг абсолют частотаси жадвалини тузиш мумкин:

Баҳоси	3	4	5
Абсолют частотаси	1	5	7

Бунда ўқувчи олган баҳоларининг ўрта арифметиги $\frac{1}{13}\left(3\cdot 1+4\cdot 5+5\cdot 7\right)=\frac{58}{13}\square 4{,}46$. Шунинг учун, ўқувчининг алгебрадан III чоракдаги чорак баҳоси «4» бўлди.

Кўп ҳолларда умумий жамланманинг ҳар бир элементини ҳисобга олган ҳолда ишлаб чиқиш мумкин эмас. Бундай ҳолларда унинг тасодифай олинган бир қисмининг элементлари текширилиб, олинган хоссалар умумий жамланманинг хоссаси сифатда қабул қилинади. *Бунда умумий жамланманинг тасодифий танлаб олинган қисми* ***танланма*** *деб аталади*. Масалан, маълум бир экин майдонига экилган доннинг унумдорлигини тўлиқ, текшириб чиқиш мумкин эмас. Бу ҳолда экин майдонининг (умумий жамланма) тасодифий олинган 1 квадрат метрида униб чиққан донлар ҳисобланиб (бу танланма), уни умумий экин майдонига хос хусусият деб қабул қилинади.

Танланмага (умумий жамланма) тегишли элементлар сони танланманинг (умумий жамланманинг) ҳажми деб аталади. Масалан, ўқувчининг алгебрадан олган баҳоларининг ҳажми 13 га тенг.

5.2. Дисперсия ва ўртача квадратик четлашиш

Баъзан танланманинг ўрта арифметиги бўйича умумий жамланма ҳақида тўлиқ маълумот олиш мумкин бўлавермайди. Масалан, ҳажми 10 га тенг бўлган куйидаги иккита танланмани кўриб чиқамиз:

X_i	–0,04	0,06
m_i	6	4

ва

Y_i	–100	100
m_i	5	5

Бунда $\overline{X}=-0{,}04\cdot 6+0{,}06\cdot 4=0$ ва $\overline{Y}=-100\cdot 5+100\cdot 5=0$ бўлади. Бу ерда $\overline{X}$ ва $\overline{Y}$ билан мос танланмаларнинг ўрта арифметиклари белгиланган. Бу икки танланманинг ўрта арифметиклари ўзаро тенг (0) бўлгани билан улар таркибидаги элементлар ҳар турли. Биринчи танланма қийматлари ўрта арифметикка яқин бўлгани билан иккинчи танланма элементлари нолдан анча узоқ жойлашган.

Демак, ўрта арифметик берилган тасодифий катталикни тўлиқ тавсифлай олмайди. Шунинг учун ўрта арифметик билан бирга тасодифий катталикнинг яна бошқа сонли тавсифлари қаралади. Масалан, биз тасодифий катталикнинг қабул қиладиган қийматларининг ўрта арифметикка нисбатан «сочилиш» даражасини билишимиз керак. Бу сочилиш ***дисперсия*** (сочилиш, сочиб юбормоқ деган маънони билдиради) орқали баҳоланади. Танланма дисперсиясини кўриб чиқишдан аввал тасодифий катталик қийматларининг танланманинг ўрта арифметигидан (танланманинг ўрта қийматидан) четлашиши тушунчасини қараб чиқамиз. Айтайлик, ҳажми n га тенг танланма таркибида $x_1 m_1$ марта, $x_2 m_2$ марта ва ҳ.к. $x_k x_k$ марта такрорланиб, яъни $x_1 x_2 \ldots x_{\mathrm{k}}$ элементларнинг абсолют частоталари мос равишда $m_1, m_2, \ldots, m_k$ бўлсин. Бунда $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$ танланманинг абсолют частотаси жадвали қуйидагича ёзилади:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
m_i	m_1	m_2	$\ldots$	m_k

(1)

Бу ерда $p_i \square \frac{m_i}{n}$, ($i$=1, 2, ..., k) сонлари x_i элементнинг ***частотаси*** (***нисбий частотаси***) дейилади. Бунда (1) жадвал билан бир қаторда танланманинг ***частотаси жадвали*** ҳам қаралади:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

(2)

Бу ерда $p_1+p_2+\ldots p_k=1$. Бундан танланманинг ўрта арифметиги $\overline{X}$ қуйидагича аниқланади:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\left(x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k\right) \qquad (3)$$

ёки

$$\overline{X} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k. \qquad (4)$$

X тасодифий катталик учун $\overset{\circ}{X}=X-\overline{X}$ айирма тасодифий катталикнинг ўрта арифметик қийматдан ***четлашиши*** *дейилади.* $\overset{\circ}{X}$ ҳам ўз навбатида тасодифий частота бўлади. (1) ва (2) жадваллар бўйича унинг абсолют частотаси ва частота жадваллари:

$\overset{\circ}{X}$	$\overset{\circ}{x}_1$	$\overset{\circ}{x}_2$	$\cdots$	$\overset{\circ}{x}_k$
m_i	m_1	m_2	$\ldots$	m_k

ва

$\overset{\circ}{X}_0$	$\overset{\circ}{x}_1$	$\overset{\circ}{x}_2$	$\cdots$	$\overset{\circ}{x}_k$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Шу каби квадратик четлашишнинг абсолют ва нисбий частотаси жадваллари қуйидагича ёзилади:

$\overset{\circ}{X}{}^2$	$\overset{\circ}{x}{}_1^2$	$\overset{\circ}{x}{}_2^2$	$\cdots$	$\overset{\circ}{x}{}_n^2$
m_i	m_1	m_2	$\ldots$	m_k

ва

$\overset{\circ}{X}{}^2$	$\overset{\circ}{x}{}_1^2$	$\overset{\circ}{x}{}_2^2$	$\cdots$	$\overset{\circ}{x}{}_n^2$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

$\overset{\circ}{X}{}^2$ тасодифий катталикнинг ўрта арифметиги X тасодифий катталикнинг ***танланма дисперсияси*** дейилади. У $D(X)$ деб белгиланади. Демак, таърифга асосан

$$D(X) = \frac{1}{n}(m_1 \overset{\circ}{x}{}_1^2 + m_2 \overset{\circ}{x}{}_2^2 + \ldots + m_k \overset{\circ}{x}_k), \tag{5}$$

ёки

$$D(X) = p_1 \overset{\circ}{x}{}_1^2 + p_2 \overset{\circ}{x}{}_2^2 + \ldots + p_k \overset{\circ}{x}{}_k^2). \tag{6}$$

i=1,2 ..., k қийматлар учун

$$p_1 \overset{\circ}{x}{}_i^2 = p\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \left(x_i^2 - 2\overline{X}x_i + \overline{X}^2\right) = p_i x_i^2 - 2\overline{X}\left(p_i x_i\right) + \overline{X}^2\left(p_i\right)$$

тенгликлар бажарилишини эътиборга олиб, (4) ва (6) формулалардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_kx_k^2) - 2\overline{X}(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k) +$$

$$\square\overline{X}^2(p_1 \; \square p_2 \; \square .. \; \square p_k)$$

Бу ерда $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k = \overline{X}$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ эканини назарда тутиб, $\overline{X^2} = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_kx_k^2$ белгилаш киритсак,

$$D(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \tag{7}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу ерда $\overline{X^2}$ ифода – X– тасодифий катталик квадрати танланмасининг ўрта арифметик қиймати, $\overline{X}^2$ – ўрта арифметик квадрат.

Умумий дисперсия ва ўрта арифметикнинг ўлчов бирликлари бир хил эмас, сабаби дисперсия четлашиш квадратининг ўртача қиймати бўлгани учун, у квадратнинг ўлчов бирлиги билан аниқланади. Шунинг учун тасодифий катталик қабул қиладиган қийматларининг унинг ўрта арифметик қийматига нисбатан сочилишини ифодалайдиган бошқа сонли тавсифлар мавжуд бўлиб, улар қаторига ***ўртача квадратик четлашиш*** тааллуқли.

Дисперсиясидан олинган арифметик квадрат илдиз танланманинг ***ўртача квадратик четлашиши*** *деб аталади.* У □(X) билан белгиланади. Демак,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (8)$$

1-мисол. Юқорида кўрилган ўқувчининг III чоракда алгебрадан олган баҳоларининг: 1) абсолют частотаси жадвалини; 2) нисбий частотаси жадвалини; 3) ўрта арифметик қийматини; 4) дисперсиясини; 5) ўртача квадратик четлашишини; 6) модасини; 7) медианасини аниқлаймиз.

Ечилиши.1) Абсолют частота жадвали:

X	3	4	5
m_i	1	5	7

2) Нисбий частота жадвали:

X	3	4	5
p_i	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{13}$

3) Ўрта арифметик қиймати:

$$\overline{X} = \frac{1}{13}\cdot 3 + \frac{5}{13}\cdot 4 + \frac{7}{13}\cdot 5 = \frac{58}{13} \approx 4,46.$$

4) Дисперсияни аниклаш учун, аввал X^2 нинг ўртача қийматини топиш керак. X^2 учун частота жадвали қуйидагича ёзилади:

X^2	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$
p_i	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{13}$.

Бундан $\overline{X^2} = \frac{1}{13}\cdot 9 + \frac{5}{13}\cdot 16 + \frac{7}{13}\cdot 25 = \frac{264}{13}.$

У ҳолда,

$$D(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \frac{264}{13} - \left(\frac{58}{13}\right)^2 = \frac{3432 - 3364}{169} = \frac{68}{169} \approx 0,4.$$

5) $\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,4} \approx 0,63$ – ўртача квадратик четлашиш.

6) Мода – тасодифий катталик частотасининг энг катта қиймати M_0=5.

7) Ҳажми 13 га тенг қийматлар (баҳолар) ни ўсиб бориши тартибида жойлаштириб ёзамиз: 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5. Бунда ҳадлар сони тоқ ва унинг ўртасида 5 сони жойлашган, яъни тасодифий катталик медианаси 5 га тенг: M_1=5.

?

1. Тасодифий катталик деганда нимани тушунасиз?
2. Умумий жамланма, танланма дегани нима?
3. Танланманинг ёки умумий жамланманинг ҳажми деб нимага айтилади?
4. Тасодифий катталикнинг ўрта арифметик четлашиши деганда нимани тушунасиз?
5. Танланманинг нисбий частотаси жадвали қандай тузилади?
6. Танланма дисперсияси нима? У қандай формула билан ҳисобланади?
7. Танланманинг ўртача квадратик четлашиши нима?

МИСОЛЛАР

А

620–626-мисолларда берилган танланманинг абсолют частотаси ёки нисбий частотаси жадвали бўйича танланманинг: 1) ўрта арифметик қийматини; 2) дисперсиясини; 3) ўртача квадратик четлашишини; 4) модаси ва медианасини топинг.

620.

X	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

621.

X	4	7	8
m_i	5	2	3

622.

X	2	3	5	6
m_i	10	15	5	20

623.

X	15	20	25	30	35
m_i	10	15	30	20	25

624.

X	2	4	5	7	10
m_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

625.

X	1	4	5	8	9
m_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

B

626. Ҳар бир фандан III чоракда олган баҳоларингиз каторини ёзиб, уларнинг ҳар бири бўйича: 1) абсолют частота жадвалини; 2) нисбий частота жадвалини; 3) ўрта арифметигини; 4) дисперсиясини; 5) ўртача квадратик четлашишини топинг.

627. Абсолют частота жадвали

X	-5	2	3	4
m_i	4	3	1	m

кўринишда берилган танланманинг ўрта арифметиги $\overline{X}=-0,3$ бўлса, m билан танланма ҳажмини топинг.

628. Тасодифий катталикнинг нисбий частотаси жадвали

X	-2	-1	1	x_4
p_i	0,3	0,1	0,2	p

кўринишда берилган. Агар $\overline{X}=1,1$ бўлса, p ва x_4 топинг.

629. Тасодифий катталикнинг нисбий частотаси жадвали

X	2	x_2	5	7
m_i	0,2	0,3	0,3	p_4

кўринишда берилган. $\overline{X}=4,2$ бўлса, x_2 ва p_4 ни топинг.

630. Метеоролог журналидаги соат 9 дан 21 гача ҳар 3 соатда ҳаво ҳароратининг кўрсатишлари қайд этилган маълумотлар қуйидагича:

9	12	15	18	21
6□C	10□C	18□C	12□C	9□C

Бу жадвал абсолют ёки нисбий частота жадвали бўладими? Жавобингизни асосланг. Абсолют частота жадвали бўйича ҳаво ҳароратининг ўртача квадратик четлашишини ва танланма ҳажмини топинг.

631–632-мисолларда берилган танланма бўйича: 1) абсолют частота жадвалини; 2) нисбий частота жадвалини; 3) ўрта арифметик қийматни;4) дисперсияни; 5) ўртача квадратик четлашишни топинг.

631.

42	42	41	49	42
41	49	42	41	42
45	42	42	41	49
40	45	41	44	44
41	45	42	43	43

632.

55	56	56	58	57
59	57	58	56	58
58	56	59	57	59
57	55	56	59	57
56	58	56	59	59

C

633*. Ҳажми 10 га тенг танланма таркибида иккита элемент бор: x_1, x_2. Бунда $x_1<x_2$ ва x_1 элементнинг абсолют частотаси 6 га тенг. Агар танланманинг ўрта арифметик қиймати $\overline{X}=1,4$, дисперсияси $D(X)=0,24$ бўлса, x_1 ва x_2 ни топинг.

634*. Танланма икки хил қиймат қабул қилади: x_1 ва x_2 ($x_1<x_2$). Бунда x_1 элементнинг нисбий частотаси 0,2 га тенг. Агар $\overline{X} = 2,6$, □$(x) = 0,8$ бўлса, x_1ва x_2 ни топинг.

635*. Танланма уч хил қийматлар қабул қилади: $x_1=1$, x_2 ва $x_3(x_1<x_2<x_3)$. x_1 ва x_2 элементларнинг нисбий частоталари мос равишда 0,3 ва 0,2 га тенг. $\overline{X} = 2{,}2$ ва $D(X)=0{,}76$ бўлса, x_2 ва x_3 ни топинг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

636. Тенгламани ечинг:

1) $\dfrac{4}{9x^2-1} - \dfrac{4}{3x+1} - \dfrac{x}{1-3x} = 0;$

2) $\dfrac{4}{y+3} - \dfrac{5}{3-y} - \dfrac{1}{y-3} - 1.$

637. Тенгламани ечинг:

1) $x - (5-2x) \geqslant 3;$ 2) $2(x-2)(1-3x)<2;$

3) $\dfrac{2x-1}{3} < \dfrac{5x-2}{2};$ 4) $\dfrac{2x-1}{5} - \dfrac{5-x}{3} < 2;$

5) $3\sqrt{2} - 3 > 2x\left(1-\sqrt{2}\right);$ 6) $\left(3\sqrt{10} - 6\sqrt{3}\right)x < 5\left(2\sqrt{3} - \sqrt{10}\right).$

638. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}, a \geq 0, b \geq 0;$

2) $\sqrt{x + 2y + \sqrt{8xy}}, x \geq 0, y \geq 0;$

639. Томонларининг узунликлари кетма-кет жуфт ёки тоқ сонлар билан ифодаланадиган тўғри бурчакли учбурчак мавжудми? Жавобларингизни асосланг.

IV БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МИСОЛЛАР

640. Агар $-1 \leqslant a \leqslant 3$ бўлса:

1) $\dfrac{2a \square 5}{7};$ 2) $\dfrac{3 \square 4a}{5}$ ифодани баҳоланг.

641–650-мисолларда берилган тенгсизликларни исботланг.

641. $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2.$

642. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}.$

643. $|x|+|y| \geqslant |x+y|$, $x\square R$, $y\square R$.

644. $(p+2)(q+2)(p+q)\geqslant 16pq$, $p>0$, $q>0$.

645. $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 8, x>0, y>0, z>0.$

646. $\left(\frac{a^2+1}{a}\right)\cdot\left(\frac{b^2+1}{b}\right) > 15, a \neq 0, b \neq 0.$

647. Агар $4a^2+b=1$ бўлса, $ab\leqslant\frac{1}{4}$. эканини исботланг.

648. Агар $a+b\geqslant 1$ бўлса, $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$. эканини исботланг.

649. $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0.$

650. Агар $x^2+y^2\leqslant 2$ бўлса, $|x+y|\leqslant 2$ бўлишини исботланг.

651. Тўла квадратга ажратиш усули билан тенгсизликни исботланг:

1) $x^2+4x+7>0$; 2) $y^2-2y+2>0$;

3) $m^2-mn+n^2\geqslant 0$; 4) $2ab-a^2-3b^2\leqslant 0$;

652. Тенгсизликни ечинг:

1) $x^2-8x-84>0$; 2) $y^2+6y-19\leqslant 0$;

3) $8x^2-14x+5<0$; 4) $12x^2+16x-3\geqslant 0$.

653. x нинг қандай қийматларида: 1) $y=x^2-11x+31$

функция 1 дан кичик; 2) $y=2x^2+5x+6$ функция $y=4x^2+5x$ функциядан катта қийматлар қабул қилади?

654. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ функциянинг мусбат қийматлар қабул қиладиган оралиғини топинг.

655. $y = \dfrac{x^2 - 7x^2 + 12x}{x - 3}$ функциянинг манфий қийматлар қабул қиладиган оралиғини топинг.

656. a нинг қандай қийматларида $ax^2-|x|\leqslant 0$ тенгсизлик ҳар қандай $x\leqslant 0$ учун бажарилади?

657. Тенгсизликни ечинг:

1) $\dfrac{3}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{28}{1-x^2}$; 2) $\dfrac{5}{y-2} - \dfrac{3}{y+2} \geq \dfrac{20}{y^2-4}$;

3) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{x+3}{x-2} \leq \dfrac{29}{x^2-x-2}$; 4) $\dfrac{y+2}{y+3} - \dfrac{y+1}{y-1} > \dfrac{4}{y^2+2y-3}$.

658. a нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} 3 - 7x < 3x - 7, \\ 1 + 2x < a + x \end{cases}$$

система ечимга эга бўлмайди?

659. a нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} 3(a - 5x) < 1 + x, \\ 2 - \dfrac{x}{2} > 3 + 5(x - a) \end{cases}$$

система ками билан битта ечимга эга бўлади?

660.Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} -1 < 1 - 2x < 2, \\ 3 - 5x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0 < 1 - 3x < 1, \\ 3 - 4x < 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3 < 2x - 3 < -1, \\ 1 - 4x < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -1 < -3 - 5x < 0, \\ 4 - 2x < -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-3 \le 0, \\ \dfrac{2x-5}{x-2} \ge 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-2 \le 5x-8, \\ \dfrac{2x-1}{2-x} < 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 7 < 2x+1 < 11, \\ \dfrac{x+2}{x-5} < \dfrac{x-6}{x-3}; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} -2 < 2-x < 1, \\ \dfrac{x+3}{1-x} \le \dfrac{8-x}{x-4}; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} -3 < 2x+1 < 2, \\ \dfrac{x+6}{x-1} \ge \dfrac{x-6}{x+1}. \end{cases}$

661. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} > 1, \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \le 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-14x+45 < 0, \\ x^2-11x+30 > 0, \\ \dfrac{2x-3}{x^2-x+2} > 0. \end{cases}$

662. Тенгсизликни ечинг:

1) $\dfrac{(3x-5)(x-4)}{x-5} < \dfrac{3x-5}{x-1}$; 2) $(2x+3)^2 + \dfrac{1}{4x^2+12x+9} > 2.$

663. m нинг қандай қийматида $mx^2+(2m+3)x+m-1 \geqslant 0$ тенгсизлик ечимга эга эмас?

664. Тенгсизликнинг графигини чизинг:

1) $|x| + |y| \leqslant 2$; 2) $\begin{cases} y \ge (x-1)^2, \\ y \le x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 49, \\ |x| \ge 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \ge x^2-5x+6, \\ y \le 7x-x^2-12. \end{cases}$

665. Тенгсизликни исботланг:

1) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{n} \left(n \in N, n \ge 2\right)$;

2) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \left(n \in N, n \ge 2\right)$;

3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}<1\left(n\in N\right);$

4) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<1\left(n\in N, n\geq 2\right).$

666. Ифоданинг аникланиш соҳасини топинг:

1) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{1-x}$; 2) $\sqrt{6-x}-\sqrt{3x-9}$; 3) $\sqrt{x}+\sqrt{3x-1}$;

4) $\sqrt{2x+2}+\sqrt{6-4x}$; 5) $\sqrt{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{10-x}}$; 6) $\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$;

7) $\dfrac{\sqrt{5x\square 6}}{\sqrt{7x\square 14}}$; 8) $\sqrt{\dfrac{5x\square 6}{7x\square 14}}$; 9) $\sqrt{(3x-2)(x-5)}$.

667. Тенгсизликни ечинг (график усулда):

1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4>0$;

3) $2x^2+3x-5\geqslant 0$; 4) $-6x^2+6x+36\geqslant 0$.

668. Тенгсизликни иккита усулда ечинг:

1) $x^2-x-9<0$; 2) $6x^2-7x+2>0$;

3) $-x^2-2x+48<0$; 4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$;

5) $25x^2-10x+1\geqslant 0$; 6) $49x^2-28x+4<0$.

669. a нинг шундай қийматларини топингки, бунда $x^2-2ax+a^2-1=0$ тенгламанинг битта илдизи 1 дан кичик, иккинчиси эса 1 дан катта бўлсин.

670*. a нинг шундай қийматларини топингки, бунда $x^2-2(a-1)x+a+1=0$ тенгламанинг илдизлари 1 дан катта бўлсин.

671. a нинг қандай қийматларида тенгсизликлар ҳар қандай x учун бажарилади:

1) $(x-2)^2>a$; 2) $(x-3)^2\geqslant 2a-7$;

3) $x^2-2x+1+a>0$; 4) $x^2+6x+a\geqslant 0$.

672. a нинг қандай қийматларида тенгламанинг илдизлари бўлмайди:

1) $x^2-ax+9<0$; 2) $x^2-(2a-1)x+1=0$?

673*. k ва m сонларига шундай шарт қўйингки, $y=kx+m$ тўғри чизиқ: 1) $y^2=4x$ параболага; 2) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ айланага уринма бўлсин.

674*. Тенгламалар системасининг нечта ечими мавжуд:

1) $\begin{cases} \big||x|-1\big|-y=0, \\ y+x^2-2|x|=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \big||x|-2\big|+y=0, \\ y-x^2-4|x|=0. \end{cases}$

675. График усулда ечинг:

1) $\begin{cases} y=\left|x^2+6x+5\right|, \\ y-x=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=x^2-4x+7, \\ y|x-2|=4. \end{cases}$

МАТЕМАТИКАНИ ЧУҚУРЛАШТИРИБ ЎҚИТИШГА МЎЛЖАЛЛАНГАН ҚЎШИМЧА МАТЕРИАЛЛАР*

I боб. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

1-§. Натурал сонлар. Сонларнинг бўлиниш аломатлари

1.1. Натурал сонлар ва уларнинг хоссалари

Баъзи бир умумий хоссага эга бўлган буюмларни санаш учун қўлланадиган сонлар натурал сонлар деб аталади. Масалан, бир, икки, ўн, юз, йигирма беш, минг ва ҳ. к. сонлар ***натурал сонлар*** ҳисобланади.

Натурал сонларни ўсиб бориши тартибида жойлаштирамиз:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Натурал сонлар ёзилишининг мана шундай кўриниши натурал ***сонлар қатори*** дейилади. Бу ердаги кўп нуқталар натурал сонлар қаторининг чексиз давом этаверишини кўрсатади. Шу сабабли натурал сонлар тўплами «чексиз». Бир – энг кичик натурал сон, энг катта натурал сон мавжуд эмас. Энди ҳар бир натурал соннинг 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлар ёрдамида ёзилишини ёдимизга туширамиз. Масалан, 578, 1403 ва ҳ. к. Натурал сонларни ёзишда қўлланиладиган рақамлар ўнгдан чапга қараб ҳисоблаганда, турган жойига боғлиқ ҳолда шу сон таркибида нечта бирлик, нечта юзлик, нечта минглик в. б. борлигини кўрсатади. Масалан, 578 сонида 8 та бирлик, 7 та ўнлик, 5 та юзлик бор, 1403 сонида эса 3 та бирлик, 4 та юзлик ва битта минглик бор, ўнлик эса йўқ. Умуман, ўнг томондан санагада k – ўринда турган рақам шу сонда нечта

10^{k-1} хонали сон бор эканини билдиради. Шу тариқа n хонали a сонини (яъни n рақами ёрдамида ёзилган сонни) қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$a=a_1 \cdot 10^{n-1}+\ldots+a_{n-1} \cdot 10+a_n. \qquad (1)$$

Бу ерда a натурал сони a_1, a_2, ..., a_n рақамлар ёрдамида ёзилган. У қисқа бундай белгиланади: $a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (Бу ерда чизиқча a_1, a_2, ..., a_n сонларининг кўпайтмаси билан чалкаштириб юбормаслик учун, яъни фарқлаш учун қўйилади) Масалан,

$428=4 \cdot 102+2 \cdot 10+8$, $\quad 1403=1 \cdot 10^3+4 \cdot 10^3+0 \cdot 10+3$.

Эслатма. Қаралаётган саноқ системаси ўнли саноқ системаси деб аталади. (Чунки ҳар қандай сон ўнта турли рақам орқали ифодаланади). Умуман, ўнли саноқ системаларидан бошқа саноқ системалари ҳам мавжуд. Масалан, эрамиздан аввалги қадимги Бобилда олтмишлик саноқ системалари қўлланилган ва унинг таъсири шу кунгача сақланиб келинмоқда: соатнинг 60 Дақиқага бўлинишида, айлананинг 360 градусга бўлинишида ва ҳ. к. Ҳозирги пайтда электрон ҳисоблаш техникаларида иккилик саноқ системаси қўлланилмоқда.

Арифметикада сонларга турли амаллар қўлланилади: қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва ҳ. к. Бу амалларнинг дастлабки тўрттаси, яъни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амаллари ***арифметик амаллар*** деб аталади. Натурал сонлар тўпламида бу амалларнинг иккитаси – қўшиш ва кўпайтириш амалларигина бажарилади. Яъни, ҳар қандай иккита натурал сонни қўшиш ёки кўпайтириш натижасида натурал сон ҳосил қиламиз. Натурал сонларга айириш ёки бўлиш амалларини қўллаш натижасида эса ҳар доим ҳам натурал сон ҳосил бўлавермайди. Масалан, $2 - 5 = -3$, $2 : 5 \square \frac{2}{5}$. Бу ерда -3 ва $\frac{2}{5}$ сонлари натурал сонлар эмас.

Натурал сонларни қўшиш ва кўпайтириш амалларининг бир нечта қонулари мавжуд.

1. Ўрин алмаштириш қонуни:

$a+b=b+a$

қўшилувчиларнинг ўринлари алмашгани билан йиғиндининг қиймати ўзгармайди;

$a \cdot b=b \cdot a$

кўпайтувчиларнинг ўринлари алмашгани билан кўпайтманинг қиймати ўзгармайди.

2. Гуруҳлаш қонуни:

(a+b)+c=a+(b+c)

қўшилувчиларни гуруҳлашдан йиғиндининг қиймати ўзгармайди;

(ab)c=a(bc)

кўпайтувчиларни гуруҳлашдан кўпайтманинг қиймати ўзгармайди.

3. Тақсимот қонуни:

(a+b)c=ac+bc.

Маълумки, қавсни очиш қоидаси ушбу қонуниятга асосланади.

1.2. Сонларнинг бўлиниш аломатлари.

Агар a ва b сонлари учун c сони мавжуд бўлиб, a=bc тенгли бажарилса, у ҳолда a сони b сонига қолдиқсиз бўлинади деб аталади. У қуйидагича ёзилади: *a:b*. Бунда *a* – бўлинувчи, *b* – бўлувчи, *c* – бўлинма деб аталади. Масалан, 12=4:3 бўлгани учун, 12 сони 4 га қолдиқсиз бўлинади: 12:4. Энди баъзи сонларнинг бўлиниш аломатларини келтирамиз.

1) 2 га бўлиниш аломати. Агар соннинг охирги рақами ноль ёки жуфт сон бўлса, бу сон 2 га қолдиқсиз бўлинади.

2) 4 га бўлиниш аломати. Агар соннинг сўнгги иккала рақами ҳам ноль бўлса ёка ўша охирги иккита рақамлардан тузилган икки хонали сон 4 га бўлинса, бу сон 4 га қолдиқсиз бўлинади.

3) 5 га бўлиниш аломати. Агар сон 0 ёки 5 рақами билан тугалланса, у ҳолда бу сон 5 га қолдиқсиз бўлинади.

4) 3 билан 9 га бўлиниш аломати. Агар сон таркибидаги рақамлар йиғиндиси 3 га (9 га) бўлинса, у ҳолда бу сон 3 га (9 га) қолдиқсиз бўлинади.

Натижа. 6 га бўлиниш аломати. 3 га бўлинадиган жуфт сонлар 6 га қолдиқсиз бўлинади.

5) 11 га бўлиниш аломати. Агар сон таркибидаги тоқ ўринда турган рақамларнинг йиғиндиси биланунинг жуфт ўринда турган рақамлари йиғиндисининг айирмаси нолга тенг ёки 11 га бўлинадиган сон бўлса, бу сон 11 га қолдиқсиз бўлинади.

Намуна сифатида 2, 4 ва 5-аломатларнинг исботини келтирамиз. Қолганлари шу каби исботланади,

2-аломатиииг исботланиши. Берилган сонни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}a_{n-1}a_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}} \cdot 100 + \overline{a_{n-1}a_n}.$

Бу ерда биринчи қўшилувчи 100 га бўлинади, шу сабабли 4 га ҳам бўлинади. Бунда $\overline{a_{n-1}a_n}$ сони нолга тенг ёки 4 га бўлиниши керак.

4-аломатнинг исботи. $\overline{a_1a_2\ldots a_k} = a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} 10 + a_k$ сони берилсин. Бунда 10=9+1, 100=99+1, 1000=999+1 ва бошқа содда тенгликларни зътиборга олган ҳолда

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k} = a_1\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{k-1}+1\right)+\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{k-2}+1\right)+\ldots+a_{k-1}(9+1)+a_k =$$
$$a_1\cdot\underbrace{99\ldots9}_{k-1}+a_2\cdot\underbrace{99\ldots9}_{k-2}+\ldots+a_{k-1}\cdot 9+\left(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k\right)$$

тенгликни оламиз. Бу ерда тўққизликлар қатнашган қўшилувчиларнинг ҳаммаси 9 га (3 га) бўлинади. У ҳолда $a_1+a_2+\ldots+a_k$ йиғинди ҳам мос 3 га ёки 9 га бўлиниши керак.

5-аломатнинг исботи. Аниқлик учун берилган сонни жуфт ишорали сон деб олайлик (тоқ хонали сонлар учун ҳам худди шундай исботланади). У ҳолда

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{2k}} = a_1 10^{2k-1}+a_2 10^{2k-2}+\ldots+a_{2k-1}10 = a_1(10^{2k-1}+$$
$$+10^{2k-2})+(a_2-a_1)10^{2k-2}+\ldots+a_{2k-1}10+a_{2k}=a_1 11\cdot10^{2k-2}+(a_2-a_1)(10^{2k-2}+$$
$$+10^{2k-3})+(a_3-a_2+a_1)11\cdot10^{2k-3}+\ldots+a_{2k-1}10+a_{2k}=\ldots=a_1 11\cdot10^{2k-2}+(a_2-$$
$$-a_1)11\cdot10^{2k-3}+(a_3-a_2+a_1)11\cdot10^{2k-4}+\ldots+(a_{2k-1}-a_{2k-2}+\ldots-a_2+a_1)11+(a_{2k}-$$
$$-a_{2k-1}+a_{2k-2}-\ldots+a_2-a_1).$$

Бундан берилган сон 11 га бўлиниши учун

$a_{2k}-a_{2k-1}+a_{2k-2}\ldots+a_2-a_1=(a_2+a_4+\ldots+a_{2k})-(a_1+a_3+\ldots+a_{2k-1})$ айирма 11 га бўлиниши ёки 0 га тенг бўлиши керак.

МИСОЛЛАР

А

676. Қўшиш ва айириш конуниятларидан фойдаланиб, қуйидаги амалларни оғзаки бажаринг:

1) 345+73+18+235+2; 2) $25\cdot13\cdot8\cdot4\cdot250$;

3) $4\cdot7\cdot25\cdot8\cdot3\cdot125$; 4) 1+2+3+…+98+99.

677. 3 га қолдиқсиз бўлинадиган сонларни териб ёзинг: 1581, 2874, 89751, 2890, 9745, 12387, 2835, 78,33, 4456.

678. 9 га қолдиқсиз бўлинадиган сонларни териб ёзинг: 2835, 1574, 7333, 5874, 10304, 37571, 4456.

B

679. Соннинг 25 га бўлиниш аломатини тасдиқлаб, исботланг.

680. Соннинг 10 га бўлиниш аломатини хулоса чиқариб, исботланг.

681. $91 \cdot 92 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99$ кўпайтма қандай рақам билан тугалланади?

682. 1) $\overline{5431a}$; 2) $\overline{6547a}$ сони 9 га бўлиниши учун a нинг ўрнига қандай рақам ёзиш керак?

683. $\overline{28c}$ сони: 1) 2 га; 2) 3 га; 3) 4 га; 4) 5 га; 5) 6 га; 6) 10 га;7) 11 га қолдиқсиз бўлиниши учун c ни қандай рақамлар билан алмаштириш лозим?

684. 1) $\overline{ab} \square \overline{ba}$; 2) $\overline{abc} \square \overline{cba}$; 3) $\overline{a_1a_2\ldots a_k} \square \overline{a_ka_{k\square1}\ldots a_2a_1}$ айирмалар 9 га каррали эканини исботланг.

685. 1) $\overline{123c}$; 2) $\overline{3120c}$ сонлари c нинг қандай қийматларида 11 га каррали бўлади?

686. $24m+3n+6p$ ифоданинг қийматлари ҳар бир m, p ва жуфт n сонлари учун 6 га бўлинмаслигини исботланг.

C

687. Кетма-кет иккита жуфт соннинг биттаси 4 га бўлинишини исботланг.

688. Рақамларининг учланган йиғиндисига тенг икки хонали сонни топинг.

689. Рақамларининг иккиланган кўпайтмасига тенг икки хонали сонни топинг.

690. Рақамларининг учланган кўпайтмасига тенг икки хонали сонни топинг.

691*. Кетма-кет бешта натурал сон квадратларининг йиғиндиси 135 га тенг. Шу сонларни топинг.

692*. Кетма-кет бешта натурал сон квадратларининг йиғиндиси тўла квадрат бўла олмаслигини исботланг.

693*. $\overline{ab} \square \overline{ba}$, $(a>b)$ айирма тўла квадрат бўладиган барча икки хонали сонларни топинг.

694. 1) $41^{10}-1$ сони 10 га; 2) $46^{46}-1$ сони 5 га; 3) $67^{8}-1$ сони 10 га; 4) $89^{26}-45^{25}$ сони 2 га каррали эканини исботланг.

695*. 45 га каррали уч хонали сондан унинг рақамларини тескари тартибда ёзиш орқали олинадиган сонни айирганда 297 ҳосил бўлади. Ушбу сонни топинг.

2-§. Туб ва мураккаб сонлар

2.1. Туб ва мураккаб сонлар

1 дан бошқа ҳар қандай натурал сон камида иккита сонга қолдиқсиз бўлинади: 1 га ва ўзига. Агар сон 1 билан ўзидан бошқа бўлувчига эга бўлмаса, бу сон ***туб сон*** деб аталади. 1 ва ўзидан бошқа бўлувчилари мавжуд бўлган сонлар ***мураккаб сонлар*** деб аталади. 1 сони туб сон ҳам, мураккаб сон ҳам эмас. Масалан,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

– туб сонлар. Бу ерда фақат 2 – жуфт сон, бошқа туб сонларнинг барчаси тоқ сонлардир.

Чексиз туб сонлар мавжудлигини эрамиздан аввалги III асрда Евклид исботлаган. Энди шу исботларни келтирамиз.

Туб сонлар чекли (саноқли) бўлсин, деб фараз қиламиз. У ҳолда буларни ўсиб бориш тартиби билан ёзиш мумкин:

$$2,\ 3,\ 5,\ \ldots, p. \quad (1)$$

Шундай қилиб, (1) тизим барча туб сонларни қамраган деб ҳисоблаймиз. У ҳолда қуйидаги сонларни кўриб чиқамиз: $a=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p+1$. Бу соннинг ўзи туб сон бўлиши мумкин ёки унинг қандайдир туб бўлувчиси бўлиши керак. a сони туб сон бўла олмайди, чунки у (1) тизимга тегишли эмас. Иккинчидан, a сони (1) тизимдаги ҳеч бир туб сонга бўлинмайди, яъни асони туб бўлувчиларга эга эмас. Олинган зидлик туб сонлар чекли эмас, балки чексиз кўп эканини кўрсатади.

2.2. Арифметиканинг асосий теоремаси

Ҳар бир мураккаб сонни туб сонлар кўпайтмасига ажратиб ёзиш мумкин. Масалан, $252=2^2\cdot3^2\cdot7$ ёки $252=2^2\cdot32\cdot7$. Бу мисолдан баъзи туб сонлар кўпайтувчи сифатида бир неча марта такрорланётгани кўриниб турибди.

Теорема. (Арифметиканинг асосий теоремаси). *1 дан бошқа ҳар бир натурал сон фақат ягона усулда туб сонларнинг кўпайтувчиларига ажратилади.*

Исботи. Аввал ҳар қандай натурал сонни туб сонлар кўпайтувчиларига ажратиш мумкин эканини кўрсатамиз.

Дема, $4=2\cdot 2$, $6=2\cdot 3$, $18=2\cdot 3\cdot 3$, $23=23$ ва ҳ. к., N гача бўлган барча сонларни туб сонларнинг кўпайтмаси кўринишида ёзиш мумкин, деб фараз қилайлик. У ҳолда N сонини ҳам туб сонларнинг кўпайтмаси кўринишида ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз. Агар N туб сон бўлса, уни туб сонлар кўпайтмасига ажратиш мумкин деб ҳисоблаймиз (аниқроқ айтсак, бу ҳолда кўпайтма ягона N кўпайтувчидан иборат). Шундай қилиб, теорема исботланди.

Энди N – мураккаб сон бўлсин, деб фараз килайлик. У ҳолда бу соннинг 1 дан ва ўзидан бошқа камида битта N_1 бўлувчиси бор. N сонини N_1 га бўлгандаги бўлинмани N_2 деб белгиласак, $N=N_1\cdot N_2$ тенгликни оламиз. Бундан $1<N_1<N$ ва $1<N_2<N$ бўлгани учун, N_1 ва N_2 сонларни туб сонлар кўпайтмасига ажратиш мумкин. $N_1=p_1\cdot p_2 \dots p_k$ ва $N_2=q_1\cdot q_2\cdot \dots \cdot q_r$. Бунда $N=p_1\cdot p_2\cdot \dots \cdot p_r$ бўлиб, N сони туб сонлар кўпайтмасига ажралади.

Энди бундай ажратишнинг ягона эканини кўрсатамиз. Айтайлик, N сони туб сонлар кўпайтмасига икки усулда ажралсин: $N=a_1\cdot a_2\cdot \dots \cdot a_n$ ва $N=b_1\cdot b_2\cdot \dots \cdot b_k$. Бунда $a_1\cdot a_2\cdot \dots \cdot a_n=b_1\cdot b_2\cdot \dots \cdot b_k$ тенгликдан a_1 кўпайтмага қолдиқсиз бўлиниши керак. b_1, b_2,...,b_k туб сонлар бўлгани учун, бу сонларнинг камида биттаси a_1 га қолдиқсиз бўлинади. Аниқлик учун, b_1 сони a_1 га қолдиқсиз бўлинсин. У ҳолда $a_1=b_1$ бўлиши керак, чунки a_1 ва b_1 – туб сонлар. Бунда $a_2\cdot a_3\cdot \dots a_n=b_2\cdot b_3\cdot \dots \cdot b_k$ тенглик тўғри. Демак, $b_2\cdot b_3\cdot \dots \cdot b_k$ кўпайтма a_2 га бўлиниши керак. Зарур бўлса, кўпайтувчилар тартибини ўзгартириб, кўрсатилган усулда $a_2=b_2$ тенгликни ҳосил қиламиз ва ҳ. к. Ушбу жараённи давом эттириб, $n=k$ бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Демак, агар $k>n$ бўлса, у ҳолда 1=b бўлар эди. 1 сони ҳеч қандай туб сонга бўлинмагани учун, бу тенгликнинг бажарилиши мумкин эмас. Шундай килиб, $n=k$ ва $a_1=b_1$, a_2,$=b_2$, ..., $a_n=b_n$ тенгликлар бажарилади. Теорема исботланди.

2.3. Натурал соннинг каноник ажратилиши

a сони туб кўпайтувчиларга ажратилган, деб фараз қилайлик. Бу кўпайтмадаги бир хил кўпайтувчиларни ихчамлаб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}. \qquad (2)$$

Бунда $p_1, p_2, \dots, p_k$ – ҳар хил туб сонлар, улар берилган a сонининг туб бўлувчилари дейилади. $n_1, n_2, \dots, n_k$ – номанфий бутун сонлар. Соннинг (2) кўринишдаги ажратилиши унинг ***каноник ажратилиши*** деб аталади. Масалан,

$1176=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7=2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$.

Умуман, сонни туб кўпайтувчиларга ажратишни аниқлаш (жуда катта сон бўлганда) мураккаб ва қийин масаладир. Мисол учун, ЭҲМ ёрдамида $2^{19937} - 1$ сонининг туб сон экани яқиндагина аниқланди ва бу соннинг ёзилиши учун 60 000 дан ортиқ рақам зарур экан.

Яъни, жуда катта бўлмаган сонларнинг каноник ажратилишини аниқлаш мумкин. Бунга мисол келтирамиз.

1-мисол. 612 ва 1080 сонларини туб кўпайтувчиларга ажрамиз.

612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	

1080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

Демак, $612=2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$; $1080=2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.

МИСОЛЛАР

А

696. 1 дан 100 гача бўлган барча туб сонларни тартиб билан ёзинг.

697. 1 дан 50 гача бўлган барча мураккаб сонларни кетма-кет ёзинг.

698. 28, 44, 27, 43, 75, 1684, 546, 79, 740, 1001, 67, 1036, 31, 885, 83 сонлари орасидан туб сонларни териб ёзинг.

699. Умумий бўлувчига эга бўлмаган: 1) икки; 2) уч; 3) тўрт хонали мураккаб сонларни ёзинг.

700. 100, 216, 360, 310, 4608, 3240 сонларини туб кўпайтувчиларга ажратинг.

701. 180, 612, 972, 1225, 2304, 2463, 11440 сонларининг барча туб кўпайтувчиларини аниқланг.

702. 234, 510, 1449, 3190, 2220, 3690, 1593 сонларининг 1 билан ўзидан бошқа энг кичик ва энг катта туб бўлувчиларини топинг.

B

703. 6, 28, 196 сонларининг ҳар бири ўзидан бошқа барча бўлувчиларининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг.

704. 12, 75, 56, 72, 108, 120 сонларининг барча бўлувчиларини аниқланг.

705. Қутида 300 дан кам, лекин 200 тадан ортиқ қалам бор. Агар жами қаламлар сони 10 га ва 12 га қолдиқсиз бўлиниши маълум бўлса, қутидаги қаламлар сонини топинг.

C

706. Агар $p \geqslant 5$ туб сон бўлса, у ҳолда p^2-1 сони 24 га бўлинишини исботланг.

707. Уч сонига бўлинмайдиган натурал соннинг квадратидан 1 ни айирганда учга бўлинадиган сон ҳосил бўлишини исботланг.

708*. a натурал соннинг 1 ва ўзи билан бирга барча бўлувчиларининг сонини $\square(a)$ орқали белгилайлик. Масалан, $24=2\cdot2\cdot2\cdot3$ бўлгани учун, унинг барча бўлувчилари қуйидагича: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Бундан $\square(24)=8$.

Агар. $a \square p_1^{n_1} p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}$ сони берилса, у ҳолда $\square(a)=(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_k+1)$ эканини исботланг.

709*. Агар а сони 12 га бўлинса ва $\square(a)=14$ бўлса, a сонини топинг.

710*. Агар $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2}$, $\tau(a^2) = 81$ бўлса, $\square(a^3)$ топинг.

711*. Агар $a=2\square(a)$ бўлса, a нимага тенг?

712*. $p^2-3q^2=1$ тенгликни қаноатлантирувчи барча p ва q туб сонларни топинг.

713. Бир хил рақамлар билан ёзилган ҳар бир уч хонали сон 37 га каррали эканини исботланг.

714. Ҳар қандай уч хонали тоқ сон билан шу сон рақамларини тескари тартибда ёзганда ҳосил бўладиган иккинчи тоқ сонларни кўриб чиқинг. Ушбу сонларнинг каттасидан кичигини айирганда: а) 198 га; б) 9 га бўлинадиган сон чиқишини кўрсатинг.

715. Ҳар қандай тоқ соннинг квадратидан 1 ни айирганда 8 га бўлинадиган сонни олишимизни исботланг.

716. Иккита тоқ сон квадратларининг айирмаси 8 га каррали эканини исботланг.

717. Бир хил рақамлар билан ёзилган ҳар қандай жуфт хонали соннинг 11 га бўлинишини исботланг.

3-§. Энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий каррали

3.1. Сонларнинг эш катта умумий бўлувчиси ва энг кичик умумий карралиси

Агар a ва b сонлари d сонига қолдиқсиз бўлинса, d сони a ва b сонларининг умумий бўлувчиси дейилади. Масалан, 108 ва 144 сонлари учун 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 сонлари умумий бўлувчи бўлади. Шу каби бир нечта соннинг умумий бўлувчисини аниқлаш мумкин. Масалан, 1, 2, 3, 4, 6 сонлари 24, 66 ва 84 сонларининг умумий бўлувчилари бўлади.

Агар икки ёки бир неча соннинг бирдан бошқа умумий бўлувчилари бўлмаса, бундай сонлар ўзаро туб сонлар деб аталади. Масалан, 35 ва 169 – ўзаро туб сонлар. Ҳар қандай a ва b сонларининг чекли (саноқли) умумий бўлувчилари мавжуд. Ушбу умумий бўлувчиларнинг энг каттаси a ва b сонларининг ***энг катта умумий бўлувчиси*** (қисқача ЭКУБ) деб аталади ва бундай белгиланади: (a, b). Масалан, $(108, 144)=36$; $(35, 169)=1$. Бир неча соннинг ЭКУБи ҳам шундай белгиланади: $(24, 66, 84)=6$.

Сонларнинг ЭКУБ ни топиш учун бу сонларни каноник кўпайтувчиларга ажратиш усули қўлланилади. Бунинг учун, берилган сонларнинг каноник ажратилишидаги энг кичик даражали умумий туб кўпайтувчиларни кўпайтириш кифоя. Иккита мисол кўриб чиқамиз.

1-мисол. 680 ва 612 сонларининг ЭКУБ ни топамиз.

Ечилиши. $680=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot17$, $612=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot17$ бўлгани учун, бу ажратилган умумий кўпайтувчиларнинг кўпайтмаси берилган сонларнинг ЭКУБи бўлади: $(680, 612)=2\cdot2\cdot17=68$.

2-мисол. 150, 180 ва 240 сонларининг ЭКУБини топиш керак.

Ечилиши. $150=2\cdot3\cdot5\cdot5$, $180=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5$, $240=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$. Бундан 2, 3 ва 5 сонлари умумий кўпайтувчилар эканини кўрамиз, яъни $(150, 180, 240)=2\cdot3\cdot5=30$.

Агар k сони a ва b сонларининг ҳар бирига бўлинса, у холда k сони a ва b сонларининг умумий каррализи дейилади. Масалан, ab кўпайтма a билан b нинг умумий карралиси. a билан b сонларининг барча умумий карралиларининг энг кичиги шу сонларнинг ***энг кичик умумий карралиси*** (қисқача ЭКУК) дейилади ва у қуйидагича белгиланади: $[a, b]$. Шу каби бир нечта соннинг ЭКУК ни аниқлаймиз: $[a, b, c, ..., f]$ сонларнинг ЭКУК ни топиш учун, бу сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиб, улардаги энг катта даражали барча туб кўпайтувчиларни кўпайтириш етарли. Мисоллар келтирамиз.

3-мисол. 680 ва 612 сонларининг ЭКУК ни топамиз.

Ечилиши. $680=2^3\cdot5\cdot17$, $612=2^2\cdot3^2\cdot17$ экани маълум. У ҳолда $[680, 612]=2^3\cdot5\cdot17\cdot3^2=6120$.

3.2. Умумий бўлувчилар ва умумий карралиларнинг хоссалари

Энди умумий бўлувчилар ва умумий карралиларнинг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.

1. *Агар d сони a билан b сонларининг умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда $k \square \frac{ab}{d}$ сони a ва b сонларининг умумий карралиси бўлади.*

Исботи. d сони a билан b сонларининг умумий бўлувчиси бўлганиучун, a_1, b_1, сонларитопилиб, $a=a_1d$, $b=b_1d$ тенгликлар бажарилади. Бунда $k=\frac{ab}{d}=\frac{a_1db_1d}{d}=a_1db_1=a_1\left(db_1\right)=a_1b$ тенгликдан k сони b га каррали эканини кўрамиз. Шу каби $k=a_1db_1=(a_1d)b_1=ab_1$ тенгликдан k нинг a га ҳам бўлиниши келиб чиқади, яъни k сони – a ва b сонларининг умумий карралиси.

2. $(a,b)=\frac{ab}{[a,b]}$ *тенглик бажарилади.*

Исботи. Айтайлик, $\frac{ab}{[a,b]}=d$ бўлсин. $[a, b]\cdot d = a\cdot b$ бўлгани учун ва 1-хоссага кўра d – натурал сон. сони b га қолдиқсиз бўлингани учун, сони ҳам ab кўпайтмага қолдиқсиз бўлинади. У ҳолда $d[a, b]$ тенгликдан $a[a, b]$ ифода $d[a, b]$ сонига бўлинади. Демак, a сони d га қолдиқсиз бўлинади. Яъни, b сони ҳам d сонига бўлинишини кўрсатиш мумкин. Яъни d сони – a ва b сонларининг умумий бўлувчиси.

Энди d сони a ва b сонларининг ЭКУБ бўлишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $d_1>d$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ва a, b сонларининг умумий бўлувчиси бўлган d_1 сони топилсин. У ҳолда 1-хоссага кўра, $k_1 \square \frac{ab}{d_1}$ сони a ва b сонларининг умумий карралиси бўлади. $d_1>d$ бўлгани учун, $k_1< [a_1\ b]$ тенгсизлик бажарилади, яъни a, b сонларининг ЭКУК дан кичик k_1 умумий карралиси топилди. Бундай бўлиши мумкин эмас. Ҳосил бўлган зидлик a, b сонларининг d дан катта умумий бўлувчиси бўлмаслигини кўрсатади, яъни $d=(a, b)$.

Натижа, 1. $[a, b]\cdot(a, b)=ab$ *тенглик бажарилади.*

Натижа, 2. *Агар* $(a, b)=1$ *бўлса, у ҳолда* $[a, b]=ab$.

3. *(a,b) сони a ва b сонларнинг ихтиёрий умумий бўлувчисига қолдиқсиз бўлинади.*

Исботи. Агар d_1 сони a, b сонларининг умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда 1-хоссага кўра $k_1 \square \frac{ab}{d_1}$ сони a, b сонларининг умумий карралиси бўлади. Шунинг учун k_1 сони $[a, b]$ га қолдиқсиз бўлинади, яъни $k_1=m[a, b]$ тенглик бажариладиган m сони топилади. Бундан $[a, b]=\frac{ab}{(a,b)}$ тенгликни эътиборга олган ҳолда, $\dfrac{ab}{d_1} = \dfrac{mab}{(a,b)}$ ёки тенгликлар ҳосил бўлади. Демак, $ab(a, b) = md_1$, яъни (a, b) сони d_1 га қолдиқсиз бўлинади.

4. *Агар a сони n ва m сонларига бўлинса ва $(n, m)=1$ бўлса, у ҳолда a сони nm кўпайтмага қолдиқсиз бўлинади.*

Исботи. Хосса шартларига кўра a сони n ва m сонларининг умумий карралисидир. Бунда a сони $[n, m]=nm$ сонига қолдиқсиз бўлинади.

Энди туб сонларни аниқлаш учун ва сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш учун қўлланадиган муҳим хоссани кўриб чикамиз.

5. *Агар a сони $\sqrt{a}$ сонидан кичик туб сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмаса, у ҳолда a – туб сон.*

Исботи. Аввал, агар a сонининг p энг кичик туб бўлувчиси бўлса,у ҳолда $p \leqslant \sqrt{a}$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатамиз. Яъни, агар p сони a нинг энг кичик туб бўлувчиси бўлса, шундай b сони топиладики, бунда $a=bp$, $b \geqslant p$ бўлади. Бундан $p^2 \leqslant bp = a$ ёки $p \leqslant \sqrt{a}$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Демак, a сонининг $\sqrt{a}$ дан кичик туб бўлувчиси бўлмаса, a сонининг ҳеч қандай туб бўлувчиси бўлмайди, яъни a – туб сон.

5-мисол. 137 сонининг туб ёки мураккаб эканини аниқлаймиз.

Ечилиши. $11 < \sqrt{137} < 12$ бўлгани учун, 137 сони 2, 3, 5, 7, 11 туб сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмаганлиги сабабли 137 туб сондир.

МИСОЛЛАР

А

718. Сонларнинг ЭКУБни топинг:

1) 96 ва 34; 2) 105 ва 135; 3) 360 ва 252;
4) 436 ва 729;) 232 ва 132; 6) 320 ва 1152.

719. Сонларни аниқланг:

1) (220, 138); 2) (344, 476); 3) (78, 15);
4) (891, 33); 5) (335, 490); 6) (1122, 121).

720. Сонларни топинг:

1) (204, 230, 170); 2) (224, 168, 392);

3) (108, 126, 882); 4) (112, 124, 420).

721. 1) 3; 2) 15; 3) 12 ва 5; 4) 12 ва 3; 5) 6 ва 10 сонларига каррали бўлган бир нечта сонни айтинг.

B

722. Агар $a=a_1d$, $b=b_1d$, $(a,b)=d$ бўлса, $(a1,b)=1$ эканини исботланг.

723. $[a,b,c]=[[a,b],c]$ формулани исботланг.

724. $(a, b, c)=((a, b), c)$ формулани исботланг.

725. $\frac{7}{192}$ ва $\frac{187}{1620}$ касарларни умумий махражга келтиринг.

726. 27346 сонини: 1) 3 га; 2) 5 га; 3) 9 га; 4) 11 га бўлганда қандай қолдиқ қолишини оғзаки аниқлаш мумкинми? Ушбу қолдиқларни ёзинг.

727. 59 142 727 346 сонини: 1) 3 га; 2) 5 га; 3) 9 га; 4) 25 га бўлганда қоладиган қолдиқни оғзаки айтинг.

728. Энг катта уч хонали соннинг барча бўлувчиларини аниқланг.

729. Агар $a=a_1d$, $b=b_1d$, $(a, b)=d$ бўлса, $[a_1, b_1]=a_1b_1d$ эканини исботланг.

730. Қуйидаги маълумотлар бўйича a билан b ни топинг:

1) $a:b=11:13$, $(a, b)=5$; 2) $(a, b)=5$, $[a, b]=105$; 3) $(a, b)=7$, $ab=294$; 4) $[a, b]=75$, $ab=375$; 5) $[a, b]=915$, $(a, b)=3$; 6) $a:b=17:14$, $(a, b)=3$; 7) $[a, b]=224$, $a:b=7:8$; 8) $a:b=9:14$, $(a, b)=378$; 9) $a:b=5:6$, $(a, b)=13$.

731. 1) $2\cdot3\cdot5$; 2) $2\cdot5\cdot7$; 3) $3\cdot7\cdot11$. кўпайтмаларнинг барча бўлувчиларини топинг:

732. Агар $a=2^5\cdot3^4\cdot5^2\cdot11$, $b=2^3\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2$ бўлса, у ҳолда $a\cdot b$, (a, b) ва $[a, b]$ сонларини туб кўпайтувчиларга ажратинг.

733. 10 дан кичик ва 10 билан ўзаро туб сонларни ёзинг.

734. 12 дан кичик ва 12 билан ўзаро туб сонларни ёзинг.

C

735. Агар $p_1, p_2, \ldots, p_n$ туб сонлар ва $u_1, u_2, \ldots, u_n$ натурал сонлар бўлса, $a \square p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}$ сонининг (1 ва ўзини қўшиб ҳисоблаганда) нечта бўлувчиси бўлишини аниқланг.

736. Ҳар қандай бутун n сони учун n^4+4 сони мураккаб бўлишини исботланг.

737. Араванинг олдинги ғилдираги айланасининг узунлиги 225 см, орқадаги ғилдираги айланасининг узунлиги эса 325 см. Энг ками билан неча метр юргандан сўнг араванинг иккала ғилдираги хам бутун марта тўлиқ айланади?

738. 4 та от айланма югуриш майдонида пойгага чиқди. Биринчи от майдонни – 20 дақиқада, иккинчи от – 15 дақиқада, учинчи от – 12 дақиқада, тўртинчи от –10 дақиқада айланиб ўтди. Агар улар марра чизиғидан бир вактда пойгага чиқишган бўлса, қанча вақтдан сўнг тўртта отнинг ҳаммаси марра чизиғида қайта учрашади?

739. Учта теплоходнинг биринчиси портга 3 кунлик, иккинчиси 4 кунлик, учинчиси 5 кунлик сафардан сўнг қайтиб келди. Душанба куни улар портда учрашганлари маълум бўлса, у ҳолда энг камида неча кундан кейин: а) биринчи теплоход иккинчиси билан; б) биринчи теплоход учинчиси билан; в) иккинчи теплоход учинчиси билан; г) учаласи ҳам портда қайта учрашади ва бу учрашувлар ҳафтанннг қайси кунларига тўғри келади?

740*. Агар $ab+cd$ сони $(a-c)$ га бўлиниши маълум бўлса, $ad+bc$ сони ҳам $a-c$ бўлинишини исботланг.

741*. Агар $(a, m)=1$, $ad-bc$ айирма ва $a-b$ ифода m га бўлинадиган бўлса, $c-d$ айирма ҳам m га бўлинишини исботланг.

742. Кетма-кет иккита тоқ сон ўзаро туб сон эканини исботланг.

743. Кетма-кет иккита жуфт соннинг ЭКУБи 2 га тенг бўлишини кўрсатинг.

744. Агар n га мураккаб сон бўлса, у ҳолда $2n-1$ сони ҳам мураккаб сон бўлишини кўрсатинг.

745. Агар $n!$ сони $n+1$ га бўлинмаса, у ҳолда $n+1$ туб сон бўлишини исботланг. Бунда $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (эн факториал деб ўқилади).

4-§. Бутун сонларни қолдиқ билан бўлиш

4.1. Айириш амали. Бутун сонлар

Агар a,b ва x сонлари учун

$$b+x=a \tag{1}$$

тенглик бажарилса, x сони a ва b сонларининг айирмаси дейилади. Бунда a сони ***камаювчи***, b сони ***айрилувчи*** дейилади. Умуман, x сонини аниқлаш жараёни a сонидан b сонини ***айириш амали*** дейилади.

Ҳар қандай a ва b натурал сонлар учун (1) тенгликни қаноатлантирувчи x натурал сон ҳар доим хам топилавермайди. Агар $a>b$ бўлса, у ҳолда x натурал сон мавжуд бўлиб, у ягона бўлади, яъни (1) тенгламанинг натурал сонлар тўпламида ечими бўлиши учун $a>b$ тенгсизлик бажарилиши лозим. Бошқа ҳолларда бу тенглама натурал ечимга эга эмас. Масалан, $3-5$ айирма натурал сон эмас. Шунинг учун натурал сонлар тўпламини кенгайтириш зарурати туғилади.

0 (ноль) ва $(-n)$ – манфий ишорали сонларни кўриб чиқайлик. Бу ерда n – натурал сон. $-n$ сонлари манфий ***бутун сонлар*** деб аталади. Баъзан $-n$ сони n натурал сонга ***қарама-қарши сон*** деб аталади.

Агар m ва n натурал сонлар тенг бўлса, у ҳолда $-m$ ва $-n$ манфий бутун сонлар ҳам тенг бўлади. Энди барча натурал сонлардан, нолдан ва барча манфий бутун сонлардан ташкил топган тўпламни кўриб чиқамиз. Бу тўплам ***бутун сонлар тўплами*** деб аталади ва уни $\mathbf{Z}$ билан белгиланади. Шундай килиб, $\mathbf{Z}$ тўплам қуйидаги сонлардан иборат:

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{2}$$

ва бу тўпламнинг ҳар қандай элементи ***бутун сон*** деб аталади. Бутун сонлар тўпламида сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси тўлиқ аниқланади. Агар a ва b – мусбат сонлар бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар бажарилади:

$a-b=a+(-b)$; $\quad a-(-b)=a+b$; $\quad a+0=0+a=a$;
$(-a)b=a(-b)=-ab$; $\quad (-a)(-b)=ab$; $\quad (-1)a=-a$;
$0 \cdot a=a \cdot 0=0$; $\quad a^0=1$.

Бутун сонларни қўшиш ва айириш амалларининг асосий қонунлари натурал сонларни қўшиш ва кўпайтириш конуниятлари билан бир хил. Бутун сонлар тўпламида қўшиш ва кўпайтириш амалларига тескари амал – айириш ва бўлиш амаллари аниқланади ва бу тўпламда айириш амали тўлиқ аниқлангани билан, иккита бутун сонларнинг бўлинмаси ҳар доим ҳам бутун сон бўлавермайди. Масалан, 5:7 бутун сон эмас.

4.2. Бутун сонларни қолдиқ билан бўлиш

Бутун сонлар тўпламида қолдиқ билан бўлиш амали бажарилади.

Таъриф. *Агар a бутун сон билан b натурал сон учун q ва r $(0 \leqslant r < b)$ бутун сонлар топилиб, $a=bq+r$ тенглик бажарилса, у ҳолда a сони b сонига r* ***қолдиқ билан бўлинади*** *дейилади. Бу ерда q – тўлиқмас бўлинма. Агар $r=0$ бўлса, a сони b га* ***қолдиқсиз бўлинади*** *дейилади.*

Теорема. Ҳар қандай a бутун ва b натурал сонлар учун

$$a=bq+r, \ (0 \leqslant r < b) \qquad (1)$$

тенглик бажариладиган q ва r бутун сонлар мавжуд ва бу сонлар фақат ягона турда аниқланади.

Исботи. a ва b натурал сонлар бўлган ҳолни қараб чиқамиз. Агар $a=b$ бўлса, $a=b \cdot 1+0$ тенгликдан $q=1$, $r=0$ бўлишини кўрамиз. $a<b$ бўлса, у ҳолда $a=b \cdot 0+a$, $q=0$, $r=a$, a сони b га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда q натурал сон мавжуд бўлиб, $a=bq$ тенглик бажарилади, яъни q ва $r=0$ сонлари теорема шартларини қаноатлантиради.

a сони b га бўлинмайди, деб фараз қилайлик. У ҳолда $q=1$ ва $r_1=a-b$ сонлари $a=1 \cdot r_1$, $r_1>0$ шартларни қаноатлантиради. a сони b га бўлинмагани сабабли, ¶. У ҳолда, $r_1>$b ёки $r>b$ бўлиши керак. Агар $r_1<$b тенгсизлик бажарилса, $q=1$, $r=r_1$ сонлари теорема шартларини қаноатлантиради. Агар $r_1>b$ бўлса, $r_2<0$ сони топилиб, $r_1=1 \cdot b+r_2$ тенглик бажарилади. Бунда $0<r_2<r_1$. Бундан $a=2 \cdot b+r_2$ тенгликни оламиз. a сони b га бўлинмагани учун, $r_2 \square b$. Шу сабабли $r_2>b$ ёки $r_2>b$ бўлиши керак. Агар $r_2<b$ бўлса, $q=2$, $r=r_2$ теорема шартини тўлиқ қаноатлантиради. Агар $r_2>b$ ва ҳ. к. бўлса, у ҳолда кўрсатилган жараённи давом эттириб, k=қадамда $a=k \cdot b+r_k, 0<r_k<b$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда $q=k$, $r=rk$ теорема шартини тўлиқ қаноатлантиради. Албатта, кўрсатилган жараён чексиз давом этиши мумкин эмас. Уни қуйидаги натурал сонлар аксиомасидан оламиз: *$a>b$ шартни қаноатлантирувчи a ва b натурал сонлар учун k натурал сон мавжуд бўлиб, $a<k \cdot b$ тенгсизлик бажарилади.*

Шундай қилиб, биз ҳар қандай a ва b натурал сонлар учун теорема шартини қаноатлантирадиган q ва r сонлари мавжуд бўлишини кўрсатдик. Энди шу q ва r сонлари ягона турда аниқланишини кўрсатамиз. Бунинг учун тескари фараз қилиб, $a=bq_1+r_1$, $0 \leqslant r_2<b$ ва

$a=bq_2+r_2$, $r_1<r_2$ тенгликларни қаноатлантирадиган иккита жуфт q_1, r_1 ва q_2, r_2 сонлари мавжуд дейлик. У ҳолда $bq_1+r_1=bq_2+r_2$ тенглик ҳосил бўлади. Аниқлик учун $r_1<r_2$ бўлсин. Бундан ва $r_2-r_1>0$, $q_1-q_2>0$ тенгсизликлардан $b(q_1-q_2)=r_2-r_2$ тенгликни оламиз. Бу тенгликнинг эса бажарилиши мумкин эмас, чунки $0<r_2-r_1<b$ ва $b(q_1-q_2)>b$. Шу каби, $r_1=r_2$ бўлган ҳолда ҳам зидлик келиб чиқади. Шунинг учун $r_1=r_2$ ва $q_1=q_2$ тенгликлар бажарилиши керак. Демак, a натурал сон бўлган ҳолда теорема тўлиқ исботланди.

Агар $a=0$ бўлса, $q=0$ ва $r=0$ сонлари теорема шартини қаноатлантиради.

Агар $a=-n$, $n>b$, n − натурал сон бўлса, у ҳолда исботлаганимиз бўйича n сони учун ягона q_1,r_1 сони топилиб,

$$n=bq_1+r_1, \ (0 \leqslant r_1 < b), \tag{2}$$

тенглик бажарилади. Агар $r_1=0$ бўлса, $n=bq_1$ ёки $-n=b(-q_1)$ тенгликда $q=q_1$, деб олсак, $a=bd$, яъни $q=q_1$, $r=0$ сонлари теорема шартларини тўлиқ қаноатлантиради.

Агар $0<r_1<$b бўлса, у ҳолда (2) тенгликдан $a=(-q_1-1)b+(b-r_1)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда $q=-q_1-1$, $r=b-r_1$ сонлари теорема шартини қаноатлантиради. Теорема тўлиқ исботланди.

Натижа. а) Ҳар қандай жуфт сонни $n=2k$ кўринишида ёзиш мумкин. Буерда k− бутун сон. б) Ҳар қандай тоқ сонни $n=2k+1$ кўринишда ёзиш мумкин. Бунда k − бутун сон,

4.3. Евклид алгоритми

Кичик сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси (ЭКУБ) ни топиш учун, уларни туб кўпайтувчиларга ажратиш усулини қўлладик. Катта сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш эса анча мураккаб. Энди шундай катта сонларнинг ЭКУБ ни топишга мўлжалланган Евклид қоидасини кўриб чиқамиз. Бу қоидада сонларни қолдиқ билан бўлиш амали қўлланилади. Аввал қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Евклид (эр. ав. Ш аср) Александрияда ҳаёт кечирган юнон математиги. Евклид ўзининг машҳур «Негизлар» деб аталган 13 жилдли асарларида шу даврдаги маълумотларни тўплаб, геометрияни қатъий аксиоматик асосда ёзган. Бу асарлар шу қадар муваффақиятли эдики, ундан кейин қарийб 20 аср математиклар геометрияни шу «Негизлар» бўйича ўқиб ўрганишган.

Теорема. Агар $a=bq+r$ бўлса, у ҳолда $(a,\ b)=(b,\ r)$ тенглик бажарилади.

Исботи. $r=0$ ёки $r\ \square\ 0$ бўлиши мумкин.

1) Агар $r=0$ бўлса, у ҳолда $a=bq$, яъни a сони b га қолдиқсиз бўлинади. Шунинг учун $(a,\ b)=b=(b,\ 0)=(b,$ r) тенглик билан бирга теорема исботланади.

2) $r\ \square\ 0$ ва $d=0$ бўлсин. Бунда $bd \vdots d$, $r \vdots d$ бўлгани учун, $a=bq+r$ сони ҳам d га бўлинади. Яъни, d сони − a билан b нинг умумий бўлувчиси. Демак, $d=(a,\ b)$ эканини кўрсатиш кифоя. Фараз қилайлик, $d_1>d$ тенгсизликни қаноатлантирувчи a ва b сонлари d_1 умумий бўлувчига эга бўлсин. У ҳолда $a \vdots d_1$, $b \vdots d_1$ бўлгани учун, $r=a-bq$ сони ҳам d_1 га бўлиниши керак. Бунда d_1 сони b ва r сонларининг умумий бўлувчиси бўлади ва $d_1>d=(b,r)$ тенгсизлик бажарилади. Бундай бўлиши мумкин эмас. Ҳосил бўлган зидлик теормани исботлайди.

Энди a ва b сонларининг ЭКУБ ни топишга мўлжалланган Евклид қоидасини келтирамиз. Фараз қилайлик, $a \geqslant b$ бўлсин. Агар $a \vdots b$ бўлса, у ҳолда $(a,\ b)=b$. a сонини b га бўлганда r қолдиқ қолса, исботланган теорема бўйича $(a,\ b)=(b,\ r)$. Яъни, $(a,\ b)$ ни топиш масаласи r ва r сонларининг ЭКУБ ни топишга келиб тақалади. Агар $b \vdots r$ бўлса, у ҳолда $(b,r)=r$ ва $(a,\ b)=r$. b сонини r га бўлганда r_1 қолдиқ қолса, яъни $b=rq_1+r_1$тенглик бажарилса, теоремага кўра $(r, r_1)=(b, r)=(a, b)$ тенг-ликни ҳосил қиламиз. Ушбу жараённи давом эттириб, энг сўнгги қолдиққа ундан олдинги қолдиқ бўлинадиган ҳолга келамиз. Бунда нолга тенг бўлмаган энг охирги қолдиқа ва b сонларининг ЭКУБи бўлади.

1-мисол. Евклид қоидаси бўйича (15283, 10013) сонини топиш керак.

Ечилиши. Евклид алгоритмидаги кетма-кет бўлиш жараёни қуйидаги усулда бажарилади:

$$\begin{array}{r|l} 15283 & 10013 \\ -10013 & 1 \\ \hline 5270 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10013 & 5270 \\ -5270 & 1 \\ \hline 4743 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5270 & 4743 \\ -4743 & 1 \\ \hline 527 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4743 & 527 \\ -4743 & 9 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$15283=1\cdot10013+5270,$

$10013=1\cdot5270+4743,$

$5270=1\cdot4743+527,$

$4743=9\cdot527.$

Нолга тенг бўлмаган энг охирги қолдиқ 527 га тенг. Демак, (15283, 10013)=527.

МИСОЛЛАР

А

746. Евклид алгоритмидан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг ЭКУБ ни топинг:

1) 846 ва 246; 2) 1960 ва 588; 3) 21120 ва 30720;

4) 15283 ва 10013; 5) 2956 ва 13302; 6) 1426 ва 420.

747. 2939 ва 3271 ўзаро туб сонлар эканини кўрсатинг.

748. (6120, 36360) сони (1260, 55260) сонидан неча марта катта?

749. 1) (475, 570, 741); 2) (112, 124, 420); 3) (250, 320, 810, 490); 4) (660, 1080, 1200, 1500) сонларини аниқланг.

В

750. Узунликлари қуйида берилган кесмаларнинг энг катта умумий ўлчагич кесмалари узунлигини топинг: 1) 3 м 20 см ва 5 дм 4 см; 2) 7 м ва 45 см; 3) 1 км 300 м ва 400 м; 4) 3 км 200 м ва 600 м.

751. Ҳар қандай натурал сонни: 1) $2k$ ёки $2k+1$; 2) $3k$, $3k+1$ ёки $3k+2$ кўринишида ёзиш мумкин эканини исботланг. Бунда k – натурал сон.

752. Агар берилган икки соннинг иккаласини хам 3 га бўлганда қолдиқ 1 га тенг бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмасини 3 га бўлганда 1 га тенг қолдиқ қолишини кўрсатинг.

753. Агар иккита натурал сонни 3 га бўлганда, биттасидан 1 га, иккиичисидан 2 га тенг қолдиқ қолса, у ҳолда уларнинг кўпайтмасини 3 га бўлганда 2 га тенг қолдиқ қолишини исботланг.

754. Агар иккита бутун сонни маълум бир натурал сонга бўлганда тенг қолдиқлар қолса, бу сонларнинг айирмаси берилган натурал сонга бўлинишини кўрсатинг.

C

755. Тоқ натурал соннинг квадратидан 1 сонини айирганда 8 га бўлинадиган сон ҳосил бўлишини исботланг.

756. Кетма-кет иккита тоқ сон квадратларининг айирмаси 8 га бўлинишини исботланг.

757. Тоқ бутун соннинг квадратини 4 га бўлганда 1 га тенг қолдиқ қолишини кўрсатинг.

758. 5 га бўлинмайдиган соннинг квадратига бирни қўшганда ёки бирни айирганда 5 га бўлинишини исботланг.

759*. k нинг ҳар қандай натурал қийматида k^3+11k сони 6 га бўлинишини исботланг.

760*. $k^2(k^4-1)$ сони ҳар бир натурал k учун 60 га бўлинишини исботланг.

761. Агар a ва k – натурал сонлар бўлса, у ҳолда $a^{k+4}-a^k$ сони 30 га бўлинишини исботланг.

762. k^5-5k^3+4k кўпҳад ҳар бир натурал k учун 120 га бўлинишини кўрсатинг.

763. x^3+3x^2-x-3 ифода x нинг ҳар бир тоқ қийматида 48 га бўлинишини кўрсатинг.

5-§. Аниқланмаган чизиқли тенгламаларни ечиш

5.1. Аниқланмаган тенгламалар тушунчаси

Икки ёки ундан ортиқ ўзгарувчили тенгламалар ***аниқланмаган тенгламалар***[1] *дейилади. Аниқланмаган тенгламаларнинг* ***ечими*** *деб шу тенгламани қаноатлантирадиган ўзгарувчилар қийматларининг барча тўпламига айтилади.* Биз бунда аниқланмаган тенгламаларнинг бутун сонлар тўпламидаги ечимларини кўриб чиқамиз. Бундай тенгламаларни ечиш учун, одатда, бизга маълум сонларнинг бўлиниш аломатлари қўлланилади.

---

[1] Аниқланмаган тенгламаларни қадимги юнон олими Диофант (эр. ав. III аср) ўзининг 13 жилдли китобдан иборат (буларнинг дастлабки 6 тасигина сақланган) «Арифметика» деб аталадиган асарларида кўриб чиққан. Шу сабабли аниқланмаган тенгламалар назарияси ***диофантанализ*** (таҳлил) деб аталади.

1-мисол. $x^5-x^3=y^3z$ тенгламанинг бутун ечимларини топиш керак. Бу ерда y ва z–туб сонлар.

Ечилиши. Берилган тенгламани $x^3(x^2-1)=y^3z$ кўринишида ёзамиз. x^3, x^2-1 сонларининг тоқ ёки жуфтлиги ҳар турли ва $(x, x+1)=1$, $(x, x)=1$ бўлгани учун, $(x^3, x^2-1)=1$ бўлади. Шунингдек, y^3z сони x^3 га бўлиниши керак. z сони x^3 га бўлинмагани учун (z – туб сон), y^3сони x^3 га бўлиниши керак. Бу нисбат эса фақат $x=y$ бўлганда бажарилади. Шундай цилиб, x – туб сон ва $z=x^2-1$ ёки $z=(x-1)(x+1)$Бу тенглик $x-1=1$ ва $x+1=z$ бўлгандагина бажарилади. Бунда $x=2$, $y=2$ ва $z=3$.

5.2. Аниқланмаган чизиқли тенгламаларни ечиш

Агар a, b, c – бутун сонлар бўлса, $ax+by=c$ чизиқли тенгламани бутун сонлар тўпламида ечиш усулларини аниқлайдиган бир неча теоремаларни қараймиз.

Теорема, 1. Агар $(a,b)=d$ бўлса, $ax+by=d$ тенгламанинг бутун ечими мавжуд.

Исботи. Соддароқ бўлиши учун $(a, b)=d$ сонини аниқлашга мўлжалланган Евклид алгоритми 3 қадамдан сўнг тугаллансин. У ҳолда $a=bq_1+r_1, b=r_1q_2+r_3= r_1q_2+d$, $r_1=bq_3$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $r_1=a-bq_1, d=b-r_1q_2$ тенгликлардан r_1 ни ажратиб олиб, $d=b-(a-bq_1)q_3=-q_2a+(1+q_1q_2)b$ тенгликни ҳосил қиламиз. Яъни, $x=-q_1, y=1+ q_1q_2$ сонлари $ax+by=d$ тенгламани қаноатлантиради. Умумий ҳолда теорема шу каби исботланади.

Теорема, 2. *Агар* $(a,b)=1$ *бўлса,* $ax+by=1$ *тенглама камида биржуфт* (x, y) *бутун ечимга эга.*

Бу теореманинг исботи 1-теоремадан келиб чиқади.

2-мисол. $15x+37y=1$ тенгламанинг бутун ечимларини топиш керак.

Ечилиши. 1-*усул.* 1 сонини 15 билан 37 сонлари орқали ажратиш керак: $1=15\cdot 5+37\cdot(-2)$. Бундан $x=5$, $y=-2$ бўлади.

2-усул. Евклид алгоритмидан фойдаланиб, $37=15\cdot 2+7$, $15=2\cdot 7+1$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $1=15-2\cdot 7=15-2(37-15\cdot 2)=15\cdot 5+(-2)37$. У ҳолда $x=5$, $y=-2$.

Теорема, 3. *Агар* $(a, b)=d>1$ *ва* c *сони* d *га бўлинмайдиган бўлса, у ҳолда* $ax+by=c$ *тенгламаларнинг бутун ечимлари мавжуд эмас.*

Исботи. Тескари фараз қилиб, x_0, y_0 сонлари берилган тенгламанинг бутун ечимлари бўлсин, дейлик. $a\,\vdots\, d$, $b\,\vdots\, d$ нисбатлардан $c=ax_0+by_0\,\vdots\, b$ экани келиб чиқади. Бу теорема шартига зид. Теорема исботланди.

3-мисол. (16, 34)=2 ва 7 сони 2 га бўлинмагани учун, $16x-34y=7$ тенглама бутун ечимга эга эмас.

Теорема, 4. Агар $(a,b)=1$ бўлса, у ҳолда $ax+by=c$ тенгламанинг барча бутун ечимлари

$$x=x_0c+bt,\ y=y_0c+at \qquad (1)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда x_0, y_0 сонлари $-ax+by=1$ тенгламанинг бутун ечимлари, t – ихтиёрий бутун сон.

Исботи. Дастлаб (1) формула билан аниқланадиган x, y сонлари $ax+by=c$ тенгламанинг ечимлари бўлишини кўрсатамиз. Яъни, $ax+by=a(x_0c+bt)+b(y_0c-at)=ax_0c+by_0c+abt-abt=c(ax_0+by_0)=c$.

Бунда $ax_0+by_0=1$ бўлишини ҳисобга олдик. Энди x_1, y_1 сонлари $ax+by=c$ тенгламанинг бирор бир ечими бўлсин. У ҳолда x_1, y_1 сонларини (1) формула орқали ифодалаш мумкин эканини кўрсатамиз. x_0, y_0 сонлари $ax+by=1$ тенгламанинг ечимлари бўлгани учун, cx_0, cy_0 сонлари $ax+by=c$ тенгламанинг ечими бўлади. У ҳолда $x_1-cx_0=t_1$ ва $y_1=cy_0=t_2$ сонлари ҳам $ax+by=c$ тенгламанинг ечими бўлади. Бундан $x_1=cx_0+t_1$, $y_1=cy_0+t_2$ бўлишини инобатга олиб, $ax_1+by_1=b(cx_0+t_1)+b(cy_0+t_2)=$ $=c(ax_0+bx_0)+at_1+bt_2=c+at_1+bt_2$ тенгликдан $at_1+bt_2=0$ ёки $at_1=-bt_2$ тенгликни оламиз. $(a, b)=1$ бўлгани учун, охирги тенглик фақат $t_1=bt$ ва $t_2=-at$ бўлганда бажарилади. Бунда t – қандайдир бир бутун сон. Шунинг учун $x=cx_0+bt$, $y=cy_0-at$.

Натижа. Агар $(a, b)=1$ ва x_1, y_1 сонлари $ax+by=c$ тенгламанинг бутун ечимлари бўлса, бу тенгламанинг бошқа бутун ечимлари $x=x_1+bt$, $y=y_1-at$ формулалардан аниқланади. Бунда. t – ихтиёрий натурал сон.

Натижанинг исботи 5-теоремадан келиб чиқади.

4-мисол. $407x-2819y=33$ тенгламанинг бутун ечимларини топиш керак.

Ечилиши. (407, 2816)=11 бўлгани учун, берилган тенглама 11 га қисқартирилгандан кейин $37x-256y=3$ кўринишга келади. Аввал $37x-256y=1$ тенгламанинг бир жуфт бутун ечимини аниқлаш керак. Евклид алгоритмидан фойдаланиб, ((37, 256)=1), $256=37\cdot6+34$, $37=1\cdot34+3$, $34=33\cdot1+1$ тенгликни оламиз. Бунда

$1=34-3\cdot 11=34-11(37-34)=256-37\cdot 6-11(37-256+37\cdot 6)=$ $=12\cdot 256-83\cdot 37=(-83)37-(-12)256$. Бундан $x_0=-83$, $y_0=-12$ экани келиб чиқади. У ҳолда берилган тенг-ламанинг умумий ечими $x=-83-3-256t=-249-256t$, $y=12\cdot 3-37t-$ $-36-37t$. Агар $t=-1$деб олсак, берилган тенгламанинг $x_1=7$, $y_1=1$ бир жуфт ечимини оламиз. У ҳолда натижа бўйича берилган тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x = 7 - 256t, \\ y = 1 - 37t, \end{cases}$$

система ёрдамида аниқланади.

Архимед (эр. ав. 287–212) – қадимги юнон математиги. У ўз даврида кўплаб янги математик усулларни тавсия килиб, уни табиатшунослик ва техника соҳаларида қўлланиш намуналарини яратган.

МИСОЛЛАР

В

764. Қуйидаги тенгламаларнинг бутун ечимларини аниқланг:

1) $27x-40y=1$; 2) $54x+37y=1$; 3) $107x+84y=1$;
4) $13x-15y=7$; 5) $81x+52y=5$; 6) $24x-52y=5$;
7) $42x+34y=5$; 8) $253x-449y=3$.

765. Тенгламанинг бутун ечимларини топинг:

1) $6x-15y=27$; 2) $7x-4y=29$; 3) $3x+2y=7$; 4) $3y=2x+8$.

766. Тенгламанинг номанфий бутун ечимларини топинг:

1) $17x+23y=183$; 2) $8x+65y=81$; 3) $3x+7y=250$;
4) $7x+10y=297$.

767. 5, 20 ва 50 тенгелик 20 та тенгедан 500 тенге ҳосил қилиш мумкинми?

768. 200 ва 500 тенгелик банкнотлар билан 4800 тенгени тўлаш мумкин бўлган барча усулларни кўрсатинг. Шу миқдордаги пулни 500 ва 1000 тенгелик банкнотлар билан тўлаш мумкинми?

C

769. Тенгламанинг бутун ечимларини топинг:

1) $xy=x+y$; 2) $2y+1=x^3$, y – туб сон; 3) $1+x+x^2+x^3=p^4$, p – туб сон;

4) $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.

770. 7 га бўлганда қолдиқ 3 га тенг, 11 га бўлганда эса қолдиқ 4 га тенг бўлган номанфий бутун соннинг умумий кўринишини аниқланг.

771. Тенгламанинг бутун ечимини топинг:

1) $x^2=y^2+2y+13$; 2) $x^2-3xy+2y^2=3$;
3) $y^2-2xy-2x=6$; 4) $x!+y!=4z+3$;
5) $1!+2!+...+x!=y^2$.

772. 1967 йилда ёши туғилган йили рақамларининг йиғиндисига тенг бўлган одамнинг туғилган йилини аниқланг.

773. Тенгламанинг бутун ечими мавжуд эмаслигини кўрсатинг:

1) $y^2=5x^2+6$; 2) $2x-1=y2$, $(x>1)$;
3) $x^2-3y=17$; 4) $3x^2-4y^2=13$.

774. Агар p ва q тоқ сонлар бўлса, $x^{10}+px^7+q=0$ бутун ечимга эга эмаслигини исботланг.

775. a ва b нинг қандай натурал қийматларида $x^2-abx+a+b=0$ тенгламаиинг илдизлари бутун сонлар бўлади?

776. Рақамларининг кўпайтмасига тенг икки хонали сон мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

777*. Агар $ax^2+bxy+cy^2=z^2$, $(a, b, c \square Z)$ тенгламанинг нолдан фарқли битта бутун ечими мавжуд бўлса, у ҳолда бу тенглама чексиз кўп бутун ечимга эга эканини исботланг.

6-§. Дирихле принципи

Бу содда принципни биринчи бўлиб немис математиги Лежен Дирихле (1805–1859) ифодалаган. Унинг маъноси қуйидагича:

n та уйчага $n+1$ дан кам бўлмаган қуёнлар жойлаштирилган. У ҳолда камида иккита қуён ўтирадиган уйчани топиш мумкин.

Бу шу қадар тўғри тасдиқ бўлгани билан, унинг ёрдамида кўплаб мураккаб масалаларни ечиш мумкин.

Фақат масала шартидан қулай равишда «уйча» ларни танлаб олиб, уларга «қуёнлар» ни жойлаштира олиш лозим. Бунга бир катор мисол келтирамиз.

1-мисол. Исталган 13 ўқувчи орасидан камида бир ойда туғилган иккита ўқувчи топилишини кўрсатамиз.

Ечилиши. Яъни бир йилда 12 ой бўлгани сабабли, 13 та ўкувчининг камида иккитаси бир ойда туғилади. Бунда «уйча» –12 ой, «қуёнлар» – 13 та ўқувчи.

2-мисол. Исталган 6 та натурал сон орасидан камида айирмаси 5 га бўлинадиган иккита сон топилишини кўрсатамиз.

Ечилиши. Сонни 5 га бўлганда беш турли қолдиқлардан биттаси қолиши мумкин: 0, 1, 2, 3, 4 (булар «уйча»лар). Берилган 6 та сонни («қуёнлар»нинг) 5 га бўлганда камида иккитасида бир хил қолдиқ қолади, яъни улар орасидан a ва b сонлари топилиб, $a=5n+r, b=5m+r$, (r=0, 1,2, 3, 4) тенгликлар бажарилади. Агар $n>m$ бўлса, у ҳолда

$$a-b=(5n+r)-(5m+r)=5n-5m=5(n-m)\,\vdots\,5.$$

МИСОЛЛАР

B

778. Дўконга уч хил нав олмадан 10 та яшикда олиб келинди. Ҳар бир яшикка олманинг фақат бир хил нави солинган. Олмани бир хил нави солинган 4 та яшик топиладими?

779. Исталган турли 100 та натурал сондан айирмаси 99 га бўлинадиган иккита сон топилишини кўрсатинг.

780. Исталган турли 100 та натурал сон орасидан йиғиндиси 197 га бўлинадигаи кам деганда иккита сон топилишини исботланг.

781. 10 дан кичик натурал сонларнинг нечтасини олганда уларнинг бири иккинчисидан икки марта катта бўлмайди?

782. Ҳар қандай 100 та натурал сондан йиғиндиси 100 га бўлинадиган бир нечта сон топилишини кўрсатинг.

783. 50 дан ошмайдиган исталган 30 та натурал сон орасида бири иккинчисидан икки марта катта бўлган иккита сон бор эканини кўрсатинг?

784. Мактабда 25 та синф бўлиб, уларда 801 та ўқувчи ўқийди. Мактабда ўқувчилар сони 33 тадан кам бўлмаган камида битта синф бўлишини кўрсатинг.

C

785. 2004 га бўлинадиган 20032003... 20030...0 кўринишидаги сон мавжудлигини исботланг.

786. Ҳар қандай n натурал сонга бўлинадиган 11...100...0 кўринишидаги сон мавжудлигини исботланг.

787*. 2003 га бўлинадиган ва 2004 рақамлари билан тугалланадиган сон бор эканини кўрсатинг.

788*. 0001 рақамлари билан тугалланадиган 3 сонининг натурал даражаси мавжудми?

789. Ҳар қандай учта бутун сон орасида йиғиндиси 2 га бўлинадиган 2 та сон бўлишини кўрсатинг.

790. Агар одам бошидаги соч толаларининг сони 400 мингдан ортиқ эмас деб ҳисобласак, у ҳолда Алмати аҳолиси орасидан соч толаларининг сони бир хил бўлган иккита одамни топиш мумкин эканини кўрсатинг.

791*. Бирлик квадрат ичидан тасодифий 51 та нуқта белгиланди. Радиуси $\frac{1}{7}$ га тенг доира ичида қандайдир учта нуқта бор эканини кўрсатинг.

I БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МИСОЛЛАР (мураккаб даражали)

792. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $2x^2-xy-y^2$, бунда $x = \sqrt{5}+1$, $x = \sqrt{5}-1$;

2) $2a^2-5ab+2b^2$, бунда $a = \sqrt{6}+\sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}-\sqrt{5}$;

3) $3a^2+4ab-3b^2$, бунда $a = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $b = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

4) $4x^3-2x^2-8x+7$, бунда $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

793. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{\sqrt{17+\sqrt{288}}}$.

794. Сонларни таққосланг:

1) $1 \square \sqrt{\sqrt{17\ \square\sqrt{288}}}$ ва $\sqrt{2}\ \square\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{5}+5}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$ ва $\sqrt{10}$;

3) $\sqrt{2005}\ \square\sqrt{2003}$ ва $\sqrt{2004}$ 4) $\sqrt{3\ \square\sqrt{5\ \ \square\sqrt{8}}}$ ва $\sqrt{2}\ \square 1$.

795. Касрнинг махражидаги иррационалликдан қутулинг:

1) $\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$; 2) $\sqrt{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{\sqrt{15}-\sqrt{6}}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{14}\ \square\sqrt{21}\ \ \square\sqrt{10}\ \square\sqrt{15}}$; 4) $\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$.

796. Айниятни исботланг:

1) $\sqrt{9-2\sqrt{20}}+\sqrt{14-3\sqrt{20}}=1$;

2) $\sqrt{19-2\sqrt{48}}-\sqrt{7-\sqrt{48}}=2$;

3) $\frac{x^2+2x-3+(x+1)\cdot\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}},\ x>3$;

4) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{\sqrt{a}}}}=\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt{\sqrt{a}}},\ a\ge 2.$

797–805-мисолларда кўрсатилган ифодаларни соддалаштиринг:

797. $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\left(\frac{x+y}{\sqrt{xy}}+\frac{y}{x-\sqrt{xy}}-\frac{x}{y+\sqrt{xy}}\right).$

798. $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}-\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right).$

799. $\left(\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}-\frac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+1}+4\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{\frac{m}{4}}-\frac{1}{\sqrt{4m}}\right).$

800. $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$

801.

$$2x\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}:\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}\right),(x>0,y>0).$$

802. $\left(\sqrt{ab}-ab\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-1}\right):\dfrac{2\sqrt{ab}-2b}{a-b},\left(a>0,b>0\right).$

803. $\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}-\left(2\sqrt{b}\right)^{2}}{a-b}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{\sqrt{4b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

804. $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^{2}+ab}}-\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}.$

805. $\dfrac{\sqrt{a+1}}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\dfrac{1}{a^{2}-\sqrt{a}}-a.$

806–810-мисолларда берилган ифодаларнинг қийматларини топинг:

806. $\left(\dfrac{3\left(\sqrt{13}+2\right)}{\sqrt{19}-2}-\dfrac{4\left(\sqrt{19}-2\right)}{\sqrt{13}-3}-2+\sqrt{19}\right)\left(2-\sqrt{13}\right).$

807. $\left(\dfrac{2\left(\sqrt{15}-1\right)}{\sqrt{15}+\sqrt{15}}+\dfrac{2\left(\sqrt{13}+2\right)}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}-\sqrt{15}+\sqrt{13}\right)\left(7-\sqrt{13}\right).$

808. $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}.$

809. $\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6\right)\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6\right).$

810. $\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10}\right)}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}.$

II БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МАТЕРИАЛЛАР ВА МИСОЛЛАР

7-§. Кўпҳадни кўпҳадга бўлиш

Фараз қилайлик, $a_0\square 0$, a_1,a_2, ..., a_n сонлари берилган бўлсин, У ҳолда

$$a_0x_n+a_1x_{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

ифода ***n*–даражали кўпҳад** дейилади. Бунда a_0,a_1, a_2, ..., a_{n-1} сонлари кўпҳаднинг коэффициентлари, a_n– озод ҳад, n – кўпҳаднинг ***даражаси*** деб аталади. Масалан,

$2x^4-8x^3-x^2+x-6$ ифода 4-даражали кўпҳад. Бу ерда $n=4$, $a_0=2$, $a_1=-8$, $a_2=-1$, $a_3=1$, $a_4=-6$ эса озод ҳад.

Энди кўпҳадни кўпҳадга қолдиқ билан бўлиш амалини аниқлаймиз. Бунинг учун

$$A(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n \; (a_0 \square 0).$$

$$B(x)=b_0xn+b_1x^{n-1}+...+b_{m-1}x+a_m \; (a_0 \square 0).$$

кўпҳадларни кўриб чиқамиз. Айтайлик, $m<n$ бўлсин. Агар $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ тенглик бажариладиган $Q(x)$ ва $R(x)$ кўпҳадлар мавжуд бўлса, бунда $R(x)$ кўпҳаднинг даражаси $B(x)$ кўпҳаднинг даражасидан кичик бўлиши керак, у ҳолда $A(x)$ кўпҳад $B(x)$ кўпҳадга $R(x)$ қолдиқ билан бўлинади дейилади. $Q(x)$ кўпҳад $A(x)$ни $B(x)$ га бўлгандаги тўлиқсиз бўлинма деб аталади. Агар $R(x)=0$ бўлса, яъни қолдиқ 0 га тенг бўлса, $A(x)$ кўпҳад $B(x)$ га қолдиқсиз бўлинади дейилади. Масалан, x^3-8 кўпҳад x^2+2x+4 кўпҳадга колдиқсиз бўлинади. Чунки $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$тенглик бажарилиши бизга яхши маълум. Бунда $A(x)=x^3-8$, $B(x)=x^2+2x+4$, $Q(x)=x-2$, $R(x)=0$ деб тушуниш лозим. Шу каби $x^3-1=(x^2+3x+1)\,(x-3)+8x+2$ тенгликдан $A(x)=x^3-1$ кўпҳад $B(x)=x^2+3x+1$ кўпҳадга $R(x)=8x+2$ қолдиқ билан бўлинишини кўрамиз. Бунда $Q(x)=x-3$ – тўлиқсиз бўлинма.

Кўпҳадни кўпҳадга бўлишни оддий «бурчаклаб» бўлиш усулида бажариш мумкин. Бунга мисоллар келтирамиз.

1-мисол. x^3-1 кўпҳадни x^2+3x+1 кўпҳадга қолдиқ билан бўлиш керак.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+0x^2+0x-1 & x^2+3x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+3x^2+x \quad & x-3 \\ \cline{1-1}
-\,-3x^2-x-1 & \\
-3x^3-9x^2-3 & \\ \cline{1-1}
8x+2 &
\end{array}$$

Бундан $R(x)=8x+2,Q(x)=x-3$ бўлади. Демак,

$$x^3-1=(x^2+3x+1)(x-3)+8x+2.$$

2-мисол. $3x^6+2x^4-2x^3+x-6$ кўпҳадни x^4+2x+2 кўпҳадга бўлиш керак.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{l}3x^6+2x^4-2x^3+x-6\\3x^6+6x^3+6x^2\end{array}} & \underline{x^4+2x+2}\\
\underline{-\begin{array}{l}2x^4-8x^3-6x^2+x\\2x^4+4x+4\end{array}} & 3x^2+2\\
-8x^3-6x^2-3x-10 &
\end{array}
$$

Бунда тўлиқсиз бўлинма $Q(x)=3x^2+2$ – иккинчи даражали, қолдиқ эса $R(x)= -8x^3-6x^2-3x-10$ – учинчи даражали кўпҳад.

3-мисол. $x^5-x^4+x^3-2x+1$ кўпҳадни x^3-x^2+2x-1 кўпҳадга бўламиз.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{l}x^5-x^4+x^3-2x+1\\x^5-x^4+2x^3-x^2\end{array}} & \underline{x^3-x^2+2x-1}\\
\underline{-\begin{array}{l}-x^3+x^2-2x+1\\-x^3+x^2-2x+1\end{array}} & x^2-1\\
0 &
\end{array}
$$

Бунда $Q(x)=x^2-1$, $R(x)=0$. Яъни, берилган кўпҳадлар бир-бирига қолдиқсиз бўлинади.

Эслатма. Олий математика курсида кўпҳадларни қолдиқ билан бўлиш тўғрисида қуйидаги теорема исботланади:

Теорема. Ҳар қандай $A(x)$ кўп ҳадни даражаси ундан катта бўлмаган ихтиёрий $B(x)$ кўпҳадга қолдиқ билан бўлиш мумкин ва бу бўлиш амали фақат ягона турда аниқланади, яъни: 1) $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$ тенглик бажариладиган; 2) $B(x)=0$ ёки унинг даражаси $B(x)$ нинг даражасидан кам бўлган ягона турдаги $Q(x)$ ва $R(x)$ кўпҳадлар мавжуд.

Бу теорема исботсиз келтирилади.

МИСОЛЛАР

А

811. Кўпҳадни қолдиқ билан бўлинг:

1) $(x^4+x^2+1):(x+5)$; 2) $(x^5-6x^3+2x^2-4):(x^2-x+1)$;

3) $(x^7-1):(x^2+x+1)$; 4) $(x^6-1):(x-3)$.

812. Амалларни бажаринг:

1) $(4x^4-5x^3+x^2):(3x^2-4x+1)$; 2) $(9x^4+5x^2+1):(3x^2-2x+1)$;

3) $(2x^5-5x^4-4x+1):(2x^3+x^2-1)$; 4) $(3x^5-x^4-3x+1):(x^3-5x^2+6x)$.

B

813. $x^5+3x^4+4x^3-2x^2-5x-5$ кўпҳад x^2-3x+2 учҳадга қолдиқсиз бўлинадими?

814. Кўпҳадни қолдиқ билан бўлинг:

1) $(x^2-x+1)(x^2+x+1):(x^3-1)$;

2) $(x^2-1)(x^2+x+1):(x^2+x+1)$;

3) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4):(x^3+x^2+x+1)$;

4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4):(x-2)(x-1)x$.

C

815. k нинг қандай қийматларида $x^3+6x^2+kx+12$ кўпҳад $x+4$ иккиҳадга қолдиқсиз бўлинади?

816. a билан b нинг қандай қийматларида: а) $x^4+3x^3-2x^2+ax+b$ кўпҳад x^2-3x+2 кўпҳадга; б) x^3-2x^2+ax+b кўпҳад x^2-x+1 кўпҳадга қолдиқсиз бўлинади?

817*. Ҳар қандай $f(x)$ кўпҳадни $x-a$ иккиҳадга бўлганда канча қолдиқ қолади?

8-§. Безу теоремаси. Бутун коэффициентли кўпҳадлариинг бутун илдизларинипг хоссалари

Безу теоремаси. *$f(x)$ кўпҳадни $x-a$ иккиҳадга бўлганда қоладиган қолдиқ $f(x)$ нинг $x=a$ бўлгандаги қийматига , яъни $f(x)$ сонига тенг.*

Исботи. $f(a)$ кўпҳадни $x-a$ иккиҳадга қолдиқ билан бўлганда

$$f(x)=(x-a)q(x)+r \qquad (1)$$

тенгликни оламиз. $x-a$ иккиҳад биринчи даражали кўпҳад бўлгани учун, қолдиқ r – ўзгармас сон (яъни нолинчи даражали кўпҳад) бўлиши керак. Агар (1) тенгликда $x=a$ деб олсак, $f(x)=r$ тенг-ликка эга бўламиз. Мана шуни исботлаш керак эди.

1-мисол. $f(x)=x^4+5x^3-3x+6$ кўпҳадни $x+3$ иккихадга бўлганда қоладиган қолдиқни топиш керак.

Ечилиши. Безу теоремасига кўра қолдиқ $f(-3)$ сонига тенг бўлиши керак: $f(-3)=(-3)4+5(-3)3-3(-3)+6=-39$, яъни $r=-39$.

Таъриф. *Агар $f(x)$ кўпҳад учун $f(a)=0$ тенглик бажарилса, у ҳолда $x=a$ сони ўша кўпҳаднинг* ***илдизи*** *дейилади.*

Масалан, $x=-3$ сони $f(x)=x^2+2x-3$ кўпҳаднинг илдизи бўлади, чунки $f(-3)=(-3)2+2(-3)-3=0$. Безу теоремасидан қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади.

Натижа. *Агар a сони f(x) кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда f(x)кўпҳад x–a иккиҳадга қолдиқсиз бўлинади. Аксинча, агар f(x) кўпҳад x–a иккиҳадга қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда x=a сони f(x) кўпҳаднинг илдизи бўлади.*

Бу натижадан кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратишда фойдаланилади. Демак, агар $x=a$ сони $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $f(x)$ кўпҳад $(x-a)$ га қолдиқсиз бўлинади, яъни $g(x)$ кўпҳад мавжуд бўлиб,

$$f(x)=(x-a)g(x) \qquad (2)$$

тенглик бажарилади. Шу каби, агар $x=b$ сони $g(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $p(x)$ кўпҳад мавжуд бўлиб, $g(x)$ ни

$$g(x)=(x-b)p(x) \qquad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (2) ва (3) тенгликлардан

$$f(x)=(x-a)(x-b)p(x) \qquad (4)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва ҳ. к. (4) тенгликдан $x=b$ сони $f(x)$ кўпҳаднинг илдизи ($f(x)=0$) бўлишини кўрамиз. Шунинг учун, агар $a, b, ..., c$ сонлари $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлса, $f(x)$ ни қуйидаги кўринишда кўпайтувчиларга ажратиш мумкин:

$$f(x)=(x-a)(x-b)...(x-c)q(x) \qquad (5)$$

Бунда $q(x)$ кўпҳад $f(x)$ ни $(x-a)(x-b)\ldots(x-c)$ кўпайтмага бўлгандаги бўлинма. Мисоллар келтирамиз.

2-мисол. $f(x)=x^4-2x^2-3x-2$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз.

Ечилиши. -1 ва 2 сонлари $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлишини текшириш қийин эмас, яъни $f(-1)=0$ ва $f(2)=0$ тенгликлар бажарилади. У ҳолда $f(x)=(x+1)(x-2)g(x)$ тенглик бажариладиган $g(x)$ кўпҳадни аниқлаш керак. Бунинг учун $f(x)$ ни $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ кўпҳадга бўламиз:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4-2x^2-3x-2 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-x^3-2x^2} & x^2+x+1 \\
-\,x^3-3x-2 & \\
\underline{x^3-x^2-2x} & \\
-\,x^2-x-2 & \\
\underline{x^2-x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

Демак, $f(x)=x^2+x+1$. Шундай қилиб,
$x^4-2x^2-3x-2=(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$.

Бу мисолда $f(x)$ кўпҳаднинг илдизлари қандай топилганлиги айтилмади. Умуман, ҳар қандай $f(x)$ кўпҳаднинг илдизларини топиш жуда мураккаб иш. Биз бу ерда коэффициентлари бутун сонлар бўлган кўпҳадларнинг бутун илдизларини топишнинг содда усулини кўриб чиқамиз.

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,\ (a_0=1) \qquad (6)$$

кўринишдаги кўпҳадлар ***келтирилган кўпҳадлар*** дейилади.

Масалан, x^2-2x+4, $x^5-x^3+2x^2-2$ – келтирилган кўпҳадлар.

Теорема. *Бутун коэффициентли кўпҳаднинг ҳар бир бутун илдизи унинг озод ҳадининг бўлувчиси бўлади. Бошқача айтганда, агар a_0, a_1, a_2,... a_n– бутун сонлар бўлса ва $x=m$ сони*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,\ (a_0=1) \qquad (7)$$

кўпҳаднинг бутун илдизи бўлса, у ҳолда a_n сони m га қолдиқсиз бўлинади.

Исботи. Фараз қилайлик, m бутун сон (7) кўпҳаднинг бутун илдизи бўлсин. У ҳолда $f(m)=0$, яъни $a_0m^n+a_1m^{n-1}+...+a_{n-1}m+a_n=0$ тенглик бажарилади. Бундан $an=m(-a_0m^{n-1}-a_1m^{n-2}-...-a_{n-1})$, яъни a_n сони m га қолдиқсиз бўлинади. Теорема исботланди.

3-мисол. $f(x)=x^3-3x^2+x+2$ кўпҳаднинг бутун илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Агар бу кўпҳаднинг бутун илдизлари мавжуд бўлса, улар ±1, ±2 сонларининг орасида бўлиши керак. Содда текширишлар орқали $f(1)=1$, $f(-1)=-3$, $f(2)=0$, $f(-2)=-20$ тенгликларга эга бўламиз. Демак, $x=2$ сони берилган кўпҳаднинг ягона бутун илдизидир.

4-мисол. $f(x)=x^3-19x-30$ кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратиш керак.

Ечилиши. Бу кўпҳад бутун илдизларга эга бўлса, улар: ±1; ±2; ±3; ±5; ±6; ±15; ±30 сонлари орасида бўлади. Бу сонларнинг берилган кўпҳаднинг бутун илдизи бўлиши ёки бўлмаслигини текшириб чиқиш жуда кўп вақт талаб қилади, шу сабабли текшириш дастлабки бутун илдизи топилгунича олиб борилади. $f(1)=-48$, $f(-1)=-30$, $f(2)=-60$, $f(-2)=0$. Бунда берилган кўпҳад $x+2$ кўпҳадга қолдиқсиз бўлинади:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3-19x-30 & x+2 \\ \cline{2-2}
x^3+2x^2 & x^2-2x+1 \\ \cline{1-1}
-\; -2x^2-19x-30 & \\
-2x^2-4x & \\ \cline{1-1}
-\; -15x-30 & \\
-15x-30 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

яъни, $x^3-19x-30=(x+2)(x^2-2x-15)$ тенглик бажарилади. Энди $f(x)$ нинг бошқа бутун илдизларини аниқлаш учун $x^2-2x-15$ кўпҳаднинг бутун илдизларини топиш кифоя. Унинг бутун илдизлари ±3, ±5, ±15 сонлари орасида бўлади (1 ва -1 сонлари илдиз бўла олмаслигини текширдик). $9-2(-3)-15=0$ бўлгани учун, $x^2-2x-15$ кўпҳад $x+2$ иккиҳадга бўлинади:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^2-2x-15 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^2+3x & x-5 \\ \cline{1-1}
-\; -5x-15 & \\
-5x-15 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

У ҳолда $x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$. Демак, $x^3-19x-30=(x+2)(x+3)(x-3)$.

МИСОЛЛАР

А

818. Кўпҳадларнинг бутун илдизларини топинг:

1) x^2-4x+3; 2) x^2+3x-3; 3) $x^2+3x-10$;

4) x^2+5x-6; 5) $3x^2-2x-21$; 6) $2x^2+x-21$.

819. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^2-6x-16$; 2) $x^2+12x+20$; 3) $x^2-3x-10$;

4) x^2+4x+3; 5) $2x^2-9x+10$; 6) $x^2+2x-80$.

820. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) x^4-16; 2) x^6-64; 3) x^4+x-2; 4) y^3+3^y+4.

В

821. Бутун илдизларини топиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

1) x^3-7x-6; 2) $x^3+9x^2+11x-21$; 3) x^3+5x^2+3x-9;

4) $x^3+9x^2+23x+15$; 5) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$; 6) $x^4-6x^3-14x^2-11x-4$.

822. Бутун илдизларини аниқланг:

1) $x^5-2x^3-8x^2+5x-10$;   2) $x^5-4x^3+4x^2+5x-6$;

3) $x^4+3x^3-12x^2-38x-24$;   4) $x^4-6x^3-14x^2-11x-40$.

823. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) x^3-x^2-x-2;   2) x^3-6x^2-x+30.

824. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^3+9x^2+23x+15$;   2) $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$;

3) $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)-2$;   4) x^8-15x^4-16.

825. Агар: 1) x^3+ax^2-5x+6 кўпҳаднинг битта илдизи 3 га; 2) $x^3-x^2+ax+12$ кўпҳаднинг битта илдизи -3 га тенг бўлса, унинг қолган илдизларини топинг.

C

826. Ҳар бир натурал п учун n^5-5n^3+4n ифода 240 га бўлинишини исботланг.

827. Ҳар бир бутун $x=2n+1$ кўринишдаги тоқ сон учун x^3+3x^2-x-3 кўпҳаднинг қиймати 48 га бўлинишини исботланг.

ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ*

1-§. Алгебраик тенгламалар ва уларнинг илдизлари. Тенг кучли тенгламалар

Таъриф. *Асосий арифметик амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш ва нолга тенг бўлмаган ифодаларга бўлиш), даражага кўтариш, илдиз ва модуль белгиси қатнашган ифодалар* ***алгебраик ифодалар*** *деб аталади.* Масалан, $x^2+\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}, \dfrac{|x-2|-3}{\sqrt{x-2}}$ – алгебраик ифодалар.

Агар $R(x)$ ифода x ўзгарувчига боғлиқ алгебраик ифода бўлса, у ҳолда

$$R(x)=0 \tag{1}$$

кўринишдаги тенглама алгебраик тенглама дейилади. Алгебраик тенглама $R_1(x)=R_2(x)$ кўринишда ҳам берилади. Бунда $R_1(x)$, $R_2(x)$ ифодалар x га боғлиқ бўлган рационал ифодалар. Масалан, $2x-x^2+1=0, \dfrac{x-2}{x+1}-1=0$ ва $2x^2+\dfrac{4}{x^2-1}=\dfrac{2x-1}{x-1}$ тенгламалар алгебраик тенгламалардир.

$R(x)$ ифода (ёки $R_1(x)$ ва $R_2(x)$ ифодалар) маънога эга бўлган x ўзгарувчилар барча қийматларининг тўплами тенгламанинг қабул қиладиган қийматлари тўплами дейилади. У қисқача ҚҚҚТ деб белгиланади. Масалан, $2x-x^2-1=0$ тенглама учун ҚҚҚТ барча ҳақиқий сонлар тўплами бўлади, чунки $y=2x-x^2+1$ функция x нинг исталган қийматида аниқланган. $\frac{x-2}{x+1}-1=0$ тенглама учун ҚҚҚТ $x=-1$ дан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат, яъни x□-1 бўлиши керак. Сабаби, $x=-1$ бўлганда $\frac{x-2}{x+1}$ каср аниқланмайди. $2x^2+\frac{4}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x-1}$ тенглама учун ҚҚҚТ x□-1, x□1 бўлиши керак.

Умуман, тенгламаларда ҚҚҚТ дан олинган ҳар бир x учун тенглик ишораси ҳар доим хам бажарилавермайди. Масалан, $2x-1=5+x$ тенгламаниинг ҚҚҚТ барча ҳақиқий сонлар тўпламидир. Агар $x=1$ бўлса, у ҳолда $2\cdot1-1$□$5+1$; агар $x=-2$ бўлса, $2\cdot(-2)-1$□$5-2$; агар $x=0{,}5$ бўлса, $2\cdot0{,}5-1$□$5+0{,}5$; $x=6$ бўлганда эса $2\cdot6-1=5+6$, яъни $11=11$ бўлади. Бундан $x=1$, $x=-2$ва $x=0{,}5$ сонлари $2x-1=5+x$ тенгламаларни қаноатлантирмаслиги, $x=6$ эса бу тенгламани қаноатлантиришини кўрамиз.

Таъриф. $R(x)=0$ (ёки $R_1(x)=R_2(x)$) *тенгламани қаноатлантирувчи x сони шу* ***тенгламанинг илдизи*** *деб аталади.*

Тенгламанинг илдизи унинг ҚҚҚТ га тегишли бўлиши керак. Масалан, $x=6$ сони $2x-1=5+x$ тенгламанинг илдизи бўлади. $\frac{x-2}{x^2-5x+6}=0$ тенглама учун $x=2$ сони илдиз бўла олмайди. Сабаби, бу тенгламанинг ҚҚҚТ x^2-5x+6□0, яъни x□2 ёки x□3 тенгсизликлар билан аниқланади.

$$R_1(x)=R_2(x) \tag{2}$$

ва

$$R_1\square(x)=R_2\square(x) \tag{3}$$

иккита тенглама берилсин. A орқали (2) тенгламанинг барча илдизлари тўпламини, B орқали (3) тенгламанинг барча илдизлари тўпламини белгилаймиз. Агар $A\subset B$, яъни (2) тенгламанинг ҳар бир илдизи (3) тенгламанинг ҳам илдизи бўлса, у ҳолда (3) тенглама (2) тенгламанинг натижаси дейилади. Масалан, $x^2-5x+6=0$ тенглама $x-3=0$ тенгламанинг натижасидир. Демак, $x-3=0$ тенгламанинг ягона $x=3$ илдизи мавжуд. x нинг бу қийматида x^2-5x+6 квадрат учҳад нолга айланади.

Агар A ва B тўпламлар устма-уст тушса, яъни (2) тенгламанинг ҳар бир илдизи (3) тенгламанинг ҳам илдизи ва аксинча, (3) тенгламанинг ҳар бир илдизи (2) тенгламанинг ҳам илдизи бўлса, бу тенгламалар тенг кучли тенгламалардеб аталади. Масалан, $5x+4=9$ ва $2x-1=1$ тснгламалар тенг кучли, сабаби иккаласи ҳам $x=1$ ягона илдизга эга. Илдизлари бўлмаган тенгламалар ҳам ўзаро тенг кучли тенгламалар ҳисобланади, чунки улар илдизларининг тўплами умумий: $\square$. Масалан, $3x-2=3x$ ва $\frac{1}{x+2}=0$ тенгламалар тенг кучли, чунки улар илдизга эга эмас. $x-1=0$ ва $x^2-1=0$ тенгламалар тенг кучли бўла олмайди. Бу ерда $x^2-1=0$ тенглама $x-1=0$ тенгламанинг натижасидир.

МИСОЛЛАР

A

828. Қуйидаги тенгламалар қабул қиладиган қийматлар тўпламини (ҚҚҚТ) аниқланг:

1) $2x-1=3x$; 2) $x-1=2x-3$; 3) $x^2+3x=6-2x$;

4) $\frac{y^2}{y+3}=\frac{y}{y+3}$; 5) $\frac{10}{2x-3}=x-1$; 6) $\frac{2x+1}{x-7}=\frac{3x+4}{x-1}$;

7) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$; 8) $\frac{x^2}{x^2+1}=4$; 9) $\frac{x-1}{x^2+2}=x-1$.

829. Тенгламалар тенг кучлими:

1) $25x^2=0$ ва $5x=0$; 2) $9x^2=25$ ва $3x=5$;

3) $(2x-1)^2=1$ ва $2x-1=1$; 4) $x^2=-3$ ва $x-1=3$;

5) $x=2$ ва $x+\frac{1}{x-2}=2+\frac{1}{x-2}$; 6) $x^2+1=0$ ва $x^2+2=0$;

7) $x=1$ ва $x+\frac{1}{x^2+1}=1+\frac{1}{x^2+1}$; 8) $x+3$ ва $x^2+x+3=x^2$?

830. 1) $x^2-3x+2=0$ тенглама $x-1=2x-3$ тенгламанинг; 2) $x^2+5x+6=0$ тенглама $x+2=-1$ тенгламанинг; 3) $x^3-3x^2+6=0$ тенглама $2x-6=0$ тенгламанинг; 4) $x^3-3x^2-2x+6=0$ тенглама $x^2-2=0$ тенгламанинг натижаси бўлишини кўрсатинг.

B

831. $x^4-5x^3+15x^2-45x+54=0$ тенглама $x^2-5x+6=0$ тенгламанинг натижаси эканини кўрсатинг.

832. Агар a берилган ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда $(x-1)^2+(x-a)^2=0$ тенгламанинг нечта илдизи бор?

833. ҚҚҚТ ни аниқланг:

1) $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{1+x^2}$;

2) $\frac{5}{x^2-2x-3}+\frac{21}{x^2+2x-3}=\frac{9}{x+a-b}-\frac{25}{x^2+4x+3}$;

3) $\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{x-a+b}+\frac{1}{x+a-b}+\frac{1}{x-a-b}=0$;

4) $\frac{1}{x+\frac{1}{1+\frac{x+2}{x-2}}}=\frac{12}{12x-7}$.

C

834. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ кўпҳадлар бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ тенглама ҚҚҚТ да $f(x)=0$ тенглама билан тенг кучли бўлишини исботланг.

835. a нинг ҳар қандай қийматида $3x+2=11$ ва $(3x+2)a=11a$ тенгламалар тенг кучли бўладими?

2-§. Рационал тенгламалар

Рационал ифодалардан тузилган алгебраик тенгламалар ***рационал тенгламалар*** деб аталади. Масалан, $x-3=2x-5$, $2x^2+3x+5=0$, $1+\frac{x+2}{x-2}=1+x$ тенгламалар рационал тенгламалардир. Ҳар бир рационал ифодани иккита кўпҳаднинг нисбати кўринишида ёзиш мумкин, яъни $R(x)=0$ рационал тенгламани

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \tag{1}$$

кўринишида ёзамиз. У ҳолда бу тенгламанинг ҚҚҚТ $g(x)=0$ тенгламанинг илдизларидан бошқа сонлар тўплами бўлиб, ўша ҚҚҚТ да (1) тенглама $f(x)=0$ тенгламага тенг кучли бўлади, яъни $f(x)=0$ тенгламанинг ҚҚҚТ га тегишли илдизлари (1) тенгламанинг ҳам илдизлари бўлади.

1-мисол. $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-1}=1$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. $(x-3)(x-1)$ бўлиши керак, яъни $x\square 1$, $x\square 3$. Бу тенгсизликлар берилган тенгламанинг КҚҚТ ни аниқлайди. Тенгламанинг умумий махражи $(x-3)(x-1)$ бўлгани учун, уни $(x-3)(x-1)$ ифодага кўпайтириш орқали

$$\frac{\left(x^2-2x-5\right)(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)}+\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}=(x-3)(x-1)$$

тенгламадан $x^2-2x-5+x-1=(x-3)(x-1)$ ёки $3x=9$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг илдизи $x=3$ бўлади. Бироқ $x=3$ сони берилган тенгламанинг ҚҚҚТ га тегишли бўлмагани учун, $x=3$ сони ушбу тенгламанинг илдизи бўла олмайди. Бундай илдизлар ***чет илдизлар*** деб аталади. Шундай қилиб, $x=3$ – тенгламанинг чет илдизи. Бу илдиз тенгламани $(x-3)(x-1)$ ифодага кўпайтириш жараёнида пайдо бўлди, яъни ўша шакл алмаштириш жараёнида биз тенгламанинг ҚҚҚТ ни кенгайтирдик. Шунинг учун берилган тенгламанинг илдизи мавжуд эмас: $\square$.

2-мисол. $2-\frac{x-7}{x-5}=\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{1}{x}$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. ҚҚҚТ $x-5\square 0$ ва $x^2-5x\square 0$ тенгсизликлар билан аниқланади. Бундан $x\square 0$, $x\square 5$ бўлиши керак. Бу ерда касрларнинг умумий махражи $x(x-5)$ бўлгани учун, бу ифодани берилган тенгламага кўпайтириб, $2x(x-5)-x(x-7)=x+5-(x-5)$ ёки $x^2-3x-10=0$ тенгламани оламиз. Унинг ечимлари $x_1=-2$ ва $x_2=5$. $x=5$ – чет илдиз, чунки бу сон тенгламанинг ҚҚҚТ га тегишли эмас.

Жавоби: $x=-2$.

3-мисол. $\frac{7}{x+1}+\frac{4+x}{2x-2}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$ тенгламани ечиш керак.

Ечилиши. ҚҚҚТ $x\square -1$ ва $x\square 1$ тенгсизликлар билан аниқланади. Тенг-лама таркибидаги касрларнинг умумий махражи $2(x^2-1)$ бўлгани учун, берилган тенгламадан $2\cdot 7+(x+1)(4+x)=2(3x^2-38)$ ёки $5x^2-19x-66=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламанинг илдизлари $x_{1,2}=\frac{-19\pm 41}{10}$ Иккала илдиз ҳам ҚҚҚТ га тегишли бўлган учун, масаланинг жавоби: $x_1=-2{,}2$; $x_2=6$.

Шундай қилиб, рационал тенгламаларни қуйидаги қоидалар бўйича ечиш қулайдир:

1. Тенгламанинг ҚҚҚТ ни аниқлаш керак;

2. Тенглама таркибига кирувчи касрларнинг умумий махражини топиш керак;

3. Тенгламанинг иккала қисмини ҳам шу топилган умумий махражга кўпайтириб, уни бутун тснглама билан алмаштириш керак;

4. Ҳосил бўлган бутун тенгламанинг (кўпҳаднинг) илдизларини топиш керак;

5. Топилган илдизларнинг ҚҚҚТ га тегишлилари берилган тенгламанинг ечимлари бўлади.

МИСОЛЛАР

A

836. Қуйидаги тенгламалар бутун тенгламалар билан алмаштирилганда чет илдизларнинг пайдо бўлишини кўрсатинг:

1) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$; 2) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$;

3) $\frac{1}{x-5}+6=\frac{6-x}{x-5}$; 4) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$.

837–849-мисолларда берилган тенгламаларни ечинг.

837. 1) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$; 2) $\frac{3}{z-2}=\frac{2}{z+3}$;

3) $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}$; 4) $\frac{y+1}{y-1}=\frac{y-5}{y-3}$.

838. 1) $\frac{3t-1}{3t+1}=2-\frac{t-3}{t+3}$; 2) $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5}{x-2}=1$;

3) $2-\frac{3u}{3u-2}=\frac{2u-9}{2u-5}$; 4) $\frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1$.

B

839.

1) $\frac{8}{3t-3}-\frac{2+t}{t-1}=\frac{5}{2-2t}-\frac{5}{18}$; 2) $\frac{14}{3z-12}-\frac{2+z}{z-4}=\frac{3}{8-2z}-\frac{5}{6}$;

3) $\frac{y+5}{3y-6}-\frac{1}{2}=\frac{2y-3}{2y-4}$; 4) $\frac{10}{3}-\frac{7u+2}{6u+18}=2+\frac{3u-1}{4u+12}$.

840.

1) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$; 2) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{1-3x}$;

3) $\frac{t^2-3}{1-t^2}+\frac{t+1}{t-1}=\frac{4}{1+t}$; 4) $\frac{y^2+17}{y^2-1}=\frac{y-2}{y+1}-\frac{5}{1-y}$.

841.

1) $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}-9$; 2) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$;

3) $a^2-\frac{a}{x}+\frac{b^2}{ax}=\frac{a^2}{bx}-\frac{b}{x}+b^2$; 4) $\frac{a-bm}{mx}-\frac{c-nb}{nx}=1$.

842.

1) $\frac{a+b}{x}-c=d-\frac{a-b}{x}$; 2) $\frac{a+b}{x}+\frac{a}{b}=-1$;

3) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$; 4) $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{b-x}$.

843.

1) $\frac{x^2-1}{x}+\frac{2x+1}{x}=1$; 2) $\frac{x^2}{x-3}-\frac{x+6}{x-3}=-1$;

3) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2+\frac{x+4}{x+1}$; 4) $\frac{9}{2x+2}-\frac{x}{x-1}=\frac{3x-1}{2x-2}$.

844.

1) $x+2-\frac{3x+8}{x+2}=\frac{x}{x+2}$; 2) $\frac{4}{(x-3)(x-1)}+\frac{2}{3-x}+\frac{5}{x-1}=7$;

3) $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{2}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$;

4) $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-2}=\frac{4}{4-x^2}+1$.

845.

1) $\frac{x+m}{x-n}+\frac{x+n}{x-m}=2$; 2) $\frac{3}{x-a}-\frac{2}{x+a}=\frac{3x-7a}{x^2-a^2}$;

3) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$; 4) $\frac{x+a}{x-a}+\frac{m+a}{m-a}=2$.

846.

1) $\dfrac{n+x}{d+x}=\dfrac{n}{d}+\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{x-s}{2x+t}-\dfrac{3x+t}{6x-s}=0$;

3) $\dfrac{5-a}{4b-x}-\dfrac{5+a}{4b+x}=0$; 4) $\dfrac{a-2x}{6x-b}-\dfrac{a-x}{3x-b}=0$.

847.

1) $\dfrac{ax+b}{x-m}+\dfrac{cx+a}{x-n}=a+c$; 2) $\dfrac{c+x}{cx}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{c}{c+x}$;

3) $\dfrac{x-2a}{x+3a}=3-\dfrac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2}$; 4) $\dfrac{x}{3a+x}-\dfrac{x}{x-3a}=\dfrac{a^2}{9a^2-x^2}$.

C

848.

1) $\dfrac{a}{2b+ax}=\dfrac{b}{2a-bx}+\dfrac{2ab}{2+abx}$;

2) $\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x-b}$;

3) $\dfrac{1}{bc-bx}-\dfrac{1}{ac-ax}=\dfrac{2}{b^2-bx}-\dfrac{2}{ab-ax}$;

4) $\dfrac{a}{c-x}+\dfrac{c}{a-x}=\dfrac{a+c}{b-x}$.

849.

1) $\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}$;

2) $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}-\dfrac{1}{x+3}$;

3) $\dfrac{25}{4x^2+1}+\dfrac{8x+29}{16x^4-1}=\dfrac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$;

4) $\dfrac{\frac{1}{6}}{x^3+3x^2+x+3}+\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{\frac{1}{6}}{x^3+3x^2-x-3}$.

3-§. Биквадрат тенгламалар
Тенгламалари янги ўзгарувчилар киритиш ёрдамида ечиш

3.1. Биквадрат тенгламаларни ечиш

$ax^4+bx^2+c=0$, $a \square 0$ кўринишида берилган тенглама ***биквадрат тенглама*** деб аталади. Бу тенгламани ечиш учун $x^2=z$ белгилашни киритамиз. Бунда, берилган тўртинчи даражали тенгламани $az^2+bz+c=0$ кўринишдаги квадрат тенглама билан алмаштирамиз. Агар $b^2-4ac \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда сўнгги тенгламанинг илдизлари $z_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ формуладан топилади.

Шунинг учун берилган биквадрат тенгламанинг илдизларини $x^2=z_1$ ёки $x^2=z_2$ тенгламаларни ечиш орқали топамиз. Бунда $z_1<0$ ёки $z_2<0$ бўлиши керак. Агар $x^2=z_1$ ёки $x^2=z_2$ бўлса, у ҳолда $x^2=z_1$ ёки $x^2=z_2$ тенгламаларнинг ҳақиқий сонлар тўпламида илдизлари мавжуд эмас. Шундай қилиб, агар $z_1 \geqslant 0$ ва $z_2 \geqslant 0$ бўлса, биквадрат тенглама қуйидагича тўртта илдизга эга бўлади:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \quad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

1-мисол. $x^4-25x^2+144=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. $x^2=y$ деб белгиласак, $y^2-25y+144=0$ квадрат тенгламани ҳосил киламиз. Унинг илдизлари $y_1=9$, $y_2=16$. Демак, берилган биквадрат тенгламанинг тўртта илдизи мавжуд: $x_{1,2}=\square 3$; $x_{3,4}=\square 4$.

3.2. Тенгламаларни янги ўзгарувчилар киритиш ёрдамида ечиш

Шунга ўхшаш белгилашлар киритиш орқали юқори тартибли бошқа тенгламаларни ҳам ечиш мумкин. Буни мисоллар орқали кўрсатамиз.

2-мисол. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$ тенгламаниинг илдизини топиш керак.

Ечилиши. Берилган тенгламани $(x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0$ кўринишда ёзиб, $x^2+x+1=y$ белгилашни киритамиз. У ҳолда берилган тенгламани $y^2-3y+2=0$ кўринишида ёзиш мумкин. Унинг илдизлари $y_1=1$, $y_2=2$ бўлгани учун, $x^2+x+1=1$ ва $x^2+x+1=2$ ёки $x^2+x=0$ ва $x^2+x-1=0$

тенгламаларни ҳосил киламиз. Бундан $x^2+x=0$ тенгламанинг илдизлари $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_2+x-1=0$ тенгламанинг илдизлари эса $x_{3,4}=-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ бўлади. Жавоби: $x_1=0$, $x_2=-1$. $x_{3,4}=-\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

3-мисол. $x^6-17x^3+16=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $x^3=y$ деб белгиласак, $y^2-17y+16=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари $y_1=1$, $y_2=16$. У ҳолда берилган тенгламанинг илдизлари $x^3=1$ ва $x^3=16$ тенгламалардан топилади. Бу тенгламаларнинг ҳақиқий сонлар тўпламидаги ечимлари: $x_1=1$, $x_2=2\sqrt[3]{2}$. Жавоби: 1, $2\sqrt[3]{2}$.

4-мисол. $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. $x(x+3)=x^2+3x$ ва $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$ бўлгани учун, $x^2+3x=y$ белгилашларни киритиш орқали берилган тенгламани $16y(y+2)=9$ ёки $16y^2+32y-9=0$ кўринишда ёзамиз. Унинг илдизлари: $y_1=-\frac{9}{4}$; $y_2=\frac{1}{4}$. У ҳолда берилган тенгламанинг илдизлари $x^2+3x=-\frac{9}{4}$ ва $x^2+3x=\frac{1}{4}$ ёки $4x^2+12x+9=0$ ва $4x^2+12x-1=0$ тенгламаларни ечиш орқали олинади. Бунда биринчи тенгламанинг илдизлари $x_1=x_2=-1{,}5$, иккинчи тенгламанинг илдизлари $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. бўлади.

Жавоби: $x_{1,2}=-1{,}5$; $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$.

МИСОЛЛАР

А

850. Тенгламани ечинг:

1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$; 3) $x^4-11x^2+30=0$;

4) $x^4+5x^2+10=0$; 5) $2x^4-5x^2+3=0$; 6) $9x^4+23x^2-12=0$.

851. Биквадрат тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $x^4-29x^2+30=0$; 2) $x^4+7x^2+10=0$; 3) $5y^4+2x^2-3=0$;

4) $2y^4-5y^2-7=0$; 5) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0$; 6) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0$.

B

852. Тенгламани ечинг:

1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; 2) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0$;
3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$; 4) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$.

853. Тенгламани ечинг:

1) $\dfrac{x-2}{x^3}=2x-x^2$; 2) $\dfrac{x^2-x-2}{x-3}=\dfrac{2x-4}{x^2-3x}$;

3) $\dfrac{8x-4x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^3-4x}{x+1}$; 4) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-3x}$.

854. Тенгламани ечинг:

1) $(x+1)^2(x^2+2x)=12$; 2) $(x-2)^2(x^2-4x)+3=0$;
3) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$; 4) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)=28$.

855. Тенгламани ечинг:

1) $(x^2-2x-1)^2+3x^2-6x-13=0$; 2) $(2x^2-x+5)^2+3(2x^2-x-1)-10=0$;
3) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$; 4) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$;
5) $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$; 6) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

C

856. Тенгламани ечинг:

1) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$; 2) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2}-\dfrac{12-42x}{x^2+4x}=7$;

3) $\left(\dfrac{4x-5}{3x+2}\right)^2+\left(\dfrac{3x+2}{5-4x}\right)^2=4,25$; 4) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}$.

857. a нинг қандай қийматларида:1) $x^4+(3a+1)x^2+0,25=0$; 2)$x^4+(3a-1)x^2+2a+0,25=0$ тенгламалар ўзаро тенг иккита илдизга эга бўлади?

858. Илдизлари $\sqrt{2}$ ва $\sqrt{3}$ сонларига тенг бўлган биквадрат тенглама тузинг.

4-§. Симметрик тенгламалар

n – даражали симметрик тенгламаларнинг умумий кўриниши қуйидагича ёзилади:

$ax^n+bx^n-1+cx^{n-2}+cx^2+bx+a=0,\ a \square 0,$ (1)
яъни симметрик тенгламаларда унинг боши ва охиридан бир хил «узоқлашган» ҳадларнинг коэффициентлари ўзаро тенг бўлади. Масалан, $x^3-2x^2-2x+1=0$, $2x^4-3x^3+5x^2-3x+2=0$ симметрик тенгламалардир. Симметрик тенгламаларнинг илдизларини топиш учун, одатда, $z = x + \frac{1}{x}$ белгилаш қўлланилади. Бунга мисоллар келтирамиз.

1-мисол. $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Бу тенгламанинг илдизи 0 га тенг бўлмагани учун, уни x^2 га бўлиш мумкин:

$$6x^2-13x+12-13\cdot\frac{1}{x}+6\cdot\frac{1}{x^2}=0.$$

Бундан коэффициентлари бир хил ҳадларни бирлаштириб,

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $z=x\square\frac{1}{x}$ белгилашни киритсак, у ҳолда $x^2\square\frac{1}{x^2}=z^2-2$ бўлади. Бунда берилган тенгламани $6(z^2-2)-13z+12=0$ ёки $6z^2-13z=0$ кўринишида ёзиш мумкин. Унинг илдизлари: $z_1=0$, $z_2=\frac{13}{6}$ бўлгани учун, $x\square\frac{1}{x}$ ва $x\square\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$ тенгламаларни ҳосил қиламиз. Биринчи тенглама илдизга эга эмас. Иккинчи тенглама $6x^2-13x+6=0$ кўринишида ёзилиб, унинг илдизлари: $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$ бўлади. Жавоби: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$.

2-мисол. $12x^5+18x^4-45x^3+18x+12=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Тоқ даражали симметрик тенгламаларни ечиш усули жуфт даражали тенгламаларни ечиш усулидан ўзгачароқ. Бу тенгламаларни ечиш учун аввал бир хил коэффициентли кўпҳадлар бирлаштирилиб, тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$12(x^5+1)+18x(x^3+1)-45x^2(x+1)=0.$

Бундан

$(x+1)(12(x^4-x^3+x^2-x+1)+18x(x^2+x+1)-45x2)=0$

ёки

$(x+1)(12x^4+6x^3-51x^2+6x+12)=0$

тенгламани ҳосил қиламиз. $x+1=0$ тенгламадан берилган тенгламанинг биринчи илдизини топамиз: $x_1=-1$. Унинг бошқа илдизларини эса $12x^4+6x^3-51x^2+6x+12=0$ тенгламани ечиш орқали топамиз. Бу тенгламани ечиш учун, 1-мисолдаги каби тенгламани x^2 га бўлиб, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-51=0$$

Бундан $z=x\square\frac{1}{x}$ – белгилашни киритиш орқали тенгламани $12z^2+6z-75=0$ ёки $4z^2+2z-25=0$ кўринишида ёзиб, $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{101}}{4}$ илдизларни топамиз. Бунда $z=x\square\frac{1}{x}$ белгилашдан $4x^2+\left(1\pm\sqrt{101}\right)x+4=0$ тенгламани ҳосил қилиб, уларнинг илдизларини аниқлаймиз:

$$x_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{101}\pm\sqrt{38+2\sqrt{101}}}{8},\ x_{4,5}=\frac{-1+\sqrt{101}\pm\sqrt{38+2\sqrt{101}}}{8}.$$

Жавоби:

$$x_{1,2}=-1;\quad x_{2,3}=\frac{-1-\sqrt{101}\pm\sqrt{38+2\sqrt{101}}}{8},$$

$$x_{4,5}=\frac{-1+\sqrt{101}\pm\sqrt{38-2\sqrt{101}}}{8}.$$

3-мисол. $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Бу тенгламада тоқ даражали x коэффициентларнинг ишоралари қарама-қарши. Бундай тенгламалар ***IIтур симметрик тенгламалар*** деб аталади ва улар ҳам аввал кўрсатилган усуллар бўйича ечилади. Берилган тенгламани x^2 га бўлиб, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$30\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-17\left(x-\frac{1}{x}\right)-228=0.$$

Бунда $x-\frac{1}{x}=z$ белгилашни киритсак, у ҳолда $x^2 \square \frac{1}{x^2}=$ $=z^2+2$ тенглик бажарилади. У ҳолда $30(z^2+2)-17z-228=0$ ёки $30z^2-17z-168=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари $z_1 \square \frac{8}{3}$ $z_2=-2{,}1$. Демак, $x-\frac{1}{x}=-\frac{21}{10}$ ва $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$ тенгламалардан $x_1=-\frac{5}{2}$; $x_2=\frac{2}{5}$; $x_3=3$; $x_4=-\frac{1}{3}$ илдизлари топилади.

4-мисол. $x^4-3x^3+9x^2-27x+81=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Бу тенглама симметрик тенглама бўлмагани билан улар симметрик тенгламаларни ечиш усулида ечилади. Бунинг учун тенгламани $9x^2$ га бўлиб, қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{x}{3}+1-\frac{9}{3x}+\frac{81}{9x^2}=0, \Rightarrow \frac{1}{9}\left(x^2+\frac{81}{x^2}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{9}{x}\right)+1=0.$$

Бундан $z=x+\frac{9}{x}$ белгилашдан ва $x^2+\frac{81}{x^2}=z^2-18$ тенгликдан $z^2-3z-9=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг ечимлари $z_{1,2}=\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$ бўлгани учун, $x+\frac{9}{x}=\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$ ёки $2x^2-\left(3\pm3\sqrt{5}\right)x+18=0$ тенгламаларга эга бўламиз. Сўнгги тенгламанинг ҳақиқий илдизи мавжуд эмас. Демак, берилган тенглама ҳам илдизга эга эмас. Жавоби: $\square$.

МАШҚЛАР

B

859. Тенгламани ечинг:

1) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$; 2) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$;
3) x^3-3x^2-3x+1; 4) $3x^3-7x^2-7x+3=0$;
5) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0$; 6) $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0$.

860. Тенгламани ечинг:

1) $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$; 2) $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$;

3) $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$; 4) $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$.

861. Тенгламани ечинг:

1) $3x^4+7x^3+7x+3=0$; 2) $2x^4-9x^3+9x+2=0$;

3) $x^4+1=2(1+x)^4$; 4) $(1+x^2)^2=2x(1-x)^2$.

862. Тенгламани ечинг:

1) $12x^5-56x^4+107x^3-107x^2+56x-12=0$;

2) $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0$.

C

863. Тенгламани ечинг:

1) $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$; 2) $x^4-2x^3-23x^2+8x+16=0$.

864. Илдизлари 5, 3, $\frac{1}{3}$ бўлган 4-даражали симметрик тенгламалар тузинг.

5-§. Юқори даражали тенгламаларни кўпайтувчиларга ажратиш усулида ечиш

Демак, берилган тенгламани ечиш учун уни ўзига тенг кучли бўлган бир ёки бир неча содда тенгламалар билан алмаштириш керак. Масалан, $(2x-5)(4x+3)(x-2)=0$ тенгламани ечайлик. Бу тенглик бажарилиши учун кўпайтувчиларнинг камида биттаси нолга тенг бўлиши керак. Шундай экан, берилган тенглама қуйидаги учта тенгламага тенг кучли бўлади: $2x-5=0$; $4x+3=0$ ва $x-2=0$. Буларнинг ечимлари: $\frac{5}{2}$; $\square\frac{3}{4}$ ва 2. Бу сонлар берилган тенгламанинг ҳам ечимлари бўлади.

Тенгламаларни ечишнинг бу келтирилган усули, яъни берилган тенгламани кўпайтувчиларга ажратиш усули юкори тартибли тенгламаларни ечиш учун жуда қулай. Кўпҳадларни кўпайтувчиларга ажратиш эса жуда мураккаб, баъзида топқирликни талаб этувчи, қийин ҳам қизиқарли иш. Аммо, баъзи тенгламаларни кўпайтувчиларга ажратишнинг умумий усуллари бор. Буларни мисоллар орқали кўрсатамиз.

1-мисол. $x^4-10x^2+9=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Албатта, бу биквадрат тенгламани белгилаш киритиш орқали ҳам ечиш мумкин. Биз эса уни кўпайтувчиларга ажратиш орқали ечиб кўрамиз: $x^4-10x^2+9=(x^2-1)(x^2-9)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$ бўлгани учун, берилган тенглама $x-1=0$; $x+1=0$; $x-3=0$ ва $x+3=0$ содда тенгламаларга тенг кучли бўлади. Сўнгги тенгламаларни ечиб, берилган тенгламанинг илдизларини оламиз: $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=3$; $x_4=-3$.

2-мисол. $x^3+4x^2+6x+4=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $x^3+4x^2+6x+4=x^3+4x^2+4x+2x+4=x(x^3+4x+4)+$ $+2(x+2)=x(x+2)^2+2(x+2)=(x+2)(x(x+2)+2)=(x+2)(x^2+2x+2)$ бўлгани учун, берилган тенглама $x+2=0$ ва $x^2+2x+2=0$ тенгламалар бирлашмаси билан тенг кучли. Бунда биринчи тенгламанинг илдизи $x=-2$, иккинчи тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмаганлиги учун, берилган тенгламанинг ягона ҳақиқий илдизи мавжуд: -2.

3-мисол. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. *1-усул.*

$$x^4+x^3+x^2+x+1=x^4+\frac{1}{4}x^2+1+x^3+2x^2+x-\frac{5}{4}x^2=$$

$$=\left(x^2\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2+1+2\cdot x^2\cdot\frac{x}{2}+2x^2+2\frac{x}{2}-\frac{5}{4}x^2=\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2=$$

$$=\left(x^2+\frac{x}{2}+1-\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\left(x^2+\frac{x}{2}+1+\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)=$$

$$=\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$$

бўлгани учун, берилган тенглама $x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1=0$ ёки $x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1=0$ тенгламаларга тенг кучли бўлади. Бу тенгламалар эса ҳақиқий илдизга эга эмас, чунки уларнинг дискриминантлари манфий сон. Демак, берилган тенгламанинг ҳам ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас.

2-усул. Берилган тенглама симметрик тенглама бўлишини эътиборга олиб, унга $z=x+\frac{1}{x}$ белгилаш киритиш мумкин. Бу ҳолда ҳам тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмаслигида кўрамиз.

3-усул. Берилган тенгламанинг коэффициентлари – мусбат сон. Шунинг учун бу тенгламанинг мусбат илдизлари бўлиши мумкин эмас. Илдиз 0 га ҳам тенг бўлмайди. Агар $-1 \leqslant x < 0$ бўлса, у ҳолда $|x^3| \leqslant x^2$, $|x| \leqslant 1$ тенгсизликлардан $x^4+(x^3+x^2)+(x+1)>0$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Агар $x>0$ бўлса, у ҳолда $x^4>|x^3|$, $x^2>|x|$ тенгсизликлардан тенгсизликка $(x^4+x^3)+(x^2+x)+1=0$ эга бўламиз, яъни берилган тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас.

4-мисол. $x^4+12x^3+32x^2-8x-4=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. $x^4+12x^3+32x^2-8x-4=(x^4+12x^3+36x^2)-(4x^2+8x+4)=(x^2+6x)^2-(2x+2)^2=(x^2+8x+2)(x^2+4x-2)$ бўлгани учун, берилган тенгламани $(x^2+8x+2)(x^2+4x-2)=0$ тенглама билан алмаштириб, унга тенг кучли бўлган $x^2+8x+2=0$ ёки $x^2+4x-2=0$ тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларни ечиб, берилган тенгламаларнинг илдизларига эга бўламиз: $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{14}$; $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{6}$.

МИСОЛЛАР

B

865–870-мисолларда берилган тенгламаларни кўпайтувчиларга ажратиш усулида ечинг.

865. 1) $x^3-3x-2=0$; 2) $x^3-19x-30=0$;
3) $2x^3-x^2-1=0$; 4) $x^3+x-2=0$.

866. 1) $x^3+x^2-4x-4=0$; 2) $3x^3+5x^2+5x+3=0$;
3) $x^3-x^2-81x+81=0$; 4) $x^3+3x^2-16x-48=0$.

867. 1) $x^4+2x^3-x-2=0$; 2) $x^4-3x^3+x-3=0$;
3) $2x^4+3x^3+16x+24=0$; 4) $24x^4+16x^3+3x-2=0$.

868. 1) $x^3+3x^2-6x-8=0$; 2) $x^3+5x^2+15x+27=0$;
3) $8x^3-6x^2+3x-1=0$; 4) $27x^3-15x^2+5x-1=0$.

869. 1) $x^3+2003x+2004=0$; 2) $x^3+4x^2-5=0$;
3) $x^3-3x^2+2=0$; 4) $x^3-3x^2-6x+8=0$.

C

870.

1) $28x^3+3x^2-3x+1=0$; 2) $126x^3-3x^2+3x-1=0$;

3) $(x^2+4x)(x^2+x-6)=(x^3-16x)(x^2-2x-35)$;

4) $(x^2+5x)(x^2-3x-28)=(x^3-16x)(x^2-2x-35)$.

871. Агар: 1) $ax^3-2x^2-5x+6=0$ тенгламанинг битта илдизи -2 га тенг; 2) $x^3+ax^2-5x+6=0$ тенгламанинг битта илдизи 3 га тенг; 3) $x^3-x^2+ax+12=0$ тенгламанинг битта илдизи -3 га тенг; 4) $2x^3+11x^2+17x+a=0$ тенгламанинг битта илдизи $-0{,}5$ га тенг бўлса, a нинг қийматини аниқлаб, тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

872. Тенгламани ечинг:

1) $x^3+(1-a^2)x+a=0$; 2) $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$.

6-§. Иррационал тенгламалар

Ўзгарувчиси илдиз белгиси остида бўлган тенгламалар ***иррационал тенгламалар*** дейилади. Масалан, $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=-2$; $\sqrt{x}=5-4x$; $\sqrt{x+1}=\sqrt{x+6}+2x$ ва ҳ.к.–иррационалтенгламалар. $\sqrt{2}\cdot x+7x^2+\sqrt{3-\sqrt{2}}=0$ иррационал тенглама эмас, чунки илдиз остида ўзгарувчи йўқ.

Иррационал тенгламадаги илдизлар арифметик илдизлар каби қаралади. Шунинг учун илдиз қийматини номанфий деб ҳисоблаймиз. Масалан, $\sqrt{x+2}=-3$ иррационал тенгламанинг ечими йўқ, чунки $\sqrt{x+2}\geq 0$ ва $-3<0$. Одатда, иррационал тенгламаларни ечиш учун уларни шакл алмаштириб, рационал тенгламаларга келтириб ечилади. Энди иррационал тенгламларни ечишга мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. $x=\sqrt{2-x}$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Берилган тенгламанинг аниқланиш соҳаси $2-x\geqslant 0$, ёки $x\leqslant 2$ тенгсизлик билан аниқланади. Ушбу тенгсизликларни қаноатлантирадиган x лар орасидан берилган тенгламанинг илдизларини топиш керак. Бунинг учун тенгламанинг иккала томонини ҳам квадратга кўтарамиз: $x^2=2-x\square x^2+x-2=0$. Тенгламанинг илдизлари: $x_1=-2$; $x_2=1$.Бу илдизлар тенгламанинг аниқланиш соҳасида ётади. Бироқ бу сонларни берилган тенгламанинг илдизлари сифатида қабул қилиш мумкин эмас. Сабаби, $x^2+x-2=0$ тенгламага $x=\sqrt{2-x}$ тенгламани квадратга кўтариш натижасида келдик. Иккинчи томондан, $x^2+x-2=0$ тенгламани ҳам квадратга кўтариш натижасида $x^2+x-2=0$ тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Демак, берилган тенгламани квадратга ошириш жараёнида биз чет илдизларни олишимиз мумкин. Топилган ечимлар орасида чет илдизларнинг бор ёки йўқлиги асосан икки усулда аниқланади.

Биринчиси – *текшириш усули.* Бунда топилган ечимларнинг берилган тенгламаларни қаноатлантириши текширилади.

Текшириш. Агар x=1 бўлса, у ҳолда $1=\sqrt{2-1} \Rightarrow 1=1$ айниятни оламиз, яъни x=1 берилган тенгламанинг илдизи бўлади. $\sqrt{2-(-2)}=-2 \Rightarrow 2 \neq -2$. Демак, x=−2 – чет илдиз. Жавоби: x=1.

Иккинчиси – *ҚҚҚТ ни аниқлаш усули.* Тенгламанинг ҚҚҚТ $2-x \geqslant 0$ ва $x \geqslant 0$ ($\sqrt{2-x} \geq 0$ бўлгани учун) тенгсизликлар системаси билан аниқланади. Бунда ҚҚҚТ $0 \leqslant x \leqslant 2$ қўш тенгсизлик билан аниқланади. Энди x=1 ва x=−2 ечимлардан берилган тенгламанинг ҚҚҚТ га тегишлиларини белгилаб, унинг илдизини аниқлаймиз: Жавоби: x=1.

2-мисол. $\sqrt{3-x}-2x+3=0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Берилган тенгламани $\sqrt{3-x}=2x-3$ кўринишда ёзиб, унинг ҚҚҚТ ни $3-x \geqslant 0$ ва $2x-3 \geqslant 0$ тенгсизликлар системаси билан аниқлаймиз. Бунда ҚҚҚТ $1{,}5 \leqslant x \leqslant 3$ тенгсизликлар билан ёки [1,5; 3] тўплами билан аниқланади. Энди $\sqrt{3-x}=2x-3$ тенгламани квадратга ошириб, $3-x=4x^2-12x+9$ ёки $4x^2-11x+6=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари: $x_1=2$ ва $x_2=\frac{3}{4}$. Бу илдизларнинг биринчиси ҚҚҚТ га тегишли бўлса, иккинчиси тегишли эмас. Демак, берилган тенгламанинг ягона илдизи мавжуд: x=2.

3-мисол. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4$ тенгламани ечиш керак.

Ечилиши. ҚҚҚТ $x \geqslant 1$ тенгсизлик билан аниқланади. Энди берилган тенгламани $\sqrt{x+7}=4-\sqrt{x-1}$ кўринишда ёзиб, унинг иккала томонини ҳам квадратга кўтарамиз: $x+7=16-8\sqrt{x-1}+x-1 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1$. Охирги тенгламани яна квадратга ошириб, $x-1=1 \Rightarrow x=2$ тенгликни ҳосил қиламиз, x нинг топилган бу қиймати берилган тенгламани қаноатлантиради. Жавоби: x=2.

4-мисол. $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-12=0$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Агар $\sqrt{x^2+2x+8}=z$ белгилашни киритсак, у ҳолда $x^2+2x+8=z^2$ бўлади. Шунинг учун берилган тенгламани $z^2+z-20=0$ кўринишда ёзиб, унинг илдизларини топамиз: $z_1=4$, $z_2=-5$. Бунда киритилган белгилашни эътиборга олиб, $\sqrt{x^2+2x+8}=4$ тенгламани ҳосил қиламиз ($\sqrt{x^2+2x+8}=-5$ тенглама маънога эга эмас). Бу тенгламани квадаратга оширганда $x^2+2x-8=0$ квадрат учҳад ҳосил бўлади. Унинг илдизлари: $x_1=-4$; $x_2=2$. Энди топилган илизларнинг берилган тенгламани қаноатлантиришини текшириш керак. Текшириш:

$$(-4)^2+2(-4)+\sqrt{(-4)^2+2(-4)+8}-12=16-8+\sqrt{16}-12=$$

$=8+4-12=0$ ва

$$2^2+2\cdot 2+\sqrt{2^2+2\cdot 2+8}-12=8+\sqrt{16}-12=8+4-12=0$$

Яъни, топилган иккала илдиз хам берилган тенгламани қаноатлантиради. Жавоби: $x_1=-4$; $x_2=2$.

5-мисол.

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1 \qquad (1)$$

тенгламани ечамиз.

Ечилиши. (1) тенгламанинг иккала қисмини ҳам $\sqrt{3x^2 \square 5x \; \boxed{8}} \, \square \sqrt{3x^2 \; \boxed{5}x \square 1}$ ифодага кўпайтирсак,

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=7 \qquad (2)$$

тенглама ҳосил бўлади. (1) ва (2) тенгламаларни ҳадмаҳад қўшиб, $2\sqrt{3x^2+5x+8}=8$ ёки $3x^2+5x-8=0$ тенгламани оламиз. Унинг илдизлари: $x_1=-\frac{8}{3}$; $x_2=1$.

Текшириш: $x_1=-\frac{8}{3}$ бўлса,

$$\sqrt{3\left(-\frac{8}{3}\right)^2+5\left(-\frac{8}{3}\right)+8}-\sqrt{3\left(-\frac{8}{3}\right)^2+5\left(-\frac{8}{3}\right)+1}=\sqrt{16}-\sqrt{9}=1$$

$x=1$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{3+5+8}-\sqrt{3+5+1}=1$.

Жавоби: $x_1=-\frac{8}{3}$; $x_2=1$.

МИСОЛЛАР

А

873. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x} = 3$; 2) $\sqrt{x-3} = 2$; 3) $\sqrt{x-5} = 2$;

4) $\sqrt{x+2} = 3$; 5) $\sqrt{x+3} = -2$; 6) $\sqrt{x+3} = 2$;

6) $\sqrt{x} = 2 - x$; 7) $\sqrt{x-2} = \dfrac{x}{3}$; 9) $\sqrt{x+1} = x$.

874. Тенгламани ечинг:

1) $2\sqrt{x+5} = x + 2$; 2) $x - 1 = \sqrt{x+5}$;

3) $21 + \sqrt{2x-7} = x$; 4) $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x - 1$;

5) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}} = 4$; 6) $\sqrt{5-\sqrt{x+15}}$.

875. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-6}$; 2) $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 1$;

3) $\sqrt{3x+1} - 2 - \sqrt{x-1} = 0$; 4) $\sqrt{11x-2} + 3\sqrt{x} = 6$;

5) $\sqrt{x-9} - \sqrt{x-18} = 1$; 6) $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3$.

В

876.Тенгламани ечинг:

1) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}$; 2) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$;

3) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$; 4) $\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{x^2+3} = \sqrt{6x^2+10}$;

5) $\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-3}$; 6) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4x+9} - \sqrt{x}$.

877. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{y+2} - \sqrt{y-6} = 2$; 2) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$;

3) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$; 4) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$;

5) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$; 6) $\sqrt{3x-2} = 2\sqrt{x+2} - 2$.

878. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+3}} = \frac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}}$; 2) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$;

3) $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = \frac{2-x}{2+x}$; 4) $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}} = x-3$.

879. Қуйидаги тенгламаларни ечмасдан, уларнинг илдизлари йўқ эканини исботланг:

1) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} = -1$; 2) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$;

3) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{6-x} = -7$; 4) $\sqrt{4-4x} + \sqrt{x-2} = 6$.

C

880. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}$;

2) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x}$;

3) $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}$;

4) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+7}$.

881. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$;

2) $\sqrt{5 + x + 4\sqrt{x+1}} = 2 + \sqrt{x+1}$;

3) $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 2$;

4) $\sqrt{x - \sqrt{x-2}} + \sqrt{x + \sqrt{x-2}} = 2$.

882. Тенгламани ечинг:

1) $x + \sqrt{x} = 12$; 2) $x - 1 + 6 \cdot \sqrt{x-1} = 16$;

3) $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

883. Тенгламани ечинг:

1) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$;

2) $\dfrac{\left(x^2-12x+32\right)\left(x^2-13x+40\right)}{\sqrt{x^2-10x+2}}=0$;

3) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=27-x$.

884. Тенгламани ечинг:

1) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$; 2) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5}=x+1$.

885. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

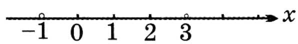
7-§. Модуль белгиси қатнашган тенгламалар

Ўзгарувчиси модуль белгиси билан берилган тенгламалар ***модуль белгиси қатнашган тенгламалар*** деб аталади. Масалан, $|x-2|=3$, $|3x+2|=2x+1$, ва ҳ.к. – модуль белгиси қатнашган тенгламалар. Модуль белгиси қатнашган тенгламаларни ечишнинг бир нечта усули бор. Уларни мисоллар ёрдамида кўриб чиқамиз.

1-мисол. $|x-1|=2$ тенгламанинг илдизларини топиш керак.

Ечилиши. *1-усул.* (*Геометрик усул*). $|x-a|$ ифоданинг геометрик маъноси – *у* сон ўқидаги x нуқтадан a нуқтагача бўлган масофани билдиради. У ҳолда $|x-1|=2$ тенгламанинг геометрик маъноси x ва 1 нуқталар орасидаги масофа 2 га тенг бўлганлигидадир. Демак, $x=-1$ ёки $x=3$ бўлиши керак.

Жавоби: $x=-1$; $x=3$.



2-усул. (*Квадратга кўтариш усули*). Берилган тенгламанинг иккала томони ҳам мусбат бўлгани учун, уни квадратга кўтариб, $x^2-2x+1=4$ ёки $x^2-2x-3=0$ квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари: $x_1=-1$ ва $x_2=3$. Булар берилган тенгламанинг жавоблари бўлади.

3-усул. (*Таърифлаш усули*). Таърифга кўра

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{агар } a\geqslant 0, \\ -a, & \text{агар } a<0. \end{cases}$$

Бундан, агар $x-1\geqslant 0$ бўлса, $|x-1|=x-1$ тенглик ва $x-1<0$ бўлса, $|x-1|=-(x-1)$ тенглик бажарилади. Шунинг учун сон ўқини $x=1$ нуқта орқали икки қисмга ажратамиз: $(-□;+□)=(-□;1)□[1;+□)$. Берилган тенгламани бу қисмларнинг ҳар бирида алоҳида ечиш керак.

Агар $x□(-□;\ 1)$ бўлса, у ҳолда берилган тенгламани $-x+1=2$ кўринишда ёзамиз. Бунда $x=-1$ бўлади.

Агар $x□[-□;\ 1)$ бўлса, у ҳолда берилган тенгламани $x-1=2$ кўринишда ёзиб, унинг илдизларини топамиз: $x=3$. Жавоби: $x=-1$; $x=3$.

2-мисол. $|2x-5|=x-1$ тенгламани ечиш керак.

Ечилиши. Бу ерда $|2x-5|\geqslant 0$ бўлгани учун, $x-1\geqslant 0$ бўлиши керак. Шунинг учун бу тенгламани қуйидагича иккита системага бўламиз:

1) $\begin{cases} 2x-5=x-1, \\ x-1\geq 0; \\ x\geq 2,5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2x+5=x-1, \\ x-1\geq 0; \\ x<2,5, \end{cases}$

$\begin{cases} x=4, \\ x\geq 2,5, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ x\leq x<2,5. \end{cases}$

Жавоби: $x_1=4$; $x_2=2$.

3-мисол. $|x-1|=2|x-2|$ тенгламани ечиш керак.

Ечилиши. Тенгламанинг иккала қисми ҳам мусбат бўлгани учун, уни квадратга кўтариш усулида ечиш қулай.

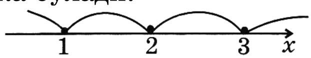
$$x^2-2x+1=4x^2-16x+16□3x^2-14x+15=0□x_1=\frac{5}{3};\ x^2=3.$$

Жавоби: $\frac{5}{3}$, 3.

4-мисол. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$ тенгламани ечиш керак.

Ечилиши. Бундай тенгламаларни ечиш учун модуль белгиси остидаги иккиҳадларни нолга тенглаштириб, уларнинг илдизларини аниқлаймиз: $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$. Бу нуқталар сон ўқини 4 бўлакка бўлади:

$(-□;1)□[1;2]□[2;3)□[3;+□)$.



1) Агар $x□(-□;\ 1)$ бўлса, $x-1<0$, $x-2<0$, $x-3<0$ бўлади. Шунинг учун берилган тенглама $-x+1+2x-4-3x+9=4$ ёки $-2x+2=0□x=1$ кўринишга келади. $x□(-□;\ 1)$ бўлгани учун, бу оралиқда тенглама ечимга эга эмас: □.

2) Агар $x□[1;\ 2)$ бўлса, $x-1\geqslant 0$, $x-2<0$, $x-3<0$ бўлади. Демак, берилган тенгламадан қуйидагига эга бўламиз: $x-1+2x-4-3x+9=4□0\cdot x=0$. Бу тенглик x нинг ҳар қандай қийматида бажарилади. Яъни, бу оралиқдаги ечим $1\leqslant x<2$ тенгсизлик билан аниқланади.

3) Агар $x\square[2;\ 3]$ бўлса, у ҳолда $x-1>0$, $x-2\geqslant 0$, $x-3<0$ бўлади. Шунинг учун берилган тенгламани $x-1-2x+4-3x+9=4$ ёки $x=2$ кўринишида ёзамиз. Демак, бу оралиқдаги ечим $x=2$ бўлади.

4) Агар $x\square[3;\ +\square]$ бўлса, у ҳолда $x-1>0$, $x-2>0$, $x-3\geqslant 0$ бўлади. Демак, $x-1-2x+4+3x-9=4\square x=5$.Бунда $5\square[3;\ +\square)$ бўлгани учун, ечими $x=5$ бўлади. Жавоби: $1\leqslant x\leqslant 2$ ёки $x=5$, яъни $x\square[1;\ 2]\square\{5\}$.

МИСОЛЛАР

А

886–897-мисолларда кўрсатилган тенгламаларни ечинг.

886.

1) $|x|=3$; 2) $|x-5|=3$; 3) $|x+4|=0$; 4) $|x+5|=-5$;
5) $|x+4|=2x$; 6) $|x+1|=-3x$; 7) $|2x+1|=2x$; 8) $|2x+1|=-x$.

887. 1) $1-|x|=0{,}5$; 2) $1+|x|=a$; 3) $|1-x|=0{,}5$; 4) $|1+x|=a$.

888. 1) $|x+3|=3+2x$; 2) $|7x-1|=21-9x$;
3) $|5-x|=|10+x|$; 4) $|3x+1|=9-x$.

889. 1) $|x+5|=|10+x|$; 2) $|3x+1|=9-x$;
3) $|5-x|=(3x-5)$; 4) $|x-3|=2x-1$.

В

890. 1) $|x-3|=2|x+1|=4$; 2) $|5-2x|=|2-3x|$;
3) $|5-x|+|x-1|$; 4) $|4-x|=|x-2|=2$.

891. 1) $|x-2|-|5+x|=3$; 2) $|-x+2|=2x+1$;
3) $|x+2|=\dfrac{2}{3\square x}$; 4) $|x^2-1|=5-x$.

892. 1) $|x^2+x|+3x-5=0$; 2) $x^2+|x-2|-10=0$;
3) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=1$ 4) $|x^2-4x|=5$.

C

893. 1) $\left|x^2+4x+2\right|=\dfrac{5x+16}{3}$; 2) $\dfrac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$;

3) $|x-6|=|x^2-5x+6|$; 4) $|x-4,2|(x-4,2)=-1$.

894. 1) $|x-2|+|x+2|+|2x-8|=9$;

2) $|4x-1|-|2x-3|+|x-2|=0$;

3) $|x-1|+|x+2|-|x-2|=4$;

4) $|x-1|-|x+2|-|2x-5|+|3-x|=-3$.

895. 1) $|x^2+5|=6x$; 2) $|x^2+x-3|=x$;

3) $|x^2-x-8|=-x$; 4) $|x^2+2x+3|=3x+45$.

896. 1) $x^2+|x|=6$; 2) $x^2-2|x|=15$;

3) $2x^2+|x|=1$; 4) $2x^2-3|x|=2$.

897. 1) $|x-2|x^2=10-5x$;

2) $(x^2-5x+6)^2+3|x-3|=0$;

3) $(7x^2-3x-4)^2+|7x+4|(x^2-1)^2=0$;

4) $6x-12=x^2|x-2|$.

8-§. Параметрли тенгламалар

Фараз қилайлик, бизга

$$f(x;\ a)=g(x;\ a) \qquad (1)$$

тенглама берилган бўлсин. Бунда x ва a ҳақиқий сонлар тўпламида ўзгаради. Ушбу тенгламани ечишда биз олдимизга икки хил мақсад қўйишимиз мумкин.

1-мақсад: (1) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир x ва a сонларининг тўпламини топиш керак. Бунда (1) тенглама икки ўзгарувчили тенглама бўлади.

2-мақсад: a сонининг (параметрнинг) ҳар бир қийматида (1) тенгламани қаноатлантирадиган x нинг барча қийматларини аниқлаш керак. Баъзан a параметрнинг ўзгариш соҳаси олдиндан маълум бўлади. У ҳолда бизнинг мақсад A тўпламда ўзгарадиган a сонининг ҳар бир қийматида (1) тенгламанинг x га нисбатан барча илдизларини топишдан иборат. Бу ҳолда (1) тенглама бир ўзгарувчили (x ўзгарувчи) ***параметрли тенглама*** деб аталади. Бу ерда a ***параметр*** деб аталади. Энди параметрли тенгламаларни ечишга мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. a параметрнинг хар бир қиймати учун $(a^2-a)x+a^2-3a+2=0$ тенгламанинг x га нисбатан илдизларини топиш керак.

Ечилиши. Албатта, бу тенгламаларни a параметрнинг ҳар бир қиймати учун алоҳида-алоҳида аниқлай олсак, мақсадга мувофиқ бўлар эди. Лекин буни амалга ошириш мумкин эмас, чунки a параметри чексиз кўп қийматлар қабул килади. Шу сабабли бундай тенгламаларни ечиш учун a параметрнинг «хатарли» қийматларини, яъни a параметрнинг тенгламанинг маъносини ўзгартирадиган қийматларини аниқлаб, ўша қийматлар учун берилган тенгламани алоҳида-алоҳида ечиш керак. a параметрнинг бошқа қийматларида эса тенгламанинг маъноси ўзгармагани учун, у оддий тенгламалар каби ечилади, Чунончи, бизга берилган тенгламани $(a^2-a)x=-a^2+3a-2$ кўринишда ёзайлик. Бу ерда $a^2-a=0$ бўлса, тенгламанинг маъноси ўзгаради. Шундай экан, $a=0$ ва $a=1$ – параметрнинг хатарли қийматлари.

Агар $a=0$ бўлса, берилган тенглама $0\cdot x=-2$ кўринишда ёзилади. Бу тенглама илдизга эга эмас.

Агар $a=1$ бўлса, у ҳолда $0\cdot x=2$ кўринишда ёзилади. Яъни, бу ҳолда тенгламанинг ечими исталган ҳақиқий сон бўлади: $x\square(-\square;+\square)$.

Агар $a\square0$ ва $a\square1$ бўлса, $a^2-a\square0$ бўлади. Шунинг учун берилган тенгламанинг ечими $x=\dfrac{-a^2+3a-2}{a^2-a}$ ёки $x=\dfrac{2-a}{a}$ кўринишида ёзилади.

Жавоби: Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг ечими: $\square$. Агар $a=1$ бўлса, тенгламанинг ечими исталган ҳақиқий сон: $x\square(-\square;+\square)$. Агар $a\square0$ ва $a\square1$ бўлса, у ҳолда $x=\dfrac{2-a}{a}$.

2-мисол. Агар x_1 ва x_2 сонлари $x^2-ax+a-1=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда a параметрнинг қандай қийматларида $x_1^2\square x_2^2$ ифода энг кичик қийматни қабул қилади?

Ечилиши. Виет теоремасига кўра $x_1+x_2=a$, $x_1x_2=$a-1. Бунда биринчи тенгликни квадратга кўтариш орқали $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=a^2$ ёки $x_1^2+x_2^2=a^2-2x_1x_2$ тенгликка эга бўламиз. $x_1x_2=a-1$ эканини ҳисобга олсак, $x_1^2+x_2^2=a^2-2a+2$ тенгликка эга бўламиз. $a^2-2a+2=$ $=(a-1)^2+1$ бўлгани учун, a^2-2a+2 квадрат учҳад фақат $a=1$ бўлганда энг кичик қиймат қабул қилади. Жавоби: $a=1$.

3-мисол. $x^5-5x+a=0$ тенгламанинг иккиланган илдизи бўлган a параметрнинг қиймати билан шу иккиланган илдизни аниқлаш керак.

Ечилиши. Агар $x=k$ берилган тengламанинг иккиланган илдизи бўлса, у ҳолда тенгламанинг чап томонидаги кўпҳад $(x-k)^2=x^2-2kx+k^2$ учҳадга қолдиқсиз бўлиниши керак. Бунда x^5-5x+a кўпҳадни $x^2-2kx+k^2$ учҳадга кўпҳадларни бўлиш қоидаси бўйича бўлсак, $R(x)=5(k^4-1)x-4k^5+a$ қолдиқ қолади. Бунда ҳар қандай x учун $5(1-k^4)x+4k^5-a=0$ бўлиши керак. Бу айният бажарилиши учун $k^4-1=0$ ва $4k^5-a=0$ бўлиши керак. Бундан $k=\square 1$ ва $a=\square 4$ бўлади.

Жавоби: $a=\square 4$ ва мос каррали илдизлар $k=\square 1$.

4-мисол. a параметрнинг қандай қийматларида $\sqrt{x^2 \square 1}=a-x$ тенглама ечимга эга? Шу ечимларни топиш керак.

Ечилиши. 1-*усул.* $y=\sqrt{x^2 \square 1}$ белгилашни киритсак, у ҳолда

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2-y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. $x^2-y^2=1$ бўлгани учун, $x+y\square 0$ бўлади, яъни $a\square 0$. Бунда $x+y=a$ тенгликни эътиборга олиб,

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{a}, \\ x+y=a \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Унинг ечимлари: $x=\dfrac{1}{a}\left(a+\dfrac{1}{a}\right), y=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right).$

$y\geqslant 0$ тенгсизликдан $a-\dfrac{1}{a}\geq 0$ ёки $\dfrac{(a-1)(a+1)}{a}\geq 0$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Унинг ечими: $-1\leqslant a<0$ ёки $a\geqslant 0$. Жавоби: $a\square[-1;\ 0)\square[1;\ +\square)$.

2-усул. Берилган тенгламанинг ечими $a-x\geqslant 0$ ёки $x\leqslant a$ бўлгандагина топилади. Шу сабабли $x^2-1=a^2-2ax+x^2$ ёки $2ax=a^2+1$тенгламани оламиз. Агар $a=0$ бўлса, у ҳолда тенглама ечимга эга эмас. Агар $a\square 0$ бўлса,у ҳолда $a=\dfrac{a^2+1}{2a}$ бўлади. $x\leqslant a$ тенгсизликни эътиборга олсак,

$$\frac{a^2+1}{2a} \le a \quad \text{ёки} \quad \frac{a^2-1}{a} \ge 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Унинг ечими: a□$[-1;0)$□$[1;+$□$)$.

МИСОЛЛАР

B

898. a параметрнинг қандай қийматларида қуйидаги тенгламаларнинг чексиз кўп ечимлари мавжуд:

1) $\dfrac{3a}{x-a} - \dfrac{a}{x-2a} = \dfrac{a}{x-a} - \dfrac{2a}{x-2a}$;

2) $6(ax-1)-a=2(a+x)-7$;

3) $0,5(5x-1)=4,5-2a(x-2)$.

899. a параметрнинг қандай қийматларида тенгламалар ечимга эга эмас:

1) $\dfrac{x-5}{x+7} = \dfrac{a-x}{x+7}$;
2) $\dfrac{8+5x}{2-x} = 2a$;

3) $2(a-2x)=ax+3$;
4) $a^2x=a(x+2)-2$.

900. a параметрнинг қандай қийматларида $ax-4=3x$ тенгламанинг илдизи 8 га тенг бўлади?

901. b параметрнинг қандай қийматларида: 1) $y=bx-3$ тўғри чизиқ $A(-2;\ 2)$ нуқтадан; 2) $y=3x+b$ тўғри чизиқ $A(-1;\ 5)$ нуқтадан ўтади?

902. a параметрнинг қандай қийматларида тенглама фақат битта илдизга эга:

1) $ax^2-6x+9=0$;
2) $x^2+ax+0,25=0$;

3) $4x^2-ax+a-3=0$;
4) $(a-1)x^2-2(a+1)a+a-2=0$.

C

903. m параметрнинг қандай қийматларида $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ тенгламанинг бир илдизи иккинчисидан икки марта катта бўлади? Шу илдизларни топинг.

904. k параметрнинг шундай қийматини топингки, бунда $x^2-(2k+1)x+k^2+2=0$ тенгламанинг битта илдизи иккинчисидан икки марта кичик бўлсин.

905. p ва q параметрларнинг шундай қийматларини топингки, бунда p ва q сонлари $x^2+px+q=0$ тенгламанинг илдизлари бўлсин.

906. m параметрнинг барча қийматларини аниқланг. Бунда

1) $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$ тенгламанинг u ва v илдизлари $3u-4v=11$ шартни;

2) $x^2-(3m+2)x+m^2=0$ тенгламанинг u ва v илдизлари $u=3v$ шартни қаноатлантирсин.

907. m нинг қандай қийматларида $4x^2-(9m-2)x+36=0$ ва $2x^2-(3m+2)x+12=0$ тенгламалар умумий илдизларга эга?

908. b нинг қандай ва қийматларида:

а) $3x^2-4x+b-2=0$ ва $x^2-2bx+5=0$;

б) $2x-(3b-1)x+3=0$ ва $6x^2-(2b+3)x+1=0$;

в) $x^2+bx+8=0$ ва $x^2+x+b=0$ тенгламаларнинг умумий илдизлари мавжуд?

909. m ва n параметрларнинг шундай қийматларини аниқлангки, бунда x^2+mn+n квадрат учҳадни $x-m$ ва $x-n$ иккиҳадларга бўлганда мос m ва n га тенг қолдиқлар қолсин.

910. m нинг қандай қийматларида $x^3-(m^2-m+7)x-(3m^2-3m-6)=0$ тенгламанинг битта илдизи (-1) га тенг бўлади? Шу тенгламанинг қолган иккита илдизини топинг.

911. a, b, c параметрларнинг қандай қийматларида $0{,}75x^2+(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$ тенглама битта илдизга эга?

912. p ва q параметрларнинг қандай қийматларида $x^4-10x^3+37x^2+px+q=0$ тенглама битта илдизга эга?

913. a билан b параметрларнинг қандай қийматларида $x^4+x^4-18x^2+ax+b=0$ тенглама ўзаро тенг иккита илдизга эга?

914. a параметрнинг қандай қийматларида $(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$ тенгламанинг учта илдизи мавжуд?

9-§. Тенгламалар системасини ечиш усуллари

Тенгламалар системасини ечишнинг геометрик ёки график усулдан фарқли бир неча аналитик усуллари мавжуд. Буларни мисоллар ёрдамида кўриб чиқамиз.

1-усул. Ўрнига қўйиш усули. Бу ерда тенгламалар системасининг бирида y ни x орқали (ёки x ни y орқали) ифодалаб, иккинчи тенгламадаги y (ёки x) шу ифода билан алмаштирилади. Шу тариқа система бир ўзгарувчили тенгламага келтириб ечилади.

1-мисол.

$$\begin{cases} y + x^2 = 5, \\ y^2 + x^4 = 17 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимларини топиш керак.

Ечилиши. Биринчи тенгламадан $y=5-x^2$ тенглик воситасида $(5-x^2)^2+x^4=17$ ёки $x^4-5x^2+4=0$ биквадрат тенгламага эга бўламиз. Унинг илдизлари: $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$. Бу илдизларга мос келувчи y нинг қийматларини $y=5-x^2$ тенгликдан фойдаланиб топамиз: $y_1=4$, $y_2=4$, $y_3=1$, $y_4=1$.Жавоби: (1; 4), (–1; 4), (2; 1), (–2; 1).

2-мисол.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш керак.

Ечилиши. Системадаги иккинчи тенгламадан $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ ифодани ундаги биринчи тенгламага олиб бориб қўямиз:

$$\left(\pm\sqrt{25 - x^2}\right)^2 \pm \sqrt{25 - x^2} \cdot x + x^2 =$$

$$= 37 \Rightarrow 25 - x^2 \pm x\sqrt{25 - x^2} + x^2 = 37 \Rightarrow \pm x\sqrt{25 - x^2} = 12.$$

Шу тариқа $x\sqrt{25 - x^2} = 12$ ва $x\sqrt{25 - x^2} = -12$ тенгламаларга эга бўлдик. Энди шу тенгламаларни ечамиз. $\sqrt{25 \square x^2} \geqslant 0$ бўлгани учун, бу тенгламаларнинг биринчисида $|x| \leqslant 5$ ва $x \geqslant 0$ бўлиши керак. Яъни, $0 \leqslant x \leqslant 5$. Бу тенгликларни квадратга ошириш орқали $x^2(25-x^2)=144$ ёки $x^4-25x^2+144=0$ биквадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари: $x_{1,2}=\square 3$ ва $x_{3,4}=\square 4$ бўлади. $0 \leqslant x \leqslant 5$ эканини эътиборга олсак, $x=3$, $x=4$ сонлари $x\sqrt{25 - x^2} = 12$ тенгламанинг илдизлари бўлади. Шу каби $-x\sqrt{25 - x^2} = -12$ тенгламанинг илдизлари: $x=-3$, $x=-4$. У ҳолда мос у нинг қийматлари: $y_1=4$, $y_2=3$, $_{y3}=-$ 4, $y_4=-3$. Жавоби: (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3).

2-усул. Алгебраик қўшиш усули. Бу усулда системадаги тенгламаларни (зарур бўлса, нолга тенг бўлмаган сонларга ёки ифодаларга кўпайтириб) бир-бирига қўшиш ёки айириш орқали системадаги битта ўзгарувчидан қутулиш ёки системадаги тенгламаларни оддий кўринишга келтириш мумкин.

3-мисол.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1, \\ x - y^2 = 1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш керак.

Ечилиши. Системадаги иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, уни биринчи тенгламага қўшсак, $x^2+2x=3$ ёки $x^2+2x-3=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари: $x_1=1$, $x_2=-3$. Агар $x_1=1$ бўлса, $y_1=0$, агар $x_2=-3$ бўлса, у ҳолда $-3-y^2=1$ тенглик бажарилмайди. Жавоби:(1; 0).

4-мисол. 2-мисолдаги системани қўшиш усулида ечиб кўрамиз.

Ечилиши. Системадаги биринчи тенгламадан иккинчи тенгламани айириш орқали

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \end{cases}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу системадаги иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, уни биринчи тенгламага қўшиб ва иккинчи марта айирсак,

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 49, \\ (x - y)^2 = 1, \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x + y = \pm 7, \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу система қуйидаги 4 та система билан тенг кучли:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7, \\ x - y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Уларнинг мос ечимлари: (4; 3), (3; 4), (−4; −3), (−3; −4) бўлади.

3=усул. Ўзгарувчилар киритиш усули.

5-мисол.

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 7, \\ xy + 2(x + y) = 8 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш керак.

Ечилиши. Агар $x+y=u$, $xy=v$ деб белгиласак, у ҳолда $\begin{cases} u+2v=7, \\ 2u+v=8 \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз. Бундан $u=3$, $v=2$. Демак,берилган система

$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$ системага тенг кучли. Унинг ечимлари: $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=2$, $y_2=1$.

Жавоби: (1;2), (2;1).

6-мисол. $\begin{cases} y^2-xy=12, \\ x^2-xy=-3 \end{cases}$

тенгламалар системасини ечамиз.

Ечилиши. Берилган системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} y(y-x)=12, \\ x(x-y)=-3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y(y-x)=12, \\ x(y-x)=3. \end{cases}$$

$x=0$ ёки $y=0$ бўлганда системадаги тенгликлар бажарилмайди. Шу сабабли системадаги биринчи тенгламани иккинчисига бўлиш мумкин. У ҳолда

$$\begin{cases} y(y-x)=12, \\ \dfrac{y}{x}=4 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} y=4x, \\ y(y-x)=12 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан $4x(4x-x)=12$, $x^2=1$□$x=$□1 тенгликка эга бўламиз. Бунда $y=$□4.

Жавоби: (1; 4), (−1; −4).

7-мисол.

$$\begin{cases} 12x^2+12y^2=25xy. \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш керак:

Ечилиши. $y=0$ қиймат берилган системани қаноатлантирмайди. Шунинг учун y□0 деб олиб, берилган системадаги биринчи тенгламани y^2 га бўлиб, $12\cdot\dfrac{x^2}{y^2}+12=25\cdot\dfrac{x}{y}$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $x=ty$ белгилашни киритсак, у ҳолда охирги тенгламани $12t^2-25t+12=0$ кўринишда ёзиш мумкин. Унинг илдизлари: $t_1 \square \frac{4}{3}$; $t_2 \square \frac{3}{4}$. Берилган системадаги иккинчи тенгламадан $y^2(t^2-1)=7$ тенгликни ҳосил қилиб, бундан $y=\square 3$ бўлишини кўрамиз. Бу ерда $x=ty$ эканини эътиборга олиб, $x=\square 4$ тенгликларга эга бўламиз. Жавоби: (4; 3), (−4; −3).

МИСОЛЛАР

A

915. Системани ўрнига қўйиш усулида ечинг:

1) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=4, \\ xy=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+y=2, \\ x^2-xy+6y=-4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x+y=5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2-y^2=14, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ y-3x-1=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x-y=2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=6; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ xy=6. \end{cases}$

916. Системаларни алгебраик кўшиш усулида ечинг:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ y-x^2=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=25, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ x^2+6y=36; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2+(y-9)^2=34; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x^2+7y^2=148, \\ 3x^2-y^2=11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+xy+x=10, \\ y^2+xy+y=20. \end{cases}$

B

917. Системаларни ўзгарувчилар киритиш усулида ечинг:

1) $\begin{cases} x+xy+x=9, \\ x-xy+y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy+x+y=9, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20. \end{cases}$

918. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=1{,}1, \\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{9}{x+y}=0{,}1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=8, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{50}{7}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{36}, \\ xy^2-x^2y=324. \end{cases}$

C

919. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+x=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

920. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} xy=15, \\ xz=10, \\ yz=24; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72, \\ (x+z)(x+y+z)=96, \\ (y+z)(x+y+z)=120; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{4}}=12, \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{4}}=3. \end{cases}$

10-§. Тенгламалар системасига келтириладиган масалалар

Кундалик ҳаётда учрайдиган кўплаб масалаларни икки ўзгарувчили тенгламалар системасига келтириб ечиш мумкин. Бундай масалаларга бир нечта мисоллар келтирамиз.

1-мисол. Қишлоқ хўжалиги бирлашмаси арпа экилган майдондан 3570 ц арпа йиғиб олди. Агар арпанинг ҳар бир гектардаги ҳосилдорлигини 8 центнерга орттириш мумкин бўлса, у ҳолда 3570 ц ҳосил йиғиб олиш учун дастлабки экин майдонидан 20 га кам экин майдони зарур бўлар эди. Бирлашма неча гектар майдонга арпа экказ ва унинг ҳосилдорлиги қандай бўлган?

Ечилиши. Ҳар бир гектардан олинган ҳосилни x деб ва y гектар ерга арпа экилган деб ҳисоблаймиз. У ҳолда масаланинг шартига кўра

$$\begin{cases} xy = 3570, \\ (x+8)(y-20) = 3570 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бундан

$$\begin{cases} xy = 3570, \\ xy - 20x + 8y - 160 = 3570 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3570, \\ 2y - 5x = 40 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг ечимлари: $x_1=34$; $x_2=-42$; $y_1=105$; $y_2=-85$. Бу ерда системанинг $(-42; -85)$ ечими масала шартларини қаноатлантирмайди.
Жавоби: 105 га; 34 ц.

2-мисол. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 84 см, гипотенузаси 37 см. Учбурчакнинг катетларини топинг.

Ечилиши. Агар учбурчакнинг катетларини a ва b орқали белгиласак, у ҳолда масаланинг шартига кўра

$$\begin{cases} a + b = 84 - 37, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 47, \\ a^2 + b^2 = 1369 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системанинг ечимлари (12; 35) ва (35; 12) бўлади. У ҳолда учбурчакнинг катетлари 12 см ва 35 см.

3-мисол. Йиғиндиси 20 га, кўпайтмаси 96 га тенг бўлган иккита сон топинг.

Ечилиши. Бу сонларни x ва y орқали белгиласак, у ҳолда

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ xy = 96 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Унинг ечими (8; 12) ва (12; 8). Бунда бизга керакли сонлар 8 ва 12 бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

921. Икки соннинг айирмаси 6 га, кўпайтмаси 216 га тенг, Ушбу сонларни топинг.

922. Икки хонали соннинг битта рақами иккинчисидан 1 та ортик. Шу соннинг квадрати билан унинг рақамларини тескари тартибда ёзганда ҳосил бўладиган сон квадратининг йиғиндиси 1553 га тенг. Шу икки хонали сонни топинг.

923. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 82 м, диагонали 29 м. Унинг томонларини аниқланг.

B

924. 96 сонини учта қўшилувчига шундай ажратингки, бунда биринчи қўшилувчини иккинчи қўшилувчига бўлганда тўлиқсиз бўлинма 2 га, қолдиқ 7 га тенг бўлсин, иккинчи қўшилувчини учинчи қўшилувчига бўлганда тўлиқсиз бўлинма 1 га, қолдиқ 3 га тенг бўлсин.

925. Тўғри тўртбурчакнинг узунлиги 12 м га қисқартирилиб, эни 12 м узайтирилса, квадрат ҳосил бўлади. Узунлигини 12 м узайтириб, эни 12 м қисқартирилса, у ҳолда юзи 15049 $м^2$ бўлган тўртбурчак ҳосил бўлади. Дастлабки тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

926. Узунлиги сгатенг гипотенузага туширилган баландлик уни 2 бўлакка бўлади. Шу бўлакларнинг бири ўзи билан умумий учи бўлмаган катетга тенг. Учбурчакнинг катетларини топинг.

927. *A* шаҳардан соат 12 да йўлга чиққан поезддан кейин соат 14 да ўша шаҳардан чиққан иккинчи поезд биринчисига шу куни соат 20 да етиб олди. Агар поездлар тезликларининг йиғиндиси 140 км/соат бўлса, ҳар бир поезднинг тезлигини топинг.

928. Бир шаҳардан иккинчи шаҳарга бир вақтда иккита автомобиль йўлга чиқди. Бир автомобиль иккинчисига қараганда соатига 15 км ортиқ юриб, иккинчи шаҳарга 1 соат илгари етиб келди. Агар икки шаҳар орасидаги масофа 180 км бўлса, автомобилларнинг тезликларини топинг.

C

929. Йўловчи 31 км бўлган йўлни маълум бир тезлик билан юриб ўтиш режасида сафарга чиқди. Бироқ у фақат дастлабки 1 км йўлни ўйланган тезлик билан юриб ўтиб, қолган йўлни 1 км/соат тезлик билан босиб ўтди. Бунинг натижасида у жами йўлга режалаштирган вақтидан 1,5 соат ортиқ вақт сарфлади. Йўловчи қандай тезлик билан юришни режалаштирган эди?

930. A ва B жисмлар ўзаро тўғри бурчак ташкил килиб кесишадиган тўғри чизиқлар бўйича ҳаракатланмоқда. A жисм тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси томон 4 м/с тезлик билан яқинлашади, B нуқта кесишиш нуқтасидан 3 м/с тезлик билан узоқлашади. Дастлабки A жисм кесишиш нуқтасидан 300 м, B жисм 250 м узоқликда бўлса, қанча вақтдан сўнг жисмлар орасидаги масофа 1825 м бўлади?

931. Бир комбайнчи иккинчисига қараганда ҳосилнинг маълум бир қисмини 24 соат аввалроқ йиғади. Агар иккала комбайнчи биргалашиб ишлашса, бу ҳосилни ёлғиз иккинчи комбайнчи йиғадиган вақтдан 49 соат эртароқ йиғиб бўлар эди. Ҳар бир комбайнчи ҳосилнинг шу қисмини қанча вақтда йиғиб олади?

932. Агар икки қувурдан сув юборилса, цистернани 12 Дақиқада тўлдириш мумкин. Агар цистернанинг биринчи ярми фақат биринчи қувур билан, иккинчи ярми фақат иккинчи қувур билан тўлдирилса, цистернани 25 Дақиқада тўлдириш мумкин. Алоҳида ҳар бир қувур билан цистернани канча вақтда тўлдириш мумкин?

933. Биз ўйлаган икки хонали сон рақамлари квадратларининг йиғиндиси 65 га тенг. Биз ўйлаган сонга 27 ни қўшганда ўйланган соннинг рақамлари билан тескари тартибда ёзилган сон чиқади. Биз қандай сон ўйладик?

III БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МИСОЛЛАР
(мураккаб даражали)

934. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=(x^2-3)^2-(x^2-2)^2$; 2) $y=(x+2)^3-(x+1)^3$;

3) $y=(1-x)(x+1)x+x(x+1)(x+2)$.

935. Агар $A(1;\ 3)$ нуқта $y=x^2+px+q$ параболанинг учи бўлса, p билан q ни топинг.

936. 1) $A(0;\ -2)$; $B(-2;\ 4)$ нуқталардан ўтадиган ва фақат битта нуқтада -4 қийматни қабул қиладиган; 2) $C(1;\ 2)$ нуқтадан ўтадиган, $x=-2$, $x=3$ нуқталарда бир хил қийматлар қабул қиладиган ва энг катта қиймати 4 га тенг бўлган квадрат функцияни ёзинг.

937. Агар $A(1;\ -8)$ нуқта $y=ax^2+bx+c$ параболанинг учи бўлса ва у Oy ўқини $B(0;\ -6)$ нуқтада кесиб ўтса a, b, c коэффициентларни топинг.

938. Агар $y=x^2-4x+c$ функциянинг энг кичик қиймати 2 га тенг бўлса, унинг графигини ясанг.

939. Агар $y=c+6x-x^2$ функциянинг энг катта қиймати 4 га тенг бўлса, шу функциянинг графигини ясанг.

940. Агар x_1, x_2 илдизлар учун $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$ тенглик бажарилса, $y=2x^2-(k+2)x+k$ функциянинг графигини ясанг.

941. Координата текислигида берилган F нуқта билан $y=a$ тўғри чизиқдан бир хил масофада жойлашган нуқталар тўпламининг тенгламасини ёзинг:

1) $F(1;\ 2)$, $y=-2$; 2) $F(-1;\ -4)$, $y=-2$.

942. m нинг қандай қийматларида $y=mx^2-6x+4m$ параболанинг учи I чоракда ётади?

943. Агар x_1, x_2 сонлари $x^2-5x+4=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, бу тенгламани ечмасдан туриб: 1) $\frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)^2}$; 2) $x_1^3+x_2^3$; 3) $x_1^6+x_2^6$ ифоданинг қийматларини топинг.

944. Агар x_1, x_2 сонлари $2x^2-3x-9=0$ тенгламанинг илдизлари бўлса, бу тенгламани ечмасдан туриб:

1) $\frac{x_2}{1\square x_1}\square\frac{x_1}{1\square x_2}$; 2) $\frac{x_2}{2x_2-x_1}+\frac{x_1}{2x_1-x_2}$;

3) $\frac{x_1}{x_1^2-1}+\frac{x_2}{x_1^2+1}$

ифоданинг қийматларини топинг.

945. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=(x-1)^3+2$; 2) $y=2(x+3)^2-1$;

3) $y=\sqrt{x\square 2}+3$; 4) $y=2-\sqrt{x\square 1}$;

5) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

946. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$ 2) $y=\left||x-2|-3\right|$;

3) $y=\left||x-2|+3\right|$; 4) $y=x^2-4|x|+3$.

947. Тенгламанинг графигини ясанг:

1) $(x-y)(x+y)=0$; 2) $(x+4)(y-3)=0$.

948. $y=\left|3|x|-4x^2\right|-2$ функциянинг камайиш оралиқларини топинг.

949. $y=\left|x^2-3x-6\right|+x-6$ функциянинг ўсиш оралиқларини топинг.

950. Агар $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$, $(x>0)$ ва $f(x)$ жуфт функция бўлса, $f(x)$ функциянинг графигини ясанг.

951. Агар $f(x)=\sqrt{1-x}-2$, $(x\geq 0)$ ва $f(x)$ тоқ функция бўлса, $f(x)$ функциянинг графигини ясанг.

952–955-мисоллардаги тенгламалар системасини график усулда ечинг.

952. 1) $\begin{cases} x^2+2y=10, \\ x-y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-y=-2, \\ 3x+y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+2x^2=3, \\ x+y=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=x^2-1, \\ y=-x^2+2x-1. \end{cases}$

953. 1) $\begin{cases} x=y^2+5y, \\ y=x^2+5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-8x-4y=6, \\ y^2+5y-5x=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ x^2+6y=36; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-4x-6y=20, \\ xy=-8. \end{cases}$

954. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + (y-9)^2 = 36; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 47; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y = 13, \\ xy - 3x + 2y = 11. \end{cases}$

955. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x = \dfrac{1}{2}y^2 - 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2y - 3x = 16, \\ x = 4y + 1. \end{cases}$

IV БОБГА ДОИР ҚЎШИМЧА МИСОЛЛАР
(мураккаб даражали)

956–960-мисолларда берилган m ва n сонларини таққосланг.

956. $m = \sqrt{47}, \quad n = \sqrt{26} + \sqrt{16}.$

957. $m = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = 2\left(\sqrt{2} - 1\right).$

958. $m = 2\sqrt{10}, \quad n = 6,(32).$

959. $m = \sqrt{6} + \sqrt{3}, \quad n = 4,(18).$

960. $m \square \sqrt{\dfrac{2002}{2004}}, \quad n \ \square \sqrt{\dfrac{2001}{2003}}.$

961–981-мисолларда берилган тенгсизликларни исботланг.

961. $\sqrt{a^2 \square b^2} \leqslant a+b$ **(**$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$**).**

962. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} \square \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a} \square \sqrt{b}$ **(**$a>0,\ b>0$**).**

963. $a+b+c \geqslant \sqrt{ab} \square \sqrt{ac} \ \square \sqrt{bc}$ **(**$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0$**).**

964. $\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$ **(**$a>0,\ b>0$**).**

965. $mn + mk + nk \leqslant 3mnk$ (m, n, k□N).

966. $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ ($a>0$, $b>0$).

967. Агар $a+b\geqslant 1$ бўлса, у ҳолда $a^4+b^4>\frac{1}{8}$.

968. $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

969. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$).

970. Агар $a^2+b^2=8$ бўлса, у ҳолда $|a+b|\leqslant 4$.

971. Агар a, b ва c учбурчак томонлари бўлса, у ҳолда $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$ (x□R).

972. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geqslant 8$ ($a>0$, $b>0$, $c>0$).

973. $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}>2$.

974. $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}\geq 2$.

975. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1\left(n\in N\right)$.

976. $(a+b)(a+c)(b+c)\geqslant 8abc$ ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$).

977. $(1+a)(1+b)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc$ ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$).

978. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\left(n\in N; n\geq 2\right)$.

979. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\left(n\in N; n\geq 2\right)$.

980.

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_2a_n}+\ldots\sqrt{a_{n-1}a_n}\leq$$

$$\le \frac{n-1}{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(a_1 \ge 0, a_2 \ge 0, \ldots, a_n \ge 0\right).$$

981. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{n}\left(n \in N, n \ge 2\right).$

982. $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \left(n \in N, n \ge 2\right).$

983. Агар $xy=8$, $(x>0,\ y>0)$бўлса, $8x+y$ ифоданинг энг кичик қийматини топинг.

984. Агар $x>0$ бўлса, $x \square \dfrac{49}{x}$ ифоданинг эиг кичик қийматини топинг.

985. Агар $a>0$ бўлса, $\dfrac{a}{a^2 \square 25}$ ифоданинг энг катта қийматини топинг.

986. Агар $0<a<0$ бўлса, $a(6-a)$ ифоданинг энг катга қийматшш топинг.

987–990-мисолларда берилган тенгсизликлар тенг кучлими?

987. $(x+1)(2x-3)<0$ ва $\dfrac{2x-3}{x+1}<0$?

988. $(5x-2)(3x+4)\geqslant 0$ ва $\dfrac{5x-2}{3x+4}\ge 0$?

989. $3x-\dfrac{x+5}{x-4}>\dfrac{x+5}{x-4}-3$ ва $x>-1$?

990. $3x-\dfrac{x+5}{x-4}\le\dfrac{x+5}{x-4}-3$ ва $x\leqslant -1$?

991–1005-мисолларда берилган тенгсизликлар ва тенгсизликлар системасини ечинг.

991. $(x-2)^2(x^2-2)<(x-2)^2(6-2x)$.

992. $(x-1)^3(x^2+6x+9)\geqslant(x-1)^2(x+3)$.

993. $(x^2-6x+9)(4x^2-3x-1)\leqslant 0$.

994. $(6x^2+7x+1)(x^4-10x^3+25x^2)>0$.

995. $\dfrac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+2)^2(x-5)} \leq 0$.

996. $\dfrac{(x^2+2x-8)(x^3-4x)}{x^2+7x+10} > 0$.

997. $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2+7x+12} \leq 1$. **998.** $\dfrac{x^2+3x-13}{(x+3)(x-2)} > 2$.

999. $|4x^2+35x+38|>|12x^2+33x+32|$.

1000. $|x^2-3x|+2x-6\leqslant 0$.

1001. $\dfrac{5-|x|}{x^2+|x|-2} \geq \dfrac{|x|-5}{x^2-1}$.

1002. $\begin{cases} x^2+6x+5<0, \\ x^2+4x+3>0. \end{cases}$ **1003.** $\begin{cases} 2x^2-10x+5<0, \\ x^2+3x-2<0. \end{cases}$

1004. $\begin{cases} \dfrac{x^2-13x+40}{x^2-x-6} \geq 0, \\ x \leq 6. \end{cases}$ **1005.** $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2} \geq 0, \\ |x-5| \leq 2. \end{cases}$

1006. Координата текислигида координаталари: 1) $x\geqslant|x^3+xy^2|$; 2) $y\geqslant|x^3+x^2y|$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини тасвирланг.

1007. Тенгламанинг графигини ясаиг:

1) $y = min\{|x+1|;3+2x-x^2\}$;

2) $y = max\{|x-1|;x^2-4x+3\}$.

1008. *Oxy* текисликда координаталари қуйидаги тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини тасвирланг:

1) $\begin{cases} x + y > 1, \\ y + |4x| \le 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \ge x^2 + 2x - 8, \\ 5x + 2y + 12 \le 0 \end{cases}$

1009. *a* параметрни топинг. Бунда $x^2+(a-1)x-2a=0$ тенглама илдизлари квадратларининг йиғиндиси энг кичик қийматни қабул қилсин.

1010. *Oxy* текисликда берилган тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини тасвирланг:

1) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 32 < 0, \\ 4x + 2y > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16x - 22y - 171, \\ 30x - y^2 > 252 + 14y + x^2; \end{cases}$

Ном кўрсаткичи

ЖАВОБЛАР

7-синфда ўтилган материалларни такрорлаш.

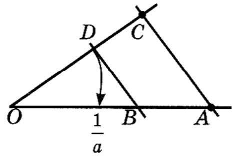
1. 1) a^{16}; 5) a^{10}; 9) a^6. **2.** 2) 25; 4) 1; 5) 81. **3.** 2) $-a^5b^7$; 4) $4a$; 6) m^4n^4. **4.** 1) $3a^2b-ab^2$; 3) $3xy+y^2$; 5) $10p^2-18pq+8q^2$. **5.** 2) $5a(a^2-3ab+4b^2)$; 6) $3x^2(-2a+3-4x^2-a^2)$. 10. 1) 1; 2) $\frac{4x\square 4}{a}$; 3) $\frac{3an\square 2bm}{36mn}$; 4) $\frac{5bm}{14x}$; 5) $-3abpq$; 6) $\frac{x\square 2y}{3}$. 11. 4) $(x+y)^2(x-y)$; 5) $(a-b)^2(a-b-3)$; 6) $(m+n)^2(1-n)$. 13. 1) 1; 2) $\frac{m\square n}{n}$; 3) b; 4) $-x$. **14.** 2) $1\frac{2}{3}=1{,}67$, $\square=0{,}00(3)$; $\square<0{,}002$. 15. 2) $-x^2$; 3) $-7x^2-14$; 6) $a+0{,}3b+1$. 16. 3) mn^3; 5) $\frac{b}{9}$; 6) $\frac{4}{5}p^2qk$. 17. 1) $2x^2-12$; 2) $2y^2-4$; 3) $2a^2+10a+14$; 4) $2c^2-10c+14$. **18.** 4) $-8c^3+10c^2+c-3$; 8) $c^3+c^2-14c-24$. **19.** 1) -7; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **20.** 1) $(a-2)(a^2-2)$; 2) $(x+6)(x^2-2)$; 3) $c(c+1)(c^2-2)$; 4) $y^2(1-y)(1+y)$; 5) $(b+c)(a^2-ab)$; 6) $(x-y)(2x^2+y^2)$; 7) $(16a-5c)(b^2+2c^2)$; 8) $(2a-7b)(3a^2+b^2)$; 9) $(a+c)(c-2)(c+2)$. **21.** 1) 0; $\square\frac{4}{6}$; 2) 0; 1,6; 3) 0; 2; 4) 0; 0,2; 5) 0; $\frac{15}{8}$; 6) 0; 1. **22.** 1) $a^k(1+a)$; 2) $5x^3(x^k+2)$; 6) $5x^k+1(3x^k-5)$. **23.** 3) $66^3+34^3=2^3(33^3+17^3)=8\cdot(33+17)(33^2-17\cdot 33+17^2):400$. **25.** 8) $(x-1)^2-36$. 26. 1) 1; 2) 3; 3) 100; 4) $\frac{3}{4}$. 27. 1) $\frac{2\square b}{5}$; 2) $\square\frac{7}{3}$; 3) $\square\frac{3}{8}$; 4) $\frac{x\square 2}{5}$; 5) $\frac{1}{3\square a}$; 6) x^2; 7) $-x^4$; 8) $-b^4$; 9) $c^2(c-1)$. 28. 5) $\frac{40x}{15x^2y^2}$; 7) $\frac{a^2}{a^2\square 2a}$. 29. 1) $y-b$; 2) $x+a$; 3) $x+y$; 4) $b-3c$. 30. 3) $\frac{n^2\square 1}{n}$; 6) $-\frac{2x^2}{(1+x)^2}$. 31. 1) a^2-b^2; 4) $(c+2)^2$. 33. 4) x^8x^0; 5) $x^{10}x^{-2}$. 34. $n=11$. 35. $n=52$. 36. $a=348$. 45. 1) $(a+b)^2+(a-b)^2$. 48. $(a+b)^3-(a-b)^3$. 49. $a=2$; $b=-7$; $c=-5$. 50. 1) x^6+1. 52. 2) $\frac{a^2+3}{a-1}$; 4) $\frac{a-b}{a+b}$. 53. 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$. 54. 1) $\frac{1}{a^2\square a\ \square 1}$; 4) $\frac{1}{2\square p}$; 8) 0. 55. $\frac{20}{3}$; 4) 5.

I боб

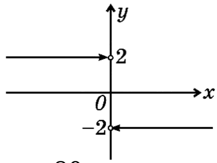
59. 1) 8; 2) 5; 3) 6; 4) 10; 9) 0.7; 10) 1,5. 60. 2) 50; 7) 2,5; 10) 1,4. 62. 3) йўк; 4) бор. 63. 2) 35; 5) 3. 64. 1) 4; 2) 8; 3) 0,39; 4) 5. 65. 1) □8; 2) □5; 3) □0,3; 4) $\square\sqrt{3}$. 66. 1) 4; 4) 1,44; 9) 1,5. 67. 3) 5; 6) 21; 8) $\frac{1}{3}$. 68. 1) $x\geqslant 0$; 5) $x\geqslant 0$; 8) $x=0$. 69. 3) 9; 4) 0. 70. 5) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; 8) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$. 71. 4) $\square\frac{\sqrt{19}}{2}$; 6) $\square\sqrt{1,5}$. 72. 2) 0,5; 6) 7. 73. 1) a; 2) $2x$. 74. 1) $|x-2|$; 3)$1-a$; 6) $|-b-6|$. 75. 3) $2\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{3}\,\square 1$; 8) $a\sqrt{a}\,\square a$. 77. 1) $x\geqslant 5$; 4) $x>3$. 78. 2) $\left(b-\sqrt{2c}\right)\left(b+\sqrt{2c}\right)$; 3). $\left(\sqrt{13}-\sqrt{12x}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{12x}\right)$ 79. 1) 2; 4) −37. 80. 1) $x\geqslant 1$; 2) $a\leqslant 3$; 3) $y\square(-\square;\ +\square)$. 81. 1) $\sqrt{a}\,\square\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2x}\,\square\sqrt{5}$. 82. 1) $3-x^2$; 2) $-m^2$. 83. 1) a^2; 2) x^2; 3) y^3; 4) $-m^3$. 84.195 тг, 145 тг.

2-§. 85. +3) $0,8<a<0,9$; $0,83<a<0,84$. 86. $(2,6)^2<7<(2,7)^2$; 88. 3) 0,02; 0,6; 0,2. 89. 2) 0,01; 4) 8,15. 90. 1) $\square\frac{1}{12}$; 3) $\frac{8}{3}$. 91. 2) −0,5(3); 10,28(0); −17,(0); 0,1875(0). 92. 3) $10,21(4)=\frac{9193}{900}$; $-2,1(12)=\square 2\frac{37}{330}$; 4) $0,(312)=\frac{104}{333}$. 93. 1) $\sqrt{2112}\,\square 45,9565$; 4) $\sqrt{0,28452}\,\square 0,5334$. 94. 1) □0,9. 95. Мумкин эмас. 96. Мумкин, масалан, $1-\sqrt{2}$ ва $\sqrt{2}$. 100. 1) 0,(6); 3) 10. 103. Агар $\frac{m}{n}$ ва $\frac{k}{p}$ берилган кискармас касрлар бўлса, у холда; 1) $mp+kn=lnp$; 2) $mp-nk=lnp$; 3) $m=l_1p$; $k=l_2n$. 104. 1) $mp+kn=mk$. 105. 1) □5,3; 2) 11,18. 108. 1) 4,92; 2) 1,95; 3) 22,72; 4) 0,85. 113. 1) A ётади; 2) B ётади; 3) C ётмайди.

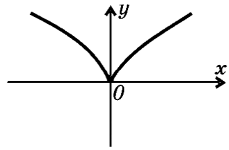
3-§. 116. 1) 3,5; 2) 16,5; 3) 3,6; 4) 4,7. 117. 2) $|x+1|<3,5$; 3) $|x+4,5|\leqslant 0,2$. 118. $AB=12$; $AC=9$; $BC=3$. 119. 2) $(-\square;\ 3)$; 4) $[-3;\ 3]$; 6) $(-\square;\ 11]$; 7) $(-5;\ 0]$. 120. 1) $x\geqslant 2$; 3) $-2<x<0$; 5) $x\leqslant 5$; 8) $-2<x\leqslant 1$. 121. 3) 8; 4) 10; 5) 15; 6) 34. 122. 1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 11; 5) 16; 6) 46. 128. 1) □ 0,75; 2) □1,32. 130. 1) $(7;\ +\square)$; 3) $[0;\ 4)$; 6) □. 131. 2) $(-2;\ +\square)$;



79-расм



80-расм



81-расм

4) $(-\square;\ 15]$; 6) $(-3;\ 0]\square[5;\ +\square)$, яъни $\square$. 132. 3) $8\ \square\sqrt{67}\ \square 9$; 5) $14\ \square\sqrt{222}\ \square 15$. 134. 79-расм. $OA=a$, $OB=OC=1$, $OD : OB = OC : AC \Rightarrow OD = \frac{1}{a}$. 136. 3) $x\square[0;\ 6]$; 4) $x\square[-\square;\ -6]\square(2;\ +\square)$. 137. 1) $(-2;\ 1)$; 2) $[-\square;\ 2]\square[5;\ +\square)$; 3) $[0;\ 6]$. 139. 1) $[1;\ 5]$; 2) $[-5;\ -1]$; 3) $(2;\ 8)$; 4) $(-2;\ -1)$. 140. 1) 30 мин; 2) 15 мин;3) 20 мин. 4) 3 мин. 141. 0,6 кг. 142. 1) $\frac{10}{14}$ $\square$энг кичиги; $\frac{8}{9}$ $\square$энг каттаси.143. 1) 25; 2) 10; 3) $\frac{34}{3}$; 4) $\frac{152}{7}$. 144. $x\square[-8;\ 0]$.

4-§.145. 1) 88; 2) 4,2; 5) 9; 6) 0,24. 146. 1) 180; 2) 30; 3) 48; 4) 60; 5) 6; 6) 42; 7) 24; 8) 32. 147. 2) 12; 5) 12; 8) 1. 148. 3) 9; 7) 26; 8) 5. 149. 2) $7\sqrt{2}$;6) $15\sqrt{3}$; 9) $8\sqrt{6}$; 12) $2\sqrt{3}$. 150. 1) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{2}$; 10) $\sqrt{15}$; 12) $\sqrt{7}$. 151. 3) $3\sqrt{2}$; 6) 2. 152. 2) $\sqrt{27}\ \square 4\sqrt{3}$; 4) $7\sqrt{2}\ \square\sqrt{72}$. 153. 1) $4x$; 3) $1{,}2ax^3$. 154. 1) 5; 2) 9; 3) 3; 4) 3. 155. 1) $(-\square;\ +\square)$; 6) $x\geqslant 0$; 8) $[0;\ 1)\square(1;\ +\square)$. 156. 3) $\sqrt{0{,}1}\ \square\sqrt{0{,}01}$; 7) $3{,}2\ \square\sqrt{9{,}8}$. 157. 1) 8,5; 2) $\frac{7}{96}$; 3) $\frac{15}{29}$; 4) $\frac{77}{135}$. 158. 1) 9,1; 2) 1,08. 159. 3) $x\geqslant 0$; 4) $c\leqslant 0$. 160. 1) 1; 2) 4; 3) 3; 4) 1. 161. 1) $8a^5b^3$; 3) $\frac{1}{b}$. 162. 1) $|a|\sqrt{15}$; 3) $\square c\sqrt{\square 3c}$; 6) $3a|a|\sqrt{2b}$; 8) $\square m^3\sqrt{\square 5m}$. 163. 2) $\sqrt{ab^3}$; 4) $\square\sqrt{5x^4}$; 5) $\sqrt{\square 2x}$. 165. 3) $8\sqrt{0{,}2}\ \square 0{,}4\sqrt{250}\ \ \square\sqrt{41}$. 166. 1) $a\sqrt{b}\ \square b\sqrt{a}$; 3) $2x+y+3\sqrt{xy}$. 167. 2) $m\sqrt{m}\ \square n\sqrt{n}$; 4) $x^3\ \square y\sqrt{y}$.

168. 1) 4; 2) 10; 3) $4\sqrt{30}$; 4) 8. 169. 3) $\sqrt{2}\,\square\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{2,5}$; 7) $\sqrt{2}$; 9) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$. 170. 6) $\frac{a\sqrt{b}+b}{ab}$; 10) $0,25\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$.

171. 2) $\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^5+1}{\sqrt{2x}+1}$. 172. 2) 80-расм. 174. 1) *n*. 175. 1) 1; 2) 2. 176. *a*. 177. $0,5\left(\sqrt{-2a}+\sqrt{2-2a}\right)$. 178. 2) $\sqrt{3}\,\square\sqrt{2}$. 180. 2) 10; 3) −6. 181. 9. 182. *ab*=1. 183. 1) 0; 8; 2) □0,5; 3) □.

5-§.188. 5 см. 189. 1) *OA*=5; 2) *BC*=5; 3) *ED*=7; 4) *MN*=10. 190. 1) *c*=13 см. 2) *b*=4 м; 3) *a*=24 м. 193. 1) *a*=4; 2) *a*=5; 3) *a*=5; 4) *a*=$\sqrt{7}$. 194. [1; 2]. 195. 1) 25; 2) 121; 3) 7; 4) 12. 197. 25 м. 198. *AB*=5, *AC*=$\sqrt{26}$; *BC*=$\sqrt{41}$. 199. *AB*=$\sqrt{10}$, *AC*=$\sqrt{50}$, *BC*=$\sqrt{40}$ □$AC^2=AB^2+BC^2$. 200. 12 см. 201. −5; 11. 202. 1) [0; 16]; 2) [0; 0016; 1]; 3) [625; 50625]. 203. 3) 81-расм. 204. 3) $\frac{1}{3}$. 206. 1) −2,4; 2) 2,7. 207. 1) $x\leqslant\frac{4}{3}$; 2) $y>5$; 3) [0; 25)(25; +□); 4) [0; +□). 208. 2км/соат. 209. $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$. 210. 1) 3; 2) 1; 3) $\sqrt{3}\,\square 1$; 4) $2\,\square\sqrt{2}$. 211. 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+3-\sqrt{6}\right)$; 6) $\left(n+\sqrt{m}\right)\left(m+\sqrt{n}\right)$. 212. 1) $x\leqslant 0$; 2) (−□; +□); 3) □; 4) $m\leqslant 0,5$; 5) (−□; +□); 6) $a\leqslant 5$. 213. 1) 128; 2) 108; 4) $1\frac{4}{7}$. 214. 3) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; 4)1. 215. 1) $8\sqrt{3}$; 2) $8a^2\sqrt{a}$; 3) $4\sqrt{10}$; 4) $2\sqrt{2}$. 216. 1) 5; 2) 1. 217. 1) $\sqrt{6}\,\square 1$; 2) $\sqrt{6}\,\square 1$; 3) $\sqrt{3}\,\square\sqrt{2}$; 4) $2\,\square\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{5}\,\square 2$; 6) $2\left(\sqrt{5}+1\right)$. 218. 1) $\sqrt{x}\,\square 3\ \ \square 2$. 219. 2) $3+\sqrt{5+\sqrt{8}}<2+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

220. 1) $\sqrt{2x^3y}$. 221. 2) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 222. 1) 6; 2) 10. 223. 3) $\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}-5\right)$; 4) $\left(\sqrt{y}-1\right)\left(2\sqrt{y}+3\right)$. 227.1) 11; 2) 2,2. 228. 1) 7; 2) 9. 229. 1) $\frac{m^2\,\square n^2}{2mn}$; 2) $\frac{m^2n^2\,\square 1}{2mn}$.

II боб

1-§. 231. 5) $b=0$; 6) $b=c=0$. 232. 3) $x^2-8x=0$; 6) $4x^2-5x+1=0$. 233. 2) $x^2+20x+4=0$. 234. 1) □8; 4) $\square\sqrt{3}$; 6) □5; 8) $\square\frac{4}{3}$. 235. 2) 0; −1,4; 5) 0; 4. 236. 1) □; 2) □2; 3) 0; 4) 0; $\frac{1}{3}$; 5) □; 6) □. 237. 3) 0; 1,2; 4) $\square\sqrt{3}$; 8) 0; −2. 238. 2) $5x^2+2x=0$; 5) $x^2-72x+27=0$. 239. 1) □5; 2) $\square\frac{5}{6}$; 3) □0,6; 6) □1. 240. 1) 0; $\square\frac{14}{9}$; 2) 0; $\frac{19}{7}$; 3) 0; $\frac{20}{17}$; 4) 0; $\frac{1}{48}$. 241. 1) −5; 9; 2) $\square\frac{7}{3}$; $\square\frac{2}{3}$. 3) $\square\frac{5}{3}$; −0,5; 4) −1; $\frac{1}{3}$. 242. 1) 0; −17; 2) 0; −4. 243. 0; 2. 244. 2; 3. 245. 3 м, 15 м. 246. 12 см; 60 см. 247. 1) □2; 2) □4; 3) □4; 4) $-2\pm\sqrt{6}$. 248. 1) 0; □3; 3) 0; □0,8; 4) 0; 1; 6) 0; 3. 249. 1) 0; □5; 2) 1; 3) $\square\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\square\frac{4}{3}$; 6) □. 250. 1) 0; 5; 2) 2. 251. 1) $ax^2+bx=0$; 2) $ax^2+c=0$, $(ac<0)$; 3) $ax^2=0$. 253. 1) −3; 2) □3. 254. 1 соат. 255. 3) $\square 2\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{17}\,\square\sqrt{8}}{3}$. 256. 1) 4; 2) −4; 3) 1. 257. $\begin{cases} y < x+2, \\ y > -0,5x+2. \end{cases}$

2-§. 258. 1) 2; 3; 6) −0,2; 2; 7) −4; 5; 8) $x^1=x^2=0,25$. 259. 2) −2; 12; 7) $x^1=x^2=1$. 260. 1) −1; −0,5; 2) □; 3) −0,5; 4) −6;1. 261. 1) $\square\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; 2) □; 3) −6; 2,5; 6) $\frac{5}{3}$; 7) $\frac{1}{9}$; 8) 19; −8. 262. 1) 2; $\frac{8}{3}$; 2) −10; 8; 3) −1; $\frac{37}{15}$; 4) 0,2; 1; 5) 3,5; 5,5; 6) −1; 23. 263. 2) $5\,\square 5\sqrt{2}$; 4) −6; 14; 5) −9; 3. 264. 1) 0; 1; 2) 0; 9; 3) 0; $\frac{2}{3}$; 4) $\square\sqrt{1,5}$; 6) 1; 10. 265. 1) $x^2-3x-2=0$; 2) $x^2-9=0$; 3) $x^2+6x-40=0$; 4) $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$. 266. 1) −8; 3; 2) 1,75; 4; 3)

−91; 87; 4) −59; 53. 267. 1) 0,2; 0,4; 2) −7; 5; 3) −0,2; 1,8; 4) □; 5) 25; 6) −9; 3. 268. 1) 7; 2) −5; 2; 3) 0,6; 2; 4) $\square\frac{3}{4}$; 2,5. 269. 1) −0,6; −0,4; 2) $\square\frac{10}{3}$; −3; 3) $\frac{8}{3}$; 4; 4) $\square\frac{25}{11}$; −1. 270. $a=8$. 272. 1) $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2}$; 2) $\frac{1}{a}$; 2; 5) $\frac{a-b}{a+b}$; 1; 6) $\frac{b}{n}$; $\frac{a}{m}$. 273. 1) $\square\frac{m}{2}$; $\square\frac{m}{3}$; 2) $-2a$; $2b$; 3) $\square\frac{a}{7}$; $\frac{a}{8}$; 4) $\square\frac{b}{a}$; $\frac{a}{b}$; 5) $-c$; $\frac{b}{2}$; 6) $\frac{m}{m\square n}$; −1. 274. 1) $a=-22$; $a=-10$; 2) $a=2$. 275. $k=-18$; 276. 1) □2; □3; 2) □5; 3) □1; $\square\frac{1}{3}$; 4) □1. 277. 1) 2; 4; 2) 0,5; 1,25; 3) 0;2. 278. $n=5$. 280. $n=8$. 283. □6. 284. $\frac{1}{3}$; 3. 286. $28x^2-20x+1=0$. 287. $bx^2-2a\sqrt{ax}+a^2=0$; 289. 9. 290. 1) $x\geqslant 0$; 2) $x\square(-\square;+\square)$. 292. 1) 2; 3; 4) −1; 3; 6) −3; −9. 293. 2) 1; $\sqrt{2}$; 3) $3a$; $4a$; 5) $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$. 294. 1) $x^2+9x+14=0$; 4) $x^2-5x-24=0$; 9) $x^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)x-14=0$. 295. 2) $1\square\sqrt{10}$; 3) −2; −1,5. 296. 2) −1; −1,4; 4) −1; −3. 297. 4) $x^2-6x=0$; 9) $x^2-5=0$; 10) $x^2=0$. 298. 1) $x^2-6=0$; 2) $x^2-7=0$; 3) $x^2-4x-1=0$; 4) $x^2-6x+6=0$. 299. 1) (2; 2); 2) (−6; 8), (8; −6); 3) (−2; 5); (5; −2); 4) (−2; −3); (−3; −2); 5) (−6; 3); (3; −6); 6) (7; 8); (8; 7). 300. 1) 66; 2) −66; 3) −66; 4) 4354. 302. $r=\square 1$. 304. 1) $p=-2$; $q=-1$. 305. $p=0$. 307. 2) $m=-3$; 3) $m=-2$; 308. $a=-\frac{8}{25}$. 309. 1) $\square\frac{80}{3}$; 2) −3,75. 311. 14. 312. $\frac{2}{3}$. 313. −1. 314. 1) $p=q=0$; 2) $p=1$, $q=-6$. 315. $p=q=0$; $p=1$, $q=-2$. 317. $1{,}25\sqrt{17}$. 320. 10 см.

4-§. 323. $a=9$. 325. $0<c<2$. 326. 2) $(x-1)(2x-3)$; 8) $(x+11)(x-2)$; 12) $(x-1)(2x-5)$. 327. 1) $c<0{,}8$; 2) $c=0{,}8$; 3) $c>0{,}8$. 328. 1) $b=-\frac{13}{3}$; 2) $b\square(-\square;-4)\square(4;+\square)$; 3) $b=\square 4$; 4) $b\square(-4;4)$. 329. 5) $(8x+25)(x-3)$;

9) $\left(y=-\frac{7+\sqrt{33}}{8}\right)\left(y=-\frac{7-\sqrt{33}}{8}\right)$; 330. 2) $(2x+m)(3x+m)$; 4) $(x+1)((m-n)x-m)$. 331. 0. 332. 2. 333. □1; $\square\frac{2}{3}$. 334. k=1; 335. 1) 6; 10; 2) −2. 336. 3; 4. 338. 1) □12; 3) $\frac{10\square 2\sqrt{70}}{9}$. 339. 1) 0,5; 1; 2) 3; 7; 3) 0; 4) $\frac{-21\pm\sqrt{297}}{18}$. 340. 1) (−3; 2); 2) (4; 5). 341. 2) $x^2-12=0$; 5) $x^2-x-1=0$.

5-§.342. 1) 0;1; 2) 1; 3) 1; −0,5; 5) −0,2; 6) 3; 7) 1,5; 8) $\frac{2}{11}$. 343. 2) −3; 7; 3) 12; 6) −4,5. 344. 1) (2,5; 0); 2) (4; 0); (5; 0); 3) (3; 0); 4) (0; 0), (4; 0). 345. 1) (−3,5; −4), (7; 17). 347. 4) 5. 348. 1) 2; 2) 1; 3) 3;4) 5; 5) −1; 0,2; 6) 2; 4. 349. 1) $\frac{-3a\pm a\sqrt{3}}{2}$; 4) $\square\frac{b}{6}$; $\frac{b}{2}$; 6) −1; $\frac{n+1}{n-1}$. 350. 3) 0; 4) 1; $\frac{2}{3}$. 351. 36 км/соат; 32 км/соат; 352. 21. 353. 450м3. 354. 13. 355. 4 км/соат.356. 40 км/соат. 357. 3 соат. 358. 5 км/соат. 359. 800 км/соат, 600 км/соат. 360. 42 соат, 56 соат. 361. 28 кун, 21кун. 362. 18 соат, 24 соат. 363. 10 м/с; 70 м. 364. 72 га, 60 га; 108 га; 120 га. 365. 25 кг. 366. 5 км/соат. 367. $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$. 369. 1) (1; −1); 2) (2; 1). 370. 1) $\sqrt{3}\,\square\sqrt{2}$; 2) $2\,\square 3\sqrt{5}$.

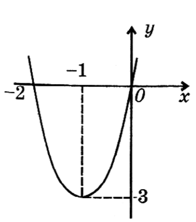
6-§. 371. 1) 3; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 2; 6) 1; 7) 8; 8) 3. 372. 1) (2; −5); 2) (7; 5), (−5; 7); 3) □; 4) $\left(\sqrt{2,5};2-\sqrt{2,5}\right)$; $\left(-\sqrt{2,5};2+\sqrt{2,5}\right)$. 373. 2) (6; 2), (−4; −3), 374. 1) $\left(-\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$, (2; 9). 375. 3) (□4; □7), (□7; □4). 376. 1) (4; 8), (8; 4). 377. 1) (2; 2). 378. 1) (4; 9), (9; 4). 379. 1) (□20; □5); 2) □. 380. 1) (1; 0), (0; 1); 3) (2; 0), (0; −2). 381. 2) (□1; □2), (□3,5; □0,5). 382. 2) (□8; □4),

(□7; □1). 383. 1) $(-1;\ -1)$, $(-1;\ 2)$; $(2;\ -1)$. 384. 1) $|x|\geqslant 6$; 2) $|x|\leqslant 6$. 385. 2) 5; −8; 4) −2; 2,75. 386. 3) $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 5) $1-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$. 387. 2) −1,75; 1. 388. 1) $-c$; $2c$; 2) $-6a$; a; 3) $\frac{1}{a}$; 1; 4) $\frac{1-a}{1+a}$; 1;. 389. 1) $a=-b$ ёки $a=4b$. 390. $\frac{a}{b}$ □$\frac{1}{3}$ ёки $\frac{a}{b}$ □3. 392. 3) $\pm 2\sqrt{2}$; $-1\pm\sqrt{3}$; 4) 1; $1\frac{2}{3}$;□1; $2\frac{1}{3}$. 393. 2) −2; 4) −8. 395.$a=-1$. 396. $k=3$ ёки $k=4$. 397. 5%. 398. 32 ўкувчи. 399. 1) −4; 3. 400. 1) (□2; −1); 2) (□1; □1).

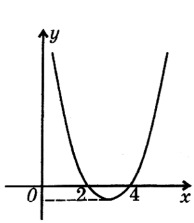
III боб

1-§. 403. 1) 9; 2) 2; 3) −1; 4) 2; 5) 5. 404. 3) $(-1;\ 0)$; $(2;\ 0)$; 4) $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};1\right)$; 5) Бундай нуқта мавжуд эмас. 407. 1) 82-расм; 4) 83-расм. 409. 2) x^2-4x+3; 3) $-x^2-6x-5$. 410. 1) $2x^2+1$; 3) $-x^2+4x$. 411. p□(−1; 1). 412. $a=1$. 415. 2) 84-расм. 416. $a=3$; 419. (□1; □2). 420. 2) $-2<a<b>0$; 4) $\frac{3}{5}$ □$\frac{a}{b}$ □1.

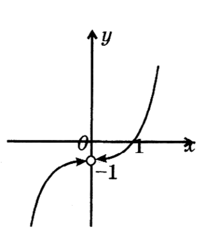
2-§. 424. 1) (5; 2); $x=5$; 2) (0; −1); $x=0$; 3) (−1; 3), $x=-1$; 4) (5; 0), $x=5$. 428. 1) $f(0)=1$ 2) $f(2)=-3$; 5) $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a-1}$. 429. 2) 54; 5) $(a-1)^3-10$. 431. 1) $x=0$, $x=-4$; 2) $x=-1$. 434. 1) (4; +□) 2) (−□; −1)□[1; 3) 3) [−1; 1]; 4 [−0,2; 1]. 435. 24. 436. 1) 7,5; 2) 1; 3) 1,5. 437. 2) 85-расм;



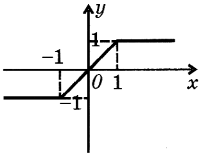
82-расм



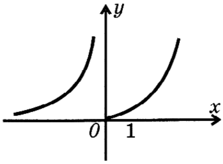
83-расм



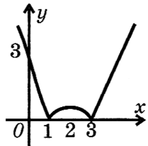
84-расм



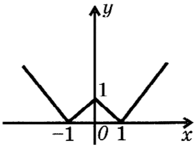
85-расм



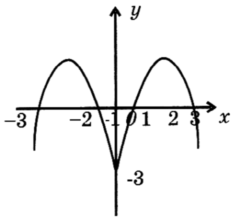
86-расм



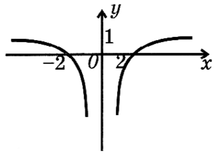
87-расм



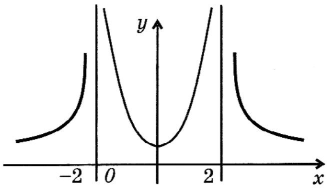
88-расм



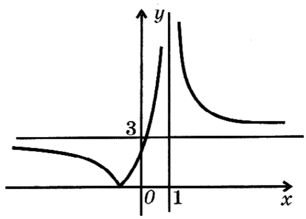
89-расм



90-расм



91-расм

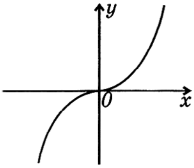


92-расм

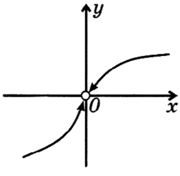
3) 86-расм. 438. 2) $y=2+\dfrac{5}{x-3}$; 4) $y=-2-\dfrac{3}{x-2}$. 439.2) $\left(\dfrac{1}{3};0\right)$, (0; 0,5); 3) (1,5; 0); 4) (0; 0). 440. $k=-5$; $y=2-\dfrac{5}{x-3}$. 441. −4. 442. 4) 87-расм; 443. 4) 88-расм; 444. 2) 89-расм. 445. 3) 90-расм. 446.3) 91-расм. 447. 3) 92-расм. 448. $P(x)=4x$.

449. $$S(x)=\begin{cases}\left(\sqrt{2a}-x\right)^2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \le x \le \sqrt{2a},\\ a^2-x^2, 0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}a.\end{cases}$$

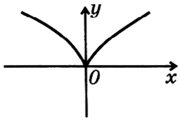
3-§. 450. 1) 1,5; 2) □3; 3) 1; −3,5; 4) 1; $□\dfrac{4}{3}$; 5) −1; 0; 6) −1; 2; 8) −6; 9) −6; 1. 451. 1) Узлуксиз; 3) $x\,□\dfrac{1}{3}$ узилшп нуктаси; 7) $x=-1$; $x=-2$ узилишнукталари; 8) $x=-2$; $x=4$ узилиш нукталари. 452. 1) (−□; +□) да ўсувчи;



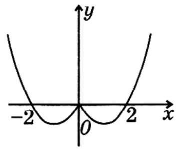
93-расм



94-расм

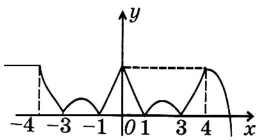


95-расм

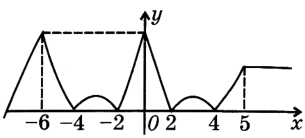


96-расм

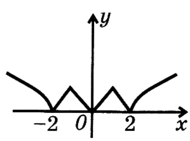
5) (−□; 0) да камаювчи; (0; +□) да ўсувчи. 453. 3) (−□;1) да камаювчи, (1; +□)да ўсувчи; 6) (−□; 1,5) да ўсувчи; (1,5; +□) да камаювчи. 454. 2) $y=ax^2$. 455. 1) x=1 минимум нуктаси; min$y$=5;3) x=−2 максимум нуқтаси; max$y$=3. 456. $f(4)=-1$; $f(2)=1$; $f(3)=0$; $f(5)=0$. 1) $f(2)=1$ энг катга қиймати; $f(3)=0$ энг кичик киймати; 3) $f(5)=0$ энг катта қиймати; $f(4)=-1$ энг кичик киймати; 4) $f(2)=1$ энг катта қиймати; $f(4)=1$ энг кичик қиймати. 457. 1) жуфт; 2) жуфт; 4) тоқ. 458. 3) (−□; 0)□(0; +□) − мусбат, (1; 2) − манфий оралиқ; 6) (0; 6) − мусбат, (−□; 0)□(6; +□) − манфий оралиқ. 460. 1) (−□; 0)□(0; +□) ўсувчи; 3) [6; +□) ўсувчи; 4) [0; +□) − камаювчи; 6) (−□; 0) − камаювчи; (0; +□) − ўсувчи. 462. 5) (−□; −5)□(−5; +□) − аниқланиш соҳаси; (−□; 2)□(2; +□) қийматлар сохаси; x=2 − ноли; x=−5 узилиш нуктаси; функция (−□; −5)□(−2; +□) оралиқда мусбат қийматлар, (−5; 2) − оралиқда манфий қийматлар қабуллайди. 464. 1) Камаювчи; 2) ўсувчи; 3) камаювчи; 4) ўсувчи. 465. 1) 0; 3; 2) $\frac{3\,□\sqrt{6}}{3}$ 3) 11; 4) 12; 5) 2; 6; 6) 0; −3; 7) 1; 8) −2; 0. 466. $f(-2)=-1$; $f(0)=-1$; $f(0{,}5)=0{,}5$; $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$; $f(1)=1$; $f(4)=1$. 469.2) [−3; +□); 4) [−4; 4]; 8) (−□; +□); 9) (−□; 1)□(1; 2)□(2; +□). 470. 1) жуфт; 5) тоқ. 471. 2) жуфт; 6) тоқ. 477. $f(x)=x\cdot|x|$,(93-расм); 4) $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$, (94-расм). 478.1) $f(x)=\sqrt{|x|}$, (95-расм); 3) $f(x)=x^2-2|x|$,(96-расм). 479. 97-расм. 480.98-расм. 481. 99-расм. 482. 100-расм.



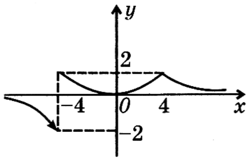
97-расм



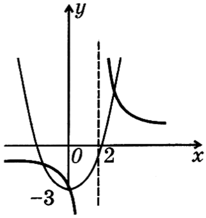
98-расм



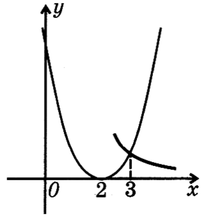
99-расм



100-расм

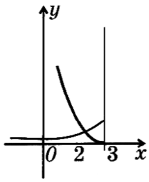


101-расм

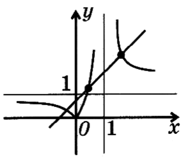


102-расм

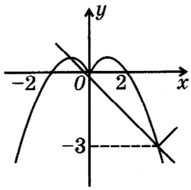
4-§. 483. 1) −2; 8; 4) $6 □\sqrt{7}$; 6) $2 □\sqrt{6}$. 484. 2) □; 4) 1; −6. 485. 1) (3; 1); 2) (2; 1). 486. 1) (−1; −1), (0,6; 0,6). 487. 2) 2; 0,5. 489. 3) 3 та илдиз бор. 101-расм. 490. 102-расм. 491. 103-расм. 1 та илдизибор. 492. 2) 104-расм. 3 та илдизи бор. 493. 3) 3 та илдизи бор. 105-расм; 496. 106-расм. 497. 107-расм. 503. 3) 108-расм. 4)109-расм. 513. $\frac{5}{3}$ м; $\frac{8}{3}$ м; 3 м; $\frac{8}{3}$ м; $\frac{5}{3}$ м.



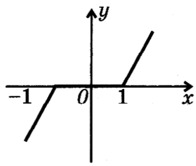
103-расм



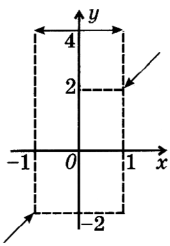
104-расм



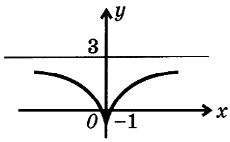
105-расм



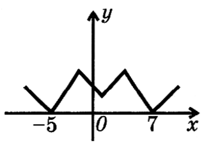
106-расм



107-расм



108-расм



109-расм

IVбоб

1-§. 515. 1) $a<b>4>0$; 3) $b<a>-12<0$. 516. 2) $a-2>b-2$; 6) $-10a<-10b$. 517. 3) $5<a+2<6$; 5) $1<5<a<2$. 518. 3) $-80<-10x<-50$; 4) $17<3x+2<26$. 522. 1) $\frac{1}{8}□\frac{1}{y}□\frac{1}{5}$. 525. 8) $\frac{1}{2}-\frac{c}{c^2+1}=\frac{(c-1)^2}{c^2+1}\geq 0$.

527. $a^2+b^2+2-2(a+b)=(a+1)^2+(b-1)^2 \geqslant 0$. 528. 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)<4$ бўлсин. $\Rightarrow (a+b)\frac{a+b}{ab}-4<0 \Rightarrow \frac{(a+b)^2-4ab}{ab}<0 \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}<$ зидлик $\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \geq 4$. 529. 4) $1-a=b+c \geq 2\sqrt{bc}$; $1-b \geq 2\sqrt{ac}$; $1-c \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$. 530. 5) $\sqrt{23}-\sqrt{11}=\frac{12}{\sqrt{23}+\sqrt{11}}<\frac{12}{\sqrt{22}+\sqrt{10}}=\sqrt{22}-\sqrt{10}$. 531. 2) $a^2+1=|x|^2+1 \geqslant 2\sqrt{|a|^2} \square 2|a|$. 533. $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=$ $=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}} \geq 0$. 537. $a+\frac{1}{2}>2(a \neq 1)$ ни қўллаш керак. 540. $\begin{cases} a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2<ab+ac \\ b^2<ab+bc \oplus \\ c^2<ac+bc \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$.

542. 1) (4; +□); 2) (17; +□). 543. 2 км/соат. 544. (−□; −12) □ (12; +□).

2-§. 545. 1) (−3; 3); 4) (−□; −0,4] □ [1,2; +□); 5) (−□; +□). 546. 3) (−□; −4) □ (0,2; +□); 6) (−□; −3,5] □ [0,6; +□). 547. 2) (−□; −1] □ [4; +□); 5) [−2; 3]. 548. 2) (−□; +□); 3) □; 5) [−3; −1,5]; 6) (−12; 5). 549. 1) 1, 2, 3, 4, 5; 2) −3, −2, −1, 0; 3) −2; −1; 0; 1; 2; 4) 0; □1; □2. 550. 3) [2; 5]; 4) [−0,75; 1,5]. 551. 3) [3; +□]; 4) (−□; 2) 5) (1; 3); 6) (1; 3). 552. 1) $\left(-7;-\frac{1}{4}\right)$; 3) (−□; +□). 553. 2) (5; +□); 3) [−1; +□). 554. 1) (−□; −2) □ (0,5; 2); 4) $\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right) \square \left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$. 555. 1) [−4; 4]; 2) (−□; −7] □ [9; +□); 3) (−□; +□), 4) [−9; 4]. 558. 1) (1; 5); 3) [−1; 0]. 559. 1) (1; 7); 2) $\left(\frac{-1-\sqrt{41}}{2};\frac{-1+\sqrt{41}}{2}\right)$. 560. 3) $\left[-\sqrt{3};1\right) \square \left(1;\sqrt{3}\right]$; 5) (−□; 3)

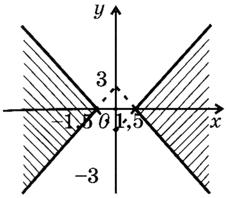
□ (−3; 0] □ [4; +□). 561. 1) (−2; 0);2) (0,75; +□); 3) □; 4) □; 5) [−5; 0]; 6) □. 562. 1) [0; 2]; 3) . 563. □. 564. □. 565. x□(−□; +□). 566. [4; +□). 567. 1) (−3; 1); 2) (1; 4). 568. 1) тенг кучли эмас; 2) тенг кучли. 569. 1) a□(−□; 0); 2) a□(−□; 4); 3) a□(0; +□); 4) a□(16; +□). 570. 1) a□$\left(-2\sqrt{7}; 2\sqrt{7}\right)$; 2) a□(−□; 4).

571. 1) (−□; −4) □ (4; +□); 2) (−□; 0) □ $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. 572. 1) (1; +□); 2) (−□; 3); 3) (+□; 0,75]; 4) $\left[-\frac{7}{3}; 4\right]$. 573. 1) □; 2) $\left[-\frac{53}{2}; \frac{7}{10}\right]$; 3) $\left[\frac{4}{7}; \frac{8}{3}\right]$; 574. 1) 2; 2) 6. 575. 22 ёки 76.

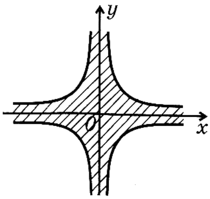
3-§. 576. 1) [−1; 1]; 4) (−□; −1] □ {0} □ (3; +□); 5) [−1; 6]. 577. 2) (−□; 2) □ (10; +□); 3) [−7; +□). 578. 1) [0; 3] □ [3; 6]; 4) (−4; 3). 579. 2) [−11; −5]; 3) (0; 6). 580. 1) (−2; −1) □ (2; +□); 4) (−1; 5; 0) □ (1; 2). 581. 2) (−1; 0,5); 4) (−1; 2). 582. 1) (−2; −1) □ □ (−1; 1) □ (3: +□); 4) [−2; −1] □ {0} □ [2; 3] □ (3; +□). 583. 2) (−7; −4] □ {2}; 3) (−□; −1) □ $\left(-1; -\frac{1}{3}\right]$ □ (1; +□). 584. 1) (−3; −2) □ $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; 4) (−□; 0,5] □ {1,5} □ (2,5; +□). 585. 2) (0; 1) □ (2; 4); 3) (−2; −1] □ (−1; 1) □ (5; +□). 586. 1) (−□; −1,5] □ (−1; 1) □ (4; 6); 4) $\left(-\infty; -\frac{3}{7}\right)$ □ (1; 3) □ (3; 5). 587. 2) (−□; +2) □ $\left(2; \frac{7}{3}\right)$ □ $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 3) x□−4; x□−3; x□−2. 588. 1) (−1; 5] □ {8}; 2) (−5; −4) □ (0; 2) □ (2; +□). 589. 2) (−□; −2] □ $\left(-2; 1-\sqrt{2}\right)$ □ $\left(1+\sqrt{2}; 2,5\right)$. 590. 2) [0; 0,5) □ (0,5; +□). 591. 1) 21; 2) −27. 592. 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. 593. [13; +□). 294. 1) (1; 2) □ (2; 7); 2) (−□; −1) □ (5; +□). 595. 1) [−0,5; 1) □ (1; + □); 2) (1,25; 2) □ (2; +□). 596. 1) (−9; 4) □ (4; 5); 2) (0; 0,5). 597. 1) (4; +□); 2) (−;□ −3) □ (3; 4]. 598. 1) (−5; 1) □ {2}. 599. (−□; −1] □ (1; 3]. 601. 1) (4; +□) 2) (−□; 0] □ [4; +□).

4-§. 602. 1) 7; 2) 2; 3) 3; 4) 5; 5) 2; 6) 3; 7) 3; 8) 4; 9) 9. 603. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+y^2=4$; 3) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$. 613. 3) Фигура $3x-2y+10\geqslant 0$; $3x+5y+17\geqslant 0$; $x-4y+10\geqslant 0$; $3x+2y+12\leqslant 0$; $4x-3y-16\leqslant 0$ тенгсизликлар системаси билан аниқланади. 614. 3) 110-расм. 615. 4) 111-расм.617. 2) 112-расм. 618. 1) (3; 8), (8; 3); 2) (□3; □4); 3) (8; 5), (−5; −8); 4) $\left(4 \pm 4\sqrt{2}; -4 \pm 4\sqrt{2}\right)$.

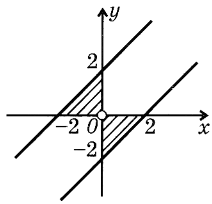
619. 1) (−□; 0,5); 2) (−□; −0,8); 3) (−□; 2).



110-расм

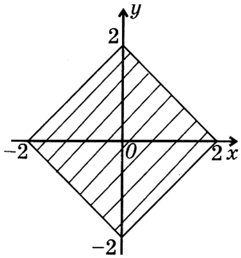


111-расм

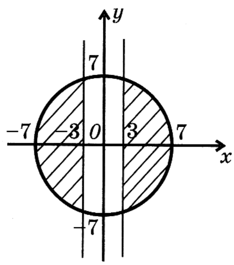


112-расм

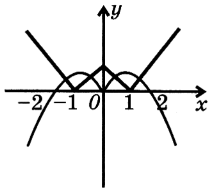
5-§. 622. n=50, $\overline{X}$=4,2; D=2,76; □(X)=1,66. M_0=□; M_1=3. 625. $\overline{X}$=5,15; D(X)=6,0275; □(X)=2,46; M_0=5; M_1=5,628. 628. P_4=0,4; x_4=4. 629. P_4=0,2; x_4=3. 630. n=5; $\overline{X}$=110; $D(X)$=16; □(X)=4. 631. n=25; $\overline{X}$=43,12; $D(X)$□6,5; □(X)□2,55. 632. n=25, $\overline{X}$=57,24; $D(X)$□1,7; □(X)□1,3. 633. x_1=1; x_2=2. 634. x_1=−13,8; x_2=6,7. 635. x_2=2; x_3=3. 636. 1) 1; $\frac{8}{3}$; 2) 1; −9. 637. 1) $\left[\frac{8}{3};+\infty\right]$; 2) $\left[-\infty;\frac{11}{17}\right]$; 5) (−1,5; +□); 6) $\left(-\frac{5}{3};+\infty\right)$. 638. 1) $\left|\sqrt{a}\right.$ □$\left.\sqrt{b}\right|$; 2) $\sqrt{x}$ □$\sqrt{2y}$. 639. Жуфтлари топилади: 6, 8, 10; тоқлари топилмайди. 640. 2) $-\frac{9}{5}\le\frac{3-4a}{5}\le\frac{7}{5}$. 649. $a+b+c=\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+c}{2}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$. 652. 1) (−□; −6)□ □(14; +□); 3) (0,5; 1,25). 654. (3; +□). 655. (0; 3)□(3; 4). 656. $a\leqslant 0$. 657. 2) (−2; 2)□(2; +□); 4) (−□; −3)□(−3; 1). 658. $a\leqslant 2$. 660. 1) (−0,5; 0,6); 3) (0,25; 1); 7) (3,6; 5); 9) (−1; 0]. 661. 1) [1; 6]; 2) (6; 9). 662. 1) x□(−□; −1)□$\left(\frac{5}{3};3\right)$□(3; 5); 2) x□(−□; −2)□ (−2; −1,5) □(−1,5; −1)□(−1; +□). 663. m□(−□; □$\frac{9}{16}$). 664. 1) 113-расм; 3) 114-расм. 665. 2) $\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ тенгсизликни қўллаш керак. 666. 2) [3; 6]; 4) [−1; 1,5]; 5) (−□; 10) 7) (2; +□).



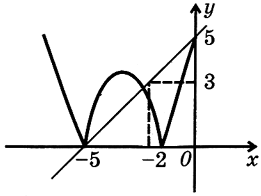
113-расм



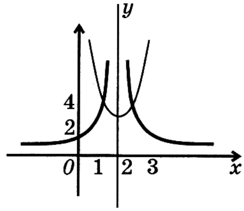
114-расм



115-расм



116-расм



117-расм

667. 1) (−1; 4); 4) [−2; 3]. 668. 3) (−□; 8)□(6; +□); 5) (−□; +□); 6) □. 669. $0<a<2$. 670. a□[3; +□]. 671. 1) $a<0$; 2) $a\geqslant 3{,}5$; 3) $a>0$; 4) $a\leqslant 9$. 672. 1) a□(−6; 6); 2) a□(−0,5; 1,5). 673. 1) $km=1$. 674. 1) 4 та ечими бор, 115-расм. 675. 1) 3 та ечими бор; (−5; 0); (0; 5); (−2; 3). 116-расм. 2) 2 та ечими бор: (1; 4); (3; 4), 117-расм.

Математикани чуқурлаштириб ўқитишга мўлжалланган қўшимча материаллар

Vбоб

1-§. 688. $10a+b=3a+3b \Rightarrow 7a=2b \Rightarrow a=2; b=7 \Rightarrow 27=\overline{ab}$. 689. 36. 690. 15; 24. 691. 3, 4, 5, 6, 7. 694. $67^8=(67^4)^2$ сони 1 билан тугалланади. 695. 360; 855. 698. 31, 43, 79,67, 83. 705. 240. 708. $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$ бўлсин, бунда p_1, p_2, ..., p_k- туб сонлар. a сонинининг хар бир бўлувчиси $p_1^{a_1}$□$p_2^{a_2}$.□$p_k^{a_k}$, ($a\leqslant$□$_1\leqslant n_i$,$i=1,2,\ldots,k$)кўринишда ёаилади. □$_1$ турли n_i+1кийматлар қабул қилади. У ҳолда, а сонининг турли $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$бўлувчилари мавжуд. 710. Агар a= $p_1^{n_1}$□$p_2^{n_2}$ бўлса, □$(a^2)=\tau\left(p_1^{2n_1}\cdot p_2^{2n_2}\right)=(2n_1+1)(2n_2+1)=81$. Шундай килиб, 81 ни икки кўпайтувчиларга ажратиш керак: $2n_1+1=1$; $2n_2+1=81$; $2n_1+1=3$; $2n_2+1=27$; $2n_1+1=9$; $2n_2+1=9$. n_2□0 бўлгани учун, $2n_1+1=1$ бўлиши мумкин эмас. У ҳолда $n_1=1$, $n_2=13$ ёки $n_1=4$, $n_2=4$. Шунинг учун □$(a^3)=\tau\left(p_1^{3n_1}\cdot p_2^{3n_2}\right)=$ $=(3n_1+1)(3n_2+1)=160$ ёки □$(a^3)=(3n_1+1)(3n_2+1)=13\cdot 13=169$. 712. $p=3$, $q=2$.

3-§. 718. 2) 15; 5) 4. 719. 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 33. 720. 1) 2; 2) 56; 3) 18; 4) 4. 726. 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) 0. 728. $3^3\cdot 37$. 730. 1) $a=55$, $b=65$; 2) $a=15$, $b=35$ ёки $a=35$, $b=15$; 3) $a=14$, $b=21$ ёки $a=21$, $b=14$; 4) $a=15$, $b=25$ ёки $a=25$, $b=15$; 5) $a=15$,

b=183 ёки a=183, b=15; 6) a=51, b=42; 7) a=28; b=32; 8) a=27, b=42; 9) a=65, b=78. 733. 3, 7, 9. 734. 5, 7, 11. 735. $(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1)$. 708-масалага қаранг. 736. $(n^2-2n+2)(n^2+2n+1)$.737. 29 м 25 см. 738. 1 соат. 739. а) 12 кун, жума; б) 15 кун, душанба; б) 20 кун, шанба; в) 60 кун, пайшанба.

4-§. 746. 1) 6; 2) 196; 3) 1920; 4) 31; 5)1478; 6) 2. 748. 2 марта. 749. 1) 19; 2) 4; 3) 10; 4) 60. 750. 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 100 м; 4) 200 м. 754. $N=kl+r$, $m=kp+r$ □ $n-m=k(l-p)$ K. 760. Соннинг квадартини 5га бўлганда 0,1, 4 қолдиқлари қолишидан фойдаланинг.

5-§. 764. 1) $x=3-40t$; $y=2-27t$, a□R; 7) □; 8) $x=71-449t$, $y=40-253t$. 765. 2) $(3-4t;\ -2-7t)$; 4) $(-4-3t;\ -2t)$. 766. 1) $(4+23t;\ 5-17t)$; 3) $(81-7t;\ 1+3t)$. 769. 1) (0; 0); (2; 2); 2) (3; 13); 3) □; 4) (0; 0), (0; −1), (−1; 0), (−1; −1); (5; 2). 770. $77n+59$. 771. 1) (4; 1), (4; −3); 2) (5; 2), (−1; −2); 3) (1; 4), (−3; 0); 4) (3; 0; 1), (3; 1; 1); 5) Агар $x=4$ □ $1!+2!+3!+4!=33$ тўлиқ квадрат эмас; Агар $x\geqslant 5$ □ $1!+2!+\ldots+x!$ сони 3 билан тугалланса, тўлиқ квадрат 3 га тугалланмайди (текширинг)! Шундай килиб, $x\leqslant 3$□$x=1$ ёки $x=3$□$y=1$ ёки $y=3$. Жавоби: (1,1); (3; 3). 772. 1951 й. 774. x тоқ ҳам, жуфт ҳам бўлмаслигини кўрсатинг. 776. □.

6-§. 779. 99 – «уйча», 100 – «куён» бор. Топилади. 781. 6. 782. n_1, n_2,…, n_{100} берилган сонлар бўлсин. n_1; n_1+n_2; $n_1+n_2+n_3$;…; $n_1+n_2+\ldots+n_{100}$ йиғиндини кўриб чиқамиз. Агар шу йиғиндилардан бири 100 га бўлинса, у ҳолда масала ечилади. Агар бирортаси ҳам бўлинмаса, у ҳолда 100 га бўлганда қолдиқлари бир хил бўлган иккита йиғинди топилади ва уларнинг айирмаси 100 га бўлинади. 783. Топилади, ҳатто 50 дан ошмайдиган ва бири иккинчисидан роппа-роса 2 мартакатта бўлмайдиган 33 та сон мавжуд. 784. $801=25\cdot 32+1$. 785. 2003; 20032003,…, $\underbrace{20032003\ldots2003}_{2004}$ сонларини кўриб чикинг. 786. 1; 11; 111;…; $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ сонларини кўриб чикинг. 787. 2004; 20042004;…; $\underbrace{20042004\ldots2004}_{2003}$ сонларини кўриб чикинг. 788. 3; 3^2; 3^3; …; 3^{10^m} сонларини кўриб чиқинг. □$3^n-3^m \vdots 10^4$□$3^m(3^{n-m}-1)=10^4\cdot K$,$(3^m,\ 10^4)=1$ бўлгани учун, $3^{n-m}-1=10^4\cdot l$ □ $3^{n-m}=10^4\cdot l+1$. 791. Бирлик квадратни томонлари $\frac{1}{5}$ га тенг бўлган 25 та кичкина квадратларга бўлинг.

I бобга доир қўшимча мисоллар

792. 1) $6\sqrt{5}\,\square 2$; 2) 39. 793. 1) $2+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}\,\square 1$; 3) $\sqrt{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right)$; 4) $1\,\square\sqrt{2}$. 794. 4) $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{8}}} < \sqrt{2}+1$. 795.4) $\sqrt{2}\,\square 1$. 797. $\sqrt{x}\,\square\sqrt{y}$. 799. $2m$. 800. 1. 801. $x+y$. 802. $\frac{a}{2}$. 803. 2. 804. $\frac{a\,\square b}{a}$. 805. −1.806. −54. 807. 144. 808. 1. 809. −5. 810. −1,2.

II бобга доир қўшимча мисоллар

7-§. 811. 3) $x^7-1=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x)+x-1$; $r(x)=x-1$ 815. $k=11$. 816. 1) $a=-30$; b=28; 2) $a=2$; $b=-1$.

8-§. 818. 1) 3; 1; 2) 1; −4; 3) 2; −5; 4) −6; 1; 5) 3; 6) 3. 819. 2) $(x+2)(x+10)$; 4) $(x+1)(x+3)$. 820. 1) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$; 3) $(x-1)(x^3+x^2+x+2)$. 821. 2) $(x-1)(x+3)(x+7)$; 4) $(x+1)(x+3)(x+5)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^2-7x-4)$. 822. 1) 2; 2) 1; −2; 3) −4; −1; 4) −1. 823. 2) $(x+2)(x-3)(x-5)$. 824. 1) $(x+1)(x+3)(x+5)$. 825. 1) 1; −2; 3; 2) 2; 2; −3.

Тенгламалар ва тенгламалар системасига доир қўшимча мисоллар

1-§. 828. 1) $(-\square;\ +\square)$; 6) $x\square 1$, $x\square 7$; 9) $(-\square;\ +\square)$. 829. 1) Тенг кучли; 4)тенг кучли эмас. 832. $a=1\ \square\ x=1$; $a\square 1\square x=\square$. 833.1)$x\square\ 1$;2)$x\square\ 3$;3)$x\square\ 1(a+b)$,$x\square\ (a-b)$;4)$x\square 0$,$x\square 2$; $x\neq\frac{7}{12}$; $x\neq\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$. 835. $x\square 0$=тенг кучли; агар $x\square 0$ тенг кучли эмас.

2-§. 837. 1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 2. 838. 1) −0,6; 2) 3; 3) −0,25; 4) 1.839. 1) 4; 2) 5; 3) $\frac{25}{7}$. 840. 1) 1; 2) $\square\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) 4; 4) 5. 841. 1) $\frac{b\,\square a}{8}$; 4) $\frac{an\,\square mc}{mn}$. 842. 2) Агар $x\square -b\square x=-b$ агар $a=-b\square x\square 0$ ихтиёрий сон;

4) агар $a\square b\square x=0$ агар $a=b\square x\square a$ ихтиёрий сон. 843. 1) −1. 844. 1) 2; 2) $\frac{10}{7}$; 3) 1. 845. 1) агар $m=n=0$, у ҳолда $x\square 0$ ихтиёрий сон; $m=-n\square 0$, у ҳолда $x\square\ n$ ихтиёрий сон; агар $m=n\square 0$, у ҳолда $x\square\square$; агар $m\square -n$, $m\square n$, у ҳолда $x=\frac{m+n}{2}$. 846. 3)

агар b□0, a□ 5, у ҳолда $x=0{,}8ab$; агар $b=0$, a□ 5, у ҳолда x□□. 847. 3) агар $a=0$, у ҳолда x□0 ихтиёрий сон; агар a□0 у ҳолда $x=4a$. 848. 2) агар $a=b=0$, у ҳолда x□0 ихтиёрий сон; агар $a=b$□0, у ҳолда x□ b иҳтиёрий сон; агар a□b, a□0, b□0, у ҳолда $x=-b$. 849. 1) 0; 2) −8; 3) □0,875.

3-§. 850. 1) □1; □2. 4) □; 6) $\square\frac{2}{3}$. 851. 2) □; 5) □3; □a; 6) □2; □3a. 852. 1) 0; −1; −5; −6; 3) 4; −2. 853. 2) 1; □2; 4) −1; □2. 854. 1) −3; 1; 3) −2; −1. 855. 2) □; 4) −3; 2; 6) −6; 1. 856. 1) −3; 1; $-7 \pm \sqrt{61}$; 3) −4,5; 0,1; $\frac{8}{11}$; 2,4. 857. 1) $\square\frac{2}{3}$; ; 2) 0. 858. $x^4-5x^2+6=0$.

4-§. 859. 2) −3; $\square\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2; 4) −1; $\square\frac{1}{3}$; 3; 6) $1 \pm \sqrt{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$. 860. 1) $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ 3) $3 \square 2\sqrt{2}$; $2 \square\sqrt{3}$. 861. 2) $2 \square\sqrt{5}$; $\frac{1 \square\sqrt{17}}{2}$. 862. 2) 1; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$. 863. 1) 2; 1; $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

5-§. 865. 2) −3; −2; 5; 4) 1. 866. 1) −1; □2; 3) 1; □9. 867. 2) −1; 3; 4) $\square\frac{2}{3}$; ; 0,5. 868. 1) −4; −1; 2; 3) 0,5. 869. 2) $\frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$; 1; 4) −2; 1; 4. 870. 1) −0,25; 4) □5; −4; 0; 7. 871. 2) a=−2; 3; 1; −2; 4) $a=6$; −0,5; −2; −3. 872. 1) $-a$, $\frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$, $|x| \geqslant 2$; 2) $\frac{a \square b}{2}$; a; b.

6-§. 873. 1) 9; 3) 9; 5) □; 7) 1; 9) $\frac{1 \square\sqrt{5}}{2}$. 874. 2) 4; 4) 3; 6) 1. 875. 1) 7; 3) 1; 5; 5) 34. 876. 2) 25; 4) □1; 6) 4. 877. 1) 7; 3) 1; 5; 5) −1.878. 2) 3; 4) 1. 880. 1) 3; 2) 3; 3) 2; 4) □. 881. 1) $\frac{16}{25}$; 2) $x \geqslant -1$; 3) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; 4) □. 882. 1) 9; 2) 5; 3) □5. 883. 1) 0,25; 2) □; 3) 25, 34. 884. 1) −4; 1; 2) □1; 4; 885. 1) 5; 2) 0; 5.

7-§. 886. 1) □3; 3) −4; 7) □. 887. 2) □(a−1); 4) −1□a. 888. 1)

0; 3) 0,5. 889. 2) −5; 2; 4) $\frac{4}{3}$. 890. 1) −1; 3) −2; 8. 891. 2) $\frac{1}{3}$; 4) −3; 2. 892. 1) −5; 1; 3) 0,893. 2) 3; $-2+\sqrt{5}$; 4) 3,2. 894. 1) 1,5; 4,25; 3) −8; 2. 895. 2) 1; $\sqrt{3}$; 4) −6; 7. 896. 1) □2; 3) □0,5. 897. 2) 3; 4) 2; $\sqrt{6}$.

8-§. 898. 1) 0; 2) $\frac{1}{3}$; 3) −1,25. 899. 1) −19; 2) −2,5: 3) −4. 900. 3,5. 901. 1) −2,5; 2) 8. 902. 1) 1; 2) □1; 3) 4; 12; 4) 0,2. 903. m=7 □ (5; 2,5); m=10 □ (7; 3,5). 904. k=4. 905. p=q=0; p=1, q=−2. 906. 1) m=−2 ёки m=$\frac{33}{8}$; 2) m=−4; ёки m=□$\frac{4}{11}$. 907. m=3. 908. 1) 3; 2) 2; 3) −6. 909. (0; 0), (0; −1). 910. (−1; −3; 4); m_1=3; m_2=−2. 911. a=b=c. 913. a=52. b=−40. 914. a=−1.

9-§. 915. 1) (3; 4); (4; 3); 3) (1; −1), (4; −10); 5) (3; −5); (−6; 22); 7) (3; 1); (−1; −3); 9) (2; 3), (1,5; 4). 916. 2) (□5; 0); 4) (□3; 4); 6) (−2; −4). $\left(\frac{5}{8};\frac{10}{3}\right)$. 917. 1) (1; 4); (4; 1); 3) $\left(\pm3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $\left(\pm3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$; 5) (1; 2); (2; 1). 918. 2) (1; 2); (2;1); 4) (9; 12); (−12; −9). 919. 1) (1; 3); (3; 1); 3) (1; 2; 3). 920. 1) (□2,5; □6; □4); 2) (□2; □4; □6); 3) (108; 92).

10-§. 921. (18; 12), (−12; −18). 922. 32 ва 23. 923. 21 м, 20 м. 924. 53, 23, 20. 925. 15481 м^2. 926. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot c$; $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot c$. 927. 60 км/соат; 80 км/соат. 928. 45 км/соат; 60 км/соат. 929. 5 км/соат. 930. 375 сек. 931. 60 соат, 84 соат. 932. 20 мин, 30 мин. 933. 47.

III бобга доир қўшимча мисоллар

935. p=−2, q=4. 936. 1) $y=-1{,}5x^2-6x-2$; 2) $y=-8x^2+8x+2$. 937. a=2; b=−4; c=−6. 938. c=6. 939. c=−5. 940. k=1□$y=2x^2-3x+1$. 941.1) $y=\frac{(x-1)^2}{8}$; $y=\frac{(x+1)^2+12}{4}$. 942. m□(1,5; +□). 943. 1) $\frac{4}{25}$; 2) 65; 3) 4097. 944. 1) −6,375; 2) 0,65; 3) −0,825. 948.

$(-\square; -3)\square(-1{,}5; 0)\square(1{,}5; 3)$. 949. $\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}; 2\right)\square\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$.

952. 1) $(-4; -3)$; $(2; 3)$; 2) $(-1; 4)$; $(-0{,}5; 2{,}5)$; 3) $(1; 1)$; $(-0{,}5; 2{,}5)$; 4) $(0; -1)$; $(1; 0)$.

IVбобга доир қўшимча мисоллар

963. $2a+2b+2a-2\sqrt{ab}-2\sqrt{ac}-2\sqrt{bc}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+$ $+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\geq 0$. 965. $mn\leqslant mnk, mk\leqslant mnk, nk\leqslant mnk\square mn+mk+nk\leqslant 3mnk$. 971. $D=(b^2+c^2-a^2)-4b^2c^2=a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)<0$. 978. 979-мисолда $2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{k}}<2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$ тенгсизликдан фойдаланинг. 984. $x+\dfrac{49}{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)^2-14+14=$ $=\left(\sqrt{x}-\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)^2+14\geq 14$. 987. Тенг кучли. 988. Тенг кучли эмас. 989. Тенг кучли эмас. 990. Тенг кучли. 991. $(-4; 2)$. 992. $[-3; -2]\square[1; +\square)$. 993. $[-0{,}25; 1]\square\{3\}$. 995. $[-1; 5]\square\{8\}$. 996. $(-5; -4)\square(0; 2)\square(2; +\square)$. 997. $(-4; -3)\square[-2{,}5; +\square)$. 998. $(-3; 2)$. 999. $\left(-\dfrac{7}{4}; \dfrac{\sqrt{617}-35}{8}\right)\square\left(-\dfrac{3}{4}; 1\right)$. 1000. $[-2; 2]\square\{3\}$. 1001. $(1; 5]$. 1002. $(-5; -3)$. 1003. $\square$. 1004. $(-\square; -2)\square(3; 5]$. 1005. $\{3\}\square(5; 7]$.

МУНДАРИЖА

Эслатма: Бу ерда (*) белгиси билан берилган мавзуларни ҳамма ўқувчилар ўзлаштиришлари шарт эмас. Уни иқтидорли ўқувчиларга алоҳида топшириқ сифатида бериш мумкин. Дарслик охирида фанни чуқурлаштириб ўқийдиган синфлар ва мактабларга мўлжалланган қўшимча материаллар келтирилган. Уни умумтаълим мактабларида иқтидорли ўқувчилар мустақил ўқиб, тайёрланишлари мумкин.

О қ у б а с ы л ы м ы

Шыныбеков Абдухали

А Л Г Е Б Р А

Жалпы білім беретін мектептің 8-сыныбына
арналған оқулық

Үшінші басылымы, өңделген

Редакторы *Сәндібек Жұбаниязов*

Техникалық редакторы *Зайра Бошанова*

Компьютерде беттеген *Нұргүл Сейдахметова*

Теруге ___.___.____ берілді. Басуға ___.___.___ қол қойылды.

Пішімі 84□108$^1/_{32}$. Офсеттік қағаз. Әріп түрі «Мектептік». Офсеттік басылыс. Шартты баспа табағы 15,12. Есептік баспа табағы 11,21. Таралымы 3300 дана. Тапсырыс №.