АЛГЕБРА
ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ

Умумтаълим мактабларнинг табиий-математик
йўналишидаги 11-синф учун дарслик

ИККИ ҚИСМЛИ

2-қисм

11

ӘОЖ 000
КБЖ 000

ФОЙДАЛАНИЛГАН ШАРТЛИ БЕЛГИЛАР:

– мавзунинг асосий материаллари бўйича саволлар

– тарихга назар

– амалий, татбиқий топшириқ

A – I даражали топшириқлар

B – II даражали топшириқлар

C – III даражали топшириқлар

✻ – ижодий ёки юқори мураккабликдаги мисоллар, маттематикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфлар учун материаллар

▲ – исботнинг ёки мисолни ечишнинг бошланиши

■ – исботнинг ёки мисолни ечишнинг оҳири

Алгебра ва анализ асослари: Умумтаълим мактабларининг табиий-математик йўналишидаги 11-синфлар учун дарсли, 2 қисмли. 2-қисм /

2020.

– 144 бет.

ISBN 000-000-000-00

ISBN 000-000-000-00

КИРИШ

Дарслик янгиланган таълим дастурига мос равишда умумтаълим мактабларининг табиий-математик йўналишидаги 11-синфи учун мўлжалланган. Вақтдан унумли фойдаланиш мақсадида онлайн ресурсларга (онлайн график калькулятор, таълим дастурлари) ҳаволалар берилди.

Чуқурлаштирилиб ўқитиладиган синфлар учун материаллар (*) белгиси билан белгиланган. Шу билан бир қаторда **C** гуруҳининг топшириқлари ҳам асосан математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфлар учун мўлжалланган. Бинобарин, математикани чуқур ўзлаштириб, қизиқиш билдирган ўқувчилар учун ҳам бу материалларнинг фойдаси катта. Чунки берилаётган **C** гуруҳининг материалларининг математик олимпиадалар ва бошқа мусобақаларга қатнашиб юрган ўқувчиларнинг билимини чуқурлатишга фойдаси катта.

Ушбу дарсликдан фойдаланиш давомида қуйидаги қоидаларга риоя қилган маъқул: ҳар бир бўлимнинг оҳирида ўтилган мавзуни мустаҳкамлаш мақсадида берилган топшириқларни бажариб бориш лозим. Ҳар бир ўқувчи **A** гуруҳи материаллари билан амалий топшириқларни тўлиқ ўзлаштиргандан кейингина **B** ва **C** гуруҳларининг мисолларига ўтиши мумкин. Ундан ташқари ҳар бир бўлим оҳиридаги назарий саволларга жавоб беришни кўникмага айлантирган маъқул.

Кўп изланиш, меҳнат билан талаб ўз натижасини бериши сўзсиз!

Онлайн график калькулятор билан (https://www.desmos.com/calculator) ишлаш

Desmos онлайн график калькулятори – функциянинг формуласидан фойдаланиб графикларни ясашга имконият берувчи онлайн сервис. Функциянинг графигини ясаш учун чап устунга мос функцияни ёзасиз. У ҳолда функциянинг графиги автоматик равишда ўнг томонда ясалади.

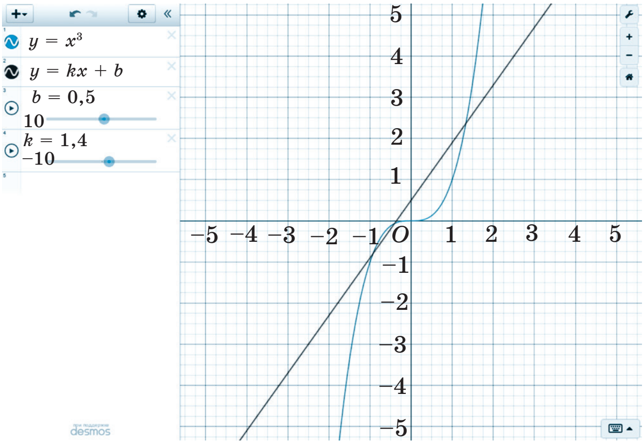


График калькулятор ёрдамида ишлашнинг тўла кўрсатмасини ушбу ҳаволадан бепул юклаб олиш мумкин:

https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_RU.pdf

VI бўлим. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

Миллий иқтисодиёт министрлигининг статистикасига суянсак, Қозоғистон аҳолисининг сони 2016 йилнинг бошида 17669896 киши, 2017 йилнинг оҳирида 17918214 киши бўлган. Логарифмик ва кўрсаткичли функциядан фойдаланиб, мамлакатимиздаги аҳоли сони тахминан қайси вақтда 20 миллиондан ортишини ушбу бўлимда баҳолашни ўрганасиз.

Сиз шу кунга қадар ҳам кўпгина функцияларни ўргандингиз. Энди фан ва кундалик ҳаётда кенг қўлланиладиган кўрсаткичли ва логарифмик функциялар билан танишишни бошлайсиз. Бу функциялар молия соҳасида, медицинада, табиий фанларда қўлланилади. Табиатдаги кўпгина жараёнларнинг математик модели шу фукциялар ва уларнинг ҳосиласи ва интеграли орқали ифодаланади.

Бўлимда ўрганиладиган мавзулар:

6.1. Кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги
6.2. Соннинг логарифми ва унинг хоссалари
6.3. Логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги
6.4. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи ва интеграли
6.5. Логарифмик функциянинг ҳосиласи

6.1 Кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги

Бу мавзуда кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги билан танишиб, оҳирида:

- Кўрсаткичли функциянинг таърифини биласиз ва унинг графигини ясай оласиз;
- *e* сонини, асоси *e* га тенг бўлган кўрсаткичли функциянинг хоссаларини биласиз, улардан амалий масалаларни ечишда фойдаланасиз;
- кўрсаткичли функциянинг хоссаларидан мисоллар ечишда фойдаланасиз.

6.1.1. Кўрсаткичли функциянинг таърифи

Бизга баъзида бир неча марта кўпайтириладиган сонлар билан ишлашга тўғри келади. Бундай ифодаларни белгилаш учун даража кўрсаткичидан фойдаланамиз. Масалан, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Даража кўрсаткичлари молия, муҳандислик, физика, электроника, биология ва информатика каби соҳаларда қўлланилади. Ушбу соҳаларда кўриладиган масалаларда даража кўрсаткичи вақтнинг ўзгаришига мос равишда ўсиши ёки камайиши мумкин бўлади. Бундай масалаларга экспонент ўсиш ёки парчаланишни мисол келтириш мумкин.

Шахмат ўйинининг асосчиси Сета исмли ихтирочи бўлган. Қадимда хинд подшосига ўйин жуда ёқиб қолади. Уни тақдирлаш мақсадида Сетани чақириб олиб, қандай совға олгиси келганини сўрайди. Шунда Сета шахмат тахтасидаги 64 квадратнинг биринчисига 1 дон, иккинчисига 2 та дон, учинчисига 4 та дон, тўртинчисига 8 та дон ва ҳоказо, яъни ҳар бир квадратга олдингисидан икки марта кўп дон беришни сўради. Дастлаб подшо Сетанинг бу «жуда содда» тилагига хайрон қолиб, уни бажаришга буйруқ бергани билан кейинроқ бу тилакни бажаришга ўз ҳазинасининг етмаслигига ишонч хосил қилиб, қаттиқ афсусланди.

Топшириқ:

1. Ҳар бир квадратдаги донлар сонини тавсифловчи функция мавжудми?
2. 40-квадратга келганда донларнинг сони нечта бўлади?
3. Прогрессиядан фойдаланиб, подшонинг совға сифатида бергиси келган донлар сонини топинг.

Даражали функция мавзусини ўзлаштирганда мусбат сонниг исталган ҳақиқий кўрсаткичли даражасини топайлик. Масалан, $2^{-\frac{1}{3}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; 2^0; $2^{-\frac{1}{4}}$; $2^{\sqrt{3}}$ ва ҳоказо сонлар маънога эга. У ҳолда 2 нинг ўзгарувчи x, $x \in (-\infty; +\infty)$ даражасини кўриб чиқиб, $y = 2^x$ функцияни оламиз. Буни асоси 2 га тенг бўлган ***кўрсаткичли функция*** деб аталади.

Таъриф. *Агар $a > 0$, $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда $y = a^x$ функция* ***асоси а га тенг бўлган кўрсаткичли функция*** *деб аталади. Бунда* $x \in (-\infty; +\infty)$.

Масалан, $y = 3^x$; $y = 10^x$; $y = 0{,}2^x$; $y = \dfrac{1}{2^x}$; $y = \sqrt{2}^{\,x}$ ва ҳоказо-кўрсаткичли функциялар. Таърифдаги $a > 0$, $a \neq 1$ шартлар жуда муҳим. Биринчидан, ҳақиқий кўрсаткичли даражалар фақат мусбат сонлар учун аниқланганлигидан, $a > 0$ бўлиши керак. Иккинчидан, агар $a=1$ деб олсак, ҳар бир $x \in (-\infty; +\infty)$ қийматда $y = a^x = 1^x = 1$, яъни функция x га боғлиқ бўлади. Баъзида бу ҳолда функция $y=1$ ўзгармас функция сифатида кўриб чиқилади.

6.1.2 Кўрсаткичли функциянинг хоссалари

Шундай қилиб, энди кўрсаткичли $y = a^x$ функция $a > 0$ ва $a \neq 1$ бўлганда аниқланган деб ҳисоблаймиз. Кўрсаткичли функциянинг қуйидаги хоссалари бор:

1°. *кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳаси:* $(-\infty; +\infty)$.

2°. $(0; +\infty)$ *тўплам-кўрсаткичли функциянинг қийматлар соҳаси, яъни* $a^x > 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$ *тенгсизлик бажарилади.*

3°. 1) *Агар $a > 1$ ва $x > 0$ бўлса, у ҳолда $a^x > 1$;*

2) *агар $a > 1$ ва $x < 0$ бўлса, у ҳолда $a^x < 1$;*

3) *агар $a < 1$ ва $x > 0$ бўлса, у ҳолда $a^x < 1$;*

4) *агар $a < 1$ ва $x < 0$ бўлса, у ҳолда $a^x > 1$;*

5) *агар $a > 0$ ва $x = 0$ бўлса, у ҳолда $a^0 = 1$.*

4°. *Агар $a >1$ бўлса, бўлса, у ҳолда $y = a^x$ кўрсаткичли функция ўсувчи, яъни $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар бир x_1 ва x_2 ҳақиқий сонлар учун $a^{x_1} < a^{x_2}$ тенгсизлик бажарилади.*

5°. *Агар $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда $y = a^x$ кўрсаткичли функция камаювчи, яъни $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар бир x_1 ва x_2 ҳақиқий сонлар учун $a^{x_1} > a^{x_2}$ тенгсизлик бажарилади.*

▲ **Исботи.** 1°. Бу хоссанинг исботи таърифдан келиб чиқади.

2°. Мусбат соннинг рационал кўрсаткичли даражаси мусбат бўлишини биламиз, яъни x рационал сон бўлганда $a^x > 0$ тенгсизлик бажарилади. Энди $a^x > 0$ тенгсизлик исталган иррационал x учун бажарилишини кўрсатамиз: $y = a^x = a^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$, ал $a \neq 0$ эканлигидан, $a^{\frac{x}{2}} \neq 0$. У ҳолда кўрсаткичли функция ҳамма вақт мусбат қиймат қабул қилади.

3°. 1) Агар $a > 1$ ва $x > 0$ бўлса, ҳақиқий кўрсаткичли даражанинг хоссасига кўра $a^x > 1^x = 1$.

2) Агар $a > 1$ ва $x < 0$ бўлса, $a^x < 1^x = 1$.

3) ва 4) пунктлар ҳам худди шу каби исботланади. 5) пунктлар ҳам худди шу каби исботланади.

4°. $a > 1$ ва $x_1 < x_2$ бўлсин. У ҳолда $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) > 0$, чунки $x_2 - x_1 > 0$ эканлигидан, $a^{x_2-x_1} - 1 > 0$. У ҳолда тенгсизликнинг таърифига кўра $a^{x_2} > a^{x_1}$.

5°. $0 < a < 1$ ва $x_1 < x_2$ бўлсин. У ҳолда $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) < 0$. Чунки $a^{x_1} > 0$. $x_2 - x_1 > 0$ ва $0 < a < 1$, бундан $a^{x_2-x_1} < 1$.

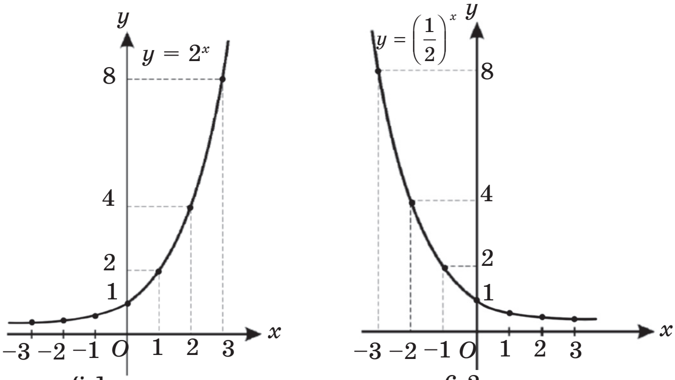
Хоссалар тўлиқ исботланди. ■

6.1.3 Кўрсаткичли функциянинг графиги

Аввал жадваллар ёрдамида $y = 2^x$ ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графикларини ясаб кўрамиз:

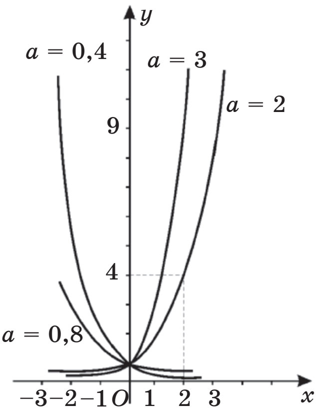
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Топилган нуқталарни координаталар текислигида тасвирлаб, чизиқларни бирлаштирсак, $y = 2^x$ (6.1-расм) ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (6.2-расм) функцияларнинг графикларини оламиз.



6.1-расм 6.2-расм

Даражанинг хоссасига кўра $1 < a < b$ ҳолда агар $x > 0$ бўлса, $a^x < b^x$ тенгсизлик; агар $x < 0$ бўлса, $a^x > b^x$ тенгсизлик бажарилади. Аксинча



6.3-расм

$$0 < a < b < 1$$

ҳолда, агар $x > 0$ бўлса, $a^x < b^x$ тенгсизлик; агар $x < 0$ бўлса, $a^x > b^x$ тенгсизлик бажарилади. У ҳолда, a асоси 1 дан қанчалик катта бўлган сайин $y = a^x$ кўрсаткичли функция шунчалик «тезроқ» ўсади. a асос 1 дан қанчалик кичик бўлган сайин $y = a^x$ кўрсаткичли функция шунчалик «тезроқ» камаяди.

6.3-расмда асослари $a = 0{,}8$; $a = 0{,}4$; $a = 3$; $a = 2$ бўлган кўрсаткичли функцияларнинг графиклари кўрсатилган.

6.1.4. *e* сони. Асоси *e* га тенг бўлган кўрсаткичли функция

Фанда, муҳандислик соҳасида ва амалий масалаларда асоси $e \approx 2{,}7183$ сони бўлган кўрсаткичли функция кенг фойдаланилади. e – математикада ўзига хос сон, у π сони каби иррационал сон. π сонининг маъноси-айлана узунлигининг унинг диаметрига нисбати эканини биламиз. Худди шундай e сонининг ҳам математик маъноси бор.

Амалий топшириқ

Узлуксиз фоиз билан депозитга солинган пулга ўсими билан бирга ҳисобланган пулнинг миқдори ушбу формула билан ҳисобланади: $u_n = u_0(1 + i)^n$, бунда u_n – оҳирги сумма, u_0 – дастлаб депозитга солинган сумма, i – чекланган муддатдаги фоизлардаги ўсим, n – муддат сони. Бир нечта муддатдан кейин тўпланган оҳирги суммани баҳолайлик.

Аввал ушбу содда мисолни ечинг:

Йиллик фоизлардаги ўсими 10% га тенг депозитга бир йилга 100000 тенге солинди. Калькулятордан фойдаланиб, оҳирги суммани ҳисобланг ва жавобларингизни асосланг:

1) йилига ($n = 1$, $i = 10\% = 0{,}1$);

2) чорак сайин ($n = 4$, $i = \frac{10\%}{4} = 0{,}025$);

3) ойига; 4) ҳар куни; 5) ҳар секундда; 6) ҳар миллисекундда.

Агар i – йиллик фоизлардаги ўсим, t – омонатнинг сақланиш вақти (йилларда), N – ҳамма йилга қўшиладиган ўсим миқдори бўлса, $i = \frac{t}{N}$ ва $n = Nt$. Бундан ўсган сумма:

$$u_n = u_0\left(1 + \frac{t}{N}\right)^{Nt}$$

формула билан ҳисобланади. Агар $a = \frac{N}{t}$ белгилаш киритсак,

$$u_n = u_0\left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a}\right)^{it}.$$

Калькулятордан фойдаланиб, 6.4-жадвални тўлдиринг. a катталик ортганда

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a} \approx 2{,}71828182\ \ldots$$

бўлишига ишонч хосил қилинг.

6.4-*жадвал*

a	$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$
10	
100	
1000	
10 000	
100 000	
...	

$\lim\limits_{a\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{a}$ лимитнинг қиймати e сони деб аталади.

$$e \approx 2{,}71.$$

Шундай қилиб, узлуксиз фоиз билан солинган пулнинг ўсими билан ҳисоблаганда оҳирги миқдорини $u_n = u_0 e^{rt}$ формула билан ҳисоблаш мумкин, бунда u_0 – дастлаб депозитга солинган сумма, r – йиллик фоизли устама пул, t – йиллар сони.

Ушбу формуладан фойдаланиб, 10000 тенгени йиллик фоизли устама пули 10% га тенг депозитга тўрт йилга солинганда тўпланган суммани топинг.

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots$$

қаторнинг чексиз кўп ҳади бор. Ушбу қаторни

$$f(x) = e^x$$

функция орқали ифодалаш мумкин эканлиги исботланган.

Шу мулоҳазани $x = 1$ деб олиб, қаторнинг дастлабки бешта ҳадидан фойдаланиб, $f(1)$ ҳисоблаб текширинг.

$y = e^x$ асоси e га тенг бўлган кўрсаткичли функция.

Кўрсаткичли функциянинг амалда қўлланиши

1) Қулай шароит бўлганда (хавф-хатар йўқ, озиқ-овқат етарли) тирик организмлар сонининг кўпайиши кўрсаткичли функциянинг қонунига бўйсунади. Масалан, битта чивин ёз бўйи $8 \cdot 10^{14}$ авлод қолдира олади. Уларнинг массаси бир неча

миллион тонна бўлиши мумкин эди. Бироқ, чивиннинг кўпайишига бошқа жониворлар ва ўсимликлар халақит берганлиги учун уларнинг сони юқорида кўрсатилган катталикка ета олмайди. Ҳар хил бактериялар ва микроорганизмлар сонининг ўсиш қонунияти ушбу формула билан тавсифланади: $N = N_0e^{kt}$, бунда N_0 – жониворларнинг дастлабки сони, k – ўзгармас коэффициент, t – вақт.

2) Радиоактив модда $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ қонун бўйича парчаланади. Бунда m – модданинининг t вақт моментидаги массаси, m_0 – модданинг бошланғич ($t = 0$) массаси, T – ярим парчаланиш даври. Ушбу қонуниятдан фойдаланиб, олимлар Ернинг ёшини аниқлашган.

3) Халқ сонининг оз вақт ичида ўсиши $N = N_0e^{kt}$ формула билан тавсифланади. Бунда N_0 – халқнинг дастлабки сони ($t = 0$), N – халқнинг t вақтдаги сони, k – ўзгармас катталик.

4) Татбиқий математикада турли масалалар учрайди. Улардан бири – ракетанинг тезлигини v га етказиш учун унга сарфланадиган ёқилғининг M массасини топиш масаласи. Бу масса ракетанинг m ўзининг массасига ва v_0 ёқилғининг ракета двигателидан чиқиш тезлигига боғлиқ. Агар ернинг тортилиш кучи ҳисобга олинмаса, керакли ёқилғи массаси ушбу формула билан топилади:

$$M = m(e^{v/v_0} - 1)$$

(К.Э. Циалковский формуласи). Масалан, массаси 1,5 т ракета 8000 м/с тезлик олиши учун ёқилғининг двигателдан чиқиш тезлиги 2000 м/с бўлса, тахминан 80 т ёқилғи керак бўлади.

5) Қайнаган чойнакдаги сувни токдан ажратиб олганда у дастлаб тез совийди, вақт ўтиши билан унинг совиш тезлиги камаяди. Унинг совиш температураси ушбу формула билан ҳисобланади:

$$T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1.$$

1. Кўрсаткичли функция деб қандай функцияга айтилади?
2. Нима учун кўрсаткичли функция асоси $a > 0$, $a \neq 1$ шартларни қаноатлантириши керак?
3. Кўрсаткичли функциянинг хоссаларини келтириб чиқариб, уларни исботланг.
4. $y = 4^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ функцияларнинг графикларини ясаб кўринг.

Мисоллар

А

6.1. x нинг қандай қийматларида 3^x ифоданинг қиймати:

1) 1 дан катта; 2) 1 дан кичик; 3) 1 га тенг?

6.2. x нинг қандай қийматларида $0,3^x$ ифоданинг қиймати:

1) 1 дан катта; 2) 1 дан кичик; 3) 1 га тенг?

6.3. Функциянинг графигини ясанг ва унинг аниқланиш соҳаси билан қийматлар тўпламини аниқланг:

1) $f(x) = 3^x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $f(x) = 5^x$; 4) $f(x) = 0,3^x$.

6.4. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = e^{\frac{x-1}{x+3}}$; 2) $y = e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

6.5. Функциянинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини кўрсатинг ва графигини ясанг:

1) $y = e^{3-x}$; 2) $y = e^{2x-5}$.

Амалий топшириқлар (6.6–6.8):

6.6. Чигирткалар қоплаган экин майдонини ушбу қонуният билан аниқланади: $A_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$ га, бунда n – ҳафта сони. Ушбу маълумотларни аниқланг:

1) чигирткалар қоплаган дастлабки экин майдонининг юзини;

2) 10 ҳафтадан кейин чигирткалар зиён келтирган экин майдонинг юзини.

6.7. Бактериялар қулай муҳитда тез кўпаяди. Уларнинг массаси $W_t = 100 \cdot 2^{0,1t}$ (грамм) қонуният билан ўсиши аниқланган. Бунда t – вақт (соат).

1) Бактерияларнинг дастлабки массасини; 2) 4 соат ўтгандан кейинги массани топинг; 3) бактериялар массасининг вақтга боғлиқ ўсиш графигини ясанг.

6.8. Балхаш атрофида йўқолиб кетган йўлбарс популяциясини (кўпайишини) ўрнига келтириш мақсадида 2018 йили 6 жуфт йўлбарс олиб келиниб, бўшатиб юборилди. Йўлбарснинг кўпайиши $N_t = N_0 \cdot 2^{0,18t}$ қонунга бўсунади, бунда N_0 – дастлабки йўлбарслар сони, t – вақт (йил). 1) 2030 йили кутиладиган йўлбарслар сонини топинг; 2) 2018 йилдан 2030 йилгача фоизлардаги ўсишни топинг.

B

6.9. Сонларни таққосланг:

1) $2^{1,5}$ ва $2^{\sqrt{2}}$; 2) $2^{\frac{1}{3}}$ ва $2^{0,3}$; 3) $3^{0,1}$ ва 3^0;

4) $3^{-0,1}$ ва 3^0; 5) $2^{-1,42}$ ва $2^{-\sqrt{2}}$; 6) $2^{\frac{1}{7}}$ ва $2^{0,143}$.

Амалий топшириқлар: (6.10–6.11):

6.10. Радиоактив модда $M = 250 \cdot 0,998^t$ қонун бўйича парчаланади (M – масса граммларда, t – вақт йилларда ўлчанади).
1) Радиоактив модданинг дастлабки массасини топинг;
2) 400 йил ўтгандан кейин радиоактив модданинг массаси қандай бўлади?
3) График калькулятор ёрдамида радиоактив модданинг массаси 125 граммгача қанча вақтда парчаланишини топинг.

6.11. Суюқлик музлатгичга солинди. Унинг температурасининг ўзгариш қонуни $T(t) = 100 \cdot 2^{-0,02t}$, бунда T – температура (°C), t – вақт (мин).
1) Суюқликнинг дастлабки температурасини;
2) калькулятор ёрдамида 15 минутдан кейинги температурасини;
3) 20 минутдан кейинги температурани аниқланг.

6.12. Функциянинг графигини ясанг ва унинг аниқланиш соҳаси билан қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = 3^x + 1$; 2) $f(x) = 3^{x-1}$; 3) $f(x) = 3^{|x|}$; 4) $f(x) = 3^{-|x|}$.

6.13. Функциянинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқланг:

1) $f(x) = \sqrt{5^x}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5^x}}$; 3) $f(x) = \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^x$;

4) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x$; 5) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$; 6) $f(x) = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$;

7) $f(x) = \left(4 - \sqrt{7}\right)^x$; 8) $f(x) = \left(\dfrac{4 + \sqrt{7}}{9}\right)^x$.

6.14. Тенгламанинг илдизи мавжудми? Агар мавжуд бўлса, ишораси қандай:

1) $5^x = 6$; 2) $5^x = \frac{1}{6}$; 3) $5^x = 0{,}01$;

4) $5^x = 100$; 5) $5^x = -1$?

6.15. a нинг қандай қийматларида $a^m > a^n$ тенгсизликдан $m < n$ тенгсизлик келиб чиқади?

6.16*. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = e^{-|x|}$; 2) $y = e^{|x-1|}$;

3) $y = e^{|x|-1}$; 4) $y = \left|e^{|x|-1} - 1\right|$.

C

6.17. $[-1;\ 1]$ оралиқда $y = \left(2-\sqrt{3}\right)^x$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

6.18. $[0;\ 1]$ оралиқда $y = \left(\sqrt{17}-3\right)^x$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

6.19. Онлайн график калькулятор ёрдамида $y = \sqrt{2^x}$ ва $y = \sqrt{3^x}$ функцияларнинг графикларини битта координаталар текислигида ясаб,

1) $\sqrt{3^x} = \sqrt{2^x}$ тенгламани; 2) $\frac{1}{\sqrt{3^x}} < \frac{1}{\sqrt{2^x}}$ тенгсизликни ечинг.

6.20. $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ функциянинг графигини ясанг.

6.21*. Радиоактив модда $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ қонун бўйича парчаланади. Бунда m – модданинг t вақт моментидаги массаси, m_0 – модданинг дастлабки ($t = 0$) массаси, T – яримпарчаланиш даври. Идишга мос равишда массалари 50 г ва 20 г бўлган радиоактив моддаларнинг иккита бўлаги бор. Биринчи модданинг яримпарчаланиш даври 1 соат, иккинчисиники эса 2 соат.

1) Ҳар бир модда массасининг ўзгариш графигини ясанг.
2) Моддаларнинг йиғинди массаларининг ўзгариш графигини ясанг.

Такрорлашга доир машқлар

6.22. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 4(x-1)-2(x+1)>0, \\ 3x-1-4(x-10)<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+8-(2x-5)<0, \\ 2(6x-4)-3(x+1)>0. \end{cases}$

6.23. Ҳисобланг:

1) $\dfrac{a-4\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}+2a^{\frac{1}{2}}}$, бунда $a=81$; 2) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-9\cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{6}}}$, бунда $a=64$.

6.24. Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади билан айирмасини топинг:

1) $\begin{cases} a_4+a_{11}=0,2, \\ a_9-a_5=2,4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_2+a_4=18, \\ a_3\cdot a_5=144. \end{cases}$

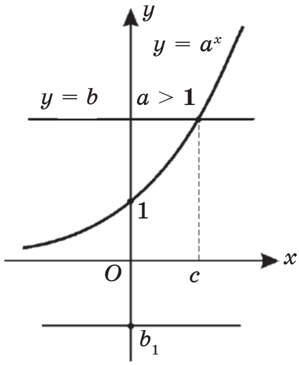
6.2 Соннинг логарифми ва унинг хоссалари

Бу мавзуда логарифм тушунчаси билан танишиб, оҳирида:

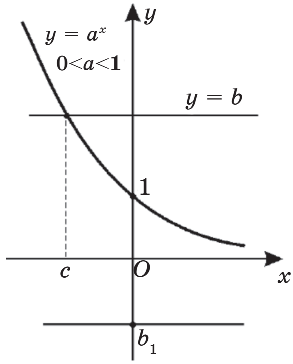
- соннинг логарифмининг таърифини;
- ўнли ва натурал логарифмларни;
- логарифмнинг хоссаларини биласиз;
- логарифмик ифодаларни шакл алмаштиришда уларнинг хоссаларидан фойдаланасиз.

6.2.1. Логарифмнинг таърифи

$a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тенгламани кўриб чиқамиз. Бу тенгламанинг илдизи $y=a^x$ кўрсаткичли функциянинг графиги билан $y=b$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг абсциссасига тенг (6.4, 6.5-расмлар). Ушбу расмлардан агар $b>0$ бўлса, $y = a^x$ функциянинг графиги билан $y = b$ тўғри чизиқ битта нуқтада кесишишини, агар $b \leqslant 0$ бўлса, $y = a^x$ функциянинг графиги билан $y = b_1$ тўғри чизиқ кесишмаслигини кўрамиз. У ҳолда, $b > 0$ бўлганда $a^x = b$ тенгламанинг ягона илдизи мавжуд ($x = c$), $b \leqslant 0$ бўлса, тенгламанинг илдизи мавжуд эмас. Шундай қилиб, $b > 0$ бўлганда $a^x = b$ тенгламанинг илдизи *асоси а га тенг b соннинг* ***логарифми*** деб аталади.



6.4-расм



6.5-расм

Таъриф. *Берилган мусбат соннинг берилган асосли* ***логарифми*** *деб шу асоснинг берилган сонга тенг бўлган даража кўрсаткичига айтилади, яъни $b > 0$ соннинг a ($a > 0$, $a \neq 1$) асосли логарифми деб*

$$a^c = b \qquad (1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи с сонига айтилади. У қуйидагича белгиланади: $\log_a b$ *ва бу «а асосга кўра логарифм b» ва бу «а га тенг логарифм b» деб ўқилади.*

Бундан таърифга кўра (1) тенгликдан

$$b = a^{\log_a b} \qquad (2)$$

тенгликни оламиз. (2) тенглик *логарифмларнинг асосий айнияти* деб аталади.

1-мисол. 1) $\log_3 81$; 2) $\log_2 0,125$ ифодаларнинг қийматини топиш керак.

▲ 1) $81 = 3^4$, таърифга кўра $\log_3 81 = 4$;

2) $0,125 = \dfrac{1}{8} = 2^{-3}$, у ҳолда, $\log_2 0,125 = -3$. ■

6.2.2. Логарифмларнинг асосий хоссалари

Энди логарифмларнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

Исталган $a > 0$ $(a \neq 1)$ ва b, c сонлар учун

1 . $\log_a 1 = 0$;

2 . $\log_a a = 1$;

3 . $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

4 . $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

5 . $\log_a b^m = m\log_a b$, $m \in R$;

6 . $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, $n \in R$, $n \neq 0$;

7 . $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$;

8 . $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, a, $b > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$;

9 . $\log_m a \cdot \log_n b = \log_n a \cdot \log_m b$, a, $b > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$

тенгликлар бажарилади.

Хоссаларнинг исботлари

▲ **1 ва 2 -хоссаларнинг** исботи таърифдан келиб чиқади.

3 -хосса. Фараз қилайлик, $\log_a b = u$, $\log_a c = v$ бўлсин. (2)-тенглик бўйича

$$b = a^u,\ c = a^v \tag{3}$$

тенгликларни оламиз. (3)-тенгликлардан $b \cdot c = a^{u+v}$. Бундан логарифмнинг таърифига кўра

$$\log_a bc = u + v = \log_a b + \log_a c.$$

4 -хосса. (3)-тенгликдан $\frac{b}{c} = a^{u-v}$ тенглик келиб чиқади. У ҳолда таърифга кўра

$$\log_a \frac{b}{c} = u - v = \log_a b - \log_a c.$$

5 -хосса. Агар $\log_a b = u$ бўлса, $b = a^u$. Бундан $b^m = a^{mu}$ тенглик билан логарифмнинг таърифидан фойдалансак,

$$\log_a b^m = m \cdot u = m\log_a b.$$

6 -хосса. (2)-тенглик бўйича

$$\left(a^n\right)^{\log_{a^n} b} = b, \quad a^{\log_{a^n} b} = \left[\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\log_{a^n} b} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}\log_a b}.$$

У ҳолда, $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$.

7 -хосса. $a^{\log_a b} = b$ тенгликни c асосга кўра логарифмлаймиз: $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Бундан $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. ■

8-хосса. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ тенгликнинг бажарилишини кўрсатамиз:

$\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$, $\log_b a = d \Rightarrow b^d = a$;

$(b^d)^c = b \Rightarrow b^{dc} = b \Rightarrow dc = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{d} \Rightarrow \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Гуруҳларда ишлаш

Логарифмнинг 7, 8-хоссаларидан фойдаланиб, 9-хоссани келтириб чиқаринг:

$\log_m a \cdot \log_n b = \log_n a \cdot \log_m b,\qquad a, b > 0;\ a \neq 1,\ b \neq 1.$

$\log_a b$ соннинг ишорасини тез аниқлаш йўли:

агар $a > 1$, $b >$ ёки $0 < a$, $b < 1$ бўлса, $\log_a b > 0$;

агар $a > 1$, $0 < b < 1$ ёки $0 < a < 1$, $b > 1$ ўлса, $\log_a b < 0$.

2-мисол. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_4 2$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ ифоданинг қийматини топиш керак.

▲ 1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4$;

2) $\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \dfrac{1}{2}\log_2 2 = \dfrac{1}{2}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{3^{-1}} 3^3 = -3\log_3 3 = -3$. Бунда биз 2, 5 ва 6-хоссалардан фойдаландик. ■

3-мисол. $\log_a 27 = b$ деб олиб, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ ифоданинг қийматини топамиз.

▲ $\log_a 27 = b \Rightarrow \log_a 3^3 = b \Rightarrow 3 \cdot \log_a 3 = b \Rightarrow \dfrac{\log_3 3}{\log_3 a} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\log_3 a} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 a = \dfrac{3}{b}$. Бундан $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{2}{6}\log_3 a = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{b} = \dfrac{1}{b}$.

Жавоб: $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{1}{b}$. ■

4-мисол. $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$ айниятни исботлаш керак.

▲ 9-хоссага кўра

$\log_{ab} x = \log_{ab} x \cdot \log_a a = \log_{ab} a \cdot \log_a x \Rightarrow \log_{ab} x = \log_{ab} a \cdot \log_a x$. Энди буни тенгликдаги касрнинг маҳражига қўлласак,

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{1}{\log_{ab} a} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a x} = \frac{1}{\log_{ab} a}.$$

8 -хоссага кўра $\dfrac{1}{\log_{ab} a} = \log_a ab \Rightarrow$

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{1}{\log_{ab} a} = \log_a ab = 1 + \log_a b.$$ ■

Таъриф. *Асоси 10 га тенг бўлган логарифм* ***ўнли логарифм*** *деб аталади, у* lg *каби белгиланади*: $\log_{10} a = \lg a$.

Асоси e га тенг бўлган логарифм ***натурал логарифм*** *деб аталади, у* ln *каби белгиланади, яъни* $\log_e a = \ln a$.

1. $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тенгламанинг 1) $b > 0$; 2) $b < 0$ бўлганда нечта илдизи мавжуд?
2. Мусбат сонниng логарифми деб нимага айтилади?
3. Логарифмларнинг асосий айниятини ёзиб кўрсатинг.
4. Логарифмларнинг асосий хоссаларини айтиб, уларни исботланг.
5. Нима учун манфий соннинг логарифми аниқланмайди?
6. Логарифмнинг асоси 1 га тенг бўлиши мумкинми?
7. Натурал логарифм қандай аниқланади?
8. Қандай логарифм ўнли логарифм дейилади?

Мисоллар

А

6.25. Берилган соннинг асоси 2 га тенг бўлган логарифмини топинг:

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{4}$;

5) $\frac{1}{8}$; 6) 32; 7) 64; 8) $\frac{1}{16}$.

6.26. Соннинг асоси 3 га тенг бўлган логарифмини топинг:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 9; 4) $\frac{1}{9}$;

5) $\frac{1}{27}$; 6) 27; 7)243; 8) $\frac{1}{81}$.

6.27. Берилган тенгликларнинг тўғрилигини тушунтиринг (оғзаки бажариладиган топшириқ):

1) $\lg 10000 = 4$; 2) $\lg 0{,}1 = -1$; 3) $\lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$;

3) $\log_2 8 = 3$; 4) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 6) $\log_2 \sqrt{27} = 1{,}5$.

6.28. Ҳисобланг:

1) $\lg 100\,000$; 2) $\lg 0{,}01$; 3) $\log_3 \sqrt{3}$; 4) $\log_2 128$;

5) $\log_5 25$; 6) $\log_5 125$; 7) $\log_9 3$; 8) $\log_2 \sqrt[3]{2}$;

9) $\log_a a^n$; 10) $\log_8 2$; 11) $\log_a \frac{1}{a}$; 12) $\log_6 6\sqrt{6}$;

13) $\log_4 1$; 14) $\log_9 9$.

6.29. Калькуляторда ҳисобланг:

1) $\lg 152$; 2) $\lg 25$; 3) $\lg 74$; 4) $\lg 0{,}8$.

6.30. Асосий логарифмик айниятдан фойдаланиб, x ни топинг:

1) $\log_2 x = 2$; 2) $\log_3 x = 2$; 3) $\log_4 x = -3$;

4) $\log_5 x = 3$; 5) $\log_x 4 = 2$; 6) $\log_x 3 = -\frac{1}{2}$.

6.31. Ҳисобланг:

1) $\log_2 32$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 81$; 3) $\log_{a^2} \sqrt[7]{a}$; 4) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[4]{a^3}$;

5) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{1}$; 6) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$; 7) $\log_7 343$; 8) $\lg 0{,}01$.

6.32. Ўнли логарифмларни ҳисобланг:

1) $\lg 0{,}001$; 2) $\lg 1$; 3) $\lg \sqrt[3]{10}$;

4) $\lg \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 5) $\lg 10\sqrt{10}$; 6) $\lg 1000\sqrt{10}$.

6.33. Берилган сонларни 10 нинг даражаси кўринишида ёзинг:

1) 6; 2) 60; 3) 6000; 4) 0,6; 5) 0,006.

6.34. Соддалаштиринг:

1) $\lg 8 + \lg 2$; 2) $\ln 8 - \ln 2$; 3) $\lg 40 - \lg 5$;

4) $\ln 4 + \ln 5$; 5) $\lg 2 + \lg 3 + \lg 4$; 6) $1 + \ln 3$;

7) $\lg 4 - 1$; 8) $\ln 6 - \ln 2 - \ln 3$; 9) $\lg 5 + \lg 4 - \lg 2$;

10) $\ln \frac{3}{4} + \ln 3 + \ln 7$.

6.35. Соддалаштиринг:

1) $5\lg 2 + \lg 3$; 2) $2\ln 3 + 3\ln 2$; 3) $3\lg 4 - \ln 8$;

4) $2\ln 5 - 3\ln 2$; 5) $\frac{1}{2}\ln 4 + \ln 3$; 6) $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{8}$;

7) $3 - \lg 2 - 2\lg 5$; 8) $2 - \frac{1}{2}\lg 4 - \lg 5$.

6.36. Соддалаштиринг:

1) $\frac{\lg 4}{\lg 2}$; 2) $\frac{\ln 27}{\ln 9}$; 3) $\frac{\lg 3}{\lg 9}$; 4) $\frac{\ln 25}{\ln 0,2}$.

6.37. Ушбу тенгликларнинг тўғрилигини кўрсатинг:

1) $\lg 300 = \lg 3 + 2$; 2) $\lg 0,05 = \lg 5 - 2$;

3) $\lg 5000 = 4 - \lg 2$; 4) $\lg 5 = 1 - \lg 2$.

6.38. Ҳисобланг:

1) $2^{\log_2 19}$; 2) $3^{\log_9 5}$; 3) $\log_5 5^{21}$;

4) $5^{1+\log_5 8}$; 5) $4^{\log_{0,25} 7}$; 6) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{27}$.

6.39. $p = \log_b 2$, $q = \log_b 3$ ва $r = \log_b 5$ бўлса, ушбу сонларни p, q, r орқали ёзинг:

1) $\log_b 6$; 2) $\log_b 108$; 3) $\log_b 45$.

6.40. Сонларни таққосланг:

1) $\log_5 2$ ва $\frac{1}{\log_4 25}$; 2) $\log_2 3$ ва $\frac{1}{\log_3 2}$;

3) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ ва $\frac{1}{\log_3 2}$.

6.41. Сонлардан қайси бири катта:

1) $\lg \sqrt[6]{10}$ ва $\log_2 \sqrt{2}$; 2) $\log_4 2$ ва $\log_{0,0625} 0,25$;

3) $\log_5 \frac{2}{625}$ ва $\log_3 \frac{1}{27}$; 4) $\lg 2$ ва $\frac{1}{\log_4 1000}$?

Амалий топшириқ

6.42. Омонатчи йиллик ўсими 12% бўлган депозитга 10000 тенге солди. Неча йилдан кейин унинг пули икки баробар ортади?

▲ Мураккаб фоизлар формуласидан фойдаланамиз: $S = A\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$, бунда A – дастлаб солинган пул миқдори, P – йиллик ўсиш, n – омонатнинг сақланиш вақти (йилларда), S – тўпланган пул миқдори. Бизнинг ҳолда бу формула $S = = 10000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n$. Бизга n ни аниқлаш керак. Иккиланган пул миқдори 20000 бўлгани учун, ушбу тенгламани оламиз:

$20000 = 10000\left(1+\frac{12}{100}\right)^n$, қисқартиришдан кейин $2 = \left(1+\frac{12}{100}\right)^n$ тенгламани ечиш керак.

Бу тенгламани ечиш учун логарифмнинг таърифидан фойдаланамиз: $2 = 1{,}12^n \Rightarrow n = \log_{1,12}2$. Логарифмнинг 7°-хоссасидан фойдаланиб, ўнли логарифмлар орқали топамиз.

$$n = \log_{1,12}2 = \frac{\lg 2}{\lg(1{,}12)} \approx \frac{0{,}3010\ \dots}{0{,}0492\ \dots} = 6{,}11.$$

Шундай қилиб, 6 йилдан сал ортиқ вақтда ёки 73,5 ойдан сўнг омонат пул миқдори иккиланади. ■

Логарифмдан молия соҳасидаги мутахассислар, муҳандислар, медицина ходимлари ҳам фойдаланади. Қуйидаги мисолда логарифмнинг биологияда қўлланишини кўриб чиқамиз.

Амалий топшириқ

6.43. Бактериялар сонининг вақтга боғлиқ ўсиши ушбу формула билан ҳисобланади:

$$x = \frac{t(\lg B - \lg q)}{\lg\frac{p}{q}},$$ бунда q – дастлабки бактериялар сони, p – t вақт ўтгандан кейинги бактериялар сони, B – берилган бактериялар сони, x – бактериялар сони B га тенг бўлиши учун керак бўлган вақт.

Дастлаб 6 та бактерия бор эди. Озиқни ўртага қўйгандан кейин 2 соат ўтган сўнг уларнинг сони 100 га етди. Қанча вақтдан кейин бактериялар сони 500 га етади?

▲ Масала шартининг формулага қўйиладиган ўзгарувчиларини аниқласак, $q = 8$, $t = 2$, $p = 100/8$, $B = 500$. Шу сонларни формулага қўйиб ҳисоблаймиз:

$$\frac{2\cdot(\lg 500 - \lg 8)}{\lg\frac{100}{8}} \approx \frac{2\cdot 1{,}7959\ \dots}{1{,}0970\ \dots} \approx 3{,}27.$$ Тахминан 3,27 соат ёки 3 соат 15 мин дан сўнг бактериялар сони 500 га етади. ■

B

6.44. Ҳисобланг:

1) $3^{1+\log_3 3}$; 2) $2^{4+\log_2 5}$; 3) $\sqrt{25^{2+\frac{1}{2}\log_5 36}}$; 4) $2^{\log_{\sqrt{2}} 5+4\log_{0,5} 5}$.

6.45. Агар $\log_a x = n$; $\log_b x = m$; $\log_c x = k$ бўлса, у ҳолда $\log_{abc} x$ ни топинг.

6.46. Ҳисобланг:

1) $\log_3\log_4\log_2 16$; 2) $\log_4\log_2\log_3 81$;

3) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$;

4) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

6.47*. Исталган мусбат a $(a\neq 1)$ сон учун

1) $\dfrac{1}{\log_a e}+\dfrac{1}{\log_{a^2} e}+\dfrac{1}{\log_{a^3} e}+\dfrac{1}{\log_{a^4} e}=10\ln a$;

2) $\log_{e^{n+1}} ae^n=\dfrac{\ln a+n}{1+n}$

тенгликнинг бажарилишини исботланг.

6.48. Берилган сонни ас a $(a > 0,\ a \neq 1)$ бўлган логарифм кўринишида ёзинг:

1) 2; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) -1; 4) $\dfrac{1}{3}$; 5) 1; 6) 0; 7) $-\dfrac{3}{4}$.

6.49. Исталган 1 дан фарқли мусбат a ва b сонлар учун $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ айниятнинг бажарилишини кўрсатинг.

6.50. $\log_6 2 = m$ деб олиб, $\log_{24} 72$ ни топинг.

6.51. $\log_{36} 8 = m$ деб олиб, $\log_{36} 9$ ни топинг.

6.52.* $\log_{100} 3 = m$ ва $\log_{100} 2 = n$ деб олиб, $\log_5 6$ ни топинг.

6.53. Амалларни бажаринг:

1) $\log_a\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}$; 2) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

6.54. Соддалаштиринг:

1) $\left(25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $81^{\frac{1}{\log_3 3}}+3^{\frac{1}{\log_7 9}}+27^{\log_9 36}$;

3) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 4) $49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$.

6.55*. $\log_3 12 = \log_3 8 \cdot \log_8 5 \cdot \log_5 4 + 1$ тенгликнинг бажарилишини кўрсатинг.

6.56. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(b^{\frac{\log_{100}a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100}b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$; 2) $\sqrt{a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_{a^2}2}} + 1}$.

6.57. $a^{\frac{\ln\ln a}{\ln a}} = \ln a$ $(a > 0)$ тенгликни исботланг.

C

6.58. $\lg 5 = a$, $\lg 7 = b$ деб олиб, $\lg 122{,}5$ ифоданинг қийматини топинг.

6.59. $b = \log_c 0{,}25 + 3\log_u 4$, $u = 27$, $c = \frac{1}{9}$ деб олиб, 3^b нинг қийматини топинг.

6.60. $1 < a < b$ деб олиб, $\sqrt{\sqrt{\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2} - 2}$ ифодани соддалаштиринг.

6.61*. $\log_a A \cdot \log_b A + \log_b A \cdot \log_c A + \log_c A \cdot \log_a A$ ифодани кўпайтувчиларга ажратинг.

6.62. $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$ тенгликнинг бажарилишини кўрсатинг.

6.63*. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_{a^2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a^n} x} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a x}$;

2) $\log_{abc} x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x} + \dfrac{1}{\log_c x}}$.

6.64*. 1 га тенг бўлмаган мусбат a, b, c, x, y, z сонлар берилган. Агар $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ сонлар арифметик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлса, $\log_b y(\log_a x + \log_c z) = 2\log_a x \cdot \log_c z$ тенгликнинг бажарилишини кўрсатинг.

6.65. Агар $4a^2 + 9b^2 = 4ab(a > 0)$ бўлса, $\log_3 \dfrac{2a+3b}{4} = \dfrac{\log_3 a + \log_3 b}{2}$ тенгликнинг бажарилишини исботланг.

6.66. Айниятни исботланг:

1) $\log_{xy} z = \dfrac{\log_x z \cdot \log_y z}{\log_x z + \log_y z}$; 2) $1 + \log_x y = \dfrac{\log_x z}{\log_{xy} z}$.

6.67. $x = \dfrac{3}{\log_2 5}$, $y = (\log_5 6)^{-1}$ деб олиб, $5x + 6y$ ифоданинг қийматини топинг.

6.68. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{\left(\lg a \cdot 2^{\log_2 \lg a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \lg a^2}{\sqrt{\dfrac{\lg a + 1}{2\lg a} + 1 - 10^{0,5\lg\lg\sqrt{a}}}}$; 2) $\dfrac{1 - \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{1}{(a-b)^2} + \log_a^2(a-b)}{\left(1 - \log_{\sqrt{a}}(a-b) + \log_a^2(a-b)\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Такрорлашга доир машқлар

6.69. Тенгламанинг нечта ечими мавжуд:

1) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0$; 2) $x^2 + 6x + y^2 - 10y + 34 = 0$?

6.70. $x + 7y = 50$ тўғри чизиқ $x^2 + y^2 = 50$ айланага уринишини кўрсатиб, уриниш нуқтасининг координаталарини топинг.

6.71. x ўзгарувчининг -2, -1, 0, 1, 2 га тенг қийматларига мос келувчи 2^x ифоданинг қийматлари геометрик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлишини кўрсатинг. Шу прогрессиянинг маҳражини топинг.

6.3. Логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги

Бу мавзуда логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги билан танишиб, оҳирида:

- логарифмик функциянинг таърифини;
- логарифмик функциянинг графигини ясай оласизлар;
- логарифмик функциянинг хоссаларини биласиз ва улардан фойдаланасиз.

6.3.1. Логарифмик функция ва унинг хоссалари

Таъриф. $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *кўринишда берилган функция* ***асоси а бўлган логарифмик функция*** *дейилади, бунда* $x \in (0; +\infty)$.

Масалан, $y = \log_2 x$ – асоси 2 га тенг бўлган логарифмик функция, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ – асоси $\dfrac{1}{2}$ га тенг логарифмик функция ва ҳоказо.

Логарифмик функциянинг асосий хоссаларига тўхталамиз.

1°. *Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси-барча мусбат сонлар тўплами* $R+$: $D(\log_a x) = (0; +\infty)$. Ҳақиқатан, логарифм фақат мусбат сонлар учунгина аниқланган.

2°. *Логарифмик функциянинг қийматлар тўплами-барча ҳақиқий сонлар тўплами* R: $(-\infty; +\infty)$.

▲ Ҳақиқатан, исталган $y_0 \in R$ ҳақиқий сон учун $a > 0$ бўлганда a^{y_0} ифода аниқланади. Логарифмнинг таърифига кўра $\log_a a^{y_0} = y_0$ тенглик бажарилади. У ҳолда логарифмик функция шу y_0 га тенг қийматни $x_0 = a^{y_0}$ нуқтада қабул қилади. Демак, логарифмик функция исталган ҳақиқий қийматни қабул қилади. ■

3°. *Агар* $a > 1$ *бўлса, у ҳолда* $y = \log_a x$ *логарифмик функция ўсувчи.*

▲ Фараз қилайлик, x_1 ва x_2 сонлар $0 < x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи исталган мусбат сонлар бўлсин. $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$ эканлигидан, $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ тенгсизликни оламиз. $a > 1$ эканлигидан кўрсаткичли $y = a^x$ функция ўсувчи. У ҳолда охирги тенгсизликдан $\log_a x_1 < \log_a x_2$ тенгсизлик келиб чиқади. Шуни исбот этиш керак эди. ■

4°. *Агар* $0 < a < 1$ *бўлса,* $y = \log_a x$ *логарифмик функция камаювчи. Исботи* 3°-хоссага ўхшаш.

5°. *Бир хил асосли логарифмик* $y = \log_a x$ *ва кўрсаткичли* $y = a^x$ *функцияларнинг графиклари I ва III координаталар чоракларининг биссектрисаси* $y = x$ *тўғри чизиққа нисбатан симметрик.*

▲ Геометрия курсидан $A(n;\ m)$ ва $A'(m;\ n)$ нуқталар $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик жойлашишини биламиз. Фараз қилайлик, $A(n;\ m)$ нуқта $y = a^x$ функциянинг графигида ётсин. $m = a^n \Leftrightarrow \log_a m = \log_a a^n = n \Leftrightarrow n = \log_a m \Leftrightarrow A'(m,\ n)$ нуқта $y = \log_a x$ функциянинг графигида ётади. ■

1-мисол. 1) $\log_2 3$ ва $\log_2 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ ва $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_4 17$ ва $\log_5 23$ сонларни таққослаш керак.

▲ 1) $2 > 1$ эканлигидан, $y = \log_2 x$ функция ўсувчи.

У ҳолда $3 < 5$ тенгсизликдан $\log_2 3 < \log_2 5$ тенгсизлик келиб чиқади.

2) $\log_{\frac{1}{2}} x$ функция камаювчи эканлигидан, $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$ тенгсизлик бажарилади.

3) $\log_4 17 > \log_4 16 = 2$ ва $\log_5 23 < \log_5 25 = 2$ эканлигидан, $\log_4 17 > \log_5 23$. ■

6.3.2. Логарифмик функциянинг графиги

$y = \log_a x$ логарифмик функциянинг графигини 5°-хосса бўйича $y = a^x$ функциянинг графигини ясаб, уни $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик кўчириш орқали ясаш мумкин.

Биз бунда логарифмик функциянинг графигини унинг хоссаларига суяниб ясаймиз.

Исталган логарифмик функциянинг графиги Ox ўқини (1; 0) нуқтада кесиб ўтади, чунки $\log_a 1 = 0$. Oy ўқи билан эса кесишмайди.

$a > 1$ бўлганда $y = \log_a x$ функция ўсувчи ва $x \in (1; +\infty)$ тўпламда мусбат қийматлар, $x \in (0; 1)$ ораликда манфий қийматлар қабул қилади.

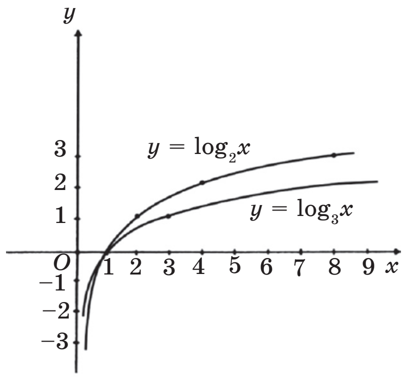
Агар $0 < a < 1$ бўлса, $y = \log_a x$ функция камаювчи ва $x \in (1; +\infty)$ тўпламда манфий қийматлар, $x \in (0; 1)$ оралиқда мусбат қийматлар қабул қилади.

Жадвал ёрдамида $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ва $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функцияларнинг графикларини ясаймиз.

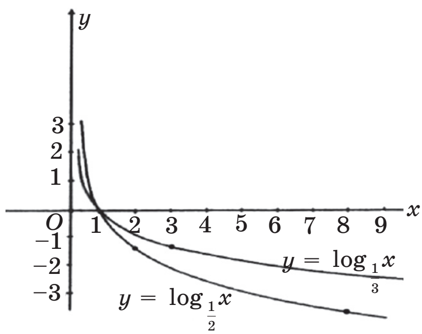
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\log_3 x$	-2	-1	0	1	2
$\log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	-1	-2

6.6-расмда $y = \log_2 x$ ва $y = \log_3 x$ функцияларнинг, 6.7-расмда $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ва $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ функцияларнинг графиклари тасвирланган.

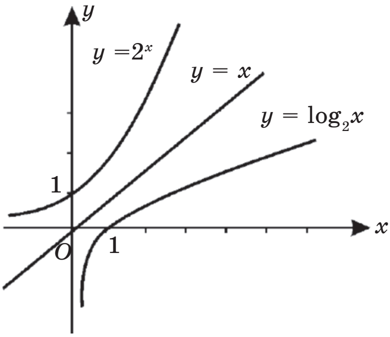


6.6-расм

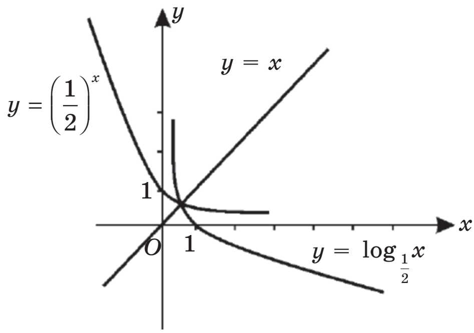


6.7-расм

Бундан $a > 1$ бўлганда асоси a қанчалик катта бўлган сайин мос логарифмик функциянинг графиги шунчалик «секин ўсади». Аксинча $0 < a < 1$ бўлганда асоси a қанчалик кичик бўлган сайин логарифмик функциянинг графиги шунчалик «секин камаяди». 6.8 ва 6.9-расмлардан $y = a^x$ ва $y = \log_a x$ функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эканлигини кўрамиз.



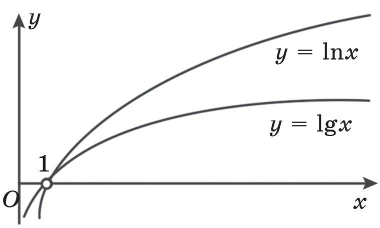
6.8-расм



6.9-расм

2-мисол. 1) $\log_2 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_3 \frac{1}{5}$ сонларнинг ишорасини аниқлаш керак.

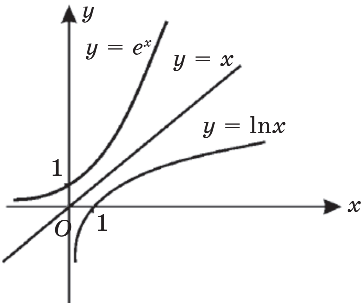
▲ 1) $5 > 1$, $2 > 1$ эканлигидан, $\log_2 5 > 0$; 2) $5 > 1$, $\frac{1}{2} < 1$. Бундан $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$; 3) $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{3} < 1$, у ҳолда $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$; 4) $\frac{1}{5} < 1$, $3 > 1$, у ҳолда $\log_3 \frac{1}{5} < 0$. ■



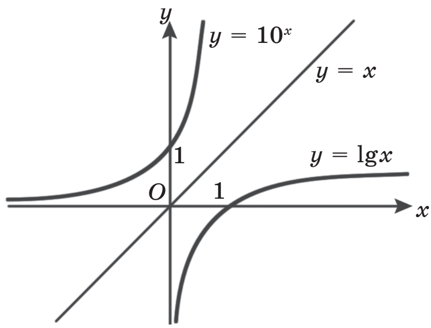
6.10-расм

Асоси e га тенг бўлган логарифмик функция ***натурал логарифмик функция*** деб аталади ва у $y = \ln x$ орқали белгиланади. Ўнли логарифмик функция билан натурал логарифмик функцияларнинг асослари 1 дан катта бўлганлигидан бу функциялар ўсувчи (6.10-расм).

Шундай қилиб, $y = \log_e x = \ln x$, яъни $y = \ln x$ $(x > 0)$. 6.11-расмда $y = e^x$ ва $y = \ln x$, 6.12-расмда $y = 10^x$ ва $y = \lg x$ функцияларнинг графиклари тасвирланган. Бу функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик.



6.11-расм



6.12-расм

1. Қандай функциялар логарифмик функция деб аталади?
2. Нима учун логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси $(0; +\infty)$ тўплам, қийматлар тўплами $(-\infty; +\infty)$ тўплам бўлади?
3. Логарифмик функциянинг асоси $a > 1$ бўлганда ўсувчи, $0 < a < 1$ бўлганда камаювчи бўлишини исботланг.
4. $y = \log_a x$ ва $y = a^x$ функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлишини кўрсатинг.
5. Битта координаталар текислигида онлайн график калькулятордан фойдаланиб ёки схематик равишда 1) $y = \log_2 x$ ва $y = \log_{10} x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ва $y = \log_{0,1} x$; 3) $y = \log_2 x$ ва $y = 2^x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ва $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графикларини ясаб кўринг.

Қўшимча электрон ресурслар

https://www.desmos.com/calculator – онлайн график калькулятор

Мисоллар

А

6.72. Берилган функциялардан логарифмик функцияни кўрсатинг:

1) $y = 4x$; 2) $y = \log_5 25 + x^2$; 3) $y = \ln(x + 2)$;
4) $y = 2{,}5^x$; 5) $y = \log_5 125 + x$.

6.73. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

1) $\log_2 3$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 3$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} 2$;

5) $\log_{\frac{\pi}{3}} 4$; 6) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$; 7) $\log_2 \pi$; 8) $\log_{\frac{1}{3}} \pi^{-1}$.

6.74. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \log_3(x-1)^2$; 2) $y = \log_2^2(x-1)$;

3) $y = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{2x+3}$; 4) $y = \log_2(x^2+2x-3)$.

6.75. $f(x) = x+1$ ва $g(x) = 2^{\log_2(x+1)}$ функцияларнинг графиклари устма-уст тушадими? Жавобингизни тушунтиринг.

6.76. Сонларни таққосланг:

1) $\log_3 4$ ва $\log_3 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ ва $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

3) $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{65}$ ва $\log_{\frac{3}{2}} 8$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{4}{7}$ ва $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{14}$.

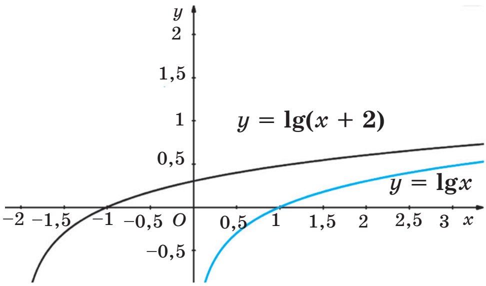
6.77. Онлайн график калькулятордан фойдаланиб, битта координаталар текислигида ушбу функцияларнинг графиклаини ясанг ва хулоса чиқаринг:

1) $y = \lg x$ ва $y = \lg(x+2)$; 2) $y = \lg x$ ва $y = \lg(x-2)$;

3) $y = \lg x$, $y = \log_2 x$ ва $y = \log_4 x$;

4) $y = \log_3 x$ ва $y = -\log_3 x$.

▲ 1) $y = \lg x$ ва $y = \lg(x+2)$ функцияларнинг графиклари 6.13-расмда ясалган. Бу графикдан $y = \lg(x+2)$ функциянинг графиги $y = \lg x$ функциянинг графигини чап томонга икки бирликка параллел силжитиш орқали олинган. Бундан $y = \lg(x+a)$ функциянинг графигини ясаш учун $y = \lg x$ функциянинг графигини a бирликка чап томонга параллел силжитиш керак. ■



6.13-расм

6.78. Функциянинг графигини ясанг ва натижани онлайн график калькулятор ёрдамида текширинг:

1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} x - 1$; 5) $y = \log_4(x+3)$; 6) $y = \log_4 x + 3$.

6.79. Берилган нуқталар $y = \lg x$ функциянинг графигига тегишлими?

1) $A(100;\ 2)$; 2) $B(0{,}001;\ -3)$;

3) $C\left(\sqrt[5]{100};\ \dfrac{1}{5}\right)$; 4) $D\left(\sqrt[5]{10};\ \dfrac{1}{5}\right)$.

6.80. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \ln(x(x-1)(x-2))$; 2) $y = \ln\dfrac{x^2(2x-4)}{x+6}$;

3) $y = \dfrac{1}{\ln\sqrt{6-x-x^2}}$.

6.81. Функциянинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқлаб, унинг аниқланиш соҳасини кўрсатинг:

1) $y = \ln(x+5)$; 2) $y = \ln(3-x)$.

B

6.82. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \log_3(x^2 - 6x + 8)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(4 - x - 3x^2)$;

3) $y = \log_\pi \dfrac{2x-1}{x^2-4}$; 4) $y = \log_{\sqrt{7}} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}$.

6.83. Сонларни таққосланг:

1) $\lg\sqrt[6]{10}$ ва $\log_2\sqrt{2}$; 2) $\log_4 5$ ва $\log_6 5$;

3) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{6}$ ва $\log_9 7$; 4) $\log_3 2$ ва $\log_2 3$;

5) $\log_4 2$ ва $\log_{0{,}09} 0{,}3$; 6) $\log_3 \pi$ ва $\log_\pi 3$.

6.84. Сонлардан қайси бири катта:

1) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ ёеи $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$; 2) $\log_5 7$ ёки $3\log_5 2$;

3) $\log_3 15$ ёки $4\log_3 1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} 48$ ёки $2\log_{\frac{1}{5}} 7$?

6.85. $\lg 3 = p$, $\lg 2 = q$ деб олиб, $\log_5 6$ ни топинг.

6.86. Ҳисобланг:

1) $\sqrt[3]{\log_{\sqrt{2}}\left(2\sin\dfrac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}\right)}$;

2) $3^{\log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)}$.

6.87. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 2$; 2) $y = \log_2(x - 3) + 4$.

6.88. $y = 2\log_2 x$ ва $y = \log_2 x^2$ функциялар айнан тенгми? Жавобингизни асосланг.

6.89*. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = \log_2(x - 1)$; 2) $y = \log_2|x - 1|$; 3) $y = \ln|x|$;

4) $y = |\ln x|$; 5) $y = \left|\ln|x|\right|$; 6) $y = \ln^2 x$.

6.90. Ҳисобланг:

1) $\left(\log_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}\right)^2 - \log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{3}+1}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$;

2) $2^{6\log_{2\sqrt{2}}\left(5-\sqrt{10}\right)+8\log_{0,25}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$.

6.91. Сонларни таққосланг:

1) $2\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{5}$ ва $3\log_8 26$; 2) $3\log_3 4$ ва $3\log_{27} 17$;

3) $\log_{135} 675$ ва $\log_{45} 75$.

C

6.92*. $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$ деб олиб, $\log_{25} 24$ ни топинг.

6.93. Сонларни таққосланг:

1) $\sqrt{11}$ ва $9^{0,5\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}$; 2) $2^{\log_3 5} - 0,1$ ва $5^{\log_3 2}$;

3) $\sqrt{8}$ ва $2^{2\log_2 5+\log_{0,5} 9}$; 4) $\sqrt{15}$ ва $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1+\frac{1}{32}\right)+2\log_{27} 3}$.

6.94. Ҳисобланг:

$4\sqrt{3} + 5^{\log_5 \frac{3}{5}} - 15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\frac{4}{\sqrt{5}}}$.

6.95. Ҳисобланг:

$49^{0,5\log_7 9-\log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}$.

Функцияларнинг графигини ясанг (**6.96–6.99**):

6.96. $y = \log_2(x - 3)$.

6.97. $y = |\log_2(x - 3)|$.

6.98. $y = \log_2|x - 3|$.

6.99. $y = \left|\log_2|x - 3|\right|$.

6.100. Ифода маънога эгами:

1) $\sqrt{\log_2 1,4 + \log_2 0,7}$;   2) $\sqrt{\lg 15 + \lg 0,07}$;   3) lglglg11?

6.101*. Агар $a^2 + b^2 = 11ab$ ва $a \cdot b \neq 0$ бўлса,

$$\log_2 \frac{|a-b|}{3} = \frac{1}{2}\left|\log_2 |a| + \log_2 |b|\right|$$

тенгликнинг бажарилишини исботланг.

6.102*. Агар $\lg 2 \cdot \lg 5 = k$ бўлса, lg2 ва lg5 ни топинг.

6.103*. Агар $m^2 = a^2 - b^2$ бўлса,

$$\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$$

ифодани соддалаштиринг.

Такрорлашга доир машқлар

6.104. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{6x}{x+3} + 2 = \frac{x+3}{x}$;   2) $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-9} = 1$.

6.105. 10% ли кислотанинг ҳажми 4 л. Унга сув қўшиб, 4% ли кислота олинди. Кислотага неча литр сув қўшилган?

6.106. $\mathrm{tg}x = 3$ деб олиб,

1) $\frac{3\sin x - 4\cos x}{5\cos x - \sin x}$;   2) $\frac{2\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}$

ифоданинг қийматини топинг.

6.4. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи ва интеграли

Бу мавзуда кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи ва интегралини, уларнинг ёрдамида амалий масалаларни ечишни ўрганиб, оҳирида:

- кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини;
- кўрсаткичли функциянинг интегралини топа оласизлар;
- кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи ва интегралидан фойдаланиб, амалий масалаларни ечасиз.

6.4.1 Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи

Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини топиш ва интеграллаш формулаларини асослайлик. Аввал

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\,, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (2)$$

тенгликлар бажарилишини кўрсатамиз.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$.

(2) формулани исботлаш учун $a^x-1=y$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $x=\log_a(1+y)$ ва $x\to 0$ интилганда $y\to 0$. Бундан

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{l} a^x-1=y,\\ x=\log_a(1+y)\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a. \blacksquare$$

Энди ушбу формулаларнинг бажарилишини исботлайлик:

$$(a^x)'=a^x\ln a;\ (e^x)'=e^x.$$

▲ $y=a^x$, $a>1$, $a\neq 1$, $x\in(-\infty;+\infty)$ функция берилсин. Унинг x нуқтадаги орттирмасини аниқлайлик: $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$. Бундан ҳосиланинг таърифига кўра

$$y'=(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Шундай қилиб, $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$. Агар $a=e$ бўлса, у ҳолда $(e^x)'=e^x\cdot\ln e=e^x$. ■

Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи

$$(a^x)'=a^x\ln a;$$
$$(e^x)'=e^x.$$

1-мисол. $y=2^{x-3}$ функциянинг ҳосиласини топиш керак.

▲ Ҳосилани топиш қоидасига суяниб, $y'=(2^{x-3})'=2^{x-3}\cdot\ln 2$ бўлишини кўрамиз. ■

2-мисол. $y=e^{3x}-2x$ функциянинг қайси нуқтасига ўтказилган уринма Ox ўқи билан 45° бурчак ясайди?

▲ Бизга керак бўлган уринманинг бурчак коэффициенти 1 га тенг, чунки $\mathrm{tg}45^\circ=1$. У ҳолда $y'=3e^{3x}-2=1$ бўлиши керак. Демак, $x = 0$, яъни $x = 0$ нуқтада функцияга ўтказилган уринма Ox ўқи билан 45° бурчак ясайди. $y(0) = 1$ эканлигидан уринманинг тенгламаси $y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 1$ кўринишда ёзилади. ■

6.4.2. Кўрсаткичли функциянинг интеграли

$$(a^x)' = a^x \ln a;\ (e^x)' = e^x$$

формулаларни $y = a^x$ ва $y = e^x$ функцияларнинг бошланғич функциялари мос равишда $y = \dfrac{a^x}{\ln a}$ ва $y = e^x$ бўлишини кўрамиз. Агар шундай бўлса,

$$(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

3-мисол. 1) $\int \left(2^x \cdot 5^x\right) dx$; 2) $\int \dfrac{xe^x - x}{x} dx$ интегрални ҳисоблаш керак.

▲ 1) $\int \left(2^x \cdot 5^x\right) dx = \int 10^x dx = \dfrac{10^x}{\ln 10} + C$.

Баъзи бир функцияларнинг интегралини топиш учун аввал уни соддалаштириб олиш керак.

2) $$\int \frac{xe^x - x}{x} dx = \int \frac{x\left(e^x - 1\right)}{x} dx = \int \left(e^x - 1\right) dx =$$

$$= \int e^x dx - \int dx = e^x - x + C.$$ ■

1. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини топиш формуласини ёзинг.
2. Кўрсаткичли функциянинг интегралини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$ тенгликнинг тўғрилигини исботланг.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ тенгликнинг тўғрилигини исботланг.

Мисоллар

A

6.107. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = e^{3x}$; 2) $y = e^{2 + 5x}$; 3) $y = a^{1 - x}$; 4) $y = 3^{1 - 2x}$.

6.108. $y = 5^{7 - 2x}$ функциянинг бошланғич функциясини кўрсатинг.

A) $-2 \cdot 5^{7 - 2x} \ln 5 + C$; B) $-\dfrac{1}{2} \cdot 5^{7 - 2x} \ln 5 + C$;

C) $-\dfrac{2\cdot 5^{7-2x}}{\ln 5}+C$; D) $-\dfrac{5^{7-2x}}{2\ln 5}+C$;

E) $(7-2x)5^{7-2x}\ln 5+C$.

6.109. $y=2^{-3x+1}$ функциянинг бошланғич функциясини кўрсатинг.

A) $-3\cdot 2^{-3x+1}\ln 2+C$; B) $-\dfrac{1}{3}\cdot 2^{-3x+1}\ln 2+C$;

C) $-\dfrac{3\cdot 2^{-3x+1}}{\ln 2}+C$; D) $-\dfrac{2^{-3x+1}}{3\ln 2}+C$;

E) $(-2x+1)2^{-2x+1}\ln 2+C$.

6.110. Интегрални ҳисобланг:

1) $\int 3^{x}dx$; 2) $\int e^{3x}dx$; 3) $\int e^{5x-1}dx$;

4) $\int e^{x+1}dx$; 5) $\int 2^{2x-1}dx$.

6.111. Интегрални бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

1) $\int xe^{x}dx$; 2) $\int (2x+1)e^{x-1}dx$; 3) $\int xe^{3x}dx$.

6.112. Аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int\limits_0^1 (5e^{x}+x^3-4)dx$; 2) $\int\limits_0^1 (e^{x}+x)dx$;

3) $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$; 4) $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$.

6.113. $y=e^{x}$ функциянинг графиги билан ва $x=0$, $x=1$ тўғри чизиқлар билан, абсцисса ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни ясаб, юзини топинг.

6.114. $y=e^{x}$ функциянинг графиги ва $x=-1$, $x=1$ тўғри чизиқлар билан, абсцисса ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни ясаб, юзини топинг.

B

6.115. $f(x)=e^{x}+\sin x$ функциянинг $M(0;\ \sqrt{2}\ )$ нуқта орқали ўтувчи бошланғич функциясини топинг.

6.116. Ҳосилани топинг:

1) $y=e^{x}(4x-1)$; 2) $y=e^{-x}(1-x)$;
3) $y=(x^2-2x+2)\cdot 2^{x}$; 4) $y=3{,}5x^4e^{2x}$.

6.117. $y = e^x$ функция графигига уринувчи ва $y = ex + 1$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

6.118. $y = e^x$ функция графигига уринувчи ва $y = -2x$ тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

6.119. Координаталар боши орқали ўтувчи ва $y = e^{-x}$ эгри чизиққа уринадиган тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

6.120. $y = e^{2x}$ эгри чизиқ Oy ўқи билан қандай бурчак ясайди?

6.121. $y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ эгри чизиққа Oy ўқи билан кесишиш нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг. Эгри чизиқнинг графигини ясанг.

6.122. Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:
1) $y = e^x + e^{-x}$; 2) $y = (x + 1)e^{2x}$; 3) $y = (x^2 - 2x - 3) \cdot e^{x-2}$.

6.123. $y = x^2e^x$ функцияни текшириб, графигини ясанг.

6.124. Ўзарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

1) $\int xe^{x^2}dx$; 2) $\int xe^{-x^2}dx$;

3) $\int \frac{e^{\mathrm{ctg}x}}{\sin^2 x}dx$; 4) $\int e^{\cos x}\sin x dx$.

C

6.125. Функциянинг берилган тартибли ҳосилаларини топинг:

1) $y = e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$, y^{IV} – ?; 2) $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$, y''' – ?;

6.126. Ўзарувчини алмаштириш қоидасидан фойдаланиб, $\int x^2e^{x^3}dx$ интегрални ҳисобланг.

6.127. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x + C$ эканлиги маълум. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ интегрални ўзгарувчини алмаштириш қоидасидан фойдаланиб ҳисобланг.

6.128*. Интегралларни бўлаклаб интеграллаш қоидаси билан ҳисобланг:

1) $\int e^x \cdot \cos x dx$; 2) $\int e^x \cdot \sin x dx$.

Такрорлашга доир машқлар

6.129. 11 га бўлинадиган барча уч хонали сонларнинг йиғиндисини топинг.

6.130. $y = 0{,}5x - 5$ тўғри чизиқ $y = 2x - 8$ ва $3y + 7x = 2$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтадими?

6.131. Айниятни исботланг:

$$\frac{1+2\cos t\sin t}{\sin^2 t-\cos^2 t}=\frac{\operatorname{tg}t+1}{\operatorname{tg}t-1}.$$

6.5. Логарифмик функциянинг ҳосиласи

Бу мавзуда логарифмик функциянинг ҳосиласини топишни ва унинг ёрдамида амалий масалалар ечишни ўрганиб, оҳирида:

- **логарифмик функциянинг ҳосиласини топа оласизлар;**
- **логарифмик функциянинг ҳосиласидан фойдаланиб, амалий масалаларни ечасиз.**

Логарифмик функциянинг ҳосиласини топиш формуласини асослайлик. Олдинги бўлимда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

тенглик бажарилишини кўрсатганмиз.

Энди $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$; $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ формулаларнинг тўғрилигини исботлайлик.

▲ Аввал $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in(0;+\infty)$ функциянинг орттирмасини кўриб чиқамиз:

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

У ҳолда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$. Агар $a=e$ бўлса, $y=\ln x$, $x>0$ функциянинг ҳосиласи $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ кўринишда аниқланади. ■

Логарифмик функциянинг ҳосиласи

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

1-мисол. 1) $y = \ln(x + 1)$; 2) $y = \ln(1 + \sin x)$ функциянинг ҳосиласини топиш керак.

▲ 1) 1) Мураккаб функциядан ҳосила олиш қоидаси бўйича

$$y' = (\ln(x + 1))' = \frac{1}{x+1} \cdot (x + 1)' = \frac{1}{x+1} \cdot 1 = \frac{1}{x+1}.$$

2) $y' = (\ln(\sin x + 1))' = \dfrac{1}{\sin x+1} \cdot (\sin x + 1)' = \dfrac{1}{\sin x+1} \cdot \cos x =$

$= \dfrac{\cos x}{\sin + 1}$. ■

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ эканлигидан, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x) = \ln x + C$ бўлади. У ҳолда

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

2-мисол. 1) $\int \operatorname{ctg} x dx$; 2) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx$ интегрални ҳисоблайлик.

▲ 1) $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \dfrac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{c} \text{ўзгарувчини} \\ \text{алмаштириш} \\ \text{қоидаси} \\ \sin x = y \\ \cos x dx = dy \end{array} \right| = \int \dfrac{1}{y} dy = \ln|y| + C =$

$= \ln|\sin x| + C.$

2) Аввал аниқланмаган коэффициентлар усули билан

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

оламиз. У ҳолда

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C. \ ■$$

3-мисол. $\int \ln x dx$ интегрални ҳисоблаш керак.

▲ Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланамиз:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ dx = dv \\ du = \dfrac{dx}{x},\ x = v \end{array} \right| = x\ln x - \int x \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C. \ ■$$

1. Логарифмик функциянинг ҳосиласини топиш формуласини исботланг.
2. Натурал логарифмик функциянинг ҳосиласини топиш формуласини ёзинг.

Мисоллар

А

6.132. Ҳосилани топинг:

1) $y = \ln(3x - 2)$; 2) $y = \ln\sqrt{x}$;

3) $y = \ln(1 - x)^2$; 4) $y = \log_a(2x - 3)$.

6.133. $y = \log_3 2x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

A) $\frac{1}{2x}$; B) $\frac{1}{x\ln 3}$; C) $\frac{1}{2x\ln 3}$; D) $\frac{2}{x\ln 3}$; E) $\frac{2}{x}$.

6.134. $y = 3\lg x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

A) $\frac{3}{x\lg x}$; B) $\frac{1}{x}$; C) $\frac{3}{x}$; D) $\frac{3}{x\ln 10}$; E) $\frac{1}{3x\lg x}$.

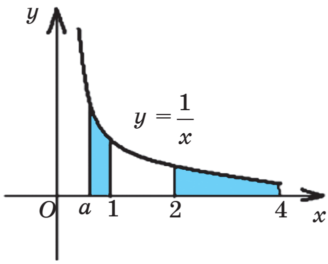
6.135. Интегрални ҳисобланг:

1) $\int \frac{dx}{2x-1}$; 2) $\int \frac{dx}{5x-1}$; 3) $\int \frac{x-3}{x-1}dx$; 4) $\int \frac{1}{x(x+1)}dx$.

6.136. Интегрални бўлаклаб интеграллаш усули билан ҳисобланг:

1) $\int \ln 4x dx$; 2) $\int x\ln x dx$; 3) $\int x\ln 2x dx$; 4) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

6.137. 6.14-расмда тасвирланган эгри чизиқли трапециянинг юзалари a нинг қандай қийматларида тенг бўлишини аниқланг.



6.14-расм

6.138. Аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int_0^1 \left(e^x - \frac{3}{x+1}\right)dx$; 2) $\int_1^3 \frac{2}{x}dx$;

3) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)dx$; 4) $\int_0^2 \left(\frac{5}{x+1}\right)dx$; 5) $\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$.

6.139. $y = \frac{1}{x}$ функциянинг графиги ва $x = 1$, $x = 3$ тўғри чизиқлар билан, абсциссалар ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни ясаб, юзини топинг.

6.140. $y = \dfrac{4}{x}$ функциянинг графиги ва $x = 1$, $x = e$ тўғри чизиқлар билан, абсциссалар ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни ясаб, юзини топинг.

B

6.141. Ҳосилани топинг:

1) $y = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$; 2) $y = \log_2 \sin 3x$; 3) $y = \ln \mathrm{tg}\, 2x$.

6.142. Координатар боши орқали ўтувчи ва $y = \ln x$ эгри чизиққа уринувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

6.143. Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:

1) $y = \ln(3x - 2)$; 2) $y = (x + 1)\ln(x + 1)$; 3) $y = x\ln\sqrt{x}$.

6.144. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ функциянинг $M(e^3;\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи бошланғич функциясини топинг.

6.145. Интегрални ҳисобланг:

1) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x-7}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{5x+3}dx$.

6.146. Янги ўзгарувчи киритиш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

1) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{2\ln^2 x + 2}{x}dx$; 3) $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, x dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 4}dx$; 5) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x - 4}dx$.

Амалий топшириқ

6.147. Миллий иқтосидиёт министрлигининг статистикасига суянсак, Қозоғистон аҳолисининг сони 2016 йилнинг бошида 17669896 киши, 2017 йилнинг бошида 17918214 киши бўлган. Логарифмик ва кўрсаткичли функциядан фойдаланиб, мамлакатимиздаги аҳоли сони таҳминан қачон 20 миллиондан ортишини аниқлаш керак.

▲ Аҳоли сонининг қандайдир вақт оралиғида ўсиши $N(t) = N_0e^{kt}$ формула билан аниқланади, бунда N_0 – аҳолининг дастлабки сони ($t = 0$), N – аҳолининг t вақтдаги сони, k – аҳоли сонининг ўсиш суръатини тавсифловчи ўзгармас катталик. Энди k нинг қийматини топамиз. $N(t)$

– аҳоли сонининг вақтга боғлиқ ўзгаришини тавсифловчи функция. Унинг ҳосиласи $N'(t)$ функциянинг ўзгариш тезлигини тавсифлайди. Аҳоли сонининг ўзгариш тезлиги унинг сонига пропорционал (аҳоли сони кўп бўлгани сайин унинг ўсиши ҳам тез ортади) . Бундан $N'(t) = k \cdot N(t)$. Тенгламани дифференциал орқали ёзсак, $\frac{dN}{dt} = k \cdot N \Rightarrow \frac{dN}{N} = kdt$.

Тенгликнинг иккала томонига $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ формулани

қўллаб интеграллаймиз:

$$\int \frac{1}{N} dN = \int kdt \Rightarrow \ln N = kt + C_1 \Rightarrow N = Ce^{kt} .$$

$t = 0$ бўлса, $C = N_0, \Rightarrow N(t) = N_0 e^{kt}$.
2016 йилни даслабки вақт деб олсак, масала шарти ушбу кўринишга келади: $t = 0 \Rightarrow N_0 = 17669896$.
1 йилдан кейин 2017 йили 17918214 киши бўлди, яъни $t = 1 \Rightarrow N = 17918214$. Ушбу берилганлардан фойдаланиб k ўзгармасни топамиз: $17918214 = 17669896e^{k \cdot 1} \Rightarrow e^k =$ $= \frac{17918214}{17669896} \approx 1{,}014053$. Натурал логарифмдан фойдалансак, $k = \ln 1{,}014053 \approx 0{,}01396$. Шундай қилиб, $N(t) = 17669896e^{0{,}01396t}$ функция билан мамлакатимизнинг аҳоли сонининг ўсишини тавсифлаш мумкин. Энди қанча вақтда 20 миллиондан ортишини тахминан ҳисоблайлик. Бунинг учун аниқланган функциямизга сон қийматларни қўйиб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$20\ 000\ 000 = 17\ 669\ 896e^{0{,}01396t} \Rightarrow e^{0{,}01396t} = \frac{20\,000\,000}{17669896} \approx$ $\approx 1{,}1\ 318\ 66$.

$0{,}01396t = \ln 1{,}131866 \approx 0{,}12387 \Rightarrow t \approx 9$. 2016 йилдан бошлаб ҳисоблаганда 9 йилда аҳолининг сони 20 миллионга етади, у $2016 + 9 = 2025$ йил. ■

6.148. $y = x\log_2 x$ функцияни текшириб, графигини ясанг.

C

6.149. Функциянинг берилган тартибдаги ҳосилаларини топинг:

1) $y = \frac{\log_3 x}{x^2}$, y^{IV} – ?; 2) $y = (5x - 1)\ln^2 x$, y''' – ?

6.150. Эгри чизиқларнинг умумий нуқталарида ўтказилган уринмалари ҳам умумий бўлса, бу эгри чизиқлар ўзаро уринади дейилади. $y = \frac{x^2}{2e}$ парабола $y = \ln x$ эгри чизиққа уринишини кўрсатиб уриниш нуқталарини топинг.

6.151. $y = \ln x$ функциянинг графиги билан, $x = e$ тўғри чизиқ билан ва абсциссалар ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни чизиб, юзини топинг.

6.152*. Интеграл остидаги ифодани аниқланмаган коэффициентлар усули билан ажратиб олиб ҳисобланг:

1) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$; 2) $\int \frac{7x + 8}{(x - 1)(2x + 3)} dx$;

3) $\int \frac{2x + 8}{x(x - 1)(x + 2)} dx$.

Такрорлашга доир машқлар

6.153. $3x + 0{,}6y = 3{,}5$ тўғри чизиқ $y = 2x - 8$ ва $3y + 7x = 2$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтадими?

6.154. Айниятни исботланг:

$$\frac{1 + \mathrm{tg}t + \mathrm{tg}^2 t}{1 + \mathrm{ctg}t + \mathrm{ctg}^2 t} = \mathrm{tg}^2 t.$$

«КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ» бўлимининг хулосаси

$a > 0$, $a \neq 1$ учун $y = a^x$ функциянинг асоси a га тенг бўлган *кўрсаткичли функция* деб аталади. Кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳаси – $(-\infty; +\infty)$ тўплам. Кўрсаткичли функциянинг қийматлар тўплами – $(0; +\infty)$, яъни барча $x \in (-\infty; +\infty)$ учун $a^x > 0$ тенгсизлик бажарилади.

Агар $a > 1$ бўлса, $y = a^x$ кўрсаткичли функция ўсувчи, агар $0 < a < 1$ бўлса, $y = a^x$ кўрсаткичли функция камаювчи.

$\lim\limits_{a \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = e \approx 2{,}7183$. Ушбу лимитнинг қиймати *е сони* деб аталади.

Берилган мусбат соннинг берилган асосли *логарифми* деб шу асоснинг берилган сонга тенг бўлган даража кўрсаткичига айтилади, яъни $b > 0$ сонининг a ($a > 0$, $a \neq 1$) асосли логарифми деб $a^c = b$ тенгликни қаноатлантирувчи c сонга айтилади. У қуйидагича белгиланади: $\log_a b$.

$\boldsymbol{b = a^{\log_a b}}$ тенглик – логарифмларнинг *асосий айнияти.*

Исталган $a > 0$ $(a \neq 1)$ ва b, c мусбат сонлар учун:

1 . $\log_a 1 = 0$; 2 . $\log_a a = 1$;

3 . $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$; 4 . $\log_a \dfrac{a}{c} = \log_a b - \log_a c$;

5 . $\log_a b^m = m \log_a b$, $m \in R$; 6 . $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$, $n \in R$, $n \neq 0$;

7 . $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$.

Асоси 10 га тенг бўлган логарифм ўнли логарифм деб аталиб, у lg каби белгиланади, яъни $\log_{10} a = \lg a$.

Асоси e га тенг бўлган логарифм *натурал логарифм* деб аталиб, у ln каби белгиланади: $\log_e a = \ln a$.

$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ кўринишда берилган функция асоси a бўлган *логарифмик функция* деб аталади. Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси-барча мусбат сонлар тўплами $R+$, яъни $D(\log_a x) = (0;\ +\infty)$. Логарифмик функциянинг қийматлар тўплами-барча ҳақиқий сонлар тўплами R, яъни $(-\infty;\ +\infty)$.

Агар $a > 1$ бўлса, $y = \log_a x$ логарифмик функция ўсувчи. Агар $0 < a < 1$ бўлса, $y = \log_a x$ логарифмик функция камаювчи.

Бир хил асосли логарифмик $y = \log_a x$ ва кўрсаткичли $y = a^x$ функцияларнинг графиклари I ва III координаталар чоракларининг биссектрисалари бўлиб, $y = x$ ўқига нисбатан симметрик жойлашади.

$$(a^x)' = a^x \ln a\ ; \quad (e^x)' = e^x\ ; \quad \int e^x dx = e^x + C\ ;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ , \ a > 0, \ a \neq 1\ ; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ ; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\ .$$

Термин сўзлар луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Логарифм	Логарифм	Логарифм	Logarithm
Кўрсаткичли функция	Көрсеткіштік функция	Показательная функция	Exponential function
Ўнли логарифм	Ондық логарифм	Десятичный логарифм	Decimal logarithm
Натурал логарифм	Натурал логарифм	Натуральный логарифм	Natural logarithm
Ўсувчи функция	Өспелі функция	Возрастающая функция	Increasing function
Камаювчи функция	Кемімелі функция	Убывающая функция	Decreasing function

VII бўлўм. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

2014 йили қозоқ даласида яшаган сайгоқлар сони 257 минг, 2015 йили 295470 бўлди, бироқ шу йили пастереллез касаллиги сабабли фақат Бетпақдала популяциясининг ўзидангина 130000 сайгоқ қирилиб кетди. 2016 йилги саноқ бўйича уларнинг умумий сони 108300 бўлди. Бўлим оҳирида логарифмик ва кўрсаткичли тенгламалардан фойдаланиб, мамлакатимиздаги сайгоқлар сони қайси йили 2015 йилги сонидан ошишини аниқлайсизлар.

Маълумотлар олинган ресурс:
https://www.inform.kz/ru/msh-rk-chislennost-saygakov-v-kazahstane-sostavly-aet-bolee-108-tys-osobey_a2914497

Олдинги бўлимда кўрсатилгани каби кўрсаткичли ва логарифмик функциялар фанда ва кундалик ҳаётда кенг фойдаланилади. Шу функциялар ёрдамида ҳодисаларнинг математик моделини қуриб, текшира оламиз. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар ва тенгсизликлар фанннинг барча соҳаларида учрайди. Физика, химия, биология ва бошқа фанларнинг кўпгина масалаларини ечишда аталган тенгламалардан фойдаланилади.

Бўлимда ўрганиладиган мавзулар:

7.1. Кўрсаткичли тенгламалар ва тенгламалар системаси
7.2. Логарифмик тенгламалар ва тенгламалар системаси
7.3. Кўрсаткичли тенгсизликлар
7.4. Логарифмик тенгсизликлар ва тенгсизликлар системалари

7.1 Кўрсаткичли тенгламалар ва уларнинг системалари

Бу мавзуда кўрсаткичли тенгламалар ва уларнинг системаларини ўрганиб, оҳирида:

- содда кўрсаткичли тенгламанинг таърифини биласиз;

- кўрсаткичли тенгламаларни ечишнинг усулларини ўзлаштирасиз;
- кўрсаткичли тенгламалар системасини ечишни ўрганасиз.

Даража кўрсаткичи ўзгарувчи бўлган тенгламалар кўрсаткичли тенгламалар деб аталади. Масалан,

$$2^x = 32;\ 7^x + 3 \cdot 7^{1-x} = 6;\ 5^x - 13^x + 8^x = 0.$$

Таъриф. *Агар $a > 0$, $a \neq 1$ ва $b > 0$ бўлса, у ҳолда $a^x = b$ тенглама* ***содда кўрсаткичли тенглама*** *деб аталади.*

Олдинги бўлимда $b > 0$ бўлганда битта илдизи мавжуд эканлигини, $b < 0$ бўлганда унинг илдизлари мавджуд бўлмаслигини кўрсатганмиз. Ушбу маълумотлардан $b > 0$ бўлганда $a^x = b$ тенгламанинг ягона илдизи

$$x = \log_a b \qquad (1)$$

тенглик билан аниқланиши келиб чиқади.

1-мисол. $2^{x-2} = 16$ тенгламани ечамиз.

▲ (1) формулага кўра

$$x - 2 = \log_2 16 \Leftrightarrow x = 2 + \log_2 2^4 \Leftrightarrow x = 2 + 4\log_2 2 \Leftrightarrow x = 6.$$

Жавоб: $x = 6$. ■

Одатда кўрсаткичли тенгламаларни $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ кўринишга келтириб ечилади. Бу тенглама $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ функцияларнинг умумий аниқланиш соҳасида $f(x) = g(x)$ тенглама билан тенгкучли бўлади.

Кўрсаткичли тенгламаларни ечишнинг бир нечта усуллари мавжуд-тенгламанинг асасини бир хил асосга келтириш усули, кўпайтувчиларга ажратиш орқали ва янги ўзгарувчи киритиш усули. Ушбу усулларни мисоллар орқали кўриб чиқамиз.

Тенгламанинг иккала томонини бир хил асосга келтириш усули

$a^x = b$ содда тенгламани ечиш учун мумкин бўлса, ўнг томонидаги ифодани (b ни) асоси a бўлган даража кўринишига келтирилади. Масалан, кўрилаётган мисолда $16 = 2^4$ эканлигини эътиборга олиб, берилган тенгламани $2^{x-2} = 2^4$ кўринишда ёзилса, етарли. Бундан

$$x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

Жавоб: $x = 6$. ■

2-мисол. 1) $5^x = 125$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; 3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ тенгламаларни ечамиз.

▲ 1) $125 = 5^3$ эканлигини эътиборга олсак, $5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Жавоб: $x = 3$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ тенгламани ечиш учун $81 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ эканлигини эътиборга олсак, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$; Жавоб: $x = -4$. ■

3) $2^{x^2-6x-2,5}=16\sqrt{2}$. Аввал $16\sqrt{2}$ сонни рационал кўрсаткичли даражанинг хоссасидан фойдаланиб, асоси 2 бўлган даражага келтирамиз: $16\sqrt{2}=2^4\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{4,5}$. У ҳолда берилган тенглама $2^{x^2-6x-2,5}=2^{4,5}$ кўринишга келади. Бундан, $x^2-6x-2,5=4,5$ ёки $x^2-6x-7=0$. Тенгламанинг илдизлари -1 ва 7.

Жавоб: $x=-1$, $x=7$. ■

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$. Аввал тенгламанинг чап томонига даражанинг $a^x\cdot b^x=(ab)^x$ хоссасини қўллаймиз: $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}\Rightarrow$ $\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{27}{64}=\left(\frac{3}{4}\right)^3\Rightarrow x=3$.

Жавоб: $x=3$. ■

3-мисол. $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0,5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$ тенгламани ечамиз.

▲ Тенгламанинг ҚҚМБҚТ и $x>0$, $x\neq 1$ тенгсизликлар билан аниқланади. ҚҚМБҚТ да берилган тенглама қуйидагича ёзилади: $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 2^{-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}==2^{\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}\Rightarrow 2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}$.

Бундан $\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{2}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{3}{\sqrt{x}+1}\Rightarrow 2\sqrt{x}=4\Rightarrow$ $\Rightarrow x=4$.

Жавоб: $x=4$. ■

Умуман, тенгламаларни ечишда янги ўзгарувчи киритиш ва кўпайтувчиларга ажратиш усуллари кўп қўлланилади. Бу икки усул ҳам берилган мураккаб тенгламани бир нечта содда тенгламалар тўпламига келтириб ечилади. Шундай қилиб, кўрсаткичли ва логарифмик тенгламаларни шакл алмаштиришда уларнинг тенг қийматлилигига эътибор бериб, кўрсаткичли ва логарифмик функцияларга тегишли бўлган хоссалардан фойдаланиш керак. Энди мураккаб кўрсаткичли тенгламаларни ечиш усулларини кўриб чиқамиз.

Кўпайтувчиларга ажратиш усули

Аталган усулда кўрсаткичли функция умумий кўпайтувчи сифатида қавснинг олдига чиқарилиб, берилган тенглама содда кўрсаткичли тенгламага келтиралади.

4-мисол. 1) $6^{x+2}-6^x=210$; 2) $3^{3\cos x-1}+3^{3\cos x-2}+3^{3\cos x-3}=13$ тенгламаларни ечамиз.

▲ 1) $6^{x+2}-6^x=210$ тенгламани шакл алмаштирамиз:

$$6^x\cdot 36-6^x=210\Rightarrow 35\cdot 6^x=210\Rightarrow 6^x=6\Rightarrow x=1.$$

Жавоб: $x=1$. ■

2) $3^{3\cos x-1}+3^{3\cos x-2}+3^{3\cos x-3}=13$. Умумий кўпайтувчини қавс сиртига чиқарсак, $3^{3\cos x-3}(3^2+3+1)=13 \Rightarrow 3^{3\cos x-3}=1=3^0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3\cos x-3=0 \Rightarrow \cos x=1$ тригонометрик тенгламани ечамиз: $x=2\pi n,\ n\in Z$.

Жавоб: $x=2\pi n,\ n\in Z$. ■

5-мисол. $x^2\cdot 2^{\sqrt{x}}+x+2=2^{1+\sqrt{x}}+x^2+x\cdot 2^{\sqrt{x}}$ тенгламани кўпайтувчиларга ажратиш усулидан фойдаланиб ечамиз.

▲ Тенгламанинг ҚҚМБҚТ $x\geqslant 0$ тенгсизлик билан аниқланади. Гуруҳлаш усули билан берилган тенгламани $x^2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)-x\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)-2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$ ёки $\left(x^2-x-2\right)\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)=0$ кўринишга келтирамиз. У ҳолда берилган тенглама $x^2-x-2=0$ ва $2^{\sqrt{x}}-1=0$ тенгламалар тўпламига тенгкучли бўлади. Биринчи тенгламанинг илдизлари $x_1=-1,\ x_2=2$ бўлса, иккинчи тенгламанинг ечими $x_3=0$. Бунда $(-1)\notin[0;+\infty)$ ва $0\in[0;+\infty)$; $2\in[0;+\infty)$ эканлигидан мисолнинг жавоби: 0; 2.

Жавоб: $x=0,\ x=2$. ■

Янги ўзгарувчи киритиш усули

6-мисол. $81^x-2\cdot 9^x-3=0$ тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечамиз.

▲ Бунда $9^x=y$ белгилаш киритсак, берилган тенгламани $y^2-2y-3=0$ кўринишда ёзамиз. Бундан $y_1=-1,\ y_2=3$. $y=9^x$ кўрсаткичли функция фақат мусбат қийматлар қабул қилганлигидан, $y_1=-1$ илдизни кўриб чиқмаймиз. У ҳолда $9^x=3$ тенгламадан $x=0{,}5$ тенгликни оламиз.

Жавоб: 0,5. ■

7-мисол. $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$ тенгламани ечиш керак.

▲ Тенгламани $6\cdot 3^{2x}-13\cdot 2^x\cdot 3^x+6\cdot 2^{2x}=0$ кўринишда ёзиб, уни $2^{2x}\,(2^{2x}\neq 0)$ ифодага бўламиз: $6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+6=0$. Бунда $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y$ белгилаш киритиб, уни $6y^2-13y+6=0$ тенглама билан алмаштирамиз. Бу тенгламанинг илдизлари:

$$y_1=\frac{2}{3},\quad y_2=\frac{3}{2}.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{3}{2}$ тенгламалардан берилган мисолнинг жавобини оламиз: $x_1=-1,\ x_2=1$.

Жавоб: $x=-1,\ x=1$. ■

Шу билан бир қаторда $[a(x)]^{f(x)}=[a(x)]^{g(x)}$ кўринишдаги кўрсаткичли тенгламалар ҳам учрайди. Бунда $f(x)$ ва $g(x)$ ифодаларнинг аниқланиш соҳалари билан $a(x)>0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ўзгарувчининг қийматлар тўпламларининг кесишмаси тенгламанинг ҚҚМКҚТ ни аниқлайди. Агар $m > 0$, $m \neq 1$ бўлса, бу тенглама $f(x)\log_m a(x) = g(x)\log_m a(x)$ тенглама билан тенгкучли. Бу тенглама умумий ҳолда ушбу иккита тенгламалар тўплами билан тенгкучли:

$$\log_m a(x) = 0,\ f(x) = g(x).$$

ҚҚМБҚТ да эса $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ бўлса, кўрсатилган тўплам таркибига $a(x) = 0$ тенгламани қўшиш керак.

8-мисол. $|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2$ тенгламани ечиш керак.

▲ x нинг исталган ҳақиқий қийматида тенглама маънога эга, яъни ҚҚМБҚТ и $(-\infty; +\infty)$. Кўрсатилган эслатма бўйича бу тенглама $x - 3 = 0$ ёки $|x - 3| = 1$ ва $x^2 - x = 2$ тенгламалар тўплами билан тенгкучли. Бундан $x_1 = 3$; $|x - 3| = 1 \Rightarrow x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x^2 - x = 2 \Rightarrow$ $x_4 = = -1$, $x_5 = 2$.

Жавоб: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = -1$, $x_5 = 2$. ■

Энди кўрсаткичли тенгламалар системасини ечишга мисол кўриб чиқамиз.

9-мисол. $\begin{cases} 3^x + 2^{x+2y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+2y} = 1 \end{cases}$ системани ечамиз.

▲ Берилган системани $\begin{cases} 3^x + 2\cdot 2^{x+2y} = 5, \\ 3\cdot 3^x - 2^{x+2y} = 1 \end{cases}$ кўринишда ёзамиз.

$3^x = u$, $2^{x+2y} = v$ белгилашлар киритсак,

$$\begin{cases} u + 2v = 5, \\ 3u - v = 1. \end{cases}$$

Бундан $u = 1$, $v = 2 \Rightarrow 3^x = 1$, $2^{x+2y} = 2 \Rightarrow x = 0$, $x + 2y = 1$. Бундан $x = 0$, $y = 0{,}5$. Жавоб: $x = 0$, $y = 0{,}5$. ■

1. Содда кўрсаткичли тенглама деб нимага айтилади?
2. Кўрсаткичли функциянинг хоссаларини айтинг.
3. Кўрсаткичли тенгламани ечишнинг асосий усулларининг алгоритми қандай?
4. Рационал кўрсаткичли даражанинг формуласини ёзинг.

Мисоллар

А

7.1. Содда кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

1) $5^x = 625$; 2) $2^x = 1024$; 3) $3^x = 729$;

4) $7^x = \dfrac{1}{343}$; 5) $2^{x+3} = 64$; 6) $3^{\frac{x}{2}} = 27$;

7) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x} = 216$; 8) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$; 9) $6^{3-x} = 216$;

10) $8^x = 4^{0,5}$; 11) $3^x = 7$; 12) $(0,2)^{x+1} = 5$.

7.2. Тенгламанинг иккала томонини бир хил асосга келтириб, кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

1) $2^{3x} = 512^{\frac{1}{3x}}$; 2) $0,5^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$;

3) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$; 4) $\left(\dfrac{1}{0,125}\right)^{x} = 128$;

5) $5^{x^2+x-5} = \dfrac{1}{125}$; 6) $(0,5)^{x^2-9x+17,5} = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$.

7.3. Фермер ҳашаротларнинг экинга зиён етказиш жараёнини кузатди. Кузатиш натижасида ҳашаротларнинг зиён етказган худуди $A_n = 1000 \cdot 2^{0,7n}$ га (бунда n – ҳафта сони) қонуниятга бўйсуниши аниқланди. A_n графикни ясаб, ҳашаротлар неча кундан кейин 5000 га ерга зиён келтириши мумкин эканлигини топиш керак.

▲ n – вақт эканигини эътибога олсак, зиён келтириш жараёни

$$y = 1000 \cdot 2^{0,7x}$$

кўрсаткичли функция билан тавсифланади. Унинг графиги ўсувчи функция.

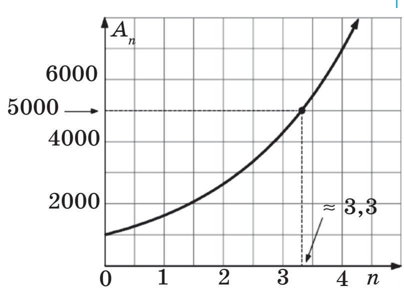
https://www.desmos.com/calculator онлайн график калькулятор ёрдамида графикни ясаймиз.

Энди 5000 га ерга зиён етказиш вақтини топиш учун кўрсаткичли тенгламани ечамиз:

$A_n = 5000 \Rightarrow 1000 \cdot 2^{0,7n} = 5000$; $2^{0,7n} = 5$; $0,7n = \log_2 5$;

$n = \dfrac{10}{7}\log_2 5 \Rightarrow \log_2 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 2}$;

$n = \dfrac{10\lg 5}{7\lg 2} \approx 3,3$.



3,3 ҳафтада ёки 3 ҳафта 2 кун, яъни 23 кунда ҳашаротлар 5000 га ерга зиён келтиради. ■

Амалий топшириқлар (7.4–7.10):

Популяциянинг ўсиши (камайиши)

7.4. Бактериялар қулай муҳитга солинган. Уларнинг массаси (граммларда) вақт ўтган сайин ўсади ва унинг вақтга (соатларда) боғлиқлиги $W_t = 20 \cdot 2^{0,15t}$ функция билан аниқланади. Бактерияларнинг массаси 1) 30 г; 2) 100 г бўлиши учун қанча вақт керак?

7.5. Бактериялар қулай муҳитга солинган. Уларнинг массаси (граммларда) вақтга(соатларда) боғлиқлик қонуни $M_t = 25 \cdot e^{0,1t}$ функция билан аниқланади. Бактерияларнинг массаси 1) 50 г; 2) 100 г бўлиши учун қанча вақт керак?

7.6. Биолог чумолининг янги худуддаги тарқалишининг мониторингини ясади. Кузатишлар натижасида чумолиларнинг тарқалиш худуди $A_n = 2000 \cdot e^{0,57n}$ га қонунга бўйсуниши аниқланган, бунда n – ҳафта сони. A_n графигини ясанг ва чумолиларнинг 10000 га ерга тарқалиши учун керак бўлган вақтни топинг.

Молиявий ўсиш

U_0 пул ҳажми маълум бир муддатга r фоиз билан инвестицияга солинса, n муддатдан кейин тўпланган пул миқдори $U_n = U_0 \cdot (1 + r)^n$ формула билан ҳисобланади. n ни топиш учун логарифмдан фойдаланиб кўрсаткичли тенглама ечилади.

7.7. Мақсад 200000 тенге пулини йиллик фоизи 10% бўлган депозита солди. Унинг пули 1000000 тенге бўлиши учун у қанча вақт кутиши керак?

▲ $U_n = U_0 \cdot (1 + r)^n$ формуладан фойдалансак,

$$U_n = 1\,000\,000,\ U_0 = 200\,000,\ r = 0,1;$$

$$1\,000\,000 = 200\,000 \cdot (1 + 0,1)^n \Rightarrow 5 = 1,1^n;$$

$n = \log_{1,1}5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 1,1} = 16,89$. Мақсаднинг депозитдаги пули 16,89 йил ёки тахминан 203 ойдан кейин миллионга етади. ■

7.8. Уйнинг нархи вақт ўтган сайин йилига 7,5% га қимматлайди. Агар уйнинг ҳозирги нархи 16 000 000 тенге бўлса, қанча вақтдан кейин унинг нархи 25 000 000 тенгега етишини аниқланг.

7.9. Темур 100000 тенгени йиллик ўсими 12,8% бўлган депозитга солди. Қанча вақтдан кейин унинг пули 150 000 тенге бўлади?

7.10. Дамир 15000 тенгени ой сайин 4,8% мураккаб фоиз билан ўсувчи ҳисоб рақамига солди. Неча ойдан кейин пул миқдори 25 000 тенгега етади?

7.11. Кўрсаткичли тенгламаларни кўпайтувчиларга ажратиш усули билан ечинг:

1) $5^{x+2} - 5^x = 120$; 2) $3^{x+2} - 3^x = 72$;
3) $2^x - 2^{x-4} = 15$; 4) $3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1} = 3159$;
5) $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$; 6) $3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270$.

7.12. Кўрсаткичли тенгламаларни ечинг:

1) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$; 2) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;
3) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$;
4) $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$.

7.13. Кўрсаткичли тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг:

1) $9^{x+3} + 3^{x+2} = 10$; 2) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$;
3) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; 4) $5^{4\sqrt{x}} - 14 \cdot 5^{2\sqrt{x}} - 275 = 0$.

7.14. Тенгламаларни ечинг:

1) $5^{2x^2-x} = 6^{2x^2-x}$; 2) $8 \cdot 7^{x^2-5x+7} = 7 \cdot 8^{x^2-5x+7}$;
3) $0,6x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$; 4) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{125}{27}\right)^3$.

7.15. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{0,5y} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

B

Амалий топшириқлар (7.16–7.19):

7.16. Радиоактив модданинг M_t массаси (граммларда) t вақт (ҳафта) ўтган сайин парчаланиб, камаяди ва $M_t = 1000 \cdot e^{-0,04t}$ қонунятга бўйсунади. Модда массасининг ярimпарчаланиш вақтини топинг. Қанча вақтдан кейин модданинг массаси 25 г бўлади?

7.17. Аэропландан сакраган парашютчининг пастга тушиш тезлиги $V = 50(1 - e^{-0,2t})$ м/с. Қанча вақтдан кейин унинг тезлиги 40 км/соат бўлади?

7.18. Музлатгичга солинган суюқликнинг температураси $T = 4 + 96 \cdot e^{-0,03t}$ °С қонуниятга бўйсунади, бунда t – минутларда берилган вақт. Суюқликнинг температураси 1) 25 С; 2) 5 С бўлиши учун қанча вақт кетишини топинг. Музлатгичнинг ўзининг температураси қандай?

7.19. Радиоактив модданинг M_t массаси (граммларда) t ўтган сайин парчаланиб, камаяди ва $M_t = 1000 \cdot 2^{-0,04t}$ қонунятга бўйсунади. Модда массасининг яримпарчаланиши учун қанча вақт кетишини топинг. Қанча вақтдан кейин модданинг массаси дастлабки массасининг 1% ини ташкил этади?

7.20. Тенгламаларни ечинг:

1) $2^{2x^2-5x-1} = 0,5\sqrt[3]{4^{2x}}$; 2) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

3) $25^{x-1} - 9^{2x-2} + 8 \cdot 5^{2x-3} = 4 \cdot 9^{2x-3}$;

4) $81^x - 5^{2x} - 4 \cdot 9^{2x-1} = 4 \cdot 5^{2x-1}$.

7.21. Тенгламаларнинг ягона илдизини топинг:

1) $7^x + 24^x = 25^x$; 2) $12^x + 5^x = 13^x$;

3) $2^{x^2} + 5^{x^4} = 2 - \mathrm{tg}^2 x$; 4) $3^{x^2+1} + 5^{x^4} = 4 - \sin^2 x$.

7.22. Тенгламаларни ечинг:

1) $2^{x^2-6x+0,5} = \dfrac{1}{16\sqrt{2}}$; 2) $16\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}} = 128$;

3) $3^{x+1} \cdot 4^x = 0,25 \cdot 12^{3x-1}$; 4) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Тенгламаларни ечинг **(7.23–7.29)**:

7.23. 1) $5^{x-1} = 2$; 2) $16^{2x-1} = 8^{x-2}$;

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1} = 3$; 4) $2^{3x-1} = (0,25)^{2-x}$.

7.24. 1) $\sqrt{3^{x-54}} - 7\cdot\sqrt{3^{x-58}} = 162$; 2) $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$;

3) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; 4) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$.

7.25. 1) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$; 2) $5^{x-3} - 5^{x-4} = 16 \cdot 5^{x-5} + 4$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

7.26. 1) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$; 2) $3^{2-x} \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$.

7.27. 1) $\sqrt[x]{3}-\sqrt[2x]{3}-2=0$; 2) $6\cdot\sqrt[x]{9}-13\cdot\sqrt[x]{6}+6\cdot\sqrt[x]{4}=0$.

7.28. 1) $4^{x-\sqrt{x^2-1}}+2^{x-\sqrt{x^2-1}}=6$; 2) $3^{1-x}-3^{1+x}+9^x+9^{-x}=0$.

7.29*. 1) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=2$; 2) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

7.30. Кўрсаткичли тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}2^x+2^y=5,\\2^{x+y}=4.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y^x=1,5+y^{-x},\\y^{2,5+x}=64.\end{cases}$

7.31. График усули билан тенгламанинг нечта илдизи мавжуд эканлигини топинг:

1) $2^x+x-2=0$; 2) $3^x=x+2$.

Тенгламаларни ечинг **(7.32–7.33):**

7.32. 1) $2^{3x}=\sqrt[3x]{512}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[x]{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16}$;

3) $7^{x+2}-7^{x+1}=6\cdot2^{x+1}$; 4) $7^{1-|x|}=49$.

7.33. 1) $4^{\sqrt{x}}-9\cdot2^{\sqrt{x}-1}+2=0$; 2) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^5$;

3) $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$; 4) $5^x\sqrt[x]{8^{x-1}}=500$;

5) $27^x-13\cdot9^x+13\cdot3^{x+1}-27=0$.

C

7.34*. *a* параметрнинг қандай қийматларида тенгламанинг иккита илдизи мавжуд бўлади:

1) $25^{x+0,5}-(5a+2)\cdot10^x+a\cdot4^{x+0,5}=0$;
2) $2\cdot9^x-(2a+3)\cdot6^x+3a\cdot4^x=0$?

Мисолларда берилган тенгламалар ва уларнинг системаларини ечинг **(7.35–7.37):**

7.35. 1) $\begin{cases}2^x\cdot3^y=6,\\3^x\cdot4^y=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^y=243,\\\sqrt[y]{1024}=\left(\frac{2x}{3}\right)^2.\end{cases}$

7.36. 1) $5^{2+4+\ldots+2x} = 0{,}04^{-45}$; 2) $2^{|x+2|} - \left|2^{x+1} - 1\right| = 2^{x+1} + 1$.

7.37. 1) $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$; 2) $\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = 1$.

7.38*. a нинг ҳар бир ҳақиқий қийматларида $9^{-|x+2|} - 4 \cdot 3^{-|x+2|} - a = 0$ тенгламани ечинг.

Такрорлашга доир машқлар

7.39. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \dfrac{1}{x^{1,5}-1}$; 2) $\left(2^{\frac{3}{2}} + 27y^{\frac{3}{5}}\right) : \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{5}}\right)$.

7.40. $y = 2^{|x+3|} - 5$ функциянинг графигини ясанг.

7.41. $\lg 2 = m$, $\lg 3 = n$ деб олиб, $\log_5 6$ ни топинг.

7.2. Логарифмик тенгламалар ва уларнинг системалари

Бу мавзуда логарифмик тенгламалар ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари билан танишиб, оҳирида:

- логарифмик тенгламаларни ечишнинг усулларини ўрганасиз;
- логарифмик тенгламалар системасини еча оласизлар.

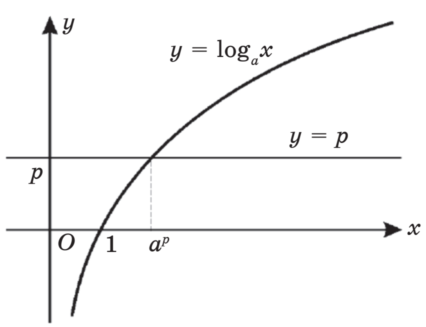
Теорема. *Агар $a > 0$, $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда $\log_a x = p$ кўринишдаги тенглама* ***содда логарифмик тенглама*** *дейилади.*

Энди p нинг исталган қийматида логарифмик тенгламанинг ягона илдизи мавжуд эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $\log_a x = p$ тенгламанинг илдизи $y = \log_a x$ функциянинг графиги билан $y = p$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасининг абсциссасига тенг бўлишини яхши биламиз. 7.1 ва 7.2-расмлардан p нинг исталган қийматларида бу иккита графикнинг битта нуқтада кесишишини кўрамиз. У ҳолда, p нинг исталган қийматида $\log_a x = p$ тенгламанинг ягона илдизи мавжуд. Логарифмнинг асосий айниятига кўра $x = a^{\log_a x}$ тенглик бажарилишини эътиборга олсак, тенгламанинг ягона ечими $x = a^p$ формула билан аниқланади.

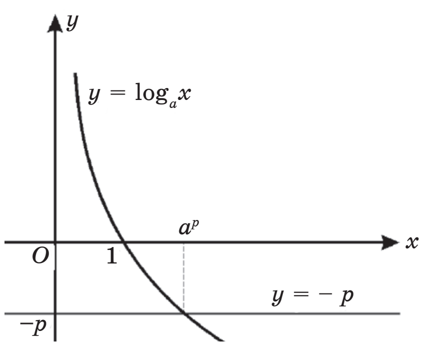
Логарифмик тенгламани ечишнинг усулларини кўриб чиқамиз.

Логарифмнинг таърифидан фойдаланиш усули

1-мисол: $\log_x(x^3 - 5x + 10) = 3$ тенгламани ечамиз.



7.1-расм



7.2-расм

▲ Логарифмнинг таърифига кўра $x^3 - 5x + 10 = x^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x = 10$, $x = 2$. Текширамиз: $\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3$. ■

Логарифмик тенгламани $log_a f(x) = log_a g(x)$ кўринишга келтириш.

2-мисол. $\lg(x + 5) - \lg(x^2 - 25) = 0$ тенгламани ечамиз.

▲ Тенгламанинг ҚҚМБҚТ и $\begin{cases} x + 5 > 0, \\ x^2 - 25 > 0, \end{cases}$ яъни $(5; +\infty)$ оралиқ бўлади.

$\lg(x + 5) - \lg(x^2 - 25) \Rightarrow x + 5 = x^2 - 25 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$, $x_2 = -5$ илдиз ҚҚМБҚТ ига кирмайди.

Жавоб: $x = 6$. ■

Янги ўзгарувчи киритиш усули

3-мисол. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$ тенгламани ечиш керак.

▲ $\log_2 x = y$ ўзгарувчини киритамиз. У ҳолда $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = 2$, $y_2 = -1$. Энди x ўзгарувчининг қийматларини топамиз:

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x_1 = 4$; $\log_2 x = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$. Ўзгарувчининг иккала қиймати ҳам тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: 4; $\frac{1}{2}$. ■

Логарифмни тараш усули

4-мисол. $x^{\log_2 x - 2} = 8$ тенгламани ечиш керак.

▲ $x^{\log_2 x - 2} = 8 \Rightarrow x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8 \Rightarrow x^{\log_2 x} = 8x^2$ тенгламани асоси 2 га тенг бўладиган қилиб логарифмлаймиз:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2 \Rightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0.$$

$\log_2 x = y$ янги ўзгарувчи киритсак,
$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 3,\ y_2 = -1$. Бундан

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x_1 = 8;$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

Жавоб: $8;\ \frac{1}{2}$. ■

5-мисол. $\log_3(x + 3) + \log_3(x + 1) = 1$ тенгламани ечамиз.

▲ $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$ формула бўйича берилган тенгламанинг чап томонини $\log_3(x + 3)(x + 1)$ ёки $\log_3(x^2 + 4x + 3)$ кўринишга келтириб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$\log_3(x^2 + 4x + 3) = 1.$$

Бундан $x^2 + 4x + 3 = 3^1 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4$.

Логарифмик функция бутун сонлар ўқида аниқланмагани учун топилган ечимларнинг берилган тенгламани қаноатлантириши ёки қаноатлантирмаслигини текшириш керак.

Текшириш. Агар $x = 0$ бўлса,

$$\log_3(3 + 0) + \log_3(1 + 0) = \log_3 3 = 1$$

ечим тенгламани қаноатлантиради. Агар $x = -4$ бўлса,

$$\log_3(3 - 4) + \log_3(1 - 4)$$

ифода маънога эга бўлмайди.

Жавоб: $x = 0$.

Берилган тенгламанинг жавобини топишнинг яна бир усули мавжуд. У тенгламаларнинг ҚҚМБҚТ ини (қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами) аниқлаш усули. Берилган тенгламанинг ҚҚМБҚТ и $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан аниқланади. У ҳолда ҚҚМБҚТ $x > -1$ тенгсизлик билан аниқланади ёки $(-1; +\infty)$ тўплам бўлади. $0 \in (-1; +\infty)$, $-4 \notin (-1; +\infty)$ эканлигидан мисолнинг жавоби: $x = 0$. ■

Логарифмик тенгламалар $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $(a > 1,\ a \neq 1)$ кўринишга келтириб ечилади. Бу тенглама қуйидаги система билан тенгкучли:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Системадаги оҳирги иккита тенгсизлик берилган тенгламанинг ҚҚМБҚТ ини аниқлайди. Одатда ҚҚМБҚТ ни логарифмик тенгламани ечмасдан олдин топилади.

Асоси ўзгарувчи бўлган логарифмик тенгламалар ҳам учрайди:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x).$$

Бу тенгламанинг ҚҚМБҚТ и қуйидаги тенгсизликлар системаси билан аниқланади:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 1, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Аниқланган ҚҚМБҚТ ида берилган тенглама $f(x) = g(x)$ тенглама билан тенгкучли.

6-мисол. $\ln(x + 4) + \ln(2x + 3) = \ln(1 - 2x)$ тенгламани ечамиз.

▲ Аввал тенгламанинг ҚҚМБҚТ ини аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \Rightarrow -1,5 < x < 0,5, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$$

ҚҚМБҚТ – $(-1,5;\ 0,5)$ интервал.

Ушбу ҚҚМБҚТ ида берилган тенгламани

$$\ln(x + 4)(2x + 3) = \ln(1 - 2x) \Rightarrow (x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 13x + 11 = 0$ кўринишда ёзамиз. Бундан $x_1 = -5,5;\ x_2 = -1.$ Топилган ечимлардан иккинчисигина ҚҚМБҚТ ида ётади.

Жавоб: -1. ■

7-мисол. $\log_{2x^2-3x+1}\left(3x^2 - x + 1\right) = \log_{2x^2-3x+1}\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$ тенгламани ечиш керак.

▲ Берилган тенглама қуйидаги система билан тенгкучли:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 1, \\ 3x^2 - x + 1 > 0, \\ x^3 - x^2 - x + 1 > 0, \\ 3x^2 - x + 1 = x^3 - x^2 - x + 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ 0,5) \cup (1;\ +\infty), \\ x \neq 0,\ x \neq 1,5, \\ x \in (-\infty;\ +\infty) \\ (x-1)^2 \cdot (x+1) > 0, \\ x^3 - 4x^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 0,5) \cup (1;\ 1,5) \cup (1,5;\ +\infty), \\ x \in (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty), \\ x_1 = 0,\ x_2 = 4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 0,5) \cup (1;\ 1,5) \cup (1,5;\ +\infty), \\ x = 4. \end{cases}$$

Жавоб: $x = 4$. ■

Энди кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар системасини ечишга мисоллар кўриб чиқамиз.

8-мисол: $\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$ системани ечиш керак.

▲ ҚҚМБҚТ $x > 0$, $y > 0$ тенгсизликлар билан аниқланади. Ушбу тўпламда $\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy = 1 \Rightarrow xy = 3$ тенглик бажарилади.

Энди $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = u$, $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = v$ белгилашлар киритсак, $u \cdot v = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = xy = 3$ тенгликни оламиз. Берилган системани $\begin{cases} u - v = 2, \\ uv = 3 \end{cases}$ кўринишда ёзиш мумкин. Унинг ечимлари $u_1 = 3$, $v_1 = 1$ ва $u_2 = -1$, $v_2 = -3$.

Агар $u = 3$, $v = 1$ деб олсак, $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 3$, $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1$. $xy = 3$ эканлигидан, $x_1 = 9$, $y_1 = \frac{1}{3}$.

Худди шундай, $u = -1$, $v = -3$ бўлганда $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_2 = -9$. Системанинг ҚҚМБҚТ и $x > 0$, $y > 0$ эканлигидан мисолнинг ж а в о б и: $x = 9$, $y = \frac{1}{3}$. ■

?

1. Содда логарифмик тенгламанинг таърифини айтинг.
2. Логарифмик тенгламанинг аниқланиш соҳаси қандай аниқланади?
3. Тенгламани ечганда қўлланиладиган янги ўзгарувчи киритиш усулини тавсифланг.

Мисоллар

A

7.42. Содда логарифмик тенгламаларни ечинг:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) = 0$; 2) $\log_2(x + 1) = 3$; 3) $\ln(3x - 5) = 0$;

4) $\log_{0,3}(5 - x) = -1$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2(3 - x)$; 6) $\lg(2x - 1) = \lg 3$.

Тенгламаларни ечинг **(7.43–7.44):**

7.43. 1) $\lg(3 - x) = \lg(x + 2)$; 2) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$;
3) $\log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$; 4) $\log_2(4 - x) = \log_2(1 - 2x)$.

7.44. 1) $\lg(5 - x) + \lg x = \lg 4$; 2) $\lg(x + 1) + \lg(x - 1) = \lg 3$;
3) $\ln(6 - x) + \ln x = \ln 5$; 4) $\lg x + \lg(x - 3) = 10$.

7.45. Логарифмик тенгламаларни ечинг:

1) $\log_2 x = 3 - \log_2 5$; 2) $\log_3(2x - 1) = -2\log_3 \frac{1}{4}$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,2}(x - 1) = 4$;

5) $\log_5\log_3\log_2(x^2+7)=0$; 6) $\log_4\log_2 x=0{,}5$.

7.46. Тенгламанинг илдизига тескари бўлган сонни топинг:
$\log_5(2x+33)-\log_5 13=\log_5 x$.

7.47. Тенглама илдизларининг кўпайтмасини топинг:
$\sqrt[3]{10+3x-x^2}\cdot\lg(7-x-x^2)=0$.

7.48. Тенгламаларни ечинг:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$; 2) $0{,}1\cdot\lg x-\lg x+0{,}9=0$.

3) $\lg(x^2-x)=1-\lg 5$; 4) $\log_6(2x^2-x)=1-\log_6 2$.

7.49. Логарифмик тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг:

1) $\dfrac{1}{12}\ln^2 x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\ln x$; 2) $\log_2^2 x^3-20\cdot\log_2\sqrt{x}+1=0$;

3) $2\log_3^2 x-7\log_3 x+3=0$; 4) $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$.

7.50. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x+\lg y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=34, \\ \log_2 x+\log_2 y=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2, \\ \log_3(x-y)=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=20, \\ \log_4 x+\log_4 y=\log_4 36. \end{cases}$

7.51. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=80, \\ \log_2 x+\log_2 y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ \lg x+\lg y=\lg 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{15} x=1-\log_{15} y, \\ \log_2(x+y)=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=20, \\ \log_4 x+\log_4 y=\log_4 36. \end{cases}$

B

Тенгламаларни ечинг **(7.52–7.58)**:

7.52. 1) $\log_3\sqrt{2x+1}=1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{2x-1}=-2$;

3) $\log_{\frac{3}{5}}\dfrac{2x+3}{x-2}=1$; 4) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3x-5}=0$.

7.53. 1) $2\log_x 3+\log_{3x} 3+3\log_{9x} 3=0$; 2) $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|=6$;

3) $\lg\ln x + \lg(\ln x^2 - 1) = 1$; 4) $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$.

7.54. 1) $\lg\sqrt{3x+1} + \lg\sqrt{x+4} = \lg 12$;

2) $\lg(x-2) - \lg\sqrt{x-4} = \lg 3$;

3) $(x^2-4)\log_3(1-x^2-3x) = 0$;

4) $(x^2-x-2)\log_2(x^2-4x+4) = 0$.

7.55. 1) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 = 6$; 2) $\dfrac{\lg x}{1-\lg x} = 3$;

3) $\log_2\log_2\log_2 x = 0$; 4) $10^{x+\lg 2} = 20$.

7.56. 1) $\log_3(5^{2x} - 2\cdot 5^x) = 2\log_9 15$; 2) $\log_2(2^{2(x+1)} + 2^{4x}) = 2\log_4 5$;

3) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$; 4) $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$.

7.57. 1) $\dfrac{\log_2 x}{\log_x 2} + \log_4 2x = 2$; 2) $\dfrac{\log_3 x}{\log_x 3} + \log_3 x$;

3) $\dfrac{1}{5-\log_2 x} + \dfrac{1}{1+\log_2 x} = \dfrac{6}{5}$;

4) $\ln\sqrt{x-3} - \dfrac{1}{2}\left(\ln(x-1)^2 - \ln(x+2)\right) = 0$.

7.58. 1) $x^{\log_5 x - 2} = 125$; 2) $x = 10^{1-\frac{1}{4}\lg x}$;

3) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$; 4) $0{,}1\cdot x^{\lg x - 2} = 100$;

5) $x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x} = 1$; 6) $\log_x(9x^2)\cdot\log_3^2 x = 4$;

7) $\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0$; 8) $x^{\log_x 2\left(x^2-1\right)} = 5$;

9) $\log\left(\sqrt{6+x}+6\right) = \dfrac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10}$; 10) $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x} = 400$.

7.59. Логарифмик тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}\lg\left(x^2+y^2\right) = 1 - \lg 8,\\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_x(3x+2y) = 2,\\ \log_y(2x+3y) = 2.\end{cases}$

7.60. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^x = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^y = 3^{12}, \\ y - \log_3 x = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

7.61. График усули билан тенгламанинг нечта ечими мавжуд эканлигини аниқланг:

1) $\lg x - \frac{x}{2} + 4 = 0;$ 2) $\log_2(x + 3) = 3 - x.$

7.62. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} \log_8(x + y) + \log_8(7 - y) = 1 + \log_8 5; \\ 2^{\log_2(x-y)} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_3(3y-x+24)} = 27; \\ \log_2(2x - 2y) - \log_2(5 - y^2) = 1. \end{cases}$

C

7.63–7.64-мисолларда берилган тенгламаларни ечинг:

7.63. 1) $\log_8 x + \log_8^2 x + \ldots + \log_8^n x + \ldots = \frac{1}{2};$

2) $3^{\lg x} = 18 - x^{\lg 3};$

3) $\log_{x-2}(2x - 9) = \log_{x-2}(23 - 6x);$

4) $\log_{5x-2} 2 + 2 \cdot \log_{5x-2} x = \log_{5x-2}(x + 1).$

7.64. 1) $\log_{x+1}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x + 1);$ 2) $0{,}4^{\lg^2 x+1} = 6{,}25^{2-\lg x^3};$

3) $\log_x(2x^{x-2} - 1) + 4 = 2x;$ 4) $\frac{\lg\left|x^4 + 2x^3 + 2x - 1\right|}{\lg\left|x^2 + x - 1\right|} = 2;$

5) $|x - 1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x - 1|^3.$

Тенгламалар системасини ечинг **(7.65–7.66)**:

7.65. 1) $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2 \cdot y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_x(x - 3y) = 2, \\ x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x|^{\lg|y|} = 4, \\ xy = 40. \end{cases}$

7.66. 1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4; \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5; \\ 2\log_9 x - \log_3 y = -1. \end{cases}$

7.67. a нинг қандай қийматларида $x^2 - 4x - \log_2 a = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд бўлади?

7.68. a нинг қандай қийматларида $\lg(x^2 + 2ax) - \lg(8x - 6a - 3) = 0$ тенгламанинг ягона ечими мавжуд бўлади?

Такрорлашга доир машқлар

7.69. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{\left(a^2 - ab\right)^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{-\frac{3}{2}}\sqrt[3]{a-b}}{a^{1,5} - b^{1,5}}$;

2) $\left(\dfrac{\left(a + \sqrt[3]{a^2x}\right) : \left(x + \sqrt[3]{ax^2}\right) - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$.

7.70. $y = \left|3^{x-1} - 5\right|$ функциянинг графигини ясанг.

7.71*. Агар $\log_a 27 = b$ бўлса, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ нимага тенг?

7.3. Кўрсаткичли тенгсизликлар

Бу мавзуда кўрсаткичли тенгсизликлар билан ишлаб, уларни ечиш йўллари билан танишиб, оҳирида:

- кўрсаткичли тенгсизликларни ечишни ўрганасиз;
- кўрсаткичли тенгсизликлар системасини еча оласизлар.

Кўрсаткичли функцияларнинг хоссаларидан 1) агар $a > 1$ бўлса, у ҳолда $u > v \Leftrightarrow a^u > a^v$; 2) агар $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда $u > v \Leftrightarrow a^u > a^v$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $a^x > b$

кўринишда берилган содда тенгсизликларни $a^x > a^{\log_a b}$ кўринишга келтириб ечилади. Энди мисолар кўриб чиқамиз.

1-мисол. 1) $5^{3x-2} < 5^{x+3}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} < 9$ тенгсизликларни ечамиз.

▲ 1) $5^{3x-2} < 5^{x+3}$ тенгсизликнинг иккала томонини ҳам асоси 5 ва $5 > 1$ эканлигидан тенгсизликнинг белгиси ўзгартирмаймиз. Бундан,

$$3x - 2 < x + 3 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < 2{,}5.$$

2) $3^{\frac{x}{2}} < 9$ тенгсизликни ечиш учун аввал иккала томонини бир хил асосга келтириш керак: $9 = 3^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} < 3^2$ ва $3 > 1$ эканлигидан тенгсизлик белгисини ўзгартирмаймиз. Бундан, $\frac{x}{2} < 2 \Rightarrow x < 4$. ■

2-мисол. $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leqslant 0$ тенгсизликни ечамиз.

▲ $3^x = y$ белгилаш киритиб, берилган тенгсизликни

$$y^2 - 10y + 9 \leqslant 0$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенгсизликнинг ечими $1 \leqslant y \leqslant 9$ бўлганидан, x ўзгарувчи учун $1 \leqslant 3^x \leqslant 9$. Бундан

$$3^0 \leqslant 3^x \leqslant 3^2 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

Жавоб: [0; 2]. ■

3-мисол. $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{\frac{1}{\log_3 5}}$ тенгсизликни ечиш керак.

▲ $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ ва $25^{\frac{1}{\log_3 5}} = 9$ эканлигидан берилган тенгсизликни $(2^{-2})^x < 2^{3-x} + 9 \Rightarrow 2^{-2x} - 8 \cdot 2^{-x} - 9 < 0$ кўринишда ёзиб, $2^{-x} = y$ белгилаш киритсак, $y^2 - 8y - 9 < 0 \Rightarrow -1 < y < 9$ тенгсизликни оламиз. $2^{-x} = y > 0$ эканлигидан, $2^{-x} < 9 \Rightarrow -x < \log_2 9 \Rightarrow -\log_2 9 < x$.

Жавоб: $(-\log_2 9; +\infty)$. ■

4-мисол. $3^{x-1} > \frac{2-3^x}{3^x-4}$ тенгсизликни ечиш керак.

▲ $3^x = y$ белгилаш киритсак,

$$\frac{1}{3}y > \frac{2-y}{y-4} \Leftrightarrow \frac{y^2-y-6}{3(y-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(y+2)(y-3)}{3(y-4)} > 0.$$

Унинг ечими: $y \in (-2; 3) \cup (4; +\infty)$. $3^x = y > 0$ эканлигини инобатга олсак, x ўзгарувчи учун

$$\{3^x < 3 \text{ ёки } 4 < 3^x\} \Leftrightarrow \{x < 1 \text{ ёки } \log_3 4 < x\}.$$

Жавоб: $x \in (-\infty; 1) \cup (\log_3 4; +\infty)$. ■

1. Кўрсаткичли тенгсизликни ечишнинг асосий усулининг алгоритмини айтиб беринг.
2. Кўрсаткичли тенгсизликларнинг ечимига функциянинг асосининг таъсири борми? Жавобингизни тушунтиринг.

Мисоллар

А

7.72. Тенгсизликларнинг иккала томонини бир хил асосга келтириб, содда кўрсаткичли тенгсизликларни ечинг:

1) $4^x < 256$; 2) $5^{-x+2} \geqslant 125$; 3) $3^{x+1} < 243$;

4) $3^{2x+1} > 3^{5x+4}$; 5) $\sqrt{5^x} > \sqrt[3]{25}$; 6) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} \leqslant \left(\frac{7}{5}\right)^{2x+5}$;

7) $(0{,}25)^{2-x} > \frac{256}{2^{x+3}}$.

7.73. Тенгсизликни ечинг:

1) $3^x < \frac{1}{27}$; 2) $2^x < \frac{1}{8}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{16}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} < 9$.

7.74. Тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топинг:

1) $5^{x-1} < 25$; 2) $3^{3-x} \geqslant 9$; 3) $6^{2x} \leqslant \frac{1}{36}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geqslant 4$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant 81$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$.

Амалий топшириқ

7.75. 2014 йили мамлакатимиздаги кийиклар сони 257 минг, 2015 йили 295 минг бўлди, бироқ шу йили пастереллез касаллигининг натижасида уларнинг сони кескин камайди (фақат Бетпақдала прпуляциясининг ўзидан 130 минг кийик қирилиб кетди). 2016 йилги саноқ бўйича уларнинг умумий сони 108300 бўлди. Логарифмик ва кўрсаткичли тенгламалардан фойдаланиб, қулай муҳитда мамлакатимиздаги кийиклар сони қачон 2015 йилги сонидан ортишини топиш керак.

▲ Популяция сонининг ортиши ёки камайиши $y = y_0 a^x$ кўрсаткичли функция билан тавсифланади. Дастлаб

(2014 йили) уларнинг сони 257 минг бўлди деб ҳисобласак, $y = 257\,000 \cdot a^x$ функцияга эга бўламиз. Бир йил вақт ўтгандан кейин уларнинг сони 295 мингга етди, бундан $295\ 000 = 257\ 000 \cdot a^1$, яъни $a \approx 1{,}149$. Бироқ, 2015 йилги касаллик туфайли 108300 гина кийик қолди. Шу сабабли 2016 йил кўпайишнинг дастлабки вақти деб ҳисоблаб, уларнинг сонини ушбу функция билан тавсифлаш мумкин:

$$y = 108\ 300 \cdot 1{,}149^x.$$

Кийиклар сони 295 мингдан ортиши учун қанча вақт кераклигини ҳисоблайдик:

$$108\ 300 \cdot 1{,}149^x > 295\ 000 \Rightarrow 1{,}149^x > 2{,}724,$$

$$x > \log_{1{,}149} 2{,}724,$$

$$x > \frac{\lg 2{,}724}{\lg 1{,}149} = 7{,}215 \approx 7.$$

2015 йили кийиклар сони 295000 га етиши учун 2016 йилдан бошлаб ҳисоблаганда 7 йил керак экан. Демак,

$$2016 + 7 = 2023$$

йили дастлабки сонига етади. ■

7.76. Янги ўзгарувчи киритиш орқали берилган тенгсизликни ечинг:

1) $\pi^x - \pi^{2x} \geqslant 0$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$;
3) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$;
4) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 5 \leqslant 0$.

7.77. Кўпайтувчиларга ажратиш орқали берилган тенгсизликларни ечинг:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 2{,}5$;
2) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$;
3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$;
4) $3^{x-2} + 3^{x-1} < 28$.

7.78. Янги ўзгарувчи киритиш орқали берилган тенгсизликни ечинг:

1) $6^{2x} - 6^{x+1} + 5 > 0$;
2) $3 \cdot 2^x + 18 \cdot 2^{-x} < 29$;
3) $9^x - 6 \cdot 3^x < 27$;
4) $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$.

7.79. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\sqrt{2^{x+1}-8}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{0,2^{3x}-125}}$; 3) $y=\sqrt{x^2\cdot 4^x-4^{x+1}}$.

7.80. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 5^x>25, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-8}<\dfrac{1}{27}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-x}, \\ 3^{4x}>81. \end{cases}$

7.81. Тенгсизликларни график усулда ечинг:

1) $2^x \leqslant 3-x$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqslant 2x+5$;

3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqslant 2x+1$; 4) $3^x \leqslant 4-x$.

B

7.82. Тенгсизликларни иккала томонини бир хил асосга келтириб ечинг:

1) $3^{-2x}<\sqrt{3}$; 2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}}>25$; 3) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3x+1}>\sqrt{3}$;

4) $2^{\frac{3x}{2}+3}<16$; 5) $5^{\frac{x+1}{3}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 6) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}>\dfrac{9}{4}$.

7.83. Тенгсизликларни ечинг:

1) $0,2^{\frac{6x-1}{3-x}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^2$; 2) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^2}>\left(\dfrac{9}{49}\right)^{x+1,5}$;

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+4x}\geqslant\left(\dfrac{8}{27}\right)^{x+2}$; 4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}\leqslant 4$;

5) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}}>49$; 6) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x^2+1}>\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$.

7.84. Кўрсаткичли тенгсизликларни ечинг:

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-|x+2|}\geqslant 81$; 2) $(0,(4))^{x^2-1}>(0,(6))^{x^2+6}$;

3) $(0,2)^{2+4+\ldots+2x}>(0,2)^{72}$; 4) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{13x^2}\leqslant\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^4+36}<\left(\dfrac{49}{9}\right)^{-6x^2}$.

7.85. Кўрсаткичли тенгсизликларни янги ўзгарувчи киритиб ечинг:

1) $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0$; 2) $4^{x+1,5} + 9^x < 9^{x+1}$;

3) $2^{2x+2} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0$.

Тенгсизликларни ечинг **(7.86–7.87):**

7.86. 1) $2^{2x^2+5x-1} < 0,5\sqrt[3]{(0,25)^{2x}}$; 2) $\sqrt{3^{46-x}} - 7\sqrt{3^{42-x}} > 162$;

3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x > 7-4\sqrt{3}$.

7.87. 1) $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$; 2) $3^{x-1} > \dfrac{2-3^x}{3^x-4}$;

3) $3^{|x+2|} + 3^{|x+1|} \geqslant 4$; 4) $10 \cdot 4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

7.88. Тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топинг:

1) $9^{x+1} - 3^{x+3} < 3^{x-3}$; 2) $13 \cdot 2^{x+4} - 208 \cdot 2^{-2x-3} < 0$;

3) $7 \cdot 3^{x-2} + 20 \cdot 3^{2-x} < \dfrac{41}{3^{x-2}}$; 4) $\dfrac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$.

7.89. Тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг кичик бутун қийматини топинг:

1) $7^{2x-1} - 7^{x+1} \leqslant 7^{x-1} - 7$; 2) $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9$;

3) $2^{2x+1} - 2^{x+3} \leqslant 2^{x+1} - 8$; 4) $5^{2x} - 5^{x+2} > 5^x - 25$.

C

Тенгсизликларни ечинг **(7.90–7.92):**

7.90. 1) $\left(\sqrt{5}-2\right)^x > 9-4\sqrt{5}$; 2) $\left(\sqrt{5}+2\right)^x < 9-4\sqrt{5}$; 3) $\dfrac{x^2-2}{2^x-3} < 0$;

4) $x \cdot 2^x > 8$; 5) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x < 7-4\sqrt{3}$; 6) $\dfrac{x^2-3}{3^x-5} < 0$;

7) $x^3 \cdot 3^x > \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

7.91*. 1) $(x+1)^{x^2-36} < 1$; 2) $(x-3)^{x^2-9} > 1$;

3) $(x-2)^{x^2-1} > 1$; 4) $(x-1)^{\frac{2x-7}{x-1}} \geqslant 1$.

▲ 1) $(x+1)^{x^2-36}<1$.

Кўрсаткичли функциянинг таърифига кўра тенгсизликнинг чап томонидаги ифодани асоси мусбат ва даражанинг асоси бирдан фарқли бўлгандагина маънога эга. Бундан $x > -1$ шарт бажарилиши керак. $x + 1 > 1$ ва $0 < x + 1 < 1$ ҳолларни кўриб чиқамиз.

1) $x+1>1$, яъни $x > 0$ бўлса,

$$\begin{cases}(x+1)^{x^2-36}<1,\\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^{x^2-36}<(x+1)^0,\\ x>0.\end{cases}$$

Асоси $x + 1 > 1$ бўлгани учун тенгсизликнинг белгиси ўзгармайди. Шу сабабли $\begin{cases}x^2-36<0,\\ x>0\end{cases}$ система бажарилиши керак.

$$\begin{cases}(x-6)(x+6)<0,\\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-6;6),\\ (0;+\infty)\end{cases} \Rightarrow (0;6).$$

2) $0 < x + 1 < 1$, яъни $-1 < x < 0$ бўлса, ушбу тенгсизликлар системасига кўчамиз:

$$\begin{cases}x^2-36>0,\\ -1<x<0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-6)(x+6)>0,\\ -1<x<0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-\infty;-6)\cup(6;+\infty),\\ (-1;0)\end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

3) Агар $x + 1 = 1$, яъни $x = 0$ бўлса, $1 < 1 \Rightarrow \varnothing$.

Жавоб: (0; 6). ■

7.92. 1) $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$; 2) $\left|2^{4x^2-1}-5\right|\leqslant 3$;

3) $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant\left(x^2+x+1\right)^3$; 4) $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x-6)}>1$.

7.93. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^{x+2}-0,75\cdot 2^{x+2}>1,\\ 0,2^x\leqslant 0,04^{x^2};\end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-2)^{2x^2-11x+9} < 1, \\ 0,3^{\sqrt{4x^2-3x+2}} > 0,3^{\sqrt{x}}. \end{cases}$

7.94*. a нинг қандай қийматларида $x^2 - x \cdot 2^{a+2} - 2^{a+3} + 12 > 0$ тенгсизлик исталган x учун бажарилади?

Такрорлашга доир машқлар

7.95. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\left(\sqrt{a}+1\right)^2 - \dfrac{2a-2\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} - 1\right)^{-3}$; 2) $\left(\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$.

7.96. $y = \ln|x+2|$ функциянинг графигини ясанг.

7.97. Ҳисобланг: $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 8}$.

7.4 Логарифмик тенгсизликлар

Бу мавзуда логарифмик тенгсизликлар, уларни ечиш йўллари билан танишиб, оҳирида:

- логарифмик тенгсизликларни ечишни ўрганасиз;
- •логарифмик тенгсизликлар системасини еча оласиз.

Логарифмик тенгсизликларни $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ кўринишдаги содда тенгсизликларга келтириб ечилади. Логарифмик функциянинг хоссаларига кўра $\log_a u(x) < \log_a v(x)$ тенгсизлик

1) агар $a>1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) < v(x) \end{cases}$ (1)

тенгсизликлар системасига;

2) агар $0<a<1$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) > v(x) \end{cases}$ (2)

тенгсизликлар системасига тенгкучли.

$\log_a u(x) < b$ кўринишдаги тенгсизликлар ҳам $\log_a u(x) < \log_a a^b$ кўринишга келтириб ечилади. Умуман, амалда (1) ва (2) кўринишдаги системаларни ёзиб, ечишнинг ўрнига берилган тенгсизликнинг ҚҚМБҚТ нинг $\{u>0,\ v>0,\ a>0,\ a\neq 1\}$ шартларидан фойдаланиб, аниқлаб олган маъқул. Бу ёзув ишларини анча камайтиради. Энди шу айтилганларни эътиборга олиб, мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<-2$ тенгсизликни ечамиз.

▲ Логарифмнинг асоси $a=\dfrac{1}{3}<1$ бўлгани учун тенгсизлик белгисини ўзгартирамиз ва ҚҚМБҚТ ни эътиборга олиб, ушбу системани оламиз:

$$\begin{cases}2x+5>0,\\ 2x+5>9\end{cases} \text{ ёки } \begin{cases}x>-2,5,\\ x>2.\end{cases}$$

Жавоб: $(2;\ +\infty)$. ■

2-мисол. $\lg(x+1)\leqslant 1-\lg(2x-6)$ тенгсизликни ечамиз.

▲ $\lg(x+1)+\lg(2x-6)\leqslant 1 \Rightarrow \lg((x+1)(2x-6))\leqslant \lg 10.$

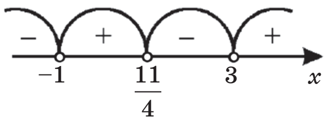
Логарифмнинг асоси $a=10>1$ бўлгани учун тенгсизликнинг белгиси ўзгармайди ва ҚҚМБҚТ ни эътиборга олиб, ушбу системани оламиз:

$$\begin{cases}x+1>0,\\ 2x-6>0,\\ (x+1)(2x-6)\leqslant 10\end{cases} \text{ ёки } \begin{cases}x>-1,\\ x>3,\\ [-2;4].\end{cases}$$

Жавоб: $(3;\ 4]$. ■

3-мисол. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\leqslant -1$ тенгсизликни ечамиз.

▲ Тенгсизликнинг ҚҚМБҚТ $\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)(x-3)}{4\left(x-\dfrac{11}{4}\right)}>0$ тенгсизлик билан аниқланади.



7.3-расм

Унинг ечими (ҚҚМБҚТ):

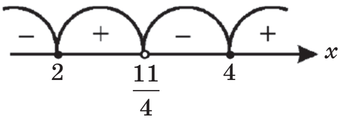
$\left(-1;\dfrac{11}{4}\right)\cup(3;+\infty)$ (7.3-расм).

Топилган ҚҚМБҚТ да берилган тенгсизликни $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\leqslant\log_{\frac{1}{2}}2$ кўринишда ёзиб ва $0<\dfrac{1}{2}<1$ эканлигини эътиборга олсак, $\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-12x+16}{4x-11}\geqslant 0 \Leftrightarrow$

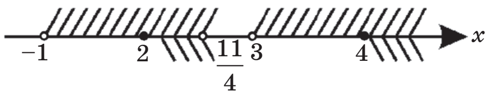
$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(x-4)}{4\left(x-\frac{11}{4}\right)} \geqslant 0$$

тенгсизликни оламиз. Унинг ечими: $x \in \left[2; \frac{11}{4}\right) \cup [4; +\infty)$ (7.4-расм). Топилган тўпламни ҚҚМБҚТ и билан кесиштирсак (7.5-расм), мисолнинг жавоби чиқади:

$$x \in \left[2; \frac{11}{4}\right) \cup [4; +\infty). \blacksquare$$



7.4-расм



7.5-расм

4-мисол. $\log_3(7-x) \leqslant \frac{9}{16}\log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} + \log_{7-x}9$ тенгсизликни ечиш керак.

▲ ҚҚМБҚТ: $\begin{cases} 7-x>0, \\ 7-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ x \neq 6. \end{cases}$

Бундан ҚҚМБҚТ: $x \in (-\infty; 6) \cup (6; 7)$.

$\log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} = \left(-\frac{4}{3}\log_2 2\right)^2 = \frac{16}{9}$ ва $\log_{7-x}9 = 2 \cdot \log_{7-x}3 = \frac{2}{\log_3(7-x)}$ эканлигини эътиборга олсак, берилган тенгсизлик қуйидагича ёзилади:

$$\log_3(7-x) \leqslant 1 + \frac{2}{\log_3(7-x)}.$$

$\log_3(7-x) = y$ белгилаш киритсак,

$$y \leqslant 1 + \frac{2}{y} \Leftrightarrow \frac{(y+1)(y-2)}{y} \leqslant 0 \Rightarrow y \in (-\infty; -1] \cup (0; 2].$$

x ўзгарувчи учун қуйидаги тенгсизликлар тўплами чиқади:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(7-x) \leqslant -1, \\ 0 < \log_3(7-x) \leqslant 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7-x \leqslant \frac{1}{3}, \\ 1 < 7-x \leqslant 9 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; +\infty\right).$$

Бунда $3>1$ бўлиши инобатга олинган. Топилган ечимни ҚҚМБҚТ билан кесиштириб, мисолнинг жавобини оламиз: $x \in [-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; 7\right)$. $\blacksquare$

5-мисол. $x^{\log_2 x}+16\cdot x^{-\log_2 x}<17$ тенгсизликни ечиш керак.

▲ ҚҚМБҚТ: $x\in(0;\ +\infty)$. Агар $x^{\log_2 x}=y$ деб олсак, берилган тенгсизликни $y+16\cdot\dfrac{1}{y}<17\Leftrightarrow\dfrac{y^2-17y+16}{y}<0\Leftrightarrow\dfrac{(y-1)(y-16)}{y}<0$ кўринишда ёзамиз. $y\in(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 16)$. $x>0$ бўлганда $x^{\log_2 x}>0$.

У ҳолда, $1<x^{\log_2 x}<16$ тенгсизликни ечиш керак. Бу тенгсизликни 2 асос бўйича логарифмласак,

$$0<\log_2 x\cdot\log_2 x<\log_2 16\Leftrightarrow 0<|\log_2 x|<2.$$

Бундан

$$\left[\begin{array}{l}0<\log_2 x<2,\\ -2<\log_2 x<0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<4,\\ \dfrac{1}{4}<x<1.\end{array}\right.$$

Жавоб: $x\in\left(\dfrac{1}{4};1\right)\cup(1;4)$. ■

Логарифмик тенгсизликларни ечишнинг кўпгина осон усуллари бор. Шулардан бири логарифмик тенгсизликларни рационализациялаш усули билан ечиш. Бу усулни ушбу интернет ресурсидан ўргана оласиз:

➢ **Қўшимча электрон ресурс**

https://youtu.be/JljcryzkFg8

1. Логарифмик функциянинг хоссасини айтиб беринг.
2. Тенгсизликнинг белгисини логарифмнинг асосига боғлиқ равишда ўзгартириш керакми?

Мисоллар

А

7.98. Содда логарифмик тенгсизликни ечинг:

1) $\log_5(3+8x)>0$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(7-x)>-2$;
3) $\log_2(x-3)\leqslant 3$;
4) $\lg(4x-1)\leqslant 1$.

7.99. Содда логарифмик тенгсизликни ечинг:

1) $\log_2(5+2x)>\log_2(x-7)$;
2) $\log_5(3x-2)>\log_5(x+6)$;

3) $\log_3(3x-1)<\log_3(2x+3)$; 4) $\log_{\frac{1}{9}}(4x-3)>\log_{\frac{1}{9}}(x+3)$.

Содда логарифмик тенгсизликни ечинг **(7.100–7.101):**

7.100. 1) $\log_2(2x-1)>\log_2(x+1)$; 2) $\log_5(3x+1)>\log_5(x-2)$;

3) $\log_{0,2}(x-2)<\log_{0,2}(3-x)$; 4) $\log_{\frac{1}{7}}(12-x)\geqslant-2$.

7.101. 1) $\log_3(5x-2)>1$; 2) $\log_{0,3}(5x-2)>1$;
3) $\log_3|5x-2|<1$; 4) $\log_{0,5}(x^2-5x+7)\geqslant 0$;
5) $\log_5(x^2-11x+43)>2$; 6) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$.

7.102. Берилган тенгсизликларни ечинг:
1) $\log_2(3x-2)<\log_2(2x-3)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>0$;
3) $\log_\pi(x-1)+\log_\pi(x-2)<\log_\pi(x+7)$;
4) $\ln x-\ln(2x-5)\leqslant\ln 2-\ln(x-3)$.

7.103. Тенгсизликларни ечинг:

1) $\log_2^2 x+\log_2 x-2\leqslant 0$; 2) $\log_{0,2}^2 x-5\log_{0,2} x<-6$;

3) $\log_{0,1}^2 x+3\log_{0,1} x>0$; 4) $2-\lg^2 x>\lg x$.

7.104. $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x}{x-1}}$; 2) $f(x)=\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}$.

B

Логарифмик тенгсизликни ечинг **(7.105–7.107):**

7.105. 1) $\lg(x^2+2x+2)<1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>-2$;

3) $\log_2(x^2+10)<4$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1)<-1$.

7.106. 1) $2^{\log_3\frac{x-1}{3x+3}}\leqslant\frac{1}{4}$; 2) $3^{\log_2\frac{x-1}{x+1}}<\frac{1}{9}$;

3) $(5x + 1)\lg(4 - x) \leqslant 0$; 4) $(3 - x)\lg(2x - 1) \geqslant 0$.

7.107. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(\log_2 \sqrt{6-x}\right) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right) \geqslant 0$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_5 \frac{x-2}{x+2}\right) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 1$; 6) $\log_{\frac{5}{2}}\left(\log_3\left(9^x - 6\right)\right) \geqslant 0$.

7.108. $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{2,1} \frac{3x-1}{5-x}} + \sqrt{x-4}$;

2) $f(x) = \sqrt{\log_6\left(x+x^2\right)} + \sqrt{-x^2+3x-2}$.

7.109. Логарифмик тенгсизликларни янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечинг:

1) $\ln^2 x - 2 \cdot \ln x - 3 \leqslant 0$; 2) $\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right)^2 > 4$;

3) $\log_3^2 x - \log_3 x > 2$; 4) $\frac{2}{\lg x + 1} \geqslant 1$.

Логарифмик тенгсизликларни ечинг **(7.100–7.111)**:

7.110. 1) $\left(\log_2 x - 4\right)\left(5x^2 + x - 6\right) \geqslant 0$; 2) $\left(\log_3 x + 3\right)\left(x^2 + 2x - 8\right) \geqslant 0$.

7.111. 1) $\log_{1-x}(2x + 3) \geqslant 1$; 2) $\log_{x-1}(x - 8) \leqslant 1$;

3) $\log_{3x}(2,5x + 1) \geqslant 0$.

7.112. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 \ln x - \ln x^4}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

7.113. Логарифмик тенгсизликларни ечинг:

1) $\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3} 100 - \log_{0,3} 9} < 1$;

2) $2\cdot\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\dfrac{2}{3}$;

3) $0,5+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$;

4) $\left(\log_{0,2}(x-1)\right)^2>4$.

Тенгсизликларни ечинг **(7.114–7.115):**

7.114. 1) $\log_x(x-1)\geqslant 2$; 2) $\log_x\sqrt{21-4x}>1$;

3) $\log_x\dfrac{x+3}{x-1}>1$; 4) $\log_x(16-6x-x^2)\leqslant 1$.

7.115. 1) $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9 x\right)<1$;

2) $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$;

3) $\log_{0,5}(\log_2\log_{x-1}9)>0$;

4) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{3}}x\right)>0$.

7.116. Агар $a>1$, $b\geqslant 1$, $c>0$ бўлса, $(1+\log_a b)\left(\log_{ab}^2 c+1\right)\geqslant 2\cdot\log_a c$ тенгсизликни исботланг.

C

7.117. Тенгсизликларни ечинг:

1) $\log_2\left(2^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)>-2$; 2) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}<6$;

3) $2^{\log_{2-x}\left(x^2+8x+15\right)}<1$; 4) $\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1$.

7.118. Тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\begin{cases}(x-1)\ln 2+\ln\left(2^{x+1}+1\right)<\ln\left(7\cdot 2^x+12\right),\\ \log_x(x+2)>2.\end{cases}$$

7.119. $2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3$ тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатинг.

7.120. $\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5} - x + 1\right) > 0$ тенгсизликнинг барча бутун ечимларини аниқланг.

7.121. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x-3|}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

7.122*. $\ln\dfrac{n+1}{2} > \dfrac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots \ln n}{n}$ тенгсизликни исботланг.

7.123. $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$ тенгсизликни исботланг.

Такрорлашга доир машқлар

7.124. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\sqrt{ab} - \dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right) : \dfrac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a-b}$;

2) $\left(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

7.125. $y = 3 - \log_{\frac{1}{3}} x^2$ функциянинг қийматлар тўпламини аниқланг.

7.126. Ҳисобланг: $\left(27^{\log_2 2} + 5^{\log_{25} 49}\right) \cdot \left(81^{\log_9 4} - 8^{\log_4 9}\right)$.

«КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР» бўлимининг хулосаси

$a > 0$, $a \neq 1$ ва $b > 0$ учун $a^x = b$ тенглама *содда кўрсаткичли тенглама* деб аталади.

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b.$$

Тенгламани ечишнинг кўп учрайдиган усуллари-тенгламанинг иккала томонини бир хил асосга келтириш, кўпайтувчиларга ажратиш ва янги ўзгарувчи киритиш усули.

$a > 0$, $a \neq 1$ учун $\log_a x = p$ кўринишдаги тенглама *содда логарифмик тенглама* деб аталади.

Логарифмик тенгламани ечиш усуллари: логарифмнинг таърифидан фойдаланиш усули, янги ўзгарувчи киритиш усули, ҳадлаб логарифмлаш усули ва логарифмик тенгламани $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ кўринишга келтириш:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 1, a \neq 1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$\log_a u(x) < \log_a v(x)$ тенгсизлик

1) агар $a > 1$ бўлса, $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) < v(x) \end{cases}$ тенгсизликлар системасига;

2) агар $0 < a < 1$ бўлса, $\begin{cases} u(x) > 0, \\ v(x) > 0, \\ u(x) > v(x) \end{cases}$ тенгсизликлар системасига тенгкучли.

$\log_a u(x) < b$ кўринишдаги тенгсизлик $\log_a u(x) < \log_a a^b$ кўринишга келтириб ечилади.

Термин сўзар луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Логарифмик тенглама	Логарифмдік теңдеу	Логарифмическое уравнение	Logarithmic equation
Логарифмик тенгсизлик	Логарифмдік теңсіздік	Логарифмическое неравенство	Logarithmic inequality
Кўрсаткичли тенглама	Көрсеткіштік теңдеу	Показательное уравнение	Exponential equation
Кўрсаткичли тенгсизлик	Көрсеткіштік теңсіздік	Показательное неравенство	Exponential inequality
Экспоненциал ўсиш (камайиш)	Экспоненттік өсу (кему)	Экспоненциальный рост (распад)	Exponential growth(decay)

VIII бўлим. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Температураси 20° C хонада чойнинг температураси 100° C дан 90° C га 5 минутда совийди. Қанча вақтда чойнинг температураси 50° C гача совишини ушбу бўлим давомида аниқлашни ўрганасиз.

Сиз математик анализнинг энг қизиқарли мавзуларидан бири дифференциал тенгламалар билан танишишни бошлайсиз. Дифференциал тенгламаларнинг фандаги қўлланиш соҳаси жуда катта, чунки табиатдаги кўпгина жараёнларнинг математик модели-интеграл-дифференциал тенгламалар билан ифодаланади.

Аҳоли сонининг, жониворлар, бактериялар сонининг ўсиши ёки камайиши, қандайдир бир инфекциянинг тарқалиши ва содда гармоник ҳаракат каби кўпгина физик жараёнларни дифференциал тенгламалар орқали моделлаш мумкин. Худди шундай температуранинг ўзгаришини ҳам дифференциал тенглама билан моделлаш мумкин.

Бўлимда ўрганиладиган мавзулар:

8.1. Дифференциал тенгламалар ҳақида асосий тушунча
8.2. Ўзгарувчилари бўлинувчи биринчи тартибли дифференциал тенгламалар
8.3. Коэффициентлари ўзгармас иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар

8.1 Дифференциал тенгламалар ҳақида асосий тушунча

Бу мавзуда дифференциал тенгламаларнинг асосий тушунчалари билан танишиб, оҳирида:

- дифференциал тенгламаларнинг таърифини биласиз;
- дифференциал тенгламаларнинг амалда қўлланиши билан танишасиз;
- дифференциал тенгламаларнинг умумий ечими ва хусусий ечимининг таърифларини биласиз.

Табиатда учрайдиган кўгина ҳодисалар дифференциал тенгламалар деб аталувчи ўзгача тенгламалар билан тавсифланади. *Дифференциал тенгламалар* деб таркибида эркли ўзгарувчи, номаълум функция билан унинг ҳосилалари бўлган тенгламаларга айтилади. Масалан, $f'(x) + 5f(x) = 0$, $f''(x) = x \cdot f^3(x)$ ва ҳоказо.

Ҳосила топиш *дифференциаллаш* дейилади. Дифференциал тенгламалар бўлими эса функциянинг дифференциали тушунчаси билан чамбарчас боғлиқ.

Таъриф. ***$y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали*** *деб функциянинг ҳосиласи билан аргументи орттирмасининг кўпайтмасига айтилади*:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{1}$$

Агар $y = x$ функцияни кўриб чиқсак, $dx = x' \cdot \Delta x$, ал $x' = 1 \Rightarrow \Rightarrow dx = \Delta x$. *Шуни эътиборга олиб, (1) тенгламани*

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

ёки

$$df(x) = f'(x) \cdot dx.$$

кўринишда ёзамиз. Бундан $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$. (2)

Дифференциал тенгламаларга келтириладиган бир нечта мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол (аҳоли сонининг ўсиши). Аҳоли сонининг ўсишини ўрганиш давомида унинг ўсиш тезлиги аҳоли сонига пропорционал бўлиши аниқланган. Фараз қилайлик, t вақтда аҳоли сони $N(t)$ га тенг бўлсин. У ҳолда аҳолининг t вақтдаги ўсиш тезлиги $N'(t)$ ҳосилага тенг. Бундан юқорида айтилган пропорционаллик қонунига кўра

$$N'(t)=k \cdot N(t)$$

тенгликни оламиз. Бунда k – халқнинг ўсиш суръатини билдирувчи ўзгармас катталик. Бу тенгламани

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k$$

кўринишда ёзиб интегралласак ва $\int \frac{N'(t)}{N(t)} dt = \int k dt \Rightarrow N'(t) = \frac{dN(t)}{dt}$

эканлигини эътиборга олиб,

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = kt + C \Rightarrow \ln N(t) = kt + C \Rightarrow N(t) = Ce^{kt}.$$

Бунда $e^c = C$ орқали қайта белгиладик. Бундан $N'(t) = k \cdot N(t)$ дифференциал тенгламанинг барча ечимлари $N(t) = Ce^{kt}$ кўринишда ёзилишини кўрамиз. Аҳоли сонининг ўсиш тезлиги аҳоли сонига пропорционал бўлганда бу формула аҳоли сонининг ўсиш қонуниятини аниқлайди.

2-мисол. (Радиоактив парчаланиш). Эксперемент орқали модданинг радиоактив парчаланиш тезлигининг унинг дастлабки миқдорига пропорционаллиги аниқланган. Ушбу қонуниятга суяниб, радиоактив парчаланиш масалалари ечилади. Фараз қилайлик, $m(t)$ орқали t вақтда радиоактив модданинг массасини (грамм) белгилайлик. У ҳолда

$$m'(t) = -\lambda m(t).$$

Бунда $\lambda > 0$ – пропорционаллик коэффициенти. «–» ишора вақт ўтиши билан радиоактив модда массасининг камайишини билдиради, яъни $m'(t)$ ҳосиласи манфий бўлиши керак. Радиоактив парчаланиш қонуни

$$m(t) = Ce^{-\lambda t}$$

функция билан аниқланади. Дастлабки вақт моментида ($t = 0$) радиоактив модданинг массаси m_0 г десак, бу қонуният

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

кўринишда ёзилади ($m_0 = m(0) = Ce^{-\lambda 0} = C$).

3-мисол. Фараз қилайлик, массаси m моддий жисм F кучнинг таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бунда F кучнинг йўналиши жисм ҳаракати билан йўналишдош деб ҳисобладик. Ньютоннинг II қонуни бўйича t вақт моментида жисм ҳаракатининг тезланиши шу вақт ичида ўзини хосил қилувчи F кучга тўғри пропорционал ва жисмнинг массаси m га пропорционал: $a = \dfrac{F}{m}$.

Иккинчи тартибли ҳосиланинг механик маъноси бўйича тезланиш жисмнинг $s(t)$ босиб ўтган йўлининг t вақтдаги иккинчи тартибли ҳосиласига тенг. Шуни эътиборга олсак, жисм ҳаракатланиши учун

$$m \cdot s''(t) = F(t).$$

4-мисол. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасига ўтказилган уринманинг координаталар ўқлари билан чегараланган кесмаларининг узунлиги ўзгармас ва a га тенг. Ушбу эгри чизиқнинг дифференциал тенгламасини ёзамиз.

▲ Фараз қилайлик, $y = f(x)$ бизга керак бўлган эгри чизиқнинг тенгламаси бўлсин. Эгри чизиққа $(x, f(x))$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$Y - f(x) = f'(x)\,(X - x).$$

Уринманинг Ox ва Oy ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз.

$$Ox\colon\ Y = 0 \Rightarrow X = \frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)};\ Oy\colon\ X = 0 \Rightarrow Y = f(x) - xf'(x).$$

Шундай қилиб, эгри чизиқ координаталар ўқлари билан $A\left(\dfrac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)};0\right)$ ва $B(0;\ f(x) - xf'(x))$ нуқталарда кесишади. Шартга кўра $AB = a$, яъни

$$\left(\frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}\right)^2 + \left(f(x) - xf'(x)\right)^2 = a^2.$$

$f'(x) = y'$, $f(x) = y$ алмаштириш бажарсак,

$$\left(\frac{xy' - y}{y'}\right)^2 + \left(y - xy'\right)^2 = a^2,$$

$$x^2(y')^2 + y^2 - 2xyy' + y^2(y')^2 - 2xy(y')^3 + x^2(y')^4 = a^2(y')^2$$

кўринишдаги дифференциал тенгламани оламиз. ■

Бу кўриб чиқилган мисоллардан табиатда учрайдиган ҳодисаларнинг дифференциал тенгламалар билан тавсифланишини кўрамиз. Энди дифференциал тенгламалар тушунчасига қисқача тўхталиб ўтамиз.

Таъриф. *Номаълум $y(x)$ функцияни, унинг ҳосилаларини ва x эркли ўзгарувчини боғловчи тенглама* ***дифференциал тенглама*** *деб аталади.*

Дифференциал тенгламадаги номаълум функциянинг ҳосилалари тартибининг энг каттаси шу *тенгламанинг тартиби* деб аталади. Масалан,

$$y'''(y''+ 2y)^2$$

тенгламанинг тартиби 3 га тенг.

$y'' = \dfrac{\sin x}{y + x}$ – иккинчи тартибли дифференциал тенглама.

Гуруҳларда ишлаш

1-4-мисоллардаги дифференциал тенгламаларнинг тартибини аниқланг.

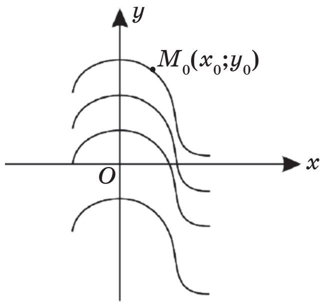
Таъриф. *Дифференциал тенгламадаги номаълум функция билан унинг ҳосилаларини ўрнига қўйганда бу тенгламани айниятга айлантирадиган ҳар бир $y(x)$ функция* ***дифференциал тенгламанинг ечими*** *деб аталади.*

Масалан, $y = Ce^{ax}$ функциялар $y' = ay$ тенгламанинг ечими бўлади. Худди шундай, $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + C$ ($C = \text{const}$) функция $y' = \dfrac{x^4 - 1}{x^3}$ тенгламанинг ечими. Ҳақиқатан, $y'(x) = x - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^4 - 1}{x^3}$.

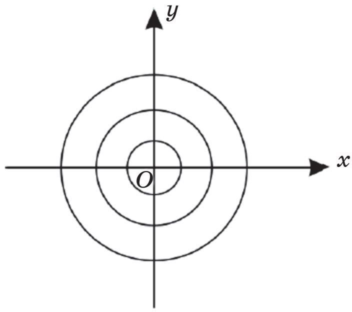
Дифференциал тенглама ечимининг графиги шу тенгламанинг *интеграл эгри чизиғи* деб аталади. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг энг соддаси $y' = f(x)$ кўринишда ёзилади. Бу тенгламани ечиш учун ҳосиласи $f(x)$ га тенг бўлган номаълум $y(x)$ функцияни топиш керак. Бу мисолнинг интеграллаш орқали ечилишини яхши биламиз:

$$y(x) = \int f(x)dx.$$

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг қандайдир бир бошланғич функцияси бўлса, бу ечим $y(x) = F(x) + C$ кўринишда ёзилади. Бундан $y' = f(x)$ тенгламанинг чексиз кўп ечими мавжуд эканлигини кўрамиз. Бу функцияларнинг графиклари (интеграл эгри чизиқлари) бир-бирларидан параллел кўчириш орқали хосил қилинади. Шу билан бирга, текисликдаги ҳар бир $M_0(x_0;y_0)$ нуқта орқали фақат биттагина интеграл эгри чизиқ ўтади (8.1-расм).



8.1-расм



8.2-расм

Масалан, $y \cdot y' + x = 0$ тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари – маркази координаталар бошида бўлган концентрик айланалар.

Берилган тенгламани $y \cdot y' = - x$ кўринишда ёзиб, тенг фигураларнинг дифференциаллари ҳам тенг бўлишини эътиборга олсак, $y \cdot y'dx = - xdx$. Бундан $y'dx = dy$. У ҳолда,

$$y \cdot dy = - xdx$$

тенгликни оламиз. Бу тенгликни интеграллаймиз:

$$\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = C.$$

Бунда номаълум ўзгармас C нинг ўрнига $\frac{C}{2}$ деб ёзилади. Бу номаълум ўзгармас учун C ёки $\frac{C}{2}$ бўлишининг аҳамияти йўқ. $x^2 + y^2 = C$ $(C > 0)$ тенглама билан концентрик айланаларнинг аниқланишини яхши биламиз (8.2-расм). Ушбу мисоллардан биринчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг ечимлари C ўзгармас катталикка боғлиқ эканлигини кўрамиз. Бу ўзгармас катталик аниқмас интегрални топиш давомида пайдо бўлади. Шу сабабли биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечимида битта ўзгармас катталик бўлади.

> **Қўшимча электрон ресурслар**
>
> https://www.youtube.com/watch?v=48vearVtLLs&list=PLEOOwQomrpAggQM2ub3EW1OEPEd36s9Jd

Шу тариқа $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ функция кўриб чиқилган $y \cdot y' + x = 0$ тенгламанинг умумий ечими бўлиб ҳисобланади. Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари билан бирга уларнинг хусусий ечимлари тушунчаси ҳам кўриб чиқилади. Бинобарин, дифференциал тенгламанинг умумий ечимларидаги ўзгармас катталик C га маълум бир сон қийматни бериш орқали олинадиган ечим шу тенгламанинг ***хусусий ечими*** деб аталади.

Масалан, $y \cdot y' + x = 0$ тенгламанинг $y(1) = -2$ тенгликни қаноатлантирувчи ечимини топиш керак. Бу мисолни $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ тенгликка шартга кўра $x = 1$, $y = -2$ катталикларни ўрнига қўйсак, $C = 5$. $y < 0$ эканлигидан, $y = -\sqrt{5 - x^2}$ функция – берилган тенгламанинг бизга керакли хусусий ечими.

Энди иккинчи тартибли тенгламаларни кўриб чиқамиз. Уларнинг ичидан энг соддаси

$$y'' = f(x)$$

кўринишда ёзилади.

Бу тенгламани ечиш учун $z = y'$ деб белгилаш киритамиз. $z' = (y')' = y''$, шу сабабли тенгламани $z' = f(x)$ кўринишда ёзамиз. Бундан

$$z = \int f(x)dx = F(x) + C_1.$$

Бунда $F(x)$ функция – $f(x)$ нинг бошланғич функцияси. Энди $y' = z$ эканлигидан, $y' = F(x) + C_1$ тенгламадан

$$y = \int (F(x) + C_1)\, dx = \Phi(x) + C_1 x + C_2$$

тенгликни оламиз. Бунда $\Phi(x)$ функция – $F(x)$ нинг бошланғич функцияси, C_1, C_2 – интеграл ўзгармас катталиклар. Ушбу мисолдан иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечимларида иккита ўзгармас катталик (C_1, C_2) кўрамиз. n-тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечимининг таркибида n номаълум ўзгармас катталик бўлади. Бу тасдиқнинг тўлиқ исботи билан олий математика курсида танишасиз.

?

1. Қандай тенгламалар дифференциал тенгламалар деб аталади?
2. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган мисолларга мисол келтиринг.
3. Дифференциал тенгламаларнинг тартиби деб нимага айтилади?
4. Дифференциал тенгламаларнинг ечими деб нимага айтилади? Тенгламанинг умумий ечими деганда нимани тушунасиз?

Мисоллар

А

8.1. Қуйидаги тенгламалар ичидан дифференциал тенгламаларни кўрсатиб, унинг тартибини аниқланг:

1) $y''' - 2x(y')^2 = x^2$; 2) $\dfrac{xy''}{x^2+y^2} = 1$;

3) $\ln y = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$; 4) $x^2 + 3xy^2 = 0$.

8.2. $f(x)$ функция берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини текширинг:

1) $f(x) = e^{2x}$, $y' = 2y$; 2) $f(x) = e^{-x} + 1$, $y' + y = 1$;

3) $f(x) = e^{-3x} + e^x$, $y' + 3y = 4e^x$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $y' + y^2 = 0$.

8.3. $v = 20e^{-2t} + 5$ функция $\dfrac{dv}{dt} = 10 - 2v$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечими эканлигини исботланг.

8.4. Суюқликка ботиб бораётган тошнинг тезланиши $\dfrac{dv}{dt} = 4 - v$ тенглама билан тавсифланади. $v(t) = \text{A}e^{-t} + 4$ функциянинг дифференциал тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг. Тошнинг дастлабки тезлиги 8 м/с. А катталикни топинг.

8.5. $y = Ae^x - (x^2 + 2x + 2)$ функция $\dfrac{dy}{dx} = y + x^2$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатинг.

8.6. $\dfrac{dv}{dt} = 10 - 0{,}5v$ дифференциал тенгламанинг ечими $v = 20(1 - e^{-0{,}5t})$ функция бўлишини кўрсатинг. $t = 0$ бўлганда v катталикни топинг. t нинг катта қийматларида тезлик v қандай ўзгаради?

8.7. Қуйидаги функциялардан қайси бири $\dfrac{dy}{dx} = -8y$ тенгламанинг ечими бўлади?

A. $y = 4e^{-8x}$; B. $y = 8e^{-4x}$; C. $y = 4e^{-8x} + 2$;
D. $y = 4e^{-8x} + 8$; E. $y = 8e^{-8x}$.

8.8. Жисмнинг T температураси ўзгаришининг математик модели $\frac{dT}{dt} = 2 - 0{,}1T$ дифференциал тенглама билан берилган. $T = 20 + 60e^{-0{,}1t}$ функция дифференциал тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатинг.

8.9. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - x + 1$ дифференциал тенгламанинг иккала томонини интеграллаш орқали умумий ечимини топинг ва $x = 1$ катталикка мос $y = 4$ бўладиган хусусий ечимни топинг.

8.10. $\frac{ds}{dt} = 4 - 10t$ тенгламанинг умумий ечимини топинг ва $t = 0$ катталик мос $s = 11$ бўладиган ечимни аниқланг.

B

8.11. $y^2y' = 2$ ва $y(2) = 2$ деб олиб, $y(x)$ функцияни топинг.

8.12. Берилган функция кўрсатилган тенгламанинг ечими бўладиган қилиб, k нинг қийматини топинг:

1) $y = kx + 1$, $y' = 2$; 2) $x = kt^2$, $x' = 12t$;

3) $y = e^{kx}$, $y' = y$; 4) $y = e^{kx}$, $y' = ky$;

5) $u = x^3$, $u' = kx^2$; 6) $y = \frac{1}{x+1}$, $y' = ky^2$.

8.13. $y = Cx^2$ параболалар тўпламининг $C = 0$, $C = \pm 1$, $C = \pm 2$ бўлганда графикларини ясанг ва шу функциялар тўплами умумий ечими бўладиган дифференциал тенглама тузинг.

8.14. Берилган дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиғига $(1;\ 2)$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг:

1) $y' = 2x$; 2) $y' = -y$; 3) $y' = y + x$; 4) $y' + xy = 1$.

8.15. Умумий ечимлари бўйича 1-тартибли дифференциал тенглама тузинг:

1) $y^2 = 2Cx$; 2) $y = C_1x + C_2$; 3) $y = Ce^x$; 4) $x^2 + y^2 = C^2$.

8.16. $y' + xy = 1$ тенгламанинг барча интеграл эгри чизиқларига уларнинг Oy ўқи билан кесишиш нуқтасида ўтказилган уринмалари ўзаро параллел бўлишини исботланг.

8.17. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

1) $y' = e^{-3x}$; 2) $y' = \frac{x}{2} + \operatorname{tg}x$; 3) $e^{y'} = 1$; 4) $\cos y' = 1$.

C

8.18. Исталган уринманинг Ox билан кесишиш бурчагининг тангенси уриниш нуқтаси абсциссасининг $\frac{2}{3}$ қисмига тенг бўлган эгри чизиқларнинг умумий тенгламасини ёзинг.

8.19. Қаршилик мавжуд бўлган муҳитда жисмнинг эркин тушиш ҳаракатининг дифференциал тенгламасини ёзинг. Бунда муҳитнинг қаршилик кучи тезликнинг квадратига пропорционал.

Такрорлашга доир машқлар

8.20*. Аниқмас интегрални топинг:

1) $\int \ln(x^2 + 4)dx$; 2) $\int (5x - 2)\, e^{3x}dx$;

3) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 4) $\int x\sin^2 x dx$.

8.2 Ўзгарувчилари ажратиладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

Мавзуни ўрганиш давомида сизлар:

- ўзгарувчилари ажратиладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечишни ўрганасиз;
- физик, татбиқий масалаларни ечишда дифференциал тенгламалардан фойдаланасизлар.

Ўзгарувчилари ажратиладиган тенгламаларни ечиш

Биринчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг умумий кўриниши

$$F(x;\ y;\ y') = 0. \tag{1}$$

Агар бу тенгламани y' ҳосилага нисбатан ечиш мумкин бўлса,

$$y' = f(x;\ y) \tag{2}$$

кўринишда ёзилади. (1) ёки (2) кўринишда берилган тенгламаларни (умумий тартиби исталган тенгламаларни) ечишнинг олий математика курсида турли усулларда кўриб чиқилади. Биз (2) кўринишдаги тенгламаларнинг энг содда кўриниши – ўзгарувчилари ажратиладиган тенгламаларни кўриб чиқамиз. Унинг умумий кўриниши қуйидагича ёзилади:

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{3}$$

Бу тенгламанинг ўнг томони x ва y га боғлиқ бўлган иккита функциянинг кўпайтмаси кўринишда ёзилган ($f(x)$ ва $g(y)$ функциялар узлуксиз деб ҳисобланади), чап томонида номаълум функциянинг ҳосиласи турибди.

Агар қандайдир бир y_0 сони учун $g(y_0) = 0$ тенглик бажарилса, $y = y_0$ сони (3) тенгламанинг ечими бўлади.

Ҳақиқатан, $(y_0)' = 0$ (y_0 – ўзгармас сон) эканлигидан, $(y_0)' = f(x) \cdot g(y_0) \Rightarrow 0 = f(x) \cdot 0$ айниятни оламиз.

Тенг функцияларнинг дифференциаллари ҳам тенг бўлиши керак.

Бундан $\dfrac{y'}{g(y)}dx = f(x)dx$.

$y'dx = dy$ бўлишини эътиборга олиб,

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \tag{4}$$

Кўринишдаги ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенгликни оламиз. $\dfrac{1}{g(y)}$ нинг бошланғич функцияси $G(y)$, $f(x)$ нинг бошланғич функцияси $F(x)$ бўлса, (4) тенгликни интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow G(y) = F(x) + C. \tag{5}$$

Шундай қилиб, биз $g(y) \neq 0$ бўлганда ўзгарувчилари ажратиладиган (3) дифференциал тенгламаларнинг тўғридан-тўғри интеграллаш орқали ечилишини ва унинг ечими (5) кўринишда ёзилишини кўрдик.

Шу билан бир қаторда биз юқорида ўзгарувчилари ажратиладиган (3) тенгламадан (4) кўринишдаги дифференциал тенгликка кўчишни ҳам асосладик. Амалда эса, мисоллар ечишда (3) тенгламадан (4) кўринишдаги тенгламага ўтишнинг, пропорция қонунлари билан бажариладиган «формал» усули кўп қўлланилади:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad g(y) \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. $x^3 \cdot y' = 2y$ тенгламанинг умумий ечимини топиш керак.

▲ $y = 0$ тенгламанинг ечими бўлади. Агар $y \neq 0$, $x \neq 0$ бўлса, берилган тенгламадаги бир хил ўзгарувчиларни бир томонга тўплаб,

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x^3}$$

кўринишда ёзамиз ва уни интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x^3} \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{x^2} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Жавоб: $y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$. ■

Таъриф. *$y' = f(x;\ y)$ тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ тенгликни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи **Коши масаласи** деб аталади.*

$y\ (x_0) = y_0$ шарт Коши масаласининг дастлабки қиймати (бошланғич шарти) деб аталади.

2-мисол. $y' = xe^{-y}$, $y(1) = 0$ Коши масаласини ечамиз.

▲ Берилган тенгламадаги ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = xdx \Rightarrow e^y dy = xdx.$$

Энди тенгламанинг иккала томонини интеграллсак,

$$\int e^y dy = \int xdx \Rightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

$y(1) = 0$ шартдан фойдалансак, $0 = \ln(0{,}5 + C) \Rightarrow C = 0{,}5$.

Коши масаласининг ечими $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$ кўринишда ёзилади. ■

?
1 Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўринишини ёзинг.
2. Қандай тенгламалар ўзгарувчилари ажратиладиган тенгламалар деб аталади?
3. Ўзгарувчиси ажратиладиган дифференциал тенгламалар қандай ечилади?

Мисоллар

A

8.21. Қуйидаги дифференциал тенгламалар ичидан ўзгарувчиси ажратиладиган тенгламаларни ажратиб ёзинг:

1) $y' = xy^2$; 2) $u' + x^2u = e^x$;

3) $y' = \dfrac{1}{x-1}$; 4) $y' = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$.

8.22. Ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенгламаларни ечинг:

1) $y' = y$; 2) $y' = 2x$; 3) $y' = xy^2$; 4) $y' = e - x$.

8.23. Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини ўзгарувчиларни ажратиш усули билан топинг:

1) $\dfrac{dy}{dx} = xy$; 2) $\dfrac{dy}{dx} = x + yx$; 3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{y^2}$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y}$; 5) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$; 6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x(x-1)}$.

8.24. Коши масаласини ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечинг:

1) $x\dfrac{dy}{dx} = y^2$, $x = 1$ бўлганда $y = 10$;

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x}$, $y(1) = 2$;

3) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\sin 2x$, $x = 0$ бўлганда $y = 0$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = x^2e^{-y}$, $x = 0$ бўлганда $y = 10$.

Дифференциал тенгламалардан татбиқий масалаларни ечишда кенг қлланилади. Унинг бир мисоли – Ньютоннинг совиш қонуни. Совиш жараёнининг математик модели – ўзгарувчилари ажратиладиган биринчи тартибли дифференциал тенглама.

Ньютоннинг совиш қонуни

Тана ҳароратининг ўзгариш тезлиги тана ҳарорати билан атроф муҳит ҳароратининг айирмасига тўғри пропорционал:

$T' = k(T - T_{\text{ўрта}})$ – Ньютоннинг совиш қонуни.

Бунда $T_{\text{ўрта}}$ – атроф муҳитнинг ҳарорати.

Амалий топшириқ

8.25. Ҳарорати 20° C бўлган хонада чойнинг ҳарорати 100° C дан 90° C га 5 минутда совийди. Қанча вақтда чойнинг ҳарорати 50° C гача совишини аниқланг.

▲ Ньютоннинг совиш қонуни бўйича $T' = k(T - 20)$. Ушбу дифференциал тенгламани ўзгарувчиларни ажратиш (бўлиш) усули билан ечамиз:

$$T' = k(T - 20) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - 20) \Rightarrow \frac{dT}{T-20} = kdt.$$

Тенгламанинг иккала томонини ҳам интеграллаймиз:

$$\int \frac{dT}{T-20} = \int kdt \Rightarrow \ln|T - 20| = kt + C.$$

Хонанинг ҳарорати 20° C бўлгани учун чойнинг ҳарорати ундан совумайди, бундан $T - 20 > 0$, $|T - 20| = T - 20$. Тенгликнинг иккала томонини ҳам экспонентага келтирамиз:

$$T - 20 = e^{kt + C} \Rightarrow T = 20 + e^{kt + C}.$$

Бу – дифференциал тенгламанинг умумий ечими.
Чойнинг ҳарорати 100° C дан 90° C га 5 минутда совийди, бундан $T(0) = 100$, $T(5) = 90$ шартлардан фойдаланиб k, C қийматларни топамиз:

$$T(0) = 100 \Rightarrow 20 + e^{k\cdot 0 + C} = 100 \Rightarrow e^C = 80 \Rightarrow C = \ln 80,$$

$$T(5) = 90 \Rightarrow 20 + e^{5k + \ln 80} = 90 \Rightarrow 80e^{5k} = 70.$$

$$e^{5k} = \frac{7}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{8}.$$

Шундай қилиб, $k = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{8} \approx -0{,}027$. $C = \ln 80 \approx 4{,}382$.

$$T = 20 + e^{-0{,}027t + 4{,}382}.$$

Қанча вақтда чойнинг температураси 50° C га гача совишини аниқлаймиз:

$$20 + e^{-0{,}027t + 4{,}382} = 50 \Rightarrow e^{-0{,}027t + 4{,}382} = 30,$$

$$-0{,}027t + 4{,}382 = \ln 30 \approx 3{,}401,$$

$$t \approx \frac{3{,}401 - 4{,}382}{-0{,}027} = 36{,}3.$$

Жавоб: чой қуйилгандан кейин 36,3 минутдан кейин унинг ҳарорати 50° C бўлади. ■

8.26. $T(t) = \alpha + Ae^{-kt}$ функция $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - \alpha)$, $k > 0$ (Ньютоннинг совиш қонуни) дифференциал тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатинг. 90°С ҳароратдаги 1 пиёла чой 25°С ҳароратдаги хонага олиб кирилди. Ушбу жараённи тавсифловчи Ньютоннинг совиш қонунини ёзинг ва α билан A катталикларни топинг.

8.27. Қайнаган сув 10 минутда 100°С дан 60°С гача совийди. Атроф муҳитнинг ҳарорати 20°С деб олиб, сувнинг ҳарорати қанча вақтдан кейин 25°С бўлишини топинг.

8.28. 20 м/с бошлағич тезлик билан ҳаракатланаётган моддий нуқта тезлигининг модели $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v^2}{10}$ тенглама билан берилган. Тенгламанинг дастлабки шартларини қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг. Тезликнинг бошланғич катталигини 10% га камайиши учун қанча вақт керак?

8.29. $y = \dfrac{-2}{x^2 + 2}$ функция $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$ дифференциал тенгламанинг $y(0) = -1$ шартни қаноатлантирувчи ечими бўлишини кўрсатинг.

B

8.30. Моддий нуқтанинг суюқлик ичидаги ҳаракати $\dfrac{dv}{dt} = -0{,}2\,(v + v^2)$ дифференциал тенглама билан тавсифланади. Ушбу тенгламанинг $v(0) = 40$ шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

8.31. Дифференциал тенгламаларни ечинг:

1) $(1 + x^2)\,yy' = (1 + y^2)$; 2) $y' = xye^{x^2}\ln y$;

3) $y'\mathrm{tg}x = y + 1$; 4) $y'\sin x = (1 - y)\cos x$.

8.32. Коши масаласини ечинг:

1) $y' + xy = x$, $y(0) = 2$;

2) $yy'\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{1 + y^2} = 0$, $y(0) = -2$;

3) $(1 + e^x)\,yy' = e^x$, $y(0) = 2$.

Амалий топшириқлар (8.33–8.34):

8.33. Идишнинг остки томонидаги тешикдан сув оқаяпти. Сувнинг ҳажми камайган сайин сатҳи ҳам ўзгармоқда. Сувнинг сатҳи ўзгаришининг математик модели – $4\dfrac{dh}{dt}=-\sqrt{20}h$ дифференциал тенглама, бунда t минутларда, h сантиметрларда ўлчанади. Сувнинг бошлағич сатҳи 81 см. Дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топинг. Сувнинг бутунлай оқиб кетиши учун қанча вақт керак? (Сувнинг сатҳи 0,05 см бўлганда унинг бутунлай оқиб кетди деб ҳисобланг).

▲ Дифференциал тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратамиз: $4\dfrac{dh}{dt}=-\sqrt{20}h \Rightarrow$

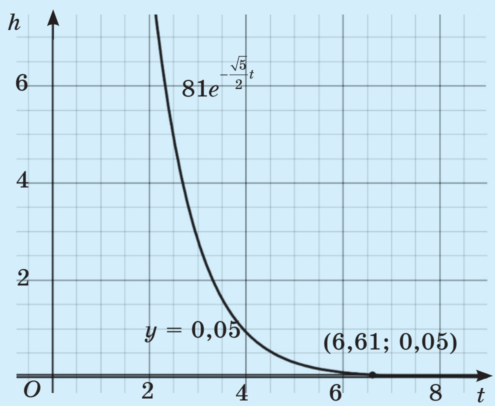
$\Rightarrow 4\dfrac{dh}{h}=-\sqrt{20}dt$;

$4\displaystyle\int\frac{dh}{h}=-\sqrt{20}\int dt \Rightarrow 4\ln h=-\sqrt{20}t+C$;

$\ln h=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}t+C;\ h=Ce^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$. Бу –умумий ечим. Сувнинг бошланғич сатҳи 81 см. Шу сабабли

$$h(0)=81 \Rightarrow 81=Ce^{-\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 0} \Rightarrow C=81.$$

Демак, $h=81e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$. Бу –хусусий ечим. Сув сатҳининг баландлиги 0,05 см бўлганда унинг бутунлай оқиб кетди деб ҳисоблаймиз. $0,05=81e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}t}$ тенгламадан муҳандислик калькуляторидан фойдалансак, $t\approx 6,61$ мин оламиз.



■

8.34. Қизиган тошнинг бошланғич ҳарорати 100°C. Уни 20°C ҳароратли сувга солинди. Ҳарорат ўзгаришининг математик модели $\frac{dT}{dt} = -0{,}5(T - 20)$ дифференциал тенглама билан аниқланади, бунда t минутларда берилган вақт. 1) Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг; 2) бошланғич шартлардан фойдаланиб, дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топинг; 3) қанча вақтдан кейин тошнинг ҳарорати 50°C бўлишини топинг.

8.35. Ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтасининг ординатасининг квадратига тенг ва $A(-2;1)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

Амалий топшириқ

8.36. Каламушнинг дунёга келгандаги массаси 30 г. У 3 ойда катта каламушга айланади. Унинг массасининг ўсиши $\frac{dm}{dt} = 120(t - 3)^2$ дифференциал тенглама билан тавсифланади. Бунда m – каламушнинг массаси (граммларда), t – вақт (ойларда). 1) Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг; 2) хусусий ечимини топинг; 3) катта каламушнинг массасини топинг.

C

Амалий топшириқ

8.37. Массаси 80 кг бўлган парашютчи самолётдан сакради. Самолётдан x узоқликда пастга қулаганда унинг тезлиги v м/с бўлди. Парашютчига таъсир қиладиган кучлар: оғирлик кучи билан амплитудаси kv^2 га тенг бўлган ҳавонинг қаршилиги. Унинг оҳирги тезлиги 70 м/с. $v\frac{dv}{dx} = 9{,}8 - 0{,}002v^2$ дифференциал тенглама характнинг математик модели бўлишини исботланг.

8.38. Ҳар бир нуқтасига ўтказилган уринма уриниш нуқтаси билан координаталар бошини туташтирувчи кесмага перпендикуляр бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

Такрорлашга доир машқлар

8.39*. Ҳисобланг:

1) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(1-x)^2}$;

3) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; 4) $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 6) $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

8.3. Коэффициентлари ўзгармас иккинчи тартибли чизиқли биржинсли дифференциал тенгламалар

Мавзуни ўрганиш давомида сиз:

- биржинсли дифференциал тенгламаларнинг таърифини биласиз;
- $ay'' + by' + cy = 0$ кўринишдаги, бунда a, b, c – ўзгармаслар, иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламанинг таърифини биласиз ва уларни еча оласиз;
- гармоник тебранишнинг тенгламасини тузиб, уни ечишни ўрганасиз;
- физик, татбиқий масалаларни ечишда дифференциал тенгламалардан фойдаланасиз.

8.3.1. Иккинчи тартибли биржинсли тенгламаларни ечиш

Таъриф. $ay'' + by' + cy = 0$ *кўринишдаги дифференциал тенглама* ***иккинчи тартибли чизиқли биржинсли тенглама*** деб аталади, бунда a, b, c – коэффициентлар.

Агар $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ функциялар $ay'' + by' + cy = 0$ тенгламанинг ечимлари бўлса, исталган C_1 ва C_2 ўзгармас сонлар учун $y = C_1 \cdot f(x) + C_2 \cdot g(x)$ функция ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

$ay'' + by' + cy = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимининг таркибига иккита C_1 ва C_2 ўзгармас катталиклар киради. Энди ушбу тенгламани ечиш йўлларини кўрамиз. Бу тенгламанинг ечимларини $y = e^{\lambda x}$ кўрсаткичли функция кўринишида излаш керак. Чунки унинг барча ҳосилалари ўзидан фақат ўзгармас кўпайтувчигагина фарқланади.

$$\left.\begin{aligned} &ay'' + by' + cy = 0, \\ &y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\left(e^{\lambda x}\right)'' + b\left(e^{\lambda x}\right)' + ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} = 0\,.$$

Бунда $e^{\lambda x} > 0$, шу сабабли $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ бўлиши керак. Энди ушбу $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ квадрат тенгламани ечиб, тенгламанинг хусусий ечимларини $y = e^{\lambda x}$ кўринишда топиш мумкин.

Таъриф. $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ *тенглама* $ay'' + by' + cy = 0$ *иккинчи тартибли чизиқли биржинсли дифференциал тенгламанинг* ***тавсифий тенгламаси*** деб аталади.

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ – квадрат тенглама. Квадрат тенгламанинг дискриминантига боғлиқ уч хил ечими бўлади.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$. Тенгламанинг ҳар хил иккита ҳақиқий илдизлари мавжуд: λ_1 ва λ_2. У ҳолда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциал тенгламанинг иккита ҳар хил хусусий ечими мавжуд: $y = e^{\lambda_1 x}$ ва $y = e^{\lambda_2 x}$. Бундан тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2. $D = b^2 - 4ac = 0$. Тавсифий тенгламанинг ўзаро тенг иккита ҳақиқий илдизлари мавжуд: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Бу ҳолда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциал тенгламанинг иккита бир хил хусусий ечимлари $y = e^{\lambda x}$ ва $y = e^{\lambda x}$ кўринишда бўлиб, унинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

ёки

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}.$$

3. $D = b^2 - 4ac < 0$. Тавсифий тенгламанинг илдизлари ўзаро қўшма комплекс сонлар: $\lambda_1 = m + in$ ва $\lambda_2 = m - in$. Бу ҳолда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциал тенгламанинг иккита ҳар хил хусусий ечими $y = e^{mx}\cos nx$ ва $y = e^{mx}\sin nx$ кўринишда бўлиб, унинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$y = C_1 e^{mx}\cos nx + C_2 e^{mx}\sin nx,$$

ёки

$$y = e^{mx}(C_1\cos nx + C_2\sin nx).$$

Эслатма. Бунда комплекс сонларнинг кўрсаткичли ва тригонометрик кўринишларига суяндик:

$$e^{(m+ni)x} = e^{mx}(\cos nx + i \cdot \sin nx).$$

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

https://www.youtube.com/watch?v=SPVqgkOZMAc

1-мисол. Иккинчи тартибли чизиқли биржинсли дифференциал тенгламаларни ечиш керак:

1) $y'' + 5y' + 6y = 0$; 2) $3y'' - y' = 0$ ва $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

3) $y'' + 6y' + 34y = 0$.

▲ 1) $y'' + 5y' + 6y = 0$ дифференциал тенгламанинг тавсифий тенгламасини ёзсак, $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ квадрат тенглама оламиз. Унинг илдизлари: $\lambda_1 = -3$ ва $\lambda_2 = -2$. Бундан $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$ функция тенгламанинг умумий ечими бўлади.

2) $3y'' - y' = 0$ ва $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ дифференциал тенгламанинг тавсифий тенгламаси ушбу квадрат тенглама бўлади:

$$3\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ ва } \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Бундан $y = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{\frac{1}{3}x} = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}x}$ функция – тенгламанинг умумий ечими.

Энди $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқлайлик. Бунинг учун умумий ечимга берилган катталикларни қўйиб, C_1 билан C_2 ўзгармасларни топиш керак:

$$y = C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow y' = 0 + C_2\cdot\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x} = \frac{C_2}{3}e^{\frac{1}{3}x};$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2e^{\frac{1}{3}\cdot 0} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0;$$

$y'(0) = 3 \Rightarrow \dfrac{C_2}{3}e^{\frac{1}{3}\cdot 0} = 3 \Rightarrow C_2 = 9 \Rightarrow C_1 = -9$. Бизга керак бўлган хусусий ечим: $y = -9 + 9e^{\frac{1}{3}x}$.

3) $y'' + 6y' + 34y = 0$ тенгламанинг тавсифий тенгламаси: $\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0$. Дискриминанти манфий сон бўлгани учун тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар: $\lambda_1 = -3 + 5i$ ва $\lambda_2 = -3 - 5i$. Бундан $y = C_1e^{-3x}\cos 5x + C_2e^{-3x}\sin 5x$ функция – тенгламанинг умумий ечими. ■

8.3.2. Гармоник тебранишларнинг математик модели бўлган дифференциал тенглама

2-мисол.

$$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$$

функция ўзгармас C_1 билан C_2 нинг исталган қийматларила $y'' + \omega^2\cdot y = 0$ тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатамиз ва бу тенгламанинг $y(0) = a$, $y'(0) = b$ бўлганда хусусий ечимларини топамиз.

▲ $y' = -C_1 \cdot \omega \cdot \sin\omega t + C_2 \cdot \omega \cdot \cos\omega t;$

$$y'' = -C_1\omega^2 \cdot \cos\omega t - C_2\omega^2 \cdot \sin\omega t = -\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)$$

қийматларни $y'' + \omega^2 y = 0$ тенгламага қўйиб,

$$-\omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) = 0$$

айниятни оламиз. $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ функциянинг исталган C_1 ва C_2 учун $y'' + \omega^2 y = 0$ тенгламанинг ечими бўлади. Энди тенгламанинг хусусий ечимларини аниқлайлик. $t = 0$ бўлганда:

$$y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1,\ y(0) = a \Rightarrow C_1 = a;$$

$$y'(0) = -C_1\omega\sin 0 + C_2\omega\cos 0 = C_2\omega,\ y'(0) = b \Rightarrow C_2 = \frac{b}{\omega}.$$

Бундан тенгламанинг хусусий ечими ушбу кўринишда ёзилади:

$$y = a \cdot \cos\omega t + \frac{b}{\omega} \cdot \sin\omega t.$$ ■

$y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ тенгламанинг $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ умумий ечимини $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ кўринишда ёзиш мумкин. Ҳақиқатан, қўшимча бурчак усулидан фойдалансак,

$$y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cdot \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin\omega t \right).$$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\alpha = \arcsin\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ белгилаш киритсак, йиғиндининг синуси формуласига кўра $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ тенгликни оламиз. Бундай қонуниятга бўйсунадиган ҳаракат *гармоник тебраниш* деб аталади. Бунда A – тебраниш *амплитудаси*, ω – *частота*, α – *бошланғич фазаси*.

1. Биржинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг таърифини ёзинг.
2. Коэффициенти ўзгармас иккинчи тартибли биржинсли дифференциал тенгламалар қандай ечилади?
3. Тавсифий тенгламанинг ечимлари иккинчи тартибли биржинсли чизиқли тенгламанинг умумий ечимига қандай таъсир кўрсатади?
4. Гармоник тебранишни қандай тушунасиз? Унинг асосий тавифларини айтинг.

Мисоллар

A

8.40. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг тавсифий тенгламасини ёзинг ва унинг илдизларини топинг:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; 2) $6y'' + 5y' + y = 0$;
3) $2y'' + y' - y = 0$; 4) $y'' + y' - 5y = 0$;
5) $y'' - 4y = 0$; 6) $y'' - 3y' = 0$.

8.41. Берилган функциялар мос тенгламаларнинг умумий ечими бўлишини текширинг:
1) $y = C_1 \cdot \cos 2t + C_2 \cdot \sin 2t,\ y'' + 4y = 0$;
2) $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x},\ y''' - 9y' = 0$.

8.42. Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечими ва берилган шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топинг:
1) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $x = 0$ бўлганда $y = 1$ ва $y' = 0$;
2) $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 0$ ва $y(0)' = 1$;
3) $y'' - 5y' = 0$, $x = 0$ бўлганда $y = 0$ ва $y' = 4$;
4) $v'' - v = 0$, $v(-1) = -1$ ва $v(1) = 1$.

8.43. Гармоник тебранишнинг амплитудасини, частота ва бошланғич фазасини топинг:
1) $y = \cos 2x - \sin 2x$; 2) $y = 3\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$;
3) $y = \cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x$; 4) $y = -3\sin\frac{x}{3} + 4\cos\frac{x}{3}$.

8.44. Берилган дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:
1) $y'' - 2y' + y = 0$; 2) $9y'' - 12y' + 4y = 0$;
3) $4y'' + 4y' + y = 0$; 4) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
5) $9y'' - 6y' + y = 0$; 6) $y'' + 10y' + 25x = 0$.

8.45. Умумий ечими бўйича дифференциалнинг биринчи тартибли тенгламасини тузинг:
1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; 2) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$.

8.46. Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари билан берилган шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини аниқланг:
1) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $x = 0$ бўлганда $y = 1$ ва $y' = 0$;
2) $4y'' + 4y' + y = 0$; $y(0) = 4$ ва $y(2) = 0$;
3) $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$ ва $y'(0) = 0$;
4) $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 0$ ва $y(1) = 2$;
5) $y'' + 2ky' + k^2 y = 0$; $y(0) = 0$ ва $y'(0) = 2$.

8.47. Бошланғич фазалари ноль ва частоталари ўзаро тенг бўлган иккита гармоник тебранишнинг йиғиндиси ҳам гармоник тебраниш бўлишини кўрсатинг.

8.48. Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини аниқланг:
1) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 2) $y'' - 2y' + 5y = 0$;

3) $y'' + 2y' + 4y = 0$; 4) $4y'' + 4y' + 5y = 0$;
5) $y'' + 3y' + 6y = 0$; 6) $y'' - 4y' + 8y = 0$.

B

8.49. $x(t)$ функция учун Коши масаласини ечинг:

1) $x'' + 9x = 0$; $t = 0$ бўлганда $x = 0$ ва $x' = 1$;

2) $x'' + 4x = 0$; $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ва $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

3) $x'' + 12x = 0$; $x(0) = 0$ ва $x(1) = 3$.

C

8.50. $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ функция $y'' + \omega^2 y = 0$ тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатинг. Бу 2-мисолга тескари бўладими? Жавобингизни асосланг.

8.51. Дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг:
1) $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$ ва $y'(0) = 2$;
2) $y'' - 3y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$ ва $y'(0) = 0$;
3) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$ ва $y'(0) = 0$.

Такрорлашга доир машқлар

8.52*. Ҳисобланг:
1) $\int \sin^4 x dx$; 2) $\int \cos^3 x dx$; 3) $\int x^2 e^{-2x} dx$.

8.53. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ функциянинг графиги ординаталар ўқини $y = 2$ нуқтада кесиб ўтувчи бошланғич функциясини топинг.

«ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР» бўлимининг хулосаси

Дифференциал тенгламалар деб таркибида эркли ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг ҳосиласи бўладиган тенгламаларга айтилади. Дифференциал тенгламалар номаълум функция ҳосилалари тартибининг энг каттаси шу тенгламанинг тартиби деб аталади. Дифференциал тенгламадаги номаълум функция билан унинг ҳосилаларининг ўрнига қўйганда бу тенгламани айниятга айлантирадиган функциялар *дифференциал тенгламаларнинг ечими* деб аталади. Дифференциал тенгламанинг ечимининг графиги шу тенгламанинг *интеграл эгри чизиғи* деб аталади. Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларидаги ўзгармас катталик C га маълум бир сон қиймат бериш орқали олинадиган ечим шу тенгламанинг *хусусий ечими* деб аталади.

$y' = f(x) \cdot g(y)$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар ўзгарувчилари ажратиладиган биринчи тартибли *дифференциал тенгламалар* деб аталади.

$y' = f(x; y)$ тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ тенгликни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи *Коши масаласи* деб аталади. $y(x_0) = y_0$ шарт Коши масаласининг бошланғич қиймати деб аталади.

$$T' = k(T - T_{\text{ўрта}}) \text{ – Ньютоннинг совиш қонуни.}$$

$ay'' + by' + cy = 0$ кўринишдаги дифференциал тенгламалар иккинчи тартибли *чизиқли биржинсли тенглама* деб аталади, бунда a, b, c – коэффициентлар.

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ тенглама $ay'' + by' + cy = 0$ иккинчи тартибли биржинсли дифференциал тенгламаларнинг *тавсифий тенгламалари* деб аталади.

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ – квадрат тенглама. Квадрат тенгламанинг дискриминантига боғлиқ равишда уч ҳил ечими бўлади:

1. Агар $D = b^2 - 4ac > 0$ бўлса, тавсифий тенгламанинг ҳар хил иккита ҳақиқий илдизи мавжуд: λ_1 ва λ_2. У ҳолда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциал тенгламанинг иккита ҳар хил хусусий ечимлари мавжуд: $y = e^{\lambda_1 x}$ ва $y = e^{\lambda_2 x}$. Бундан тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}.$$

2. Агар $D = b^2 - 4ac = 0$ бўлса, тавсифий тенгламанинг ўзаро тенг иккита ҳақиқий илдизлари мавжуд: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Бу ҳолда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциал тенгламанинг иккита бир хил хусусий ечимлари $y = e^{\lambda x}$ ва $y = xe^{\lambda x}$ кўринишда бўлиб, унинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}.$$

3. Агар $D = b^2 - 4ac = 0$ бўлса, тавсифий тенгламанинг илдизлари ўзаро қўшма комплекс сонлар: $\lambda_1 = m + in$ ва $\lambda_2 = m - in$.

Бу ҳолда $ay'' + by' + cy = 0$ дифференциал тенгламанинг иккита ҳар хил хусусий ечими $y = e^{mx}\cos nx$ ва $y = e^{mx}\sin nx$ кўринишда бўлиб, унинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$y = C_1e^{mx}\cos nx + C_2e^{mx}\sin nx.$$

$y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ функция ўзгармас C_1 билан C_2 нинг исталган қийматларида $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ тенгламанинг ечими бўлади.

$y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ қонуният билан берилган ҳаракат г*армоник тебраниш* деб аталади. Бунда A – тебраниш амплитудаси, ω – частота, α – бошланғич фаза.

Термин сўзлар луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Биринчи (иккинчи) тартибли дифференциал тенглама	Бірінші (екінші) ретті дифференциалдық теңдеу	Дифференциальное уравнение первого (второго) порядка	First (second) order differential equation
Ўзгарувчиларни ажратиш (бўлиш)	Айнымалыларды ажырату (бөлу)	Разделение переменных	Separation of variables
Тавсифий тенглама	Сипаттамалық теңдеу	Характеристическое уравнение	Auxiliary equation
Гармоник тебраниш	Гармоникалық тербеліс	Гармоническое колебание	Harmonic motion
Биржинсли функция	Біртекті функция	Однородная функция	Homogenous function
Ньютоннинг совиш қонуни	Ньютонның салқындау заңы	Закон охлаждения Ньютона	Newton’s low of cooling

IX бўлим. ЎРТА МАКТАБ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МИСОЛЛАР

Сиз ўрта мактабнинг алгебра ва математик анализ дастурини тўлиқ тамомладингиз. Билимингизни мустаҳкамлаш мақсадида такрорлашга доир мисоллар таклиф қилинади.

9.1. Арифметика. Ҳақиқий сонлар

9.1.1. Натурал ва бутун сонлар

9.1. $5431a$ сони 1) 2 га; 2) 3 га; 3) 4 га; 4) 5 га; 5) 6 га; 6) 9 га; 7) 10 га; 8) 11га каррали бўлиши учун a нинг ўрнига қандай рақам ёзиш керак?

9.2. Бутун соннинг 1) 18 га; 2) 25 га бўлиниш аломатларини айтинг.

9.3. Агар $a > c$ бўлса, $\overline{abc} - \overline{cba}$ сони 9 га бўлинишини исботланг.

9.4. Ҳар қандай натурал n учун 1) $n^4 - n^2$ сони 12 га; 2) $n^9 - n^3$ сони 504 га; 3) $5^n - 5$ сони 20 га; 4) $7^n - 7$ сони 42 га бўлинишини исботланг.

9.5. Кетма-кет жойлашган тўртта натурал соннинг кўпайтмаси 24 га бўлинишини исботланг.

9.6. Натурал соннинг куби билан шу соннинг айирмаси 6 га бўлинишини исботланг.

9.7. Тоқ соннинг квадрати 1 га камайтирилганда 8 га каррали сон чиқишини исботланг.

9.8. Агар 3 дан катта учта туб сон арифметик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлса, бу прогрессиянинг айирмаси 6 га каррали бўлишини исботланг.

9.9. 1) $a : b = 4 : 7$ ва $(a, b) = 8$;

2) $[a, b] = 124$ ва $(a, b) = 31$;

3) $ab = 375$ ва $[a, b] = 75$ деб олиб, a ва b сонларни топинг.

(a, b) – a ва b сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси.

$[a, b]$ – a ва b сонларнинг энг кичик умумий карралиси.

9.1.2. Рационал ва иррационал сонлар. Квадрат илдизлар

9.11. Ҳисобланг:

1) $15\frac{6}{7}-12\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$; 2) $\left(2{,}125\cdot1\frac{15}{17}-1\frac{7}{12}\right):7{,}25$;

3) $\dfrac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1}$; 4) $\dfrac{203{,}4:9-(5{,}39-7{,}39)}{\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}}$.

9.12. Ҳисобланг:

1) $\left(1\frac{1}{3}\cdot0{,}27-3\frac{1}{3}\cdot0{,}15\right)-1500\cdot(-0{,}1)^3$;

2) $\left(\frac{6}{64}\cdot5\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)^3+(-1)^5$;

3) $(0{,}3)^{-3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+(-0{,}5)^{-2}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^6\cdot6$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}+\left(-\frac{6}{46}\right)^0\cdot\frac{1}{8}-0{,}25^{-2}\cdot16$.

9.13. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+1$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}-3$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$; 4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; 6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

7) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

9.14. Сонларни таққосланг:

1) $\sqrt{0{,}63}$ ва $\sqrt{0{,}83}$; 2) $\sqrt{0{,}63}$ ва $\sqrt[3]{0{,}63}$;

3) $\sqrt{1{,}63}$ ва $\sqrt[3]{1{,}63}$; 4) $\sqrt{2}$ ва $\sqrt[3]{3}$.

9.15. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$ сонларнинг иррационал бўлишини кўрсатинг.

9.16. 1) $y=\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x^2}$; $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ функцияларнинг графикларини ясанг.

9.2. Алгебраик ифодаларни айнан шакл алмаштириш

9.2.1. Қисқа кўпайтириш формулалари

9.17. Қуйидаги формулаларни исботланг:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
7) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
8) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
9) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
10) $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$;
11) $a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \ldots - a + 1)$;
12) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

9.18. Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $9(x + 5)^2 - (x - 7)^2$;
2) $49(y - 4)^2 - 9(y + 2)^2$;
3) $x^3 + y^3 + 2xy(x + y)$;
4) $5a^2 - 5 - 4(a - 1)^2$;
5) $2(x + y)^2 + x^2 - y^2$;
6) $a^2 + ab^3 - a^3b - b^4$;
7) $(x - y + 4)^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
8) $(a - b)^3 + (a + b)^3$;
9) $(x + 2y)^3 + (2x - y)^3$.

9.19. Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $5xy^3 + 30x^2z^2 - 6x^3yz - 25y^2z$;
2) $15m^3n^2p - 35p^2nq^3 + 25mn^3q^2 - 21m^2p^3q$;
3) $32c^5 - 3^5$; 4) $(4a)^5 + (2b)^5$; 5) $(2x)^6 + (3y)^6$.

9.20. Ифодани иккиҳад кўринишида ёзинг:

1) $(2x + 1)(16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$;
2) $\left(\frac{2}{3}x - 3ab\right)\cdot\left(\frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2ab + 6xa^2b^2 + 27a^3b^3\right)$.

9.21. 1) $143^{15} - 81^{15}$ сони 62 га; 2) $12^{31} + 28^{31}$ сони 80 га каррали бўлишини кўрсатинг.

2.2. Алгебраик ифодаларни шакл алмаштириш

9.22–9.28-мисолларда берилган ифодаларни соддалаштиринг:

9.22. $\left(\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{1}{x + y}\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)\right) : \frac{x - y}{x}$.

9.23. $\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)\cdot\left(\frac{a(b-a)}{a^2-ab+b^2}+1\right).$

9.24. $\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right).$

9.25. $\frac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2-c^2+2bc}.$

9.26. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}.$

9.27. $\frac{\left(x^2-y^2-z^2-2yz\right)\left(x+y-z\right)}{\left(x+y+z\right)\left(x^2-y^2+z^2-2xz\right)}.$

9.28. $\frac{a\sqrt{a}+9a+27\sqrt{a}+27}{a+6\sqrt{a}+9}.$

9.3. Сонлар кетма-кетлиги ва прогрессиялар. Комбинаторика

9.3.1. Сонлар кетма-кетлиги. Арифметик ва геометрик прогрессиялар

9.29. Кетма-кетликнинг дастлабки бешта ҳадини топинг:

1) $x_n = 2n + 3$;
2) $x_n = (-1)^n 2$;
3) $x_n = \frac{3n-1}{2n+3}$;
4) $x_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

9.30. Кетма-кетликнинг умумий ҳади формуласини ёзинг:

1) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$;
2) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$;
3) $1, \frac{2}{101}, \frac{4}{201}, \frac{8}{301}, \ldots$;
4) $\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, -\frac{16}{81}, \ldots$.

9.31. Агар $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ кетма-кетлик айирмаси d га тенг бўлган прогрессия бўлса, у ҳолда $a_n = a_1 + (n-1)d$, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$ формулаларни исботланг. Бунда S_n– арифметик прогрессиянинг дастлабки n ҳадининг йиғиндиси.

9.32. $b_1, b_2, \dots b_n, \dots$ кетма-кетлик маҳражи q га тенг бўлган геометрик прогрессия бўлса, $b_n = b_1 q^{n-1}$, $b_n^{\ 2} = b_{n-1} b_{n+1}$, $S_n = \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ формулаларни исботланг. Бунда S_n– геометрик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси.

9.33. $b_1, b_2, \dots b_n, \dots$чексиз камаювчи геометрик прогрессия (маҳражи $|q|<1$) бўлса, $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \dfrac{b_1}{1-q}$ формулани исботланг.

9.34. Арифметик прогрессиянинг дастлабки 10 та ҳадининг йиғиндисини топинг:

1) $a_2 = 7$; $a_4 = 11$; 2) $a_3 = 5$; $a_8 = 13$; 3) $a_5 + a_6 = 11$.

9.35. $a_1, a_2, \dots a_n$ – арифметик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари, $a_1 = a$, $a_n = b$ ($a > 0$, $b > 0$ $a \neq b$) бўлса,
$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$
йиғиндини a, b ва n орқали ифодаланг.

9.36. -7; 11; 29; ... ва -3; 11; 25; ... арифметик прогрессияларнинг умумий ҳади формулаларини ёзинг.

9.37. Геометрик прогрессиянинг дастлабки ҳади билан маҳражини топинг:

1) $b_2 = 7$; $b_3 = -1$; 2) $b_3 = 2$; $b_5 = 8$;

3) $b_{12} = -131$; $b_{185} = 243$; 4) $b_2 + b_3 = 7$, $b_3 + b_4 = 49$.

9.38. 5 ва 25 сонлари орасига шу сонлар билан геометрик прогрессия ташкил этадиган қилиб, еттита ҳад жойлаштиринг.

9.39. a нинг қандай қийматларида $x^2 - 5x + 4 = 0$ ва $2x - a = 0$ тенгламаларнинг илдизлари геометрик прогрессиянинг дастлабки учта ҳадини аниқлайди?

9.40. Агар $b_1, b_2, \dots b_n, \dots$ чексиз камаювчи геометрик прогрессия бўлса,

1) $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$; 2) $b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2} + \dots$; 3) $b_1^{\ 3} + b_2^{\ 3} + b_3^{\ 3} + \dots$

қаторларнинг йиғиндиларини b_1 ва q орқали ифодаланг.

9.41. Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади 0,3 га, йиғиндиси 0,9 га тенг. Прогрессиянинг маҳражини топинг.

9.42. Қаторнинг йиғиндисини топинг:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$; 2) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\ldots$.

9.43. Даврий касрни оддий касрга айлантиринг:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) 3,(31); 4) 2,1(4).

9.44. Биринчиси 1 га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг кетма-кет учта ҳади бўлади. Агар бу учта сондан бирини иккилантириб берилган тартиб билан олсак, у ҳолда арифметик прогрессия хосил бўлади. Ушбу сонларни топинг.

9.45. Арифметик прогрессиянинг 8-ҳади 60 га тенг. Агар a_1, a_7 ва a_{25} ҳадлари геометрик прогрессия ташкил этадиган бўлса, шу прогрессиянинг маҳражини топинг.

9.3.2. Комбинаторика

9.46. n(A) орқали A тўплам элементларининг сонини белгилайди. Элементларининг сони саноқли бўлган исталган A, B ва C тўпламлар учун:

1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$;
2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ тенгликнинг бажарилишини исботланг.

9.47. 1) Барча n дан k бўйича олинган такрорланувчи ўринлаштиришлар сони $\widetilde{A}_n^k = n^k$ формула билан;

2) барча n дан k бўйича олинган такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сони $A_k^n = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ ёки $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ формула билан;

3) n элементлардан барча алмаштиришлар сони $P_n = n!$ формула билан;

4) барча n дан k бўйича олинган ўринлаштиришлар сони (ўринлаштириш коэффициентлари) $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ формула билан аниқланишини исботланг.

9.48. Ньютон биноми, яъни $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$ формула бажарилишини исботланг.

9.49. Ҳам 2 га, ҳам 7 га бўлинадиган нечта икки хонали сон мавжуд?

9.50. Иккита ўқувчига 8 та дасликни неча усул билан 1) тенг тақсимлаб; 2) тақсимлаб бериш мумкин?

9.51. 1, 2, 3, 4, 5 рақамлардан фойдаланиб, нечта 1) уч хонали; 2) рақамлари такрорланмайдиган уч хонали сонлар тузиш мумкин?

9.52. Агар $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ биномнинг ёйилмасидаги биринчи ва учинчи қўшилувчилар коэффициентларининг йиғиндиси 46 га тенг бўлса, бу ёйилманинг x и йўқ ҳадини топинг.

9.53. 1) $(1 + x + x^2)^3$; 2) $(1 + x^2 - x^3)^4$ кўпҳаддаги x^5 нинг коэффициентини топинг.

9.4. Алгебраик тенгламалар

9.4.1. Квадрат тенглама. Виет теоремаси

9.54. Агар $k^2 - ac > 0$ бўлса, $ax^2 + 2kx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_{1/2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ формулалар билан аниқланишини исботланг.

9.55. Виет теоремасини исботланг.

9.56. Тенгламани ечиб, квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 2) $4x^2 - x - 14 = 0$;

3) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + x - 8 = 0$.

9.57. $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$ тенгликни исботланг.

9.58. $a+b+c=0$ бўлса, $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$ бўлишини кўрсатинг.

9.59. Агар $a-b+c=0$ бўлса, $ax^2 + bx + c = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$ бўлишини кўрсатинг.

9.60. a нинг қандай қийматларида $(x^2 - a)(x^2 + 3ax + a) = 0$ тенгламанинг ҳар хил иккита илдизи мавжуд бўлади?

9.61. a нинг қандай қийматларида $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - a) = 0$ тенгламанинг роппа-роса учта илдизи мавжуд бўлади?

9.62. $3x^2 - x - 1 = 0$ тенгламанинг илдизларини топмасдан,
1) $x_1 + x_2$; 2) x_1x_2;
3) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;
5) $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$; 6) $x_1^4x_2 + x_1x_2^4$; 7) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$
ифодаларнинг қийматларини топинг.

9.63. Илдизлари бўйича квадрат тенглама тузинг:
1) $x_1 = -3,\ x_2 = 5$; 2) $x_1 = x_2 = 7$;
3) $x_1 = 3a + 1,\ x_2 = 5a - 2$; 4) $x_1 = 6 - \sqrt{5}, x_2 = 6 + \sqrt{5}$;
5) $x_1 = \sqrt{7} - \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{7} + \sqrt{6}$.

9.64. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

9.4.2. Кўпҳадлар ва уларнинг илдизлари

9.65. Кўпҳадни кўпҳадга қолдиқли бўлинг:
1) $x^4 + x^2 + 1$-ді $x+5$-ке; 2) $x^7 - 1$-ді $x^3 + x + 1$-ге;
3) $x^6 - 64$-ті $x-3$-ке.

9.66. a нинг қандай қийматларида қолдиқ нолга тенг бўлади:
$(x^3 + 6x^2 + ax + 12) : (x + 4)$?

9.67. $f(x)$ кўпҳадни $x-a$ кўпҳадга бўлганда $f(a)$ га тенг қолдиқ қолишини исботланг (Безу теоремаси).

9.68. α сони – $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ кўпҳаднинг бутун илдизлари. a_n сонини α га қолдиқсиз бўлинишини кўрсатинг. Бунда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – бутун сонлар.

9.69. Кўпҳаднинг бутун илдизларини топиб, уларни кўпайтувчиларга ажратинг:
1) $x^3 - 7x - 6$; 2) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;
3) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$; 4) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
5) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 38x - 24$; 6) $x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 4$.

9.70. Ҳар бир натурал n сони учун $n^5 - 5n^3 + 4n$ ифоданинг қиймати 120 га қолдиқсиз бўлинишини исботланг.

Тенгламани ечинг **(9.71–9.72)**:

9.71. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $7x^4-x^2-6=0$;

3) $3x^4-5x^2+2=0$; 4) $(5x^2+x+1)^2-(5x^2+x+1)-2=0$;

5) $(3x^2-x-1)^2-18x^2+6x-1=0$.

9.72. 1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$; 2) $x^2+5x+8+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$;

3) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$;

4) $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0$.

9.4.3. Рационал тенгламалар

9.73–9.82-мисолларда берилган тенгламаларни ечинг.

9.73. 1) $\dfrac{3x+1}{5x-6}=0$; 2) $\dfrac{9x^2-1}{3x+1}=0$; 3) $\dfrac{5x+7}{49-25x^2}=0$.

9.74. 1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+7x-30}=\dfrac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30}$; 2) $x^2+\dfrac{3x-1}{x+4}=16-\dfrac{1-3x}{4+x}$.

9.75. 1) $\dfrac{1}{3x+2}+\dfrac{3}{5x+6}=\dfrac{2}{7x+8}$; 2) $\dfrac{12}{x^2-9}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{2}{x-3}$.

9.76. 1) $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\dfrac{15x-10}{2x^2-5x+4}=6$; 2) $\dfrac{x^2+5x-1}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{x^2+5x-1}=5{,}2$.

9.4.4. Иррационал тенгламалар

9.77. 1) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2$.

9.78. 1) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$;

2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x+2\sqrt{x^2-16}$.

9.79. 1) $\sqrt{2x^2+5x+2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=1$;

2) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}-\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$;

3) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$.

9.80. 1) $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$;

2) $x\cdot\sqrt[3]{35-x^3}\cdot\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$.

9.81. 1) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$;

2) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

9.82. 1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+x}}=1$.

*9.4.5. Модуль белгиси бўлган параметрли тенгламалар

9.83–9.86-мисолларда берилган тенгламаларни ечинг.

9.83. 1) $|x-2|+|x+4|=8$; 2) $|x-5|-|x-2|=-3$.

9.84. 1) $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$; 2) $|x^2-3x-2|=2$.

9.85. 1) $x|x|-|x^2+3x+3|+8=0$; 2) $(x-2)|x+3|=5|x^2-x+2|-20$.

9.86. 1) $||2x-8|-x|=7-x$; 2) $||2x-1|-5|+x=|6-x|$.

9.87. a параметрнинг ҳар бир қийматига мос равишда тенгламани ечинг:

1) $a(a-1)x=a$; 2) $x^2+ax+36=0$;

3) $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0$; 4) $\dfrac{x-a}{x-3}=0$;

5) $\dfrac{x^2-a^2}{x-3}=0$; 6) $\dfrac{x^2-a^2}{x+4}=0$.

9.88. a параметрнинг ҳар бир қийматига мос равишда тенгламани ечинг:

1) $|x+3|-a(x-1)=4$; 2) $3|x-2|-a|2x+3|=10{,}5$.

9.89. $x-a=2|2|x|-a^2|$ тенгламанинг ҳар хил учта илдизи мавжуд бўладиган қилиб, a параметрнинг барча қийматларини топинг.

9.90. $x|x+2a|+1=a$ тенгламанинг ҳар хил учта илдизи мавжуд бўладиган қилиб, a параметрнинг барча қийматларини топинг.

9.4.6. Тенгламалар системаси

9.91–9.93-мисолларда берилган тенгламалар системасини ечинг.

9.91. 1) $\begin{cases} 3x+5y=11, \\ 2x-3y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 20x-15y=51, \\ 4x-3y=10,2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+5y=20, \\ 6x+10y=7. \end{cases}$

9.92. 1) $\begin{cases} x+2y=3, \\ x^2-3xy+5y^2=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+4y=12, \\ x^2+y^2=5,76; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-12y=60, \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+5xy+7y^2=31. \end{cases}$

9.93. 1) $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x^2+3xy+5y^2=47; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0, \\ x^2+3xy+5y^2=5. \end{cases}$

9.94. a нинг қандай қийматларида:

$$\begin{cases} y^2+2y(2+x)+(x^2+2x)(4-x^2)=0, \\ y-ax-3a=0 \end{cases}$$

системанинг камида ҳар ҳил учта илдизи мавжуд бўлади?

Тенгламалар системасини ечинг **(9.95–9.97)**:

9.95. 1) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}, \\ x^2-y^2=16. \end{cases}$

9.96. 1) $\begin{cases} xy+x+y=7, \\ yz+y+z=-3, \\ xz+x+z=-5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy+xz=8, \\ yz+xy=9, \\ xz+yz=-7. \end{cases}$

9.97. 1) $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+\sqrt{y-x}=7, \\ 2\sqrt{y-x}+\sqrt{4x+15}=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

9.5. Алгебраик тенгсизликлар

*9.5.1. Тенгсизликларни исботлаш

Тенгсизликларни исботланг **(9.98–9.99)**:

9.98. 1) $(6u-1)(u+2)<(3u+4)(2u+1)$;

2) $(3v-1)(2v+1)>(2v-1)(2+3v)$;

3) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$; 4) $a+\dfrac{1}{a} \geqslant 2, a>0$.

9.99. 1) $\dfrac{a+b+c}{2} \geqslant \sqrt[3]{abc}$; 2) $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geqslant 4, (x>0, y>0)$;

3) $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}, (a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0)$;

4) $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a+b+c=1)$.

9.100. Учбурчакнинг ҳар бир томони унинг яримпериметридан кам бўлишини исботланг.

9.101. Сонларни таққосланг:

1) $\dfrac{86}{87}$ ва $\dfrac{87}{88}$; 2) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ ва $\sqrt{22}-\sqrt{10}$;

3) $\dfrac{113}{112}$ ва $\dfrac{112}{111}$; 4) $\sqrt{38}+\sqrt{20}$ ва $\sqrt{37}+\sqrt{21}$.

9.102. Моторли қайиқнинг турғун сувда 20 км, дарё оқими бўйича 10 км ва дарё оқимига қарши 10 км юрган йўлига сарфлайдиган вақтларини таққосланг.

9.5.2. Рационал тенгсизликларни ечиш. Интерваллар усули

9.103. Тенгсизликларни ечинг:

1) $17-x>10-6x$; 2) $30+5x \leqslant 18-17x$;

3) $6x-34 \geqslant x+1$; 4) $3u-1<6u-1$;

5) $5x^2-5x(x+4) \geqslant 100$; 6) $p(p-1)-p^2>12-6p$.

9.104. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} -3<2x-3<-1, \\ 1-4x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0<1-3x<1, \\ 3-4x<2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3 \leqslant 0, \\ \dfrac{2x-5}{x-2} \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2 \leqslant 5x-8, \\ \dfrac{2x-1}{2-x}<4. \end{cases}$

9.105. Тенгсизликларни интерваллар усули билан ечинг:

1) $(2x+7)(3x-4)(x+5)>0$;

2) $(x-6)(0{,}5x+4)(5x+10)<0$.

Тенгсизликларни ечинг **(9.106–9.109)**:

9.106. 1) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$; 2) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}>3$;

3) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$; 4) $\frac{x-2}{x+2}\geqslant\frac{2x-3}{4x-1}$.

9.107. 1) $x^2-3x-4>0$; 2) $x^2-5x-60\leqslant 0$; 3) $x^2\geqslant 16$.

9.108. 1) $\frac{x+4}{x-2}\leqslant\frac{2}{x+1}$; 2) $\frac{1}{x^2+x}\leqslant\frac{1}{2x^2+2x+3}$.

9.109. 1) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\geqslant 0$; 2) $x^2+(x+2)^2<\frac{60}{x^2+2x+3}$.

9.5.3. Иррационал тенгсизликлар

9.110–9.116-мисолларда берилган тенгсизликларни ечинг.

9.110. 1) $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$; 2) $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$;

3) $\sqrt{x^2-3x-10}<x-5$; 4) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1$.

9.111. 1) $(x+1)\sqrt{9-x^2}\leqslant 0$; 2) $(x-1)+\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$;

3) $x\sqrt{10-x^2}>x^2-6$; 4) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\leqslant 1$.

9.112. 1) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>1,5\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

2) $(12-x)\sqrt{\frac{12-x}{x-2}}+(x-2)\sqrt{\frac{x-2}{12-x}}<\frac{82}{3}$.

9.5.4. Модул белгиси бўлган параметрли тенгсизликлар

9.113. 1) $|x-1|+|x-4|\geqslant 5$; 2) $|x-2|+|x+5|\leqslant 7$.

9.114. 1) $\left|\frac{x^2-3}{x+3}\right|\leqslant 1$; 2) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geqslant 1$.

9.115. 1) $|2x+3| \leqslant 4x$; 2) $x^2-|5x+6|>0$.

9.116. 1) $|x^2-7x+5| \leqslant 5$; 2) $|x^2-3x| \leqslant x$; 3) $|x^2-3x|>x$.

9.117. a нинг қандай қийматларида $x^2-3ax+1>0$ тенгсизлик исталган x учун бажарилади?

9.118. a нинг қандай қийматларида $x=1$ сони $ax^2+(3a^2+1)x-3>0$ тенгсизликнинг ечими бўлади?

9.119. a нинг қандай қийматларида $x^2-3x-4<0$ тенгсизликнинг ҳар бир ечими $x^2-a^2<0$ тенгсизликнинг ечими бўлади?

9.120. a нинг қандай қийматларида $x^2-5x+40 \leqslant 0$ тенгсизликнинг ҳар бир ечими $x^2-a^2>0$ тенгсизликнинг ечими бўлади?

9.6. Тригонометрия

9.6.1. Асосий формулалар

Асосий тригонометрик айниятлар

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha\neq\pi+\pi n, n\in Z;$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1, \alpha\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z;$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Қўшиш формулалари

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta\mp1}{\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta}.$$

Йиғиндини кўпайтмага шакл алмаштирадиган формулалар:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Кўпайтмани йиғиндига шакл алмаштирадиган формулалар

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Иккиланган аргумент формулалари

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Яримаргумент формулалари

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Учланган аргумент формулалари

$$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Келтириш формулаларининг жадвали

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$, $90° - \alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$, $90° + \alpha$	$\pi - \alpha$, $180° - \alpha$	$\pi + \alpha$, $180° + \alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$, $270° - \alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$, $270° + \alpha$	$2\pi - \alpha$, $360° - \alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

9.6.2. Тригонометрик ифодаларни шакл алмаштириш

9.121. 1) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha = -2\sqrt{6}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

деб олиб, α бурчакнинг қолган тригонометрик функцияларни топинг.

9.122. a нинг қандай қийматларида $\frac{\pi}{6}$ сони

$3\sin6x + 2\sin5x + 5\cos4x - 3\sin3x + 2\cos2x - \sin^2x = a$ тенгламанинг илдизи бўлади?

9.123. Агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда бирлик айланада

1) x, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$; 2) $x + 2k\pi$, $k \in Z$;

3) $\pm x + 2k\pi$, $k \in$ Z; 4) $x + k\pi$, $k \in$ Z;

5) $(-1)^k + k\pi$, $k \in$ Z бурчакларга мос келувчи нуқталарни топинг.

9.124. Ифодани соддалаштиринг:

1) $1 + \sin(\pi - \varphi)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$; 2) $1 - \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$;

3) $1 + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}2\beta$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}2\alpha$.

9.125. Айниятни исботланг:
1) $(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \mathrm{ctg}^2\alpha$;
2) $(1 + \mathrm{tg}^2\beta)(1 - \cos^2\beta) = \mathrm{tg}^2\beta$;
3) $\dfrac{\sin x + \cos x\,\mathrm{tg}x}{\cos x + \sin x\,\mathrm{ctg}x} = 2\mathrm{tg}x$;
4) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} - \dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y} = \cos 2y$.

126. Ифоданинг қиймати y га боғлиқ бўлмаслигини кўрсатинг:
1) $\cos(38^\circ + y)\cos(52^\circ - y) - \sin(38^\circ + y)\sin(52^\circ - y)$;
2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{10} - y\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{15} + y\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{10} - y\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{15} + y\right)$.

9.127–9.129-мисолларда берилган ифодаларни соддалаштиринг.

9.127. 1) $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$; 2) $\dfrac{\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x}{\cos x - 3\cos 2x + \cos 3x}$.

9.128. 1) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

9.129. 1) $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} - 2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)} - \mathrm{tg}\beta\cdot\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}\right)$;

3) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

9.130. $\cos\alpha = -\dfrac{9}{41}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ деб олиб, $\mathrm{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ нинг қийматини топинг.

9.131. $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4}{5}, 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ деб олиб, $\sqrt{1-\cos\alpha} + \sqrt{1+\cos\alpha}$ ифоданинг қийматини топинг.

9.132. $2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 1$ деб олиб, $\cos 2\alpha$ нинг қийматини топинг.

9.133. Ҳисобланг:

1) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$; 2) $\cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ$.

9.6.3. Тригонометрик тенгламалар

Асосий формулалар:

$$\sin x = a,\ |a| < 1 \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = a,\ |a| < 1 \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x = a \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \mathrm{arctg}\, a + n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, x = a \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow x = \mathrm{arcctg}\, a + n\pi,\ n \in Z.$$

$a = 0$, $a = 1$ ва $a = -1$ бўлганда хусусий ҳолларда

$$\sin x = 0, \Rightarrow x = n\pi,\ n \in Z;$$

$$\sin x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x = 0 \Rightarrow x = n\pi,\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z.$$

9.134–9.142-мисолларда берилган тенгламаларни ечинг.

9.134. 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

9.135. 1) $2\sin x + 3\cos x = 0$; 2) $\sin^2 3x = \cos^2 3x$.

9.136. 1) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\sin x\right) = \frac{1}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sin 2x\right) = 1$.

9.137. 1) $2\cos x = 1 + \cos 2x$; 2) $2\sin^2 2x = 3\cos^2 2x$.

9.138. 1) $\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$; 2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

9.139. 1) $\sin x + \mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 2$; 2) $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\mathrm{tg}\, x$.

9.140. 1) $\cos x = \sqrt{3}\sin x + 2\cos 3x$; 2) $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

9.141. 1) $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{3}$.

9.142. 1) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$;
2) $4 - \sin 2x = 4(\cos x - \sin x)$.

9.143. $\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 3x$ тенгламанинг $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ оралиққа тегишли барча илдизларини топинг.

9.144. $\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$ тенгламанинг a параметрнинг ҳар бир ҳақиқий қийматлари учун ечинг.

9.6.4. Тескари тригонометрик тенгламалар

Асосий формулалар

$$\arcsin x = \alpha,\ |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\alpha$$

$$\arccos x = \alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \Rightarrow x = \cos\alpha$$

$$\mathrm{arctg}\, x = \alpha,\ |\alpha| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{arcctg}\, x = \alpha,\ 0 < \alpha < \pi \Rightarrow x = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

9.145–9.149-мисолларда берилган тенгламаларни ечинг.

9.145. 1) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(1 - 2x) = \frac{\pi}{2}$;

3) $\mathrm{arctg}(2 - 3x) = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\mathrm{arcctg}(3x + 2) = \frac{\pi}{4}$.

9.146. 1) $\mathrm{arctg}^2(3x + 2) + 2\mathrm{arctg}(3x + 2) = 0$;

2) $2\arcsin x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9\arcsin x}$.

9.147. 1) $\arccos\frac{x}{2} = 2\mathrm{arcctg}(x - 1)$; 2) $\arccos x - \pi = \arccos\frac{4x}{3}$.

9.148. 1) $\arcsin x - \arccos\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos x - \arcsin x = \arccos\sqrt{3}x$.

9.149. 1) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

9.150. $2\arccos x = a + \dfrac{a^2}{\arccos x}$ тенгламани a параметрнинг ҳар бир ҳақиқий қиймати учун ечинг.

9.6.5. Тригонометрик тенгсизликлар

Асосий формулалар

$$\sin x > a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z;$$

$$\sin x < a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (-\pi-\arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z;$$

$$\cos x > a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z;$$

$$\cos x < a,\ |a| < 1 \Rightarrow x \in (\arccos a + 2\pi n;\ \pi - \arccos a + 2\pi n),\ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x > a,\ a \in R \Rightarrow x \in (\mathrm{arctg}\, a + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n),\ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x < a,\ a \in R \Rightarrow x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \mathrm{arctg}\, a + \pi n),\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, x > a,\ a \in R \Rightarrow x \in (\pi n;\ \mathrm{arcctg}\, a + \pi n),\ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, x < a,\ a \in R \Rightarrow x \in (\mathrm{arcctg}\, a + \pi n;\ \pi + \pi n),\ n \in Z.$$

9.151–9.154-мисолларда берилган тенгсизликларни ечинг.

9.151. 1) $\sin 2x < \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos\dfrac{x}{3} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

9.152. 1) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right) \geqslant 1$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$.

9.153. 1) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right) > 1$; 2) $4\sin 2x\cos 2x \geqslant \sqrt{2}$.

9.154. 1) $\sin x \geqslant \cos x$; 2) $\cos^2 x + \sin x\cos x \geqslant 1$;
3) $1 - \sin x + \cos x < 0$; 4) $2\cos 2x + \sin 2x > \mathrm{tg}\, x$.

9.155. Тенгсизликнинг берилган оралиқдаги ечимларини топинг:

1) $\cos\dfrac{x}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right]$; 2) $\sin 2x < \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x \in [0;\ \pi]$.

9.156. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \arcsin(1 + \mathrm{tg}^2\pi x)$; 2) $y = \sqrt{\mathrm{tg}\, x - \sin x}$.

9.157. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sin 3x > 4\sin x\cos 2x$; 2) $5 + 2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x - 1|$.

9.7. Даражали, кўрсаткичли ва логарифмик функциялар

9.7.1. Рационал кўрсаткичли даража

9.158–9.163-мисолларда берилган ифодаларни соддалаштиринг.

9.158. 1) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; 2) $\dfrac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$; 3) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$.

9.159. 1) $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}} : \left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; 2) $\dfrac{a^{-2n}+b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}} \cdot \left(\dfrac{1}{b^{-n}}+\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

9.160. 1) $a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4$; 2) $\left(c^{-\frac{3}{7}}x^{-0,4}\right)^3 c^{\frac{2}{7}}x^{0,2}$; 3) $\sqrt[10]{c\sqrt[3]{c^2}}$.

9.161. 1) $\sqrt[3]{y^2\cdot\sqrt[4]{y^{-3}}}$; 2) $\sqrt[7]{x^4} : \sqrt[14]{x}$; 3) $\sqrt[5]{m^2\sqrt{m}} : \sqrt[3]{m^2\sqrt{m}}$.

9.162. $$\frac{\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(n^{-\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}\right)}-2n+\frac{4n^2}{n-m}.$$

9.163. $$\frac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^3b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)}-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2}.$$

9.164. x билан y нинг орасидаги боғланишни аниқланг:

1) $x = t^{\frac{1}{2}},\ y = t^{-\frac{1}{2}}$; 2) $x = t^{\frac{1}{3}},\ y = t^{\frac{1}{6}}$;

3) $x = 3t^{\frac{1}{2}},\ y = 2t^{-\frac{1}{2}}$; 4) $x = 0,5t^{-\frac{1}{2}},\ y = 0,4t^{-\frac{1}{2}}$.

9.7.2. Кўрсаткичли ва логарифмик ифодаларни шакл алмаштириш

9.165. Функциянинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқланг:

1) $y = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$; 2) $y = \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$;

3) $y=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^x$; 4) $y=\left(\frac{2}{3-2\sqrt{2}}\right)^x$.

9.166. Сонларни таққосланг:

1) $2^{1,5}$ ва $2^{\sqrt{2}}$; 2) $3^{-0,1}$ ва 3^0; 3) $2^{\frac{1}{7}}$ ва $2^{0,143}$.

9.167. Ҳисобланг:

1) $\log_6\sqrt{\frac{1}{6}}$; 2) $\log_{a^2}\sqrt[7]{a}$; 3) $\log_{\sqrt{a}}\sqrt[6]{c^5}$; 4) $5^{1+\log_5 4}$.

9.168. Сонларни таққосланг:

1) $\log_5 2$ жәнe $\log_{25} 8$; 2) $\log_5\frac{1}{625}$ жәнe $\log_3\frac{1}{27}$.

9.169. Ҳисобланг:

1) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3+\log_{0,5} 5}$; 2) $\log_3\log_4\log_2 16$.

9.170. $\log_6 2=m$ деб олиб, $\log_{24} 72$ ни топинг.

9.171–9.173-мисолларда берилган ифодани соддалаштиринг.

9.171. 1) $125^{\log_5\sqrt{3}}$; 2) $2^{\log_2 5}-5^{\log_5 2}$; 3) $10^{3-\lg 4}+49^{\log_7 15}$.

9.172. 1) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$; 2) $81^{\frac{1}{\log_3 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

9.173. 1) $\left(n^{\frac{\log_{100} m}{\lg m}}\cdot m^{\frac{\log_{100} n}{\lg n}}\right)^{2\log_{mn}(m+n)}$; 2) $\sqrt{a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}}+8^{\frac{1}{3\log_a\sqrt{2}}}+1}$.

9.174. $\log_{abc} x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_b x}+\dfrac{1}{\log_c x}}$ айниятни исботланг.

9.7.3. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар

9.175–9.182-мисолларда берилган тенгламаларни ечинг.

9.175. 1) $2^{3x}=512^{\frac{1}{3x}}$; 2) $(0,2)^{x+1}=5$.

3) $\log_{0,3}(5-x)=-1$; 4) $\log_3(2x+3)=0$.

9.176. 1) $3^{|3x-4|}=9^{2x-2}$; 2) $2^{2x-3}=4^{x^2-3x-1}$.

9.177. 1) $\log_3\log_2^2(x-4)=0$; 2) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5,5$.

9.178. 1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$; 2) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84$.

9.179. 1) $\lg^2(8x-9)=\lg^2(6x-4)$; 2) $\log_2\dfrac{x-2}{x-1}-1=\log_2\dfrac{3x-7}{3x-1}$.

9.180. 1) $4^{x+1,5}+9x=6^{x+1}$; 2) $2\cdot 4^x+25\cdot 25^x=15\cdot 10^x$.

9.181. 1) $\log_5 x=\sqrt{\log_2 5x-\log_5 x}$; 2) $\sqrt{\log_{27}\dfrac{1}{3x^2}}+\log_x 9=0$.

9.182. 1) $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$; 2) $2\log_9 x+9\log_x 3=10$;

3) $x^{\log_5 x-2}=125$; 4) $x=10^{1-\frac{1}{4}\lg x}$.

9.183–9.186-мисолларда берилган системани ечинг.

9.183. 1) $\begin{cases}2^x+2^y=5,\\ 2^{x+y}=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4.\end{cases}$

9.184. 1) $\begin{cases}y^x=1,5+y^{-x},\\ y^{2,5+x}=64;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3,\end{cases}$

9.185. 1) $\begin{cases}3^{\lg x}=4^{\lg y},\\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^y=243,\\ \sqrt[y]{1024}=\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2.\end{cases}$

9.186. 1) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2,\\ x^2+y=42;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=6,\\ \log_4 x+\log_4 y=-3.\end{cases}$

9.187. a нинг қандай қийматларида $x^2-4x-\log_2 a=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд бўлади?

9.188. Агар $3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\cdot\ldots\cdot 3^{3n-1}=27^5$ бўлса, натурал n сонини топинг.

9.189. a сонини топинг $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$ тенгламанинг ҳақиқий ечимлари мавжуд бўлади?

9.7.4. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгсизликлар

9.190–9.194-мисолларда берилган тенгсизликларни ечинг.

9.190. 1) $2^x\cdot 5^x>0,1(10^{x-1})^5$; 2) $(\lg 3)^{3x-7}>(\log_3 10)^{7x-3}$;

3) $6^{3-x} > 216$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-(x+2)} \geqslant 81$.

9.191. 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - 5 > 0$; 2) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$;

3) $\log_5(x^2 - 11x + 43) < 0$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$.

9.192. 1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x < \log_{\frac{1}{3}}(5x+24)$; 2) $\lg(x-2) + \lg(27-x) \leqslant 2$.

9.193. 1) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 2$;

3) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x)\right) > 0$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2-5\right)\right) > 0$.

9.194. 1) $\log_x(2x - 0{,}75) > 2$; 2) $\log_{x+3}(x^2 - x) < 1$;

3) $\log_{-6x-5x^2} 6x > 0$; 4) $2^{\sqrt{|x|-2}} > 4$.

9.195. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \frac{\lg\left(2^x - 3^x\right)}{\sqrt{11 - 9x - 2x^2}}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{8 - \lg^3(3x-2)}}$.

9.196. $\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5} - x + 1\right) > 0$ тенгсизликнинг барча бутун ечимларини топинг.

9.8. Ҳосила ва унинг қўлланишлари

9.8.1. Функциянинг ҳосиласини топиш

9.197–9.206-мисолларда берилган функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

9.197. 1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$; 2) $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

9.198. 1) $y = x - 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

9.199. 1) $y = 9\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x}$; 2) $y = \frac{10}{\sqrt[5]{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

9.200. 1) $y = \sin 2x - \mathrm{tg}\,x$; 2) $y = x^2 - \mathrm{ctg}\,x$.

9.201. 1) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

9.202. 1) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

9.203. 1) $y = (2 - 3x^2)^3$; 2) $y = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$.

9.204. 1) $y = x^2 - 3^x$; 2) $y = x^2 \cdot e^{-2x}$.

9.205. 1) $y = x - \mathrm{arctg}\,x$; 2) $y = \arccos(1 - 2x)$.

9.206. 1) $\left(x^2+4\right)\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2} - 2x$; 2) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$.

9.207. Функция ҳосиласининг берилган қийматини топинг:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$;

2) $f(x) = \ln(1 + a^{-2x})$, $f'(0)$;

3) $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 x^2}$, $f'\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$;

4) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $f'(1)$.

9.8.2. Ҳосиланинг қўлланиши

9.208. Функциянинг ўсувчи ва камаювчи оралиқларини топинг:

1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \ln x$; 4) $y = \dfrac{x^2-2}{2x+3}$.

9.209. Функциянинг ўсиш оралиқларини топинг:

1) $y = x^2 + 4x + 5$; 2) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3$; 3) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

9.210. Функциянинг камайиш оралиқларини топинг:

1) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; 2) $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$; 3) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

9.211. 9.209-мисолда берилган функциянинг графигига $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

9.212. Функциянинг берилган оралиқда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$, $[-1; 1]$;   2) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$, $[-2; 1]$;

3) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;   4) $f(x) = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$, $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

9.213. 9.210-мисолда берилган функциянинг экстремумларини топинг.

9.214. Функциянинг экстремумларини топинг:

1) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$;   2) $y = \frac{x^2}{x-2}$;   3) $y = x - 2\ln x$.

9.215. Функцияни текшириб, графигини ясанг:

1) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$;   2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$;   3) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;

4) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$;   5) $y = \frac{\ln x}{x}$;   6) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

9.216. 9.209-мисолда берилган функция графигининг Oy ўқи билан кесишиш нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

9.217. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$ функция графигининг қайси нуқтасига ўтказилган уринмаси Ox ўқининг мусбат йўналиши билан 45° бурчак ясайди?

9.218. Асоси a га ва баландлиги h га тенг бўлган учбурчакка юзаси энг катта бўлган тўғри тўртбурчак ички чизилган. Ушбу тўғри тўртбурчакнинг юзини топинг.

9.219. Шарнинг ҳажми унга ички чизилган энг катта цилиндр ҳажмидан неча марта ортиқ?

9.220. Доирадан марказий бурчаги α га тенг сектор кесиб олиниб, шу сектордан конус ясалди. α нинг қандай қийматларида ясалган конуснинг ҳажми энг катта бўлади?

9.221. Жисм 10 м баландликдан вертикал юқори, дастлабки тезлиги 20 м/с бўладиган қилиб улоқтирилди. Жисм t секундда қандай x баландликка кўтарилади? Неча секунддан кейин жисм энг баланд нуқтага кўтарилади ва у нуқта қандай баландликда ётади?

9.222. Химиявий реакция давомида олинадиган модда миқдори x билан t вақт орасидаги боғланиш $x = A(1 - e^{-kt})$ тенглик билан ифодаланади. Реакция тезлигини аниқланг.

9.9. Бошланғич функция, интеграл ва унинг қўлланиши

9.9.1. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

9.223. Берилган функциянинг бошланғич функцияни аниқланг:

1) $f(x) = 3x^2 + 2x$; 2) $f(x) = \sin x$;

3) $f(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x}$; 4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = 4x^3 + \dfrac{3}{x^2 + 4}$; 6) $f(x) = \cos x + e^x$.

9.224–9.229-мисолларда берилган аниқмас интегрални топинг.

9.224. 1) $\int\left(x^2 + 2x - \dfrac{1}{2}\right)dx$; 2) $\int\dfrac{x^2+1}{x^2}dx$;

3) $\int\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$; 4) $\int\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

9.225. 1) $\int\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx$; 2) $\int\dfrac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$;

3) $\int e^{-3x}\,dx$; 4) $\int(3x - \sin 4x)\,dx$.

9.226. 1) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$; 2) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$.

9.227. 1) $\int \sin^2 x\,dx$; 2) $\int \cos^2 2x\,dx$.

9.228. 1) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 2) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$.

9.229. 1) $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\,dx$; 2) $\int \sin 3x \cdot \cos 2x\,dx$.

9.9.2. Аниқмас интеграл. Ньютон-Лейбниц формуласи

9.230–9.232-мисолларда берилган интегралларни ҳисобланг.

9.230. 1) $\int_0^2\left(x^3 - 2x + 3\right)dx$; 2) $\int_1^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)dx$;

3) $\int_1^4\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

9.231. 1) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x\,dx$;

3) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$;   4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$.

9.232. 1) $\int_0^a \left(x^2 - ax\right)dx$;   2) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

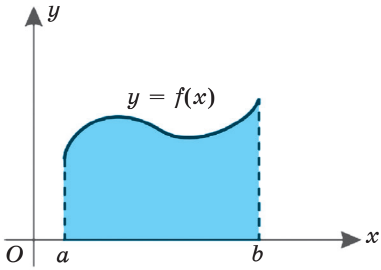
3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x$;   4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$.

9.9.3. Интегралнинг қўлланиши. Асосий формулалар

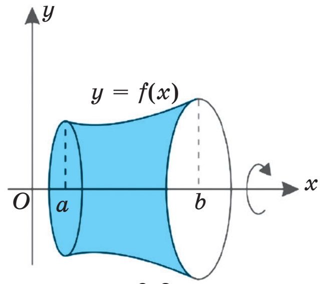
$f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$) функциянинг графиги билан, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан ва Ox ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг (9.1-расм)

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

формула билан аниқланади.



9.1-расм



9.2-расм

Мос равишда юқоридан ва қуйидан $f(x)$ ва $g(x)$ ($f(x) \geqslant g(x)$) функциялар билан чегараланган, иккита ён томонидан $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

формула билан аниқланади.

$y = f(x)$ функция графигини Ox ўқи атрофида айлантирганда хосил бўлган айланма жисм ҳажмини аниқлаш формуласи:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \quad (9.2\text{-расм}).$$

Моддий нуқта Ox ўқи бўйлаб $F(x)$ куч таъсирида $x = a$, нуқтадан $a = b$ нуқтагача силжиганда бажариладиган иш

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

формула билан аниқланади.

9.233–9.243-мисолларда берилган эгри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг ва керакли чизмаларни чизинг.

9.233. $f(x) = 3x^2 + 2x$, $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$.

9.234. $f(x) = 4x^3$, $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.

9.235. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$.

9.236. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.

9.237. $f(x) = \sin 2x$, $x = \dfrac{\pi}{8}$; $x = \dfrac{\pi}{4}$; $y = 0$.

9.238. $f(x) = e^x$, $x = 0$; $x = \ln 4$; $y = 0$.

9.239. $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x + 1$.

9.240. $f(x) = 6 + 3x - 2x^2$, $g(x) = x + 2$.

9.241. $f(x) = x^3$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = 2$.

9.242. $f(x) = x + 1$, $g(x) = (x - 1)^2$.

9.243. $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = x^2 + 1$.

9.244–9.247-мисолларда берилган эгри чизиқни Ox ўқи атрофида айлантирганда хосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

9.244. $y = \dfrac{x^3}{3}$, $x \in [0; 2]$.

9.245. $y = 2x - 6$, $x \in [3; 5]$.

9.246. $y = e^x$, $x \in [0; \ln 3]$.

9.247. $y = \sin x$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

9.248. Моддий нуқтага унинг босиб ўтган йўлига чизиқли боғлиқ бўлган куч таҳсир этади. Агар ҳаркатнинг бошида кучнинг катталиги 100 Н бўлса, нуқта 10 м силжигандан кейин кучнинг катталиги 600 Н бўлди. Кучнинг таъсиридан нуқтанинг бажарган ишини топинг.

9.249. Мувозанатда турган пружинани 10 см чўзганда бажариладиган ишни топинг. Пружинани 1 см чўзиш учун 5Н куч керак бўлади.

9.10. Тенглама тузишга доир масалалар

9.250. Уста уч кунда 48 та детал ясади. Биринчи, иккинчи, учинчи кунларни ясаган деталларнинг сони мос равишда 5, 4 ва 3 сонларига пропорционал. Уста дастлабки икки кунда нечта детал ясаган?

9.251. 60 т юк ташиш учун бир нечта автомашиналарга буюртма берилди. Ҳар бир машинага 0,5 т юк сиғмагани учун қўшимча яна 4 та автомашина керак бўлди. Дастлаб нечта машинага буюрма берилган?

9.252. Моторли қайиқ дарё оқими бўйлаб 14 км ва дарё оқимига қарши 9 км йўл юрганига 5 соат вақт сарфлади. Агар шу қайиқнинг турғун сувдаги тезлиги 5 км/соат бўлса, дарё оқимининг тезлигини топинг?

9.253. Юзалари 80 га ва 120 га бўлган иккита ер майдонларидан жами 7200 ц буғдой йиғилади. Биринчи ер майдонининг 3 гектаридан йиғилган буғдой миқдори иккинчи ер майдонининг 2 гектаридан йиғилган буғдой миқдоридан 10 ц ортиқ деб олиб, ер майдонларининг ҳар гектаридан неча центнердан буғдой йиғилганини топинг.

9.254. 64 тенге турадиган акварель бўёғининг нарҳи 72 тенге бўлди. Бўёқнинг нарҳи неча фоизга ўсди?

9.255. Рух билан никельнинг икки хил аралашмаси бор. Битта аралашмадаги металларнинг миқдорининнг нисбати 2:3, иккинчисида 3:7. Таркибида рух билан никель 5:11 нисбатда бўладиган қилиб 8 кг янги аралашма олиш учун ҳар бир аралашмадан неча килограмм керак?

9.256. Томошабинлар залида 320 та ўрин бор. Ҳар бир қаторга 4 та стулдан ва яна бир қатор қўшгандан кейин залдаги ўринлар сони 420 тага етди. Дастлаб неча қатор ўрин бўлган?

9.257. Бассейнни иккита труба 12 соатда тўлдиради. Биринчи труба иккинчисига қараганда бассейнни 10 соат тезроқ тўлдиради. Бассейнни ҳар бир труба алоҳида ишлаганда неча соатда тўлдиради?

9.258. Баҳоси 2,2 минг тенге бўлган товардан дўкон 10% фойда топади. Агар шу товар баҳосини 1,8 минг тенгега туширилса, у ҳолда дўкон 43 минг тенге зиён кўради. Дўконда худди шундай неча товар бор?

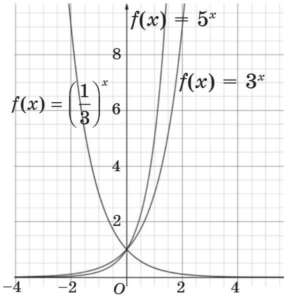
9.259. Икки хонали сонни ўзининг рақамларининг йиғиндисига бўлсак, бўлинмада 4 га, қолдиқ 3 га тенг бўлади. Агар шу сонни рақамларининг кўпайтмасига бўлсак, бўлинма 3 га, қолдиқ 5 га тенг бўлар эди. Шу сонни топинг.

МИСОЛЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

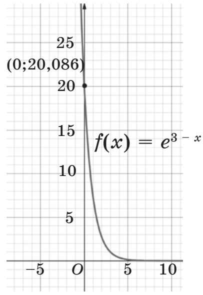
VI бўлим

6.1. 1) $x > 0$; 2) $x < 0$; 3) $x = 0$. **6.2.** 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x = 0$. **6.3.** Расмга қаранг. **6.4.** 1) $x \neq -3$; 2) $(-\infty;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$. **6.5.** 1) камаювчи, расмга қаранг.

6.3-расмга

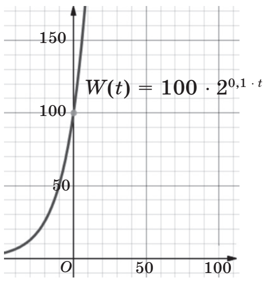


6.5,1-расмга



6.6. 1) 1000 га; 2) 4000 га. **6.7.** 1) 100 гр; 2) ≈ 132.

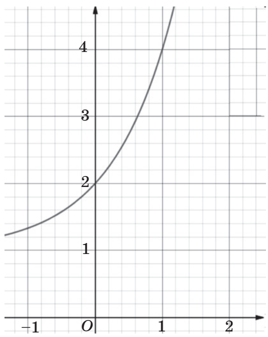
3)

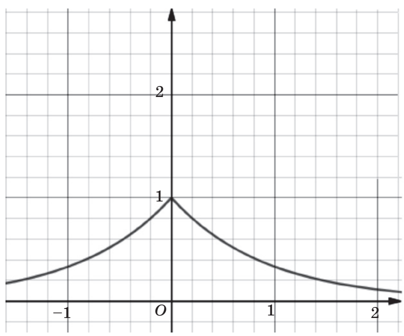


6.8. 1) 27; 2) 450 %. **6.9.** 1) $2^{1,5} > 2^{\sqrt{2}}$; 2) $2^{\frac{1}{3}} > 2^{0,3}$; 3) $3^{0,1} > 3^0$; 4) $3^{-0,1} < 3^0$; 5) $2^{-1,42} < 2^{-\sqrt{2}}$; $2^{\frac{1}{7}} < 2^{0,143}$. **6.10.** 1) 250; 2) ≈ 112; 3) ≈ 346. **6.11.** 1) 100 C°; 2) ≈ 81 °C; 3) ≈ 76 °C.

6.12. 1) Аниқланиш соҳаси – $(-\infty;\ +\infty)$; Қийматлар тўплами – $(1;\ +\infty)$

4) Аниқланиш соҳаси – $(-\infty;\ +\infty)$; Қийматлар тўплами – $(0;\ 1]$

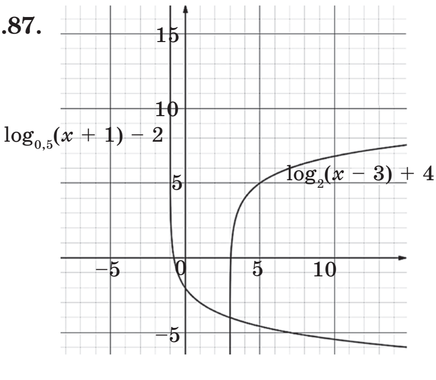




6.13. 1) ўсувчи; 2) камаювчи; 3) камаювчи; 5) ўсувчи. **6.14.** 1) мавжуд, мусбат; 2) мавжуд, манфий; 5) мавжуд эмас. **6.15.** $0 < a < 1$.

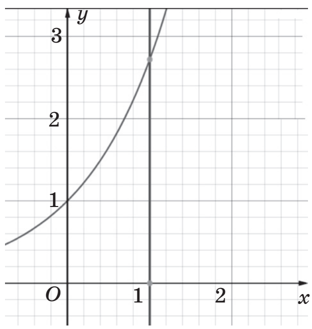
6.17. $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$. **6.18.** $\sqrt{17}-3$; 1. **6.20.** Тўла квадратга келтириш керак. **6.22.** 1) $x > 39$. **6.25.** 1) 1; 2) – 1; 3) 2; 5) – 3. **6.26.** 1) 1; 2) – 1; 5) – 3. **6.28.** 1) 5; 2) – 2; 3) 0,5; 4) 7; 8) $\frac{1}{3}$. **6.30.** 1) 4; 2) 9; 3) $\frac{1}{64}$; 5) 2. **6.31.** 1) 5; 2) 8; 3) $\frac{1}{14}$; 4) 1,5; 5) 0. **6.32.** 2) 0; 5) 1,5. **6.33.** 1) $10^{\lg 6}$; 2) $10^{\lg 6+1}$. **6.34.** 1) lg16; 2) ln4; 3) lg8. **6.35.** 1) lg96; 2) ln72; 6) ln0,5. **6.36.** 1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) – 2. **6.38.** 2) $\sqrt{5}$; 6) 1,5. **6.39.** 1) $p+q$; 2) $2p+3q$; 3) $r+2q$. **6.40.** 1) $\log_5 2=\frac{1}{\log_4 25}$; 2) $\log_2 3=\frac{1}{\log_3 2}$; 3) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}=\frac{1}{\log_3 2}$. **6.41.** 1) $\lg\sqrt[6]{10} < \log_2\sqrt{2}$; 2) $\log_4 2=\log_{0,0625}0,25$. **6.44.** 1) 9; 2) 80; 3) 150; 4) $\frac{1}{25}$. **6.45.** $\frac{mnk}{mn+mk+kn}$. **6.46.** 2) 0,5; 4) 1/3. **6.48.** 2) $\log_a a^2$; 2) $\log_a\sqrt{a}$; 3) $\log_a\frac{1}{a}$. **6.50.** $\frac{2+m}{1+2m}$. **6.51.** $\frac{3-2m}{3}$. **6.52.** $\frac{2n+2m}{1-2n}$. **6.53.** 1) $\frac{17}{24}$; 2) 3. **6.54.** 1)10; 2) 346; 3)20. **6.55.** $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ формуладан фойдаланиш керак. **6.56.** 1) $a+b$; 2) $a+1$. **6.58.** $2a+2b-1$. **6.59.** 8. **6.60.** $\log_a b-\log_b a$. **6.69.** 1) 1; 2) 1. **6.70.** Квадрат тенгламанинг дискриминанти нолга тенг, (1; 7). **6.71.** 2. **6.73.** 1) мусбат; 2) манфий; 3) мусбат. **6.74.** 1) $x\neq 1$; 2) $x > 1$. **6.75.** Аниқланиш соҳалари тенг эмас. **6.76.** 1) $\log_3 4 < \log_3 5$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}4 > \log_{\frac{1}{2}}5$; 3) $\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{65} > \log_{\frac{3}{2}}8$. **6.79.** 1) ҳа; 2) ҳа; 3) йўқ. **6.80.** 1) $(0; 1)\cup(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -6)\cup(2; +\infty)$. **6.81.** 1) $x > -5$, ўсувчи; 2) $x < 3$, ўсувчи. **6.82.** 1) $(-\infty; 2)\cup(4; +\infty)$; 3) $(-2; 0,5)\cup(2; +\infty)$. **6.83.** 1) $\lg\sqrt[6]{10} < \log_2\sqrt{2}$; 2) $\log_4 5 > \log_6 5$; 3) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{6} < \log_9 7$. **6.84.** 1) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} < \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2}$; 2) $\log_5 7 < 3\log_5 2$. **6.85.** $\frac{q+p}{1-q}$. **6.86.** 1) – 1; 2) $\frac{1}{3}$.

6.87.

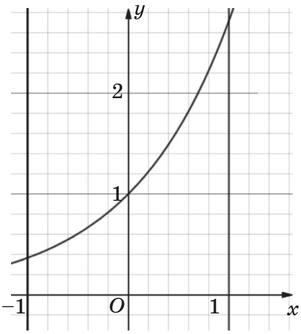


6.88. Аниқланиш соҳалари тенг эмас. **6.90.** 1) $3\dfrac{3}{4}$; 2) 25. **6.91.** 1) $2\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{5} <$ $< 3\log_8 26$; 2) $2\log_3 4 < 3\log_{27}17$. **6.92.** $\dfrac{5-b}{2(ab+a-2b+1)}$. **6.93.** 1) $\sqrt{11} <$ $< 9^{0,5\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_3 2}$; 3) $\sqrt{8} > 2^{2\log_2 5+\log_{0,5}9}$. **6.94.** 3/5. **6.100.** 1) йўқ; 2) ҳа. **6.104.** 1) $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}$. **6.105.** 6 л. **6.106.** 1) 2,5. **6.107.** 1) $3e^{3x}$; 2) $5e^{2+5x}$; 3) $-a^{1-x}\ln a$. **6.108.** D. **6.109.** D. **6.110.** 2) $\dfrac{e^{3x}}{3}+C$; 5) $\dfrac{2^{2x-1}}{2\ln 2}+C$. **6.111.** 1) $xe^x -$ $- e^x + C$; 2) $(2x+1)\,e^{x-1} - 2e^{x-1} + C$. **6.112.** 1) $5e - 8\dfrac{3}{4}$; 2) $e-\dfrac{1}{2}$.

6.113. $S = e - 1$.

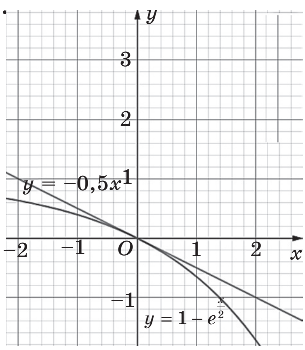


6.114. $S = e - \dfrac{1}{e}$.

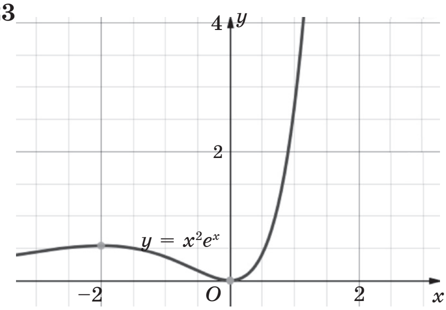


6.115. $e^x - \cos x + \sqrt{2}$. **6.116.** 1) $e^x(4x+3)$; 4) $7x^3e^{2x}(2+x)$. **6.117.** $y = ex$. **6.118.** $y = 0,5x + 0,5\,(1 - \ln 0,5)$. **6.119.** $y = -ex$. **6.120.** arctg2.

6.121.



6.123



6.124. 1) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$; 3) $-\,e^{\mathrm{ctg}x} + C$; 4) $-\,e^{\cos x} + C$. **6.125.** 1) $-15e^{\frac{x}{2}}\cos 2x +$ $+10\dfrac{1}{16}e^{\frac{x}{2}}\sin 2x$. **6.126.** 1) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+C$. **6.127.** $\mathrm{arctg}\,e - \dfrac{\pi}{4}$. **6.128.** $\dfrac{1}{2}e^x(\cos x +$

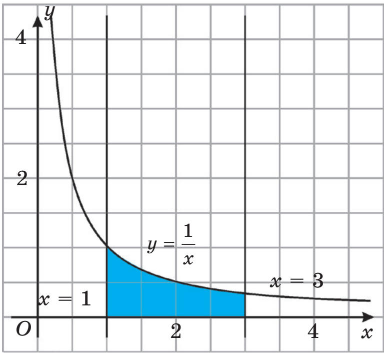
$+\sin x)+C$. **6.129.** 44550. **6.130.** Ҳа. **6.132.** 1) $\frac{3}{3x-2}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $-\frac{2}{1-x}$.

6.133. B. **6.134.** D. **6.135.** 1) $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$; 3) $x - 2\ln|x-1|+C$.

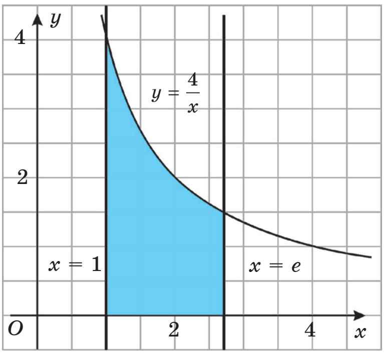
6.136. 1) $x\ln 4x - x + C$; 2) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$; 3) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$;

4) $-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$. **6.137.** $\frac{1}{2}$. **6.138.** 1) $e-\ln 8-1$; 2) $2\ln 3$; 3) $\frac{3}{2}-\ln 2$.

6.139. $S = \ln 3$



6.140. $S = 4$



6.141. 1) $\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$; 2) $\frac{3\mathrm{ctg}3x}{\ln 2}$; 3) $2(\mathrm{ctg}2x+\mathrm{tg}2x)=\frac{4}{\sin 4x}$. **6.142.** $y=\frac{x}{e}$.

6.143. 1) $-\frac{9}{(3x-2)^2}$; 2) $\frac{1}{x+1}$. **6.144.** $F(x)=\ln x$. **6.145.** 1) $\frac{1}{2}x+\frac{13}{8}\ln(4x-7)+C$;

2) $\frac{3x}{5}-\frac{29}{25}\ln(5x+3)+C$. **6.146.** 1) $\frac{(\ln x)^2}{2}+C$; 2) $\frac{2(\ln x)^3}{3}+2\ln x+C$;

3) $-\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln(x^2-4)+C$. **6.149.** 2) $-\left(\frac{10}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\ln x+\frac{6}{x^3}$. **6.150.** $\sqrt{e}$.

6.151. 1. **6.152.** 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+C$; 2) $3\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **6.153.** Йўқ.

VII бўлим

7.1. 1) 4; 2) 10; 3) 6; 4) −3; 5) 3; 6) 6; 7) 6; 8) 2,4; 9) 0; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\log_3 7$; 12) −2. **7.2.** 1) ± 1; 2) −2; 1; 3) 6; 4) $2\frac{1}{3}$; 5) −2; 1; 6) 4; 5. **7.4.** 1) ≈ 3,9; 2) ≈ 15,5. **7.5.** 1) ≈ 6,9; 2) ≈ 13,9. **7.6.** 1) ≈ 20 кун. **7.8.** 1) ≈ 6,2 йил ёки ≈ 74 ой. **7.9.** 1) ≈ 3,4 йил ёки ≈ 41 ой. **7.10.** 1) ≈ 11 ай. **7.11.** 1) 1;

2) 2; 3) 4; 4) 8; 5) 3; 6) ± 2. **7.12.** 1) 1,5; 2) $\pm\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 3. **7.13.** 1) -2; 2) 0; 4; 3) 3; 11; 4) 1. **7.14.** 1) 0; $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3; 3) $-2,5$; 3; 4) $-3,5$; 2. **7.15.** 1) (3; 2); 2) (1; 2). **7.16.** 1) $\approx 17,3$ ҳафта; 2) $\approx 92,2$ ҳафта. **7.17.** 1) ≈ 8 с. **7.18.** 1) $\approx 50,7$; 2) $\approx 152,1$; 3) 4°. **7.19.** 1) 25; 2) ≈ 166. **7.20.** 1) 0; $3\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 1. **7.21.** 1) 2; 2) 2; 3) 0; 4) 0. **7.22.** 1) 1; 5; 2) -2; 5; 3) 1; 4) 1; 2. **7.23.** 1) $\log_5 10$; 2) $-0,4$; 3) $\log_{0,25} 1,5$; 4) -3. **7.24.** 1) 66; 2) 1; 3) 0; 4) $1\frac{1}{2}$. **7.25.** 1) 1,5; 2) 5; 3) $\pm\sqrt{3}$. **7.26.** 1) -2; 2) 0. **7.27.** 1) $x = \log_2 \sqrt{3}$; 2) 1. **7.28.** 1) 1; 2) $\log_3(1+\sqrt{2})$; $\log_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **7.29** . 1) 0; 2) ± 2. **7.30** .1) (0; 2); (2; 0); 2) (0,5; 4). **7.31. 1)** ягона ечими мавжуд. **7.32.** 1) 1; 2) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; 3) -1; 4) $\varnothing$. **7.33.** 1) 4; 2) -7; 8; 3) 3; $\log_6 8$; 4) 3. **7.34.** 1) $a \neq 0,4$; 2) $a \neq 1,5$. **7.35.** 1) (1; 1); 2) (3; 5). **7.36** .1) 1; 2) $\{-3\} \cup (-1; +\infty)$. **7.41.** $\frac{m+n}{1-m}$. **7.42.** 1) -1; 2) 7; 3) 2. **7.43.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 2. **7.44.** 1) 1; 4; 2) 2; 3) 1; 5. **7.45.** 1) $1\frac{3}{5}$; 2) 8,5; 3) 49; 5) 1; -8; **7.46.** 1) $\frac{1}{3}$. **7.47.** -3; -2; 2. **7.48.** 1) $\varnothing$; 2) 10; 3) 2. **7.49.** 1) e; e^{-4}; 2) 2; $\sqrt[9]{2}$. **7.50.** 1) (2; 5); (5; 2); 2) (2; 32); (32; 2); 3) $\left(\frac{41}{9}; -\frac{40}{9}\right)$.

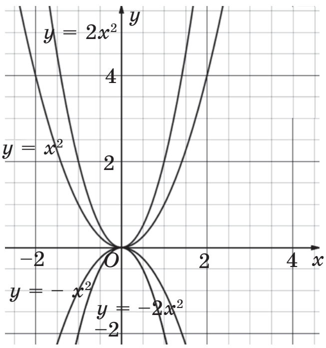
7.51. 1) (4; 8); (8; 4); 2) (2; 1); (1; 2); 3) (5; 3); (3; 5). **7.52.** 1) 4; 2) $32\frac{1}{2}$; 3) -3. **7.53.** 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$; 2) -5; 3; 3) $e^{2,5}$; e^{-2}. **7.54.** 1) 5; 2) 8; 5; 3) -3; -2; 0. **7.55.** 1) 10; 2) $\sqrt[4]{1000}$; 3) 4; 4) 1; **7.56.** 1) 1; 2) 0; 3) 2. **7.57.** 1) 2; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 2) 3; 3) 1; 16. **7.58.** 1) $\frac{1}{5}$; 125; 2) $\sqrt[5]{10000}$; 3) $\frac{1}{9}$; 9; 4) $\frac{1}{10}$; 1000; 5) $x > 0$; $x \neq 1$; 6) 3; $\frac{1}{9}$. **7.59.** 1) (1; 0,5); 2) $\varnothing$. **7.60.** 1) (2; 6); 2) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$; 3) (3; 12). **7.61.** 1) екі; 2) бір. **7.62.** 1) (7; 3); (6; 2); 2) (3; 2). **7.63.** 1) 2; 3) $\varnothing$. **7.64** 1) 1; 2) 10; 10^5. **7.65.** 1) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (3; 9).**7.66.** 1) (4; 16). **7.67.** $a > \frac{1}{16}$. **7.72.** 1) $x < 4$; 2) $x \leqslant -1$; 3) $x < 4$; 5) $x > \frac{4}{3}$. **7.73.** 1) $x < -3$; 2) $x < -3$; 3) $x < -3$; 4) $x < -1$; $x > 2$. **7.74. 1)** 2; 2) 1; 3) -1. **7.76.** 1) $x \leqslant 0$; 2) $-1 < x < 1$. **7.77.** 1) $x < 0$; 2) $x < 4,5$. **7.78** 1) $x < 0$; $x > \log_6 5$; 2) $\log_2 \frac{2}{3} < x < \log_2 9$. **7.79.** 1) $x \geqslant 2$; 3) $x < -1$. **7.80** . 1) $x > 11$; 2) (1; 9). **7.81.** 1) $x \leqslant 1$; 2) $x \geqslant -1$.

7.82. 1) $x > -\frac{1}{4}$; 2) $x > 3$; 5) $x \geqslant -2$. **7.83.** 1) $\left(\frac{7}{8};\ 3\right)$; 2) $(-1;\ 3)$; 3) $[-3;\ 2]$. **7.84.** 1) $(-\infty;\ -6] \cup [2;\ +\infty)$; 2) $(-\sqrt{8};\ \sqrt{8})$. **7.85.** 1) $x > 2$; 2) $x > 0$. **7.86.** 1) $\left(-3\frac{1}{6};\ 0\right)$; 2) $x < 34$; 3) $x < 2$. **7.87.** 1) R; 2) $x > \log_3 2$; 3) $x \leqslant -2 \cup$ $\cup\ x \geqslant -1$. **7.88.** 1) 0; 2) -2. **7.89.** 1) 0; 2) -1; 3) 0. **7.90.** 1) $x < 2$; 2) $x < -2$; 3) $(-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ \log_2 3)$. **7.92.** 1) $(2;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$. **7.93.** 2) $0 < x < 3$; 3) $x < 4{,}5$. **7.97.** 304. **7.98.** 1) $x > -\frac{1}{4}$; 2) $(-2;\ 7)$; 3) $(3;\ 11]$. **7.99.** 1) $x > 7$; 2) $x > 4$; 4) $\left(\frac{3}{4}; 2\right)$. **7.100.** 1) $x > 2$; 2) $x > 2$. **7.101.** 1) $x > 1$; 2) $(0{,}4;\ 0{,}46)$; 3) $(-0{,}2;\ 0{,}4) \cup (0{,}4;\ 1)$. **7.102.** 1) $\varnothing$; 2) $x > 2$; 3) $(2;\ 5)$. **7.103.** 1) $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$; 2) $\left(\frac{1}{5^6}; 5\right)$; 3) $(0;\ 1) \cup (1000; +\infty)$. **7.104.** 1) $[-1;\ 0)$; 2) $x > 1$. **7.105.** 1) $(-4;\ 2)$; 2) $(-2;\ -1) \cup (2;\ 3)$; 3) $(-\sqrt{6};\ \sqrt{6})$. **7.106** 1) $(1;\ 2]$; 2) $\left(1; 1\frac{2}{3}\right)$. **7.107.** 1) $(2;\ 5)$; $x \geqslant 2$. **7.108.** 1) $[4;\ 5)$; 2) $[1;\ 2]$. **7.109.** 1) $\left(\frac{1}{e}; e^3\right)$; 2) $\left(2; 2\frac{1}{4}\right) \cup (6; +\infty)$. **7.110.** 1) $(0;\ 1] \cup [16;\ +\infty)$. **7.111.** 1) $-\frac{2}{3} \leqslant x < 0$; 2) $x > 8$. **7.112.** 1) $(0;\ 1) \cup$ $\cup\ (2;\ +\infty)$. **7.113.** 1) $-1 < x < 10\frac{1}{9}$; 2) $(3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$. **7.114.** 1) $\varnothing$; 2) $(1;\ 3)$. **7.115.** 1) $\frac{1}{3} < x < 3$; 2) $\left(1; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3; +\infty)$. **7.117.** 1) $\left(\log_2 \frac{5}{4}; \log_2 3\right)$; 2) $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **7.118.** $(1;\ 2)$. **7.120.** 3. **7.121.** 1) $[0;\ 2) \cup (4;\ 6]$. **7.124.** 1) $a\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})$.

VIII бўим

8.1. 1) 3-тартибли; 2) 2-тартибли. **8.4.** $A = 4$. **8.6.** $v(0) = 0$. t вақт ўтиши билан тезликнинг максимум қиймати 20 га яқинлашади. **8.7.** A; E. **8.9.** $y = x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 2{,}5$. **8.10.** $s(t) = 4t - 5t^2 + C$ – умумий ечим; $s(t) =$ $= 4t - 5t^2 + 11$ – хусусий ечим. **8.11.** $y = \sqrt[3]{6x - 4}$. **8.12.** 1) $k = 2$; 2) $k = 6$; 3) $k = 1$; 4) $k = R$; 5) $k = 3$.

8.13. $y' = Cx$.



8.14. 1) $k = 2$; 2) $k = -2$; 3) $k = 3$; 4) $k = -1$. **8.15.** 1) $y' = \sqrt{\dfrac{c}{2x}}$; 2) $y' = C$; 3) $y' = Ce^x$; 4) $yy' = -x$. **8.16.** $x_0 = 0$; $k = y' = 1 - xy = 1$ – барча уринмаларнинг бурчак коэффициентлари тенг. **8.17.** 1) $y = -\dfrac{e^{-3x}}{3} + C$; 2) $y = \dfrac{x^2}{4} - \ln\left|\cos x\right| + C$; 3) $y = C$; 4) $y = 2\pi kx + C$. **8.18.** $y = \dfrac{x^2}{3} + C$. **8.19.** $y' = 10m - k\,(y')^2$. **8.20.** 1) $x\ln(x^2 + 4) - 2x + 4\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2} + C$. **8.21.** 1 ва 3 тенгламалар. **8.22.** 1) $y = Ce^x$; 2) $y = x^2 + C$; 3) $y = -\dfrac{2}{x^2 + C}$; 4) $y = ex - \dfrac{x^2}{2} + C$. **8.23.** 1) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$; 2) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$; 3) $y = \sqrt[3]{-3\cos x + C}$; 4) $y = \ln(x^3 + C)$. **8.24.** 1) $y = \dfrac{1}{0{,}1 - \ln x}$; 2) $y = \dfrac{1}{0{,}5 - \ln x}$; 3) $y = \ln\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\cos 2x}{2}\right)$. **8.26.** $T(t) = 25 + 75e^{-kt}$; $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - 25)$. **8.27.** ≈40 мин. **8.28.** $v = \dfrac{10}{0{,}5 + t}$; ≈ 0,056 с. **8.30.** $v = \dfrac{40}{41e^{0{,}2t} - 40}$. **8.31.** 1) $y = \sqrt{Ce^{2\mathrm{arctg}x} - 1}$; 2) $\ln(\ln y) = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$. **8.32.** 1) $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$; 2) $\sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{5} - 1$. **8.34.** 1) $T = 20 + Ce^{-0{,}5t}$; 2) $T = 20 + 80e^{-0{,}5t}$; 3) ≈20 минут. **8.35.** $y = -\dfrac{1}{1 + x}$. **8.36.** 1) $m = 40(t - 3)^3 + C$; 2) $m = 40(t - 3)^3 + 1110$; 3) 1110 г. **8.39.** 1) $\dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}\ln(x^2 + 1) + \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C$; 2) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{1}{4}(1 - x^3) + C$. **8.40.** 1) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$; 2) $6\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$; $\lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$; 3) $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$; $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$;

$\lambda_2 = -1$. **8.42.** 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$; $y = 3e^{2x} - 2e^{3x}$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$; $y = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{6}e^{-3x}$; 3) $y = C_1 + C_2e^{5x}$; $y = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}e^{5x}$. **8.43.** 1) $A = \sqrt{2}$; $\omega = 2$; $\frac{\pi}{4}$ – бошланғич фаза; 2) $A = \sqrt{10}$; $\omega = \frac{1}{2}$; $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$ – бошланғич фаза; 3) $A = \sqrt{2}$; $\omega = \sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}$ – бошланғич фаза. **8.44.** 1) $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x}$; 2) $y = C_1e^{\frac{2}{3}x} + C_2xe^{\frac{2}{3}x}$; 3) $y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$; 4) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$. **8.45.** 1) $y'' - y = 0$; 2) $y'' + 2y' + y = 0$. **8.46.** 1) $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$; $y = e^{2x} - 2xe^{2x}$; 2) $y = C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{1}{2}x}$; $y = 4e^{-\frac{1}{2}x} - 2xe^{-\frac{1}{2}x}$; 3) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$; $y = e^{3x} - 3xe^{3x}$; 4) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$, $y = 2xe^{-x}$. **8.48.** 1) $y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x$; 2) $y = C_1e^{x}\cos 2x + C_2e^{x}\sin 2x$; 3) $y = C_1e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_2e^{-x}\sin\sqrt{3}x$. **8.49.** 1) $x = \frac{1}{3}\sin 3t$; 2) $x = \sin 2t$; 3) $x = \frac{3}{\sin 2\sqrt{3}}\sin 2\sqrt{3}t$. **8.51.** 1) $y = 2e^{-x}\sin x$; 2) $y = e^{\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$. **8.52.** 1) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 2) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. **8.53.** $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

IX бўлим

9.1. 4) 0; 5; 6) 5; 7) 0; 8) 8. **9.9.** 1) $a = 32$; $b = 56$. **9.11.** 1) 1,36. **9.12.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) 2; 4) -4; 5) 1; 6) 1; 7) 9. **9.17.** 1) $8(x + 11)\times(x - 2)$; 4) $(a - 1)(a + 9)$; 8) $2a(a^2 + 3b^2)$. **9.18.** 2) $(5mn^2 - 7p^2q)(3m^2p + 5nq^2)$. **9.24.** $\frac{2}{b}$. **9.27.** 1. **9.30.** 1) $a_n = \frac{1}{n^2}$; 2) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; 4) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **9.34.** 2) 90. **9.35.** $\frac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **9.36.** $a_n = 18n - 25$; $b_n = 14n - 17$. **9.37.** 1) $b_1 = -49$; $q = -\frac{1}{7}$; 4) $b_1 = \frac{1}{8}$; $q = 7$. **9.39.** $a = 32$ ёки $a = \frac{1}{2}$, $a = \pm 4$. **9.40.** 3) $\frac{b_1^3}{1-q^3}$. **9.41.** $\frac{2}{3}$. **9.42.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{4}$. **9.44.** 1; $2(2+\sqrt{3})$; $(2+\sqrt{3})^2$. **9.45.** 3. **9.49.** 7. **9.50.** 1) 2^8; 2) $C_8^4 = 70$. **9.51.** 1) $\overline{A_5^3} = 125$; 2) $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$. **9.52.** $C_{10}^5 = 252$. **9.60.** $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{9}\right)$. **9.61.** $a = 0$. **9.62.** 4) $\frac{1}{9}$; 7) $-\frac{7}{3}$. **9.64.** 2) (1; 6), (6; 1); 4) (1; 5), (5; 1); (2; 3) (3; 2). **9.65.** 2)$x^7 - 1 = (x^3 + x + 1)(x^4 - x^2 - x + 1) + 2x^2 - 2$. **9.66.** $a = -11$. **9.69.** 3) $(x - 1)(x^2 - 4x - 1)$; 6) $(x + 1)(x^3 - 7x^2 - 7x - 4)$. **9.71.** 1) $\pm 1, \pm 2$. **9.72.** 2) $\left(1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$. **9.73.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\varnothing$. **9.74.** 1) $-3{,}5$; 2) 4. **9.75.** 1) -1; $-1\frac{1}{17}$. **9.77.** $\varnothing$. **9.78.** 1) 3. **9.79.** 1) $\varnothing$; 2) $x \geqslant 3$; 3) 1; 4. **9.80.** 1) 4; 548; 2) 2; 3. **9.81.** 2) 0. **9.82.** 1) 0; 2) -1; -2; 0. **9.83.** 1) -5; 3; 2) $[5; +\infty)$. **9.84.** 1) -6; 2; 2) -1; 0; 3; 4. **9.85.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 2. **9.86.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{15}{4}$; 2) $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$. **9.87.** 3) $a \in (-\infty: +\infty) \Rightarrow x_1 = a,\ x_2 = a + 1$; 4) $a \neq 3 \Rightarrow x = a$; $a = 3 \Rightarrow x \in \varnothing$. **9.89.** $a = -2$; $-\frac{1}{2}$. **9.91.** 1) $\left(\frac{118}{19}; -\frac{29}{19}\right)$; 2) $x = \frac{15y + 51}{20}$, $y \in R$; 3) $\varnothing$. **9.92.** 1) (2,2; 0,4), (1; 1); 4) $(\pm 3; \pm 1)$ **9.93.** 2) $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}; \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$; $\left(\pm 4\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{33}}; \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{33}}\right)$. **9.94.** Кўрсатма: системанинг биринчи тенгламасини y га боғлиқ квадрат тенглама сифатида кўриб чиқинг. **9.95.** 1) $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right)$; 2) $(5; 3), (-5; -3)$. **9.96.** 1) $(3; 1; -2), (-5; -3; 0)$; 2) $(\pm 4; \pm 3; \mp 1)$. **9.97.** 1) $\left(-\frac{7}{2}; \frac{67}{4}\right)$; $\left(\frac{21}{4}; \frac{37}{4}\right)$; 2) $(5; 4); (5; 3)$. **9.104.** 1) $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; 4) $[3; +\infty)$. **9.107.** 2) $[-1; 6]$; 3) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. **9.108.** 1) $(-1; 2)$; 2) $(-1; 0)$. **9.109.** 1) $(-\infty; -2) \cup$ $\cup [-1; 2] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-3; 1)$. **9.110.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $[0; 5]$; 3) $\varnothing$; 4) $[-1; 1]$. **9.111.** 1) $[-3; -1] \cup \{3\}$; 3) $(-\sqrt{2}; 3)$; 4) $[1; 5]$. **9.112.** 1) $\left[1; \frac{25}{16}\right)$; 2) $(3; 11)$. **9.113.** 1) $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$; 2) $[-5; 2]$. **9.114.** 1) $[-2; -1] \cup [0; 3]$; 2) $(-\infty; -2) \cup$ $\cup (-2; -1) \cup (-1; 0]$. **9.115.** 1) $[1{,}5; +\infty)$ 2) $(-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (6; +\infty)$. **9.116.** 3) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (4; +\infty)$. **9.117.** $a \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **9.118.** $a \in (-\infty; -1) \cup$ $\cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **9.119.** $a \in [4; +\infty)$. **9.121.** 1) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; 4) $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{12}$. **9.122.** $a = -\frac{15}{4}$. **9.124.** 2) 0; 3) $\frac{1}{\cos 2\beta}$. **9.127.** 1) $\operatorname{tg}2x$; 2) $\operatorname{tg}2x$. **9.128.** 1) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$. **9.129.** 1) -1; 2) 0; 3) 1,5. **9.130.** $\frac{31}{49}$. **9.131.** 1,6. **9.132.** $1 - \sqrt{3}$. **9.133.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **9.134.** 1) $\frac{\pi}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **9.135.** 1) $-\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi k$, $k \in Z$. **9.136.** 1) $(-1)^k \arcsin\frac{1}{4} + \pi k$, $k \in Z$;

2) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. **9.137.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k, 2\pi k, k\in Z$. **9.138.** 1) $\varnothing$. **9.139.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

9.140. 1) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; 2) $\pi k, \pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. **9.141.** 1) $2\text{arctg}\sqrt{7}+2\pi k; \pi+2\pi k; k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, -2\text{arctg}(4+\sqrt{15})+2\pi k, k\in Z$. **9.142.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$. **9.145.** 1) $6+\sqrt{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **9.146.** 1) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{\text{tg}2+2}{3}$. **9.147.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\frac{3}{5}$. **9.148.** 1) 0; 2) 0; $\pm\frac{1}{2}$. **9.149.** 1) $x\in[0; 1]$; 2) $x\in[-1; 0]$. **9.150.** 1) $a=0\Rightarrow x\in\varnothing$; $a\in(-\infty; -2\pi)\Rightarrow x\in\varnothing$; $a\in[-2\pi; 0]\Rightarrow x=\cos\frac{a}{2}$; $a\in(0; \pi]\Rightarrow x=\cos a$; $a\in(\pi; +\infty)\Rightarrow x\in\varnothing$. **9.152.** 1) $[4\pi k; \pi+4\pi k]$, $k\in Z$. **9.153.** 1) $\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right), k\in Z$. **9.154.** 4) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\text{arctg}2+\pi k\right), k\in Z$. **9.155.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right]$. **9.156.** 2) $\left[\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$.

9.158. 2) $-a-b$. **9.159.** 1) $a^n b^n$. **9.161.** 2) $\sqrt{x}$. **9.164.** 1) $x=y$; 4) $4x=5y$. **9.165.** 3) камаювчи. **9.166.** 1) $2^{1,5}>2^{\sqrt{2}}$. **9.167.** 2) $\frac{1}{14}$. **9.168. 1)** $\log_5 2>\log_{25}8$. **9.169.** 2) 0. **9.170.** $\frac{m+2}{2m+1}$. **9.171.** 2) 3; 1) 25. **9.172.** 1) 20. **9.173.** 1) $m+n$; 2) $|a+1|$. **9.175.** 3) $\frac{5}{3}$; 4) $x=-1$. **9.176.** 1) $\frac{8}{7}$; 2) $2\pm\sqrt{3,5}$. **9.177.** 1) 6; 2) 27. **9.178.** 1) 1,54.

9.179. 1) $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{6}$; 2) 3. **9.180.** 1) $\log_{1,5}2$; $2\log_{1,5}2$; 2) -1; $\log_{0,4}5$. **9.181.** 1) $5\sqrt{\log_2 5}$; 2) $\frac{1}{9}$. **9.182.** 1) $\sqrt[9]{10}$; 10; 2) 3; 3^9; 3) $\frac{1}{5}$; 125; 4) $\sqrt[5]{10^4}$. **9.183.** 1) (0; 2), (2; 0); 2) (2; 6). **9.184.** 1) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. **9.185.** 1) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (3; 5). **9.186.** 1) (6; 6). **9.187.** $a\geqslant\frac{1}{16}$. **9.188.** $n=3$. **9.189.** $a\in(3; 27)$. **9.190.** 1) $(-\infty; 1,5)$; 3) $(0; +\infty)$. **9.191.** 1) $(-\infty; \log_{0,75}5)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -2)\cup\left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$. **9.192.** 1) $(8; +\infty)$; 2) $(2; 7]\cap[22; 27]$. **9.193.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)\cup\left[\sqrt{2}; +\infty\right)$; 2) $(0,1; 1)\cup(1; 10)$; 3) $(1; \sqrt[3]{5})$. **9.194.** 1) $\left(\frac{3}{8}; \frac{1}{2}\right)\cup\left(1; \frac{3}{2}\right)$; 2) $(-3; -2)\cup(-1; 0)\cup(1; 3)$; 4) $(-\infty; -6)\cup(6; +\infty)$.

9.195. 1) $(-5,5; 0)$. **9.197.** 2) $2x+\frac{2}{x^3}$. **9.198.** 1) $1-\frac{3}{2\sqrt{x}}$. **9.199.** 2) $-\frac{2}{\sqrt[5]{x^6}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}$.

9.200. 1) $2\cos 2x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$. **9.201.** 2) $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. **9.202.** 1) $\dfrac{1}{1-\sin x}$.

9.203. 2) $-\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)^2$. **9.204.** 1) $2x + 3^x\ln 3$. **9.205.** 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **9.206.** 1) $2x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.
9.207. 2) $-\ln a$. **9.208.** 1) $(-\infty; 1)$ – камаювчи; $(1; +\infty)$ – ўсувчи. **9.209.** 3) $(-\infty; 0)$.
9.210. 3) $(e; +\infty)$. **9.212.** 1) $f(-1) = 1$ – энг кичик қиймати; $f(1) = 1$ – энг катта қиймати. **9.213.** 2) $x = -2$ – максимум нуқтаси, $f(-2) = -2$; $x = 2$ – минимум нуқтаси, $f(2) = 2$. **9.214.** 3) $x = 2$ – минимум нуқтаси , $f(2) = 2 - 2\ln 2$.
9.216. 2) $k = 0$. **9.217.** $\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$, $\left(3; \dfrac{7}{2}\right)$. **9.219.** $\sqrt{3}$ есе. **9.220.** $\alpha = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
9.221. $t \approx 2{,}04$; $h = 30{,}41$. Кўрсатма: жисмнинг ҳаракати $x = 10 + 20t - \dfrac{gt^2}{2}$ қонуниятга кўра характланишини эътибога олинг. **9.222.** $v(t) = kAe^{-kt}$.
9.223. 1) $x^3 + x^2 + C$. **9.224.** 1) $\dfrac{x^3}{3} + x^2 - \ln|x| + C$; 4) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x} + C$.

9.225. 1) $-\dfrac{2}{\sin 2x} + C$; 4) $\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}\cos 4x + C$. **9.226.** 1) $\dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$.

9.227. 1) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$. **9.228.** 2) $\dfrac{1}{2}\ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) + C$.

9.229. 1) $\dfrac{1}{7}\cos^7 x - \dfrac{1}{5}\cos^5 x + C$. **9.230.** 2) $\dfrac{17}{6}$; 3) 2. **9.231.** 2) $\dfrac{1}{2}$;

3) $\dfrac{1}{2}\ln 2$. **9.232.** 2) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; 3) $\dfrac{\pi-2}{8}$. **9.233.** 12. **9.236.** $\dfrac{\pi}{4}$. **9.238.** 3.

9.239. $\dfrac{4}{3}$. **9.240.** 10. **9.241.** $\dfrac{15}{4} - \ln 2$. **9.242.** 4,5. **9.243.** $\dfrac{8}{3}$. **9.244.** $\dfrac{128\pi}{63}$.

9.246. 4π. **9.248.** 3500Дж. **9.250.** 36. **9.251.** 20. **9.252.** 2 км/соат. **9.253.** 30 ц, 40 ц. **9.254.** 12,5%. **9.255.** 1 кг, 7 кг. **9.256.** 4 ёки 20. **9.257.** 20 соат, 30 соат.
9.259. 23.

МУНДАРИЖА

VI бўлим. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ

VII бўлим. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

VIII бўлим. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

IX бўлим. ЎРТА МАКТАБ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МИСОЛЛАР

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

ЕКІ БӨЛІМДІ

2-БӨЛІМ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

(өзбек тілінде)