АЛГЕБРА

ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ

Умумтаълим мактабларнинг табиий-математик
йўналишидаги 11-синф учун дарслик

ИККИ ҚИСМЛИ

1-қисм

11

ӘОЖ 000
КБЖ 000

ФОЙДАЛАНИЛГАН ШАРТЛИ БЕЛГИЛАР:

? — мавзунинг асосий материаллари бўйича саволлар

📜 — тарихга назар

✦ — амалий, татбиқий топшириқ

A — I даражали топшириқлар

B — II даражали топшириқлар

C — III даражали топшириқлар

✻ — ижодий ёки юқори мураккабликдаги мисоллар, маттематикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфлар учун материаллар

▲ — исботнинг ёки мисолни ечишнинг бошланиши

■ — исботнинг ёки мисолни ечишнинг оҳири

Алгебра ва анализ асослари: Умумтаълим мактабларининг табиий-математик йўналишидаги 11-синфлар учун дарсли, 2 қисмли. 1-қисм /
2020.

– 188 бет.

ISBN 000-000-000-00

ISBN 000-000-000-00

КИРИШ

Дарслик янгиланган таълим дастурига мос равишда умумтаълим мактабларининг табиий-математик йўналишидаги 11-синфи учун мўлжалланган. Вақтдан унумли фойдаланиш мақсадида онлайн ресурсларга (онлайн график калькулятор, таълим дастурлари) ҳаволалар берилди.

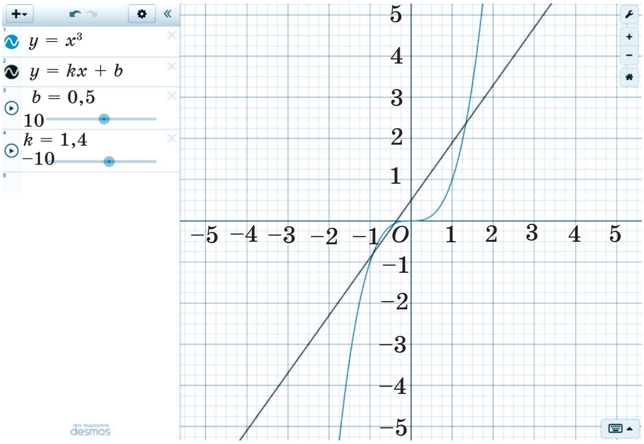
Чуқурлаштирилиб ўқитиладиган синфлар учун материаллар (*) белгиси билан белгиланган. Шу билан бир қаторда **C** гуруҳининг топшириқлари ҳам асосан математикани чуқурлаштириб ўқитиладиган синфлар учун мўлжалланган. Бинобарин, математикани чуқур ўзлаштириб, қизиқиш билдирган ўқувчилар учун ҳам бу материалларнинг фойдаси катта. Чунки берилаётган **C** гуруҳининг материалларининг математик олимпиадалар ва бошқа мусобақаларга қатнашиб юрган ўқувчиларнинг билимини чуқурлатишга фойдаси катта.

Ушбу дарсликдан фойдаланиш давомида қуйидаги қоидаларга риоя қилган маъқул: ҳар бир бўлимнинг оҳирида ўтилган мавзуни мустаҳкамлаш мақсадида берилган топшириқларни бажариб бориш лозим. Ҳар бир ўқувчи **A** гуруҳи материаллари билан амалий топшириқларни тўлиқ ўзлаштиргандан кейингина **B** ва **C** гуруҳларининг мисолларига ўтиши мумкин. Ундан ташқари ҳар бир бўлим оҳиридаги назарий саволларга жавоб беришни кўникмага айлантирган маъқул.

Кўп изланиш, меҳнат билан талаб ўз натижасини бериши сўзсиз!

Онлайн график калькулятор билан (https://www.desmos.com/calculator) ишлаш

Desmos онлайн график калькулятори – функциянинг формуласидан фойдаланиб графикларни ясашга имконият берувчи онлайн сервис. Функциянинг графигини ясаш учун чап устунга мос функцияни ёзасиз. У ҳолда функциянинг графиги автоматик равишда ўнг томонда ясалади.



$y = x^3$

$y = kx + b$

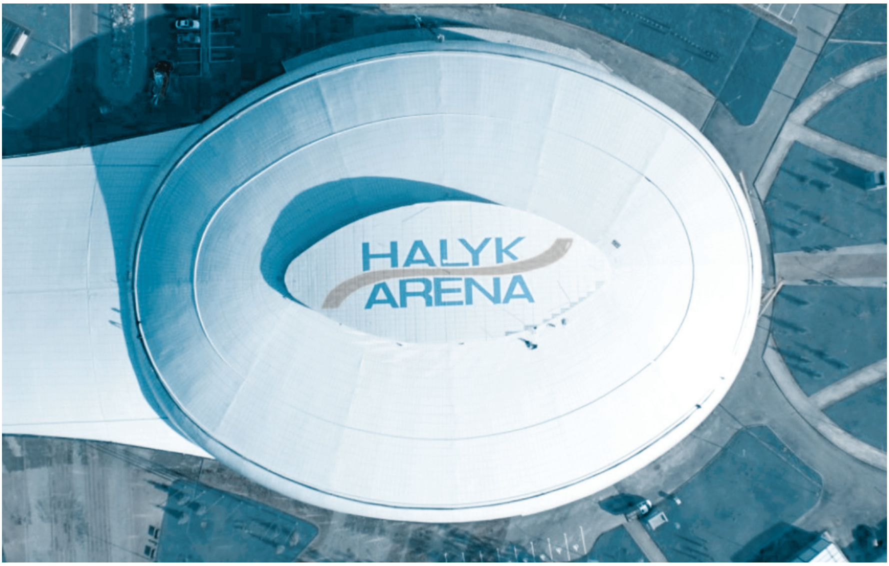
$b = 0,5$

$k = 1,4$

График калькулятор ёрдамида ишлашнинг тўла кўрсатмасини ушбу ҳаволадан бепул юклаб олиш мумкин:

https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_RU.pdf

10-СИНФ МАТЕРИАЛЛАРИНИ ТАКРОРЛАШ



Бўлимни ўқиб, ўрганиш давомида сизлар:

- 10-синф материалларини такрорлайсиз;
- янги ўтиладиган материалларни натижали ўзлаштиришга тайёргарлик кўрасиз.

Машқлар

А

0.1. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+4}-\dfrac{x+4}{2x-3}$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}$;

3) $f(x)=\sqrt{|x|+1}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+2}$.

0.2. $f(g(x))$ мураккаб функцияни ёзинг:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 2$;

2) $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)= \sin x$;

3) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2-2x-3$;

4) $f(x)=\sqrt{2x+1}$, $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$;

0.3. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $4\cos 45\cdot\sin 135$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{\pi}{3}$;

3) $\sin 420\cdot\ \cos 600$; 4) $\sin\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$.

0.4. Тригонометрик ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{3\operatorname{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{3-\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}3\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha}$;

3) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$; 4) $\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}$;

5) $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha$; 6) $\cos^4\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\sin^2\alpha$.

0.5. Ифоданинг ишораси аниқланг:

1) $\sin 138+\cos 50$; 2) $\sin\frac{7\pi}{5}-\sin\frac{17\pi}{10}$;

3) $\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{tg}3{,}14-\operatorname{tg}\pi$.

0.6. Тригонометрик функцияларнинг графигини ясанг ва натижани https://www.desmos.com/calculator онлайн график калькулятори ёрдамида текширинг:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\cos 2x$;

3) $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

0.7. Ҳисобланг:

1) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}3)$;

3) $\operatorname{ctg}(2\operatorname{arcctg}2)$; 4) $\sin(\operatorname{arctg}3)$.

0.8. Тенгламани ечинг:

1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0$;

3) $6\sin x-5=0$; 4) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$;

5) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1$; 6) $\operatorname{tg}3x=9$.

0.9. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x + 0{,}5 < 0$;

3) $3\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} > 0$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{x}{2}\right) > 1$;

5) $2\cos x \geqslant -\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) < 1$.

Функциянинг ҳосиласини топинг **(0.10—0.11):**

0.10. 1) $y = x - x^3$; 2) $y = \sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}$;

3) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; 4) $y = \sin 3x$;

5) $y = x \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 6) $y = \left(3x + \dfrac{x^6}{6}\right) \cdot \cos x$.

0.11. 1) $y = (2-3x)^7$; 2) $y = (x^2-4x+1)^4$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$; 4) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$;

5) $y = x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$; 6) $y = \left(\dfrac{x^2 + 2x}{6}\right) \cdot \cos 3x$.

0.12. Ҳосила ёрдамида функциянинг берилган оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $y = 4x - x^4$, $x \in [-1;2]$; 2) $y = \dfrac{2x-5}{x^2-4}, x \in [3;5]$.

0.13. Функциянинг ўсиш оралиғини топинг:

1) $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{4}{x}$; 2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 3) $3\cos x$.

0.14. Ҳосила ёрдамида функцияни текшириб, унинг графигини ясанг (натижани онлайн график калькулятор ёрдамида https://www.desmos.com/calculator текширинг):

1) $y = (x - 3)^3$; 2) $y = -x^3 + 3x^2$.

0.15. Тенгсизликни интерваллар усули билан ечинг:

1) $4 - x < \dfrac{1}{x-1}$; 2) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} > 3$.

***0.16.** Иррационал тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{9x-20} < x$; 2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}} \leqslant 2$.

B

0.17. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{4-x}}$.

0.18. $f(x)=x^2+1$ ва $g(x)=\sqrt{3-x}$ функциялар берилган. Функцияларнинг аниқланиш соҳаси: $f(x)$ — $(-\infty;\ +\infty)$; $g(x)$ — $(-\infty;\ 3]$. Қуйидаги мураккаб функцияларни аниқланг:

1) $f\,(g(x))$; 2) $g\,(f(x))$.

0.19. $f(x) = x^2+1$ ва $g(x)=\sqrt{3-x}$ функциялар берилган. Шу функцияларга тескари функцияларни топинг ва график калькулятор ёрдамида функция билан тескари функциялар графикларининг ўзаро қандай жойлашганини аниқланг:

1) $f^{-1}(x)$; 2) $g^{-1}(x)$.

0.20. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$; 2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}3x - \mathrm{tg}x} - \dfrac{1}{\mathrm{ctg}3x - \mathrm{ctg}x}$;

3) $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x}$; 4) $\dfrac{\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}$.

***0.21.** Модуль белгиси бўлган функциянинг графигини ясанг ва натижасини тушунтиринг:

1) $y = \left|\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right|$; 2) $y = \sin\left|2x - \dfrac{\pi}{3}\right|$.

0.22. Тенгламани ечинг:

1) $\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x$;

3) $4\sin 3x - 3\cos 3x = \dfrac{5}{2}$; 4) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$;

5) $\arccos x - \pi = \arcsin\dfrac{4x}{3}$; 6) $\mathrm{arctg}2x + \mathrm{arctg}3x = \dfrac{3\pi}{4}$.

0.23. Тенгсизликни ечинг:

1) $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x \geqslant 1$; 2) $1 - \sin x + \cos x < 0$;

3) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x \geqslant 2$; 4) $|\sin x| > |\cos x|$.

0.24. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = \sqrt{x-2}\cdot\sin(3x-2)$; 2) $y = \dfrac{\sin(2x-1)}{\sqrt{x+4}}$;

3) $y = (x^2+1)\operatorname{tg}x$; 4) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

0.25. Функциянинг узилиш нуқталарини топиб, уларнинг кўринишини аниқланг:

1) $y = \dfrac{x+1}{x^2-4x-5}$; 2) $y = \begin{cases} x-3, & x \leqslant 2, \\ 1-x^2 & x > 2. \end{cases}$

0.26. Лимитни аниқланг:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x^2}$.

0.27. Иккинчи тартибли ҳосиладан фойдаланиб, функциянинг ботиқ, қаварик оралиқларини аниқланг:

1) $y = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + x - 17$; 2) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

0.28. Функцияни текшириб, графигини ясанг. Жуфт ва тоқ функцияларнинг графикларидаги ўзига хосликларни айтинг:

1) $y = x^4 + 2x^2 - 3$; 2) $y = \dfrac{1}{2}(x+1)^2(x-2)^3$; 3) $y = x^3 - 3x$.

0.29. Йўловчилар поездида 20 та вагон бор. Учта йўловчини ҳар хил вагонларга неча усул билан жойлаштириш мумкин?

0.30. Ўйин суягини икки марта ташлаганда ҳар хил очколар тушиш эҳтимоли қандай? Бир хил очколар тушиш эҳтимоличи?

0.31. Математик индукция усули билан исботланг:

1) $n^3 + 3n^2 + 2n \,\vdots\, 6$; 2) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{1\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

0.32. Кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $4x^4 + 8x^3 - x^2 - 8x - 3$; 2) $(x^2 + x + 3)(x^2 + x + 4) - 12$.

C

0.33. $\dfrac{\cos x + 2\sin x}{2\sin x - 3\cos x} = 2$ деб олиб, $\operatorname{tg}2x$ нинг қийматини топинг.

0.34. $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) + 2\cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x - y) - 3$ ифодани x ва y га боғлиқ эмас эканлигини кўрсатинг.

0.35. Тенгламани ечинг:

1) $\sin x = \cos\sqrt{x}$;   2) $\sin(\pi \operatorname{ctg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$;

3) $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$;   4) $\arccos x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

0.36. Тенгсизликни ечинг:

1) $4\sin^3 x < 2\sin x + \cos 2x$;   2) $\cos(\sin x) < 0$.

***0.37.** Функциянинг асимптоталарини топиб, унинг графигини ясанг:

1) $y = 3x - \dfrac{4}{x+1} - 2$;   2) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.

0.38. m параметрнинг қандай қийматларида

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + 9} - 5}{x^2 - 5x + 4}, & \text{агар } x \neq 4, \\ m, & \text{агар } x = 4, \end{cases}$$

функция $x=4$ нуқтада узлуксиз бўлади?

0.39. $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$ функциянинг $y = 6x - 5$ тўғри чизиққа параллел бўлган уринмасининг тенгламасини ёзинг.

0.40. $y = 3x^5 - 10x^3 + 3x$ функциянинг эгилиш нуқталари битта тўғри чизиқда ётишини кўрсатинг.

0.41. Мерганнинг нишонга теккизиш эҳтимоли 0,8. Мерган нишонга неча марта теккизган?

I бўлим. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

Нур-Султан шаҳрида жойлашган «Москва» иморатида параболани кўриш мумкин. Интегралдан фойдаланиб иморатнинг парабола билан чегараланган қисмининг юзини қандай топиш мумкинлигини шу бўлимнинг ўқув материалларини ўзлаштириш давомида ўрганасизлар

Сиз математик анализнинг энг қизиқарли мавзуларидан бири интеграл тушунчаси билан танишасиз. «Интеграл» тушунчаси «Функциянинг ҳосиласи ва дифференциал» тушунчалари билан чамбарчас боғлиқ. Интегрални қўлланиш соҳаси жуда кенг, чунки атроф муҳитнинг, фан ва техниканинг кўпгина соҳаларидаги математик моделлар дифференциал ва интеграл тенгламалар билан ифодаланади. Бундай жараённи келажакда ўргана олиш учун сиз интеграл бўлимини ўзлаштиришингиз керак, шу билан бир қаторда бу ўқувчининг математик мантиқий ўйлаш қобилиятини шакллантиради.

Бўлимга тегишли мавзулар:

1.1. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Интеграллар жадвали

Бу мавзуда сиз интеграл билан танишиб, оҳирида:

- бошланғич функция ва аниқмас интегралнинг таърифларини биласиз;
- аниқмас интегралнинг хоссаларини биласиз ва қўлланасиз;
- аниқмас интегралнинг асосий формулаларини биласиз ва улардан функциянинг интегралини топишда фойдаланасиз.

1.1.1 Бошланғич функция ва аниқмас интеграл

Биз берилган функциянинг ҳосиласини топишни яхши биламиз. Энди унга тескари амални кўриб чиқамиз. Берилган ҳосиласи бўйича функциянинг ўзини топайлик. Масалан, ҳосиласи $f(x) = 3x^2$ бўлган функцияни топиш керак дейлик. Ҳосиласи бўйича функциянинг ўзини топиш масалалари ***функцияни интеграллаш*** масаласи ёки қисқача ***интеграллаш*** деб аталади. Интеграл фанда кўп қўлланилади. Масалан, агар ҳосиладан фойдаланиб, жисмни ҳаракат қонуни бўйича ўзининг оний тезлигини аниқласак, интеграл ёрдамида жисмнинг ҳар бир нуқтадаги тезлигининг ўзгариш қонуни ёрдамида ҳаракат қонунини топамиз.

Таъриф. *I оралиқда исталган x учун $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда I оралиқда $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ функциянинг* ***бошланғич функцияси*** *деб аталади.*

Бошланғич функцияларнинг сони чексиз кўп. Масалан, $2x$ нинг бошланғич функциялари:

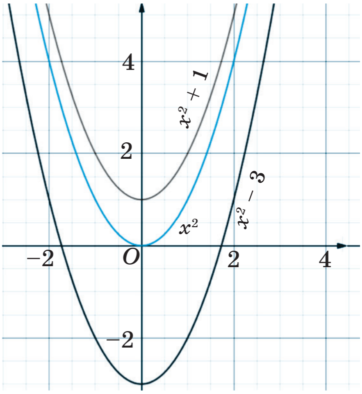
$$F_1 = x^2;$$

$$F_2 = x^2 + 1;$$

$$F_3 = x^2 - 3.$$

Чунки бу функцияларнинг барчасининг ҳосиласи $2x$ га тенг.

Теорема. *Агар қандайдир I оралиқда $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда исталган C ўзгармас катталик учун $F(x) + C$ функция ҳам $y = f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади ва $y = f(x)$ функциянинг I оралиқда бошқа кўринишда бошланғич функцияси бўлмайди.*



1.1-расм

▲ Агар **(*a*; *b*)** оралиқда $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда исталган ўзгармас C сони учун

$$(F\ (x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

тенглик бажарилади. Бундан $y = F(x) + \mathrm{C}$ функция $y = f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади.

Энди $y = F(x) + C$ кўринишдаги функциядан бошқа бошланғич функция бўлмаслигини кўрсатайлик. $y = f(x)$ функциянинг $y = F(x) + \mathrm{C}$ кўринишга келтирилмайдиган, бошқа $y = \Phi(x)$ кўринишдаги бошланғич функцияси мавжуд дейлик. $y = \Phi(x)$ ва $y = F(x)$ функциялар $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлганлигидан,

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Бундан $\Phi(x) - F(x) = C \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$. Бу $y = \Phi(x)$ нинг бошқа кўринишдаги бошланғич функцияси бўлсин деб қилган фаразимизга зид. Теорема исботланди. ■

Шундай қилиб, $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ функциянинг қандайдир бошланғич функцияси бўлса, $y = f(x)$ функциянинг бошқа бошланғич функциялари $y = F(x) + C$ кўринишда ёзилади, бунда C – исталган ўзгармас сон.

Гуруҳларда ишлаш

Содда функцияларнинг ҳосиласидан фойдаланиб, уларнинг бошланғич функциясини айтинг. Масалан, x^3 *нинг ҳосиласи* $3x^2$. *Бундан* $3x^2$ *нинг бошланғич функцияси, умумий ҳолда* $x^3 + C$ *кўринишда ёзилади.*

$y = f(x)$ функция билан унинг бошланғич функциялари қандайдир I оралиқда аниқланган бўлсин.

Таъриф. *Исталган $x \in I$ учун $y = f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялари тўплами шу функциянинг* ***аниқмас интеграли*** *деб аталади ва у $\int f(x)dx$ кўринишда белгиланади.*

Тарихга назар

$\int$ белгиси математикада интегрални белгилаш учун қўлланилади. Уни дастлаб XVII асрнинг оҳирларида дифференциалнинг, интеграл ҳисоблашларнинг асосчиларидан бири, немис математиги Лейбниц қўллади. $\int$ белгиси S ҳарфидан пайдо бўлган. У лотин тилидаги йиғинди сўзининг бош ҳарфидан олинган.

Агар **$(a; b)$** оралиқда $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ функциянинг қандайдир бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда таърифга кўра ушбу тенглик бажарилади:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

бунда $f(x)$ – интеграл остидаги функция, C – исталган ўзгармас катталик, dx – интеграллаш элементи.

Бундан юқорида кўрилган мисоллар учун

$$\int 3x^2dx = x^3 + C,$$

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

тенгликлар бажарилади.

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

https://www.youtube.com/watch?v=tZ_rMl6MOEI

$(x^{r+1})' = (r + 1)x^r$ $(r \in R)$ тенглик билан аниқмас интеграл таърифидан ушбу формула келиб чиқади:

$$\boxed{\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1 \;.}$$

Ушбу формула орқали даражаси −1 дан бошқа исталган даражали функциянинг интегралини топиш мумкин:

$y = x^r$ ($r \in R$, $r \neq -1$) кўринишдаги функцияни интеграллаш учун унинг даража кўрсаткичини 1 сонига орттириб, шу хосил бўлган даража кўрсаткичига тенг сонга бўлиб, хосил бўлган натижага ўзгармас сонни қўшиш етарли.

Бу формулани $y = \frac{1}{x}$ функцияга қўллаш мумкин эмас, чунки $\int x^{-1}dx = \frac{x^0}{0} + C$. Бу аниқланмаган.

Мавзуга доир мисоллар кўриб чиқайлик.

1-мисол. $\int x^3dx$ интегрални топайлик.

▲ $\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$. x^3 даражали функцияни интеграллаш учун кўрсатилган формулага кўра амаллар бажарамиз.

Функциянинг даражасини 1 га орттирамиз

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C \longleftarrow \text{Интеграл ўзгармасини қўшамиз}$$

Даражага тенг сонга бўламиз

Интеграл ўзгармасини қўшишни унутиб кетманг!

Мисолнинг жавобини текшириш учун интегралдан ҳосила олинади. Натижада интеграл остидаги функция чиқиши керак.

Текшириш:

$$\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 .$$ ■

2-мисол. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$ интегрални топайлик.

▲ Берилган интегрални $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx$ кўринишда ёзиб, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ формуладан фойдалансак,

$$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C \cdot$$

Баъзи бир функцияларнинг интегралини топиш учун аввал функцияни содда кўринишга келтириб олиш керак. Текшириш:

$$\left(-\frac{1}{2x^2}+C\right)' = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' + 0 = \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(-2x^{-3}\right) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}\cdot$$ ■

3-мисол. $\int 7dx$ интегрални топиш керак:

▲ $x^0 = 1$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\int 7dx = \int 7\cdot x^0 dx = 7\cdot\frac{x^{0+1}}{0+1} + C = 7x + C\,.$$

Ўзгармас k сонининг интеграли ҳар доим kx+C га тенг: $\int kdx = kx + C$. Масалан, $\int 2dx = 2x + C$; $\int 2018dx = 2018x + C$; $\int \pi dx = \pi x + C$. ■

1.1.2. Аниқмас интегралнинг хоссалари

1-хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгисининг олдига чиқариш мумкин:*

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx.$$

2-хосса. *Йиғиндининг интеграли қўшилувчилар интегралларининг йиғиндисига тенг:*

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f\,(x)dx + \int g(x)dx.$$

Бир неча қўшилувчилардан ташкил топган функциянинг интегралини топиш учун ҳар бир қўшилувчининг интегралларини алоҳида-алоҳида ҳисоблаб, қўшилади.

1-мисол. $\int\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}\right)dx$ интегрални аниқлайлик.

▲ Йиғиндининг интеграли интегралларнинг йиғиндисига тенг:

$$\int\left(3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}\right)dx = \int 3x^2dx - \int\frac{2}{\sqrt{x}}dx + \int\frac{7}{x^2}dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} -$$

$$-2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + 7\int x^{-2}\,dx = x^3 - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 7\frac{x^{-1}}{-1} + C = x^3 - 4\sqrt{x} - \frac{7}{x} + C\,.$$ ■

Берилган интегрални алоҳида қўшилувчиларга ажратамиз

$$\int\left(3x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{7}{x^2}\right)dx=\overbrace{\int 3x^2dx-\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{7}{x^2}dx}=$$

$$=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+7\int x^{-2}\,dx=x^3-2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+7\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

Ҳар бир қўшилувчининг интегралини топамиз

$$=x^3-4\sqrt{x}-\frac{7}{x}+C.$$

Интеграл ўзгармасини фақат бир марта қўшамиз

Интеграл ўзгармасини фақат бир мартагина қўшамиз, чунки ўзгармас катталикларнинг йиғиндиси қандайдир бир ўзгармас катталикни беради.

2-мисол. ▲ Агер $y'(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^{\frac{3}{2}}x$ бўлса, $y(x)$ ни топиш керак. $y(x)$ функция $y'(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлганлигидан, $y(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3-4x^{\frac{3}{2}}x\right)dx$. Йиғиндининг интеграли алоҳида интегралларнинг йиғиндисига тенг:

$$y(x)=\int\frac{1}{2}x^3dx-4\int x^{\frac{3}{2}}xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-4\int x^{2,5}dx=$$

$$=\frac{x^4}{8}-4\frac{x^{3,5}}{3,5}+C=\frac{x^4}{8}-\frac{8x^3\sqrt{x}}{7}+C\,.\ ■$$

Асослари бир хил бўлган даражаларни кўпайтирганда даража кўрсаткичларининг қўшилишини эътиборга олиш керак, шу сабабли бундан $x^{\frac{3}{2}}x=x^{2,5}$ *бўлиши инобатга олинган.*

3-мисол. $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$ интегрални топайлик:

▲ Квадрат қавсни очиб, маҳражини суратига ҳадлаб бўламиз:

$$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{2x}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{Интеграл остидаги}\\ \text{функцияларни бир хил}\\ \text{даражага келтирамиз}\end{array}\right|=\int x^{1,5}dx-2\int x^{0,5}dx\ +\int x^{-0,5}dx\ =$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{Қўшилувчиларнинг}\\ \text{интегралларини}\\ \text{топамиз}\end{array}\right|=\frac{x^{2,5}}{2,5}-2\frac{x^{1,5}}{1,5}+\frac{x^{0,5}}{0,5}+C=$$

$$=\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}-\frac{4x\sqrt{x}}{3}+2\sqrt{x}+C\,.\ ■$$

Баъзи бир интегралларни топганда аввал функцияни шакл алмаштиргандан кейин уни алоҳида қўшилувчиларга ажратиб олиб, даража кўринишига келтириш лозим.

Бу мавзуга кейинроқ 3.5-параграфда қайта тўхталамиз.

1.1.3. Интеграллар жадвали

Аниқмас интегралнинг таърифига кўра ҳосилалар жадвали ёрдамида интеграллар жадвалини тузамиз.

Ҳосилалар жадвали		**Интеграллар жадвали**
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\Rightarrow$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\neq-1$
$(\sin x)' = \cos x$	$\Rightarrow$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\Rightarrow$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$
$(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C$

Интеграллар жадвалидан фойдаланиб функциянинг интегралларини ҳисоблайлик:

1-мисол. 1) $f(x)=2\sqrt{3}\sin x$; 2) $f(x)=x^4-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sin^2 x}$ функциянинг бошланғич функциясининг умумий кўринишини топиш керак.

▲ 1) $F(x)=2\sqrt{3}(-\cos x)+C=-2\sqrt{3}\cos x+C$;

2) $F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\mathrm{ctg}x+C=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\mathrm{ctg}x+C=$

$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-\mathrm{ctg}x+C.$$ ■

2-мисол: 1) $\int(2\sin x - 3\cos x)dx$; 2) $\int\frac{\cos 2y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy$ интегрални аниқлайлик.

▲ 1) $$\int(2\sin x-3\cos x)dx=\left|\begin{array}{c}\text{Йиғиндининг интеграли}\\ \text{алоҳида интеграллар-}\\ \text{нинг йиғиндисига тенг}\end{array}\right|=\int 2\sin x\,dx-$$

$$-\int 3\cos x\,dx=\left|\begin{array}{c}\text{Агар функциянинг олдида коэффици-}\\ \text{ент бўлса, коэффициентни интеграл}\\ \text{белгисининг олдига чиқариш мумкин}\end{array}\right|=$$

$$=2\int\sin x\,dx-3\int\cos x\,dx=\left|\begin{array}{c}\text{Интеграллар}\\ \text{жадвалидан}\end{array}\right|=-2\cos x-3\sin x+C.$$

Керак бўлганда тригонометрик формулалардан фойдаланиш керак.

2) $$\int\frac{\cos 2y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy=\left|\begin{array}{c}\text{Иккиланган аргу-}\\ \text{мент формуласи}\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{array}\right|=\int\frac{\cos^2 y-\sin^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy=$$

$$=\int\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy-\int\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y\cdot\cos^2 y}dy=$$

$$=\int\frac{1}{\sin^2 y}dy-\int\frac{1}{\cos^2 y}dy=-\mathrm{ctg}y-\mathrm{tg}y+C.$$ ■

Бошланғич функциядан татбиқий масалаларни ечишда қўллашга мисол келтирайлик.

3-мисол. Коптоқ 80 м баландликдан 20 м/с бошланғич тезлик билан юқорига томон улоқтирилди (1.2-расм). Эркин тушиш тезланиши 10 м/с^2 деб олиб, қуйидаги топшириқларни бажариш керак:

1) коптокнинг ер сиртидан узоқлашиш масофсининг вақтга боғлиқ ўзгаришини кўрсатувчи $h = h\ (t)$ функцияни;

2) коптокнинг ерга тушиш вақтини.

▲ Коптокнинг ер сиртидан узоқлашиш масофасини вақтга боғлиқ ўзгаришини кўрсатувчи $h = h(t)$ функцияни аниқлайлик. Бошланғич $t = 0$ вақт моментида коптоқ 80 м баландликда бўлди: $h(0)=80$. Ҳосиланинг механик маъносига мос равишда,

$$v(t) = h'(t),\quad a(t) = v'(t).$$

Коптоқ юқорига томон $t = 0$ вақт моментида 20 м/с бошланғич тезлик билан улоқтирилди, шу сабабли $v(0) = h'(0) = 20$. Эркин тушиш тезланиши коптокнинг юқорига кўтарилиш йўналишига тескари йўналган: $g = -10$ ва $g = v'(0) = h''(0) \Rightarrow h''(0) = -10$. Шундай қилиб, қуйидаги тенгламалар системасини оламиз:

$$\begin{cases} h(0) = 80, \\ h'(0) = 20, \\ h''(0) = -10. \end{cases}$$

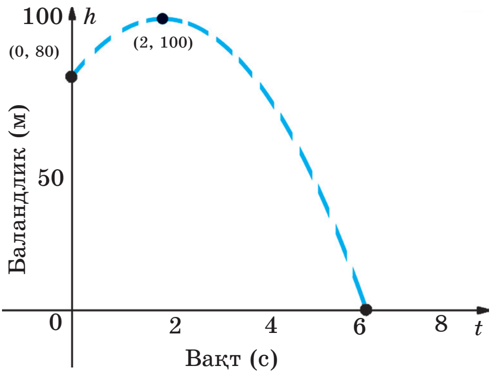
$h'(t)$ функция – $h''(t)$ функциянинг бошланғич функцияси. Бунда $h'(t) = \int h''(t)dt = \int(-10)\,dt = -10t + C_1$. Интеграл ўзгармасининг C_1 қийматини $h'(0) = 20$ катталикни эътиборга олиб топамиз:

$$h'(0) = -10 \cdot 0 + C_1 = 20 \Rightarrow C_1 = 20 \Rightarrow h'(t) = -10t + 20.$$

$h(t)$ функция $h'(t)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлганлигидан, $h(t) = \int h'(t)dt = \int (-10t + 20)dt = -5t^2 + 20t + C_2$.

C_2 – интеграл ўзгармасининг қиймати. Уни $h(0) = 80$ шартдан аниқлаймиз: $h(0) = -5 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + C_2 = 80 \Rightarrow C_2 = 80 \Rightarrow h(t) = -5t^2 + 20t + 80$. Биз коптокнинг учиш баландлигини кўрсатувчи функцияни топдик. Энди коптокнинг қанча вақтдан кейин ерга тушишини топайлик. Коптоқ ерга тушганда унинг ергача бўлган масофаси нолга тенг:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 80 = 0.$$



1.2-расм

Энди тенгламани ечамиз: $D = 20^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 80 = 2000$. Бунда $t > 0$ эканлигини эътиборга олиб,

$$t = \frac{-20 + \sqrt{2000}}{-10} \approx 6{,}472 \text{ с.} \blacksquare$$

1. Берилган функциянинг бошланғич функцияси деганда нимани тушунасиз? Мисол келтиринг.
2. Аниқмас интеграл деганда нимани тушунасиз?
3. Аниқмас интегрални топиш қоидаларини келтириб чиқаринг.
4. Жадвалдаги интеграл формулаларини исботланг, ёддан ёзиб кўринг.

Мисоллар

А

1.1. Берилган функциянинг бошланғич функциясини оғзаки топинг:

1) $f(x) = 8x^7$; 2) $f(x) = 4x^3$; 3) $f(x) = 8x + 1$;
4) $f(x) = -5x^4$; 5) $f(x) = -11 + \sin x$; 6) $f(x) = 5x - 4$;
7) $f(x) = \frac{3}{5}x^2$; 8) $f(x) = 5x\sqrt{x}$; 9) $f(x) = 4x^3 - 5\cos x + 7x$;
10) $f(x) = \frac{1}{6}x^3$; 11) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$;
13) $f(x) = x^3 - 3x^5 + \sin x$; 14) $f(x) = 5 - \cos x$;
15) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 5$; 16) $f(x) = 3 - 4x + \sin x$;
17) $f(x) = 2 - 6x^4 + 3x$; 18) $f(x) = 3 + \sin x$;
19) $f(x) = 1 - 2\cos x$; 20) $f(x) = 4x^6 - 5x^3 + 3$.

1.2.

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

формуладан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг интегралини оғзаки топинг:

1) $-4x^{-5}$; 2) x^{-4}; 3) $x^{\frac{1}{2}}$;
4) $x^{\frac{1}{3}}$; 5) $24\ x^{-25}$; 6) $-\frac{1}{4}x^{-3,5}$.

1.3. Берилган $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлишини кўрсатинг:

1) $F(x) = 2\sqrt{x}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
2) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + x$; $f(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + 1$;
3) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3x + 1$; $f(x) = x^3 + 3$;
4) $F(y) = \cos 5y + y$; $f(y) = -5\sin 5y + 1$;
5) $F(z) = \frac{1}{z-1}$; $f(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$.

1.4. Берилган функциянинг бошланғич функциясини аниқланг:

1) $f(x) = 2x - 1$;
2) $f(x) = 5x^3 - 4$;
3) $f(x) = 7x^2 - 3\cos x - 3$;
4) $f(x) = 2 - \dfrac{3}{\cos^2 x}$;
5) $f(x) = (5x - 4)^3$;
6) $f(x) = 7\sin x - 3x^2 - 3\cos x - 3$.

1.5. Ҳосила олиш орқали ушбу тengликларнинг бажарилишини текширинг:

1) $\int\left(-\dfrac{6}{x^4}\right)dx = \dfrac{2}{x^3} + C$;
2) $\int\left(8x^3 + \dfrac{1}{2x^2}\right)dx = 2x^4 - \dfrac{1}{2x} + C$;
3) $\int(x-4)(x+4)\,dx = \dfrac{x^3}{3} - 16x + C$.

1.6. Аниқмас интегрални топиб, натижани ҳосила ёрдамида текширинг:

1) $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$;
2) $\int 7x^{\frac{4}{3}}\,dx$;
3) $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

1.7. Жадвални тўлдиринг:

Дастлабки интеграл		Шакл алмаштиринг		Интеграл-ни топинг		Соддалаштиринг
$\int\left(\dfrac{7}{x^2} - x + 1\right)dx$						
$\int\dfrac{x^5 - 3}{x^2}\,dx$						
$\int\dfrac{x^3 - 8}{2 - x}\,dx$						

1.8. Берилган ҳосила бўйича $f(x)$ функцияни топинг:

1) $5x + 3x^{-4}$;
2) $4x(x^2 - 1)$;
3) $(x - 3)^2$;
4) $x\left(6x + \dfrac{4}{x^4}\right)$;
5) $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2$;
6) $x\left(3x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$;
7) $6\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$;
8) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - 7x^2\sqrt{x}$;
9) $5\left(\sqrt{x}\right)^3 - \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$.

Интеграллар жадвалидан фойдаланиб ҳисобланг **(1.09—1.10):**

1.9. 1) $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; 2) $\int (\sin x + 3\cos x)\,dx$;

3) $\int (x^3 - \sin x)\,dx$; 4) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3\cos x}{2}\right)dx$;

5) $\int \left(3\cos x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; 6) $\int \left(6x^5 - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$.

1.10. 1) $\int x^7 dx$; 2) $\int x^3 \sqrt[4]{x}dx$; 3) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - \sqrt[3]{x} + 1}{x\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}dx$; 5) $\int \left(8\sin x - \frac{9}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $\int \left(6\cos x - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 8) $\int 5\sqrt{x}dx + \int \frac{10dx}{\cos^2 x}$; 9) $\int \frac{5dx}{\sin^2 x} - \int \frac{6}{x\sqrt{x}}dx$.

1.11. $y = f(x)$ функциянинг M нуқта орқали ўтувчи бошланғич функциясини топинг:

1) $f(x) = 6x^2 - 2x - 5$, $M(1;-6)$; 2) $f(x) = \sqrt{x}, M(1;1)$;

3) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x},\ M(1;1,5)$.

▲ 1) Бошланғич функцияни топиш учун аниқмас интегрални аниқлайлик:

$$F(x) = \int (6x^2 - 2x - 5)dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - x^2 - 5x + C =$$

$$=2x^3 - x^2 - 5x + C.$$

$M(1; -6)$ нуқта $F(x)$ функциянинг графигига тегишли. У ҳолда , $F(1) = -6$, яъни $2 \cdot 1^3 - 1^2 - 5 \cdot 1 + C = -6 \Rightarrow C = -2$. Бундан $F(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$. ■

1.12. $f'(x)$ ҳосила бўйича M нуқта орқали ўтувчи $y = f(x)$ функцияни топинг:

1) $f'(x) = 2x - 1$, $M(2;3)$; 2) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $M(1;2)$;

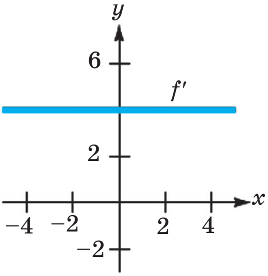
3) $f'(x) = \frac{6}{x^3}$, $M(1;4)$; 4) $f'(x) = 3 - x^2$, $M(6;1)$;

5) $f'(x) = 6x^2 + 12\sqrt{x}$, $M(4;10)$.

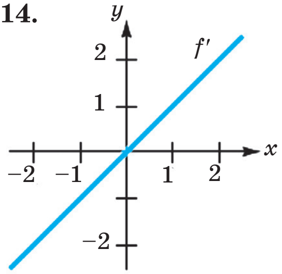
B

1.13—1.16-мисолларда $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласи $y = f'(x)$ нинг графиги тасвирланган. $y = f(x)$ функция графигининг иккита турини кўрсатинг. Ҳосиланинг графиги бўйича $y = f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини аниқланг:

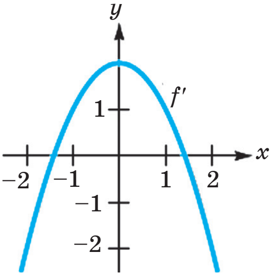
1.13.



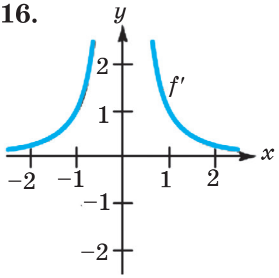
1.14.



1.15.



1.16.



1.17. $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини топинг:

1) $f\left(x\right) = 1,5x^2 - \dfrac{4}{x^2}$; 2) $f\left(x\right) = \dfrac{4}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4} + 5x^{\frac{3}{2}}$.

1.18. Интегрални топинг:

1) $\int \dfrac{y^6 + 8y^4}{y} dy$; 2) $\int \left(\sqrt{y} + 1\right)\left(\sqrt{y} - 1\right) dy$.

1.19. $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлишини исботланг:

1) $F(x) = 7x^5 + 5\cos^2 3x - 2$; $f(x) = 35x^4 - 15\sin 6x$;

2) $F(x) = 6x^4 + 5\sin^2 2x + 5$; $f(x) = 24x^3 + 10\sin 4x$.

1.20. Интегрални ҳисобланг:

1) $\int \dfrac{z^3 + 2z}{z\sqrt{z}} dz$; 2) $\int \left(z + 2\right)^2 \left(z^2 + 2\right) dz$.

1.21. Интеграл остидаги функцияни шакл алмаштириб, интегрални топинг:

1) $\int\left(3x-5\sqrt{x}\right)^2dx$; 2) $\int\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)^2dx$;

3) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)dx$; 4) $\int\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$.

Ҳисобланг **(1.22—1.23):**

1.22. 1) $\int\left(1+\frac{3}{2t^2}\right)dt$; 2) $\int t\left(\frac{2}{t}+\frac{t}{2}\right)dt$.

1.23. 1) $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}}{x}dx$; 2) $\int\frac{10x^2+3x+4}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int\frac{(5x-3)^2}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}dx$.

1.24. $f(x)$ функция учун графиги A нуқта орқали ўтувчи бошланғич функцияни топинг:

1) $f(x)=\frac{\cos2x}{\cos x+\sin x}$, $A\left(\frac{5\pi}{4};\sqrt{2}\right)$;

2) $f(x)=\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}$, $A\left(\frac{7\pi}{4};2\sqrt{2}\right)$.

1.25. Тригонометрия формулаларидан фойдаланиб ҳисобланг:

1) $\int\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}d\alpha$; 2) $\int\mathrm{tg}^2x\,dx$;

3) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^4 2x+2\sin^2 2x\cos^2 2x+\cos^4 2x}$; 4) $\int\frac{1}{2}\sin^2\frac{y}{2}dy$.

Татбиқий топшириқ

1.26. Копток 6 м/с бошланғич тезлик билан 2 м баландликдан юқорига улоқтирилди. Эркин тушиш тезланиши 10 м/с^2 деб олиб,

а) коптокнинг кўтарилиш баландлигини вақтга боғланишини кўрсатувчи $h(t)$ функцияни;

б) коптокнинг ерга тушиш вақтини;

в) коптокнинг кўтарилиш баландлигини топинг.

1.27. Ҳисобланг:

1) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 1}\,dx$; 2) $\int (x+3)^7\,dx$;

3) $\int \sqrt{x-3}\,dx$; 4) $\int \frac{x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}\,dx$.

1.28. Берилган шартларни қаноатлантирувчи $y = f(x)$ функцияни аниқланг:

1) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, бунда $f(9) = 1$;

2) $f''(x) = 6$; $f'(-1) = 2$, бунда $f(-1) = 0$;

3) $f''(x) = 12x^2 + 2$, бунда $(1;1)$ нуқтадан ўтувчи уринманинг бурчак коэффициенти 3 га тенг;

4) $f'(x) = x^2$ ва $y = 4x + 7$ тўғри чизиқ – $y = f(x)$ функция графигининг уринмаси.

1.29. Берилган бошланғич функция бўйича дастлабки функцияни аниқланг:

1) $F(x) = \frac{x^7}{7} + 2\cos 2x$; 2) $F(x) = \mathrm{arctg}^2 3x$;

3) $F(x) = \mathrm{tg}^3 2x - \cos 5x$; 4) $F(x) = \cos\sqrt{x} - \sin\left(x^2\right)$.

C

1.30*. $y = f(x)$ функция учун графиги M нуқта орқали ўтувчи бошланғич функцияни топинг:

1) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{агар } x < 0, \\ 1, & \text{агар } x \geqslant 0, \end{cases}$ $M\ (0;0)$;

2) $f(x)=\begin{cases}1, \text{агар } x<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \text{агар } x\geqslant 1,\end{cases}$ M (4;0).

▲ Бошланғич функцияни топиш учун берилган функциянинг аниқмас интегралини аниқлайлик:

$$F(x)=\begin{cases}\int \cos x dx, \text{ агар } x<0,\\ \int 1dx, \text{ агар } x\geqslant 0,\end{cases} = \begin{cases}\sin x + C_1, \text{агар } \ x<0,\\ x+C_2, \text{агар } \ x\geqslant 0.\end{cases}$$

$M(0;\ 0)$ нуқта $F(x)$ функциянинг графигига тегишли. У ҳолда, $F(0) = 0$, яъни $\begin{cases}\sin 0 + C_1 = 0,\\ 0 + C_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1 = 0,\\ C_2 = 0.\end{cases}$. Бундан

$$F(x)=\begin{cases}\sin x + C_1, \text{ агар } \ x<0,\\ x+C_2, \text{агар } \ x\geqslant 0.\end{cases}$$ ■

1.31. Исталган нуқтадан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $\left(3-\dfrac{x}{5}\right)$ га тенг ва $M(0;7)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

1.32. Исталган нуқтадан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти 1) уриниш нуқтасининг абсциссасига; 2) уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенг ва $M(2;1)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

1.33. Исталган нуқтада ўтказилган уринманинг абсциссалар ўқига паллел ва $M(2;1)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

1.34. Исталган нуқтага ўтказилган уринма абсциссалар ўқи билан 45° бурчак хосил қилувчи ва $M(2;1)$ нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

1.35. Иккита жисм бир вақтда, битта нуқтадан бир хил йўналишда тўғри чизиқ бўйича ҳаракатлана бошлади. Биринчисининг тезлиги $v(t) = = 3t^2 - 6t$, иккинчисиники эса $v(t) = 10t + 20$. Қанча вақтдан кейин ва бошланғич нуқтадан қандай узоқликда бу иккита жисм учрашади? (Тезлик м/с ларда ўлчанади).

Татбиқий топшириқлар (1.36—1.37):

1.36. Массаси 10 кг бўлган жисм F = 6Н кучнинг таъсирида ҳаракатланади. Дастлабки вақт моментида (t=0) жисм координаталар бошида бўлган. Жисмнинг ҳаракат қонунини топинг.

▲ Жисмнинг $s(t)$ ҳаракат қонунини аниқлаш учун тезланишни топиш керак.

Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра $F = ma \Rightarrow a = \frac{6}{10}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

$$a = v'(t) \Rightarrow v(t) = \int a dt = \frac{3}{5}t + C_1 ;$$

$$s(t) = \int v(t)dt = \int\left(\frac{3}{5}t + C\right)dt = \frac{3}{10}t^2 + C_1 t + C_2 .$$

Дастлабки вақт моментида (t=0) жисм координаталар бошида бўлгани учун,

$$s(0) = 0 \Rightarrow \frac{3}{10}\cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 .$$

Бундан $s(t) = \frac{3}{10}t^2 + C_1 t$. ■

1.37. Нур-Султан шаҳридаги «Байтерек» монументини пойдевори билан қўшиб ҳисоблаганда баландлиги 105 метр. Шу баландликка етиш учун ердан отилган салютнинг бошланғич тезлиги қандай бўлиши керак? Солют снарядининг массаси ҳисобга олинмайди (g ≈ 10 м/с^2).

1.38. Исталган тоқ функциянинг бошланғич функцияси жуфт бўладими? Аксинча исталган жуфт функциянинг бошланғич функцияси тоқ бўладими?
Жавобларингизни мисоллар билан асослаб, аниқ хулоса чиқаринг.

Такрорлашга доир машқлар

1.39. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = (x - 1)^2 \sin x$; 2) $y = \frac{\cos 2x}{1 - x^2}$;

3) $y = \mathrm{arctg}(x + 1)$; 4) $y = (x^2 - 2x + 3) \cdot \sin 2x$.

1.40. $f(x)$ функциянинг графигига x_0 нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; x_0 – графикнинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасини;

2) $f(x) = (7 - 3x)^3$, x_0 – функция графигининг $y = 1$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини;

3) $f(x) = (4x + 3)^5$, x_0 – функция графигининг $y = -1$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини;

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$, $x_0 = 1$.

1.41. Тенгламани ечинг:

1) $2\cos x = 3\mathrm{tg} x$; 2) $\sqrt{3}\sin 3x = 2\cos x \cdot \sin 3x$.

1.2. Интеграллаш усуллари

Бу мавзуда сиз интеграллаш усуллари билан танишиб, мавзунинг оҳирида

- ўзгарувчини алмаштириш усулини;
- бўлаклаб интеграллаш усулини ўзлаштирасиз.

1.2.1. Ўзгарувчини алмаштириш орқали интеграллаш

Бу усул мураккаб функцияларни дифференциаллаш қоидасига суянади.

Дифференциалланувчи $y = f(x)$ ва $x = g(t)$ функциялар учун мураккаб $y = f(g(t))$ функция аниқлансин ва $\int f(x)dx = F(x) + C$ тенглик бажарилсин.

У ҳолда
$$\int f[g(t)] \cdot g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \,\Big|_{x = g(t)} \quad (1)$$
тенглик бажарилади.

Бу тенглик қуйидагича қўлланилади:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \left| \begin{matrix} u = g(x), \\ du = g'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(u)du =$$

$$= F(u)\Big|_{u=g(x)} = F(g(x)) + C.$$

Ўзгарувчини $u(t) = kx + b$ чизиқли тенглама билан алмаштирсак, $u'(t) = k$ эканлигидан,

$$\boxed{\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C\,.} \qquad (2)$$

Демак, бошланғич функцияни чизиқли функциянинг бурчак коэффициентига бўлиш етарли.

1-мисол. 1) $f(x)=\cos\left(\sqrt{5}x+3\right)$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{(8-5x)^7}$;

3) $f(x)=3\sqrt{5-2x}$; 4) $f(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)+7x^5-4$ функциянинг

бошланғич функциясини топиш керак.

▲ 1) $f(x)=\cos\left(\sqrt{5}x+3\right)$. Бунда $k=\sqrt{5}$, демак, (2) формуладан $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{5}x+3\right)+C$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{(8-5x)^7}$. Берилган функцияни $f(x) = (-5x + 8)^{-7}$ кўринишда ёзамиз. $k = -5$ эканлигидан,

$$F(x)=-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-5x+8)^{-6}+C=\frac{1}{30(8-5x)^6}+C\,.$$

3) $f(x)=3\sqrt{5-2x}$. $k = -2$. У ҳолда,

$$F(x)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-(5-2x)^{\frac{3}{2}}+C=-\sqrt{(5-x)^3}+C\,.$$

4) $f(x)=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)+7x^5-4$. $k = 3$, демак,

$$F(x)=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+7\frac{x^6}{6}-4x+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{7}{6}x^6-4x+C. \ ■$$

2-мисол.

$$▲\ \int x\sqrt{x-3}dx = \left|\begin{array}{l} x-3=t; \\ x=t+3, \\ dx=dt. \end{array}\right| = \int (t+3)\sqrt{t}dt = \int\left(t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}}\right)dt =$$

$$= \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}+2t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C.\ ■$$

3-мисол.

$$▲\ \int \sin^6 x\cos x dx = \int \sin^6 x d\sin x = |\sin x = t| =$$

$$= \int t^6 dt = \frac{t^7}{7}+C = \frac{\sin^7 x}{7}+C.\ ■$$

4-мисол.

$$▲\ \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = |\cos x = t| =$$

$$= -\int\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}+C.\ ■$$

1.2.2. Бўлаклаб интеграллаш усули

Бизга $u(x)$ ва $v(x)$ дифференциалланувчи функциялар берилсин. Уларнинг кўпайтмасининг дифференциали қуйидагича аниқланади:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини интеграллсак,

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

$\int d(uv) = uv + C$, бундан $uv + C = \int udv + \int vdu$.

Демак, $\int udv = uv - \int vdu + C$.

C ўзгармасни интегралнинг таркибига киритсак,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Бу формула udv ифодани интеграллашни vdu ифодани интеграллашга олиб келади. Оҳирги ифодани интеграллаш баъзи ҳолларда осон. Иитегрални ушбу формула ёрдамида топиш ***бўлаклаб интеграллаш*** усули деб аталади.

5-мисол.

$$▲ \int x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \sin x dx, \\ du = dx, v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C. \;■$$

6-мисол.

$$▲ \int x\cos 3x dx = \begin{vmatrix} u = x,\ dv = \cos 3x dx, \\ du = dx, v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int\frac{1}{3}\sin 3x dx =$$

$$= \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C. \;■$$

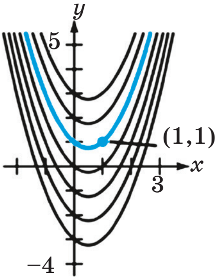
1. Ўзгарувчини алмаштириш формуласини ёзиб, унинг маъносини тушунтиринг.
2. Бўлаклаб интеграллаш формуласини ёзиб, унинг маъносини тушунтиринг.

Мисоллар

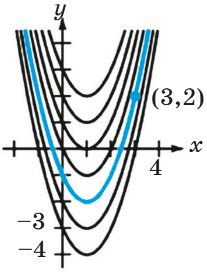
А

1.42. ***f(x)*** нинг берилган нуқта орқали ўтувчи бошланғич функциясини топинг:

1) $f(x) = 2x - 1$; 2) $f(x) = 2(x - 1)$.



1.3-расм



1.4-расм

1.43. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$ формуладан фойдаланиб берилган функцияларнинг интегралларини топинг:

1) $f(x) = 10\cos 9x$; 2) $f(x) = 7\sin 4x$; 3) $f(x) = (2x - 3)^6$;

4) $f(x) = (7x - 9)^5$; 5) $f(x) = 2\cos 3x$; 6) $f(x) = (3x - 8)^5$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 4x}$; 8) $f(x) = (3x - 1)^3$; 9) $f(x) = 1 + \cos 3x$.

Интегралларни ҳисобланг **(1.44—1.46)**:

1.44. 1) $\int (3x+2)^3\,dx$; 2) $\int \left(\dfrac{x}{2}-1\right)^5 dx$; 3) $\int \dfrac{dx}{(2x-1)^3}$; 4) $\int \dfrac{dx}{(3x+1)^4}$.

1.45. 1) $\int (2 - 9x)^6 dx$; 2) $\int (7 + 5x)^{13} dx$; 3) $\int 6\left(\dfrac{x}{3}+1\right)^5 dx$.

1.46. 1) $\int \dfrac{dx}{\cos^2(2x-1)}$; 2) $\int \sin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)dx$; 3) $\int \sin(3 - 4x)\,dx$;

4) $\int \cos(3x - 2)\,dx$; 5) $\int \dfrac{dx}{\sin^2(x-4)}$; 6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2(4x+4)}$;

7) $\int 3\cos 3x dx$.

1.47. $f(x)$ нинг бошланғич функциясини аниқланг:

№	Функция	Берилган вариантлар орасидан бошланғич функцияни кўрсатинг		
		A	B	C
1	$f(x) = 7x^2 - 3\cos x - 3$	$\dfrac{7x^3}{3} - 3\sin x - 3x + C$	$14x - 3\sin x - 3x$	$\dfrac{7x^3}{3} - 3\cos x - 3x + C$
2	$f(x) = 5x^3 - 4$	$\dfrac{5}{4}x^4 - 4x + C$	$\dfrac{5}{4}x^4 - 4x$	$5x^4 - x + C$
3	$f(x) = (5x - 4)^3$	$\dfrac{5}{2}x^2 - 4x + C$	$\dfrac{(5x-4)^4}{5} + C$	$\dfrac{(5x-4)^4}{20} + C$
4	$f(x) = 7\sin 7x - 3x^2$	$7\cos x - x^3 + C$	$-\cos 7x - x^3 + C$	$49\cos x - 6x$
5	$f(x) = 10\cos 9x$	$\dfrac{10}{9}\sin 9x$	$90\sin 9x + C$	$\dfrac{10}{9}\cos 9x + C$

1.48. Даражани пасайтириш формуласидан фойдаланиб интегралларни аниқланг:

1) $\int \cos^2 x dx$; 2) $\int \sin^2 x dx$; 3) $\int \sin^2 2x dx$; 4) $\int \cos^2 2x dx$.

▲ 3) Интеграл остидаги ифодани даражани пасайтириш формуласи бўйича шакл алмаштиргандан кейин қўшилувчиларнинг интегралларини алоҳида ҳисобласак,

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$ ■

1.49. Интеграл остидаги ифодани шакл алмаштириб, интегралларни аниқланг:

1) $\int(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$; 2) $\int(\mathrm{tg}^2 x + 1)dx$;

3) $\int(\mathrm{ctg}^2 x + 1)dx$; 4) $\int \cos x \sin x dx$.

1.50*. Бўлаклаб интеграллаш усули билан аниқланг:

1) $\int x\cos x dx$; 2) $\int x\sin 2x dx$; 3) $\int x\cos 2x dx$.

B

1.51. $f(x)$ учун бошланғич функциянинг умумий кўринишини топинг:

1) $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2(4x-1)} + 2\sin(3-2x) + 5$;

2) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2(3x-2)} + 5\cos(7-4x) - 2$.

1.52. Интеграл остидаги функцияни соддалаштириб, интегралларни аниқланг:

1) $\int\left(\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)dx$;

2) $\int \sin 2x \sin 6x dx$;

3) $\int \cos 3x \cos 5x dx$; 4) $\int \sin 4x \cos 3x dx$;

5) $\int 12\cos\left(\dfrac{\pi}{8} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - x\right)dx$.

▲ 3) Интеграл остидаги ифодани

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

формула ёрдамида шакл алмаштиргандан кейин йиғиндининг интеграли алоҳида интегралларнинг йиғиндисига тенг деган қоидадан фойдаланамиз:

$$4)\ \int \sin 4x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin x)dx = \int \frac{1}{2}\sin 7x dx +$$

$$+ \int \frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos x}{2} + C.$$ ■

1.53. Интегрални топинг:

1) $\int \left(1+\frac{x}{2}\right)^8 dx$; 2) $\int \frac{ydy}{\sqrt{3y^2+1}}$;

3) $\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{\left(1-5x^3\right)^3}}$; 4) $\int \frac{6x^2dx}{\sqrt{\left(2x^3-1\right)^2}}$.

▲ $$3)\ \int \frac{3x^2dx}{\sqrt{(1-5x^3)^3}} = \left|x^3 = t, \quad 3x^2dx = dt\right| =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{(1-5t)^3}} = \int (1-5t)^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{-5}\,\frac{(1-5t)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{5\sqrt{1-5t}} + C = \frac{2}{5\sqrt{1-5x^3}} + C.$$ ■

1.54*. Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб интегрални топинг:

1) $\int x(x+1)^3 dx$; 2) $\int (2x+1)\sqrt{x-5}dx$;

3) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

1.55. Интегрални қулай усулда ҳисобланг:

1) $\int x(2x-3)^8dx$; 2) $\int x(1-2x)^5dx$;

3) $\int \frac{1-x^3}{1-x}dx$; 4) $\int \frac{x^5-3}{x^2}dx$.

1.56. Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб интегрални топинг:

1) $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx$; 2) $\int \sin x\sqrt{\cos x}\,dx$;

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; 4) $\int \frac{\operatorname{tg} x+1}{\cos^2 x}dx$.

1.57. Интегрални топинг:

1) $\int \sin^3 x dx$; 2) $\int \cos^3 x dx$;

3) $\int \frac{\text{ctg}^4 x}{\sin^2 x} dx$; 4) $\int 7\frac{\text{tg}^6 x}{\cos^2 x} dx$.

▲ 1) $\int \sin^3 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) dx =$

$= \left|\cos x = t, -\sin x dx = dt\right| = \int -(1 - t^2) dt = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C =$

$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$. ■

1.58. Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб интегрални топинг:

1) $\int \frac{x+3}{(3x-4)^{3/2}} dx$; 2) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$;

3) $\int \frac{x^2}{(x-1)^4} dx$.

1.59. Интегралларни топинг:

1) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt[3]{3x+12}}$; 2) $\int \frac{2x}{(5-2x)^3} dx$;

3) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 1}$; 4) $\int (2x+1)\cos\left(x^2 + x + 4\right) dx$.

C

1.60. Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб интегрални топинг:

1) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$; 2) $\int \sqrt{t}\sqrt{1 + t\sqrt{t}}\, dt$.

1.61*. Бўлаклаб интеграллаш усули билан ечинг:

1) $\int x^2 \sin x dx$; 2) $\int x^2 \cos 3x dx$;

3) $\int x \cdot \cos^2 x dx$; 4) $\int x \cdot \sin^2 x dx$.

▲ Мисолни ечиш учун бўлаклаб интеграллаш усулидан икки марта фойдаланамиз:

1) $\int x^2 \sin x dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, dv = \sin x dx, \\ du = 2x dx, v = -\cos x \end{matrix}\right| = -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x) dx =$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx;$$

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos x dx, \\ du = dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C. \blacksquare$$

1.62. $\int \sin 2x \cos^4 x dx$ интегрални топинг.

1.63. Даражани пасайтириш формуласидан икки марта фойдаланиб интегрални аниқланг:

1) $\int \cos^4 x dx;$ 2) $\int \sin^4 x dx.$

Такрорлашга доир машқлар

1.64. Функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласини топинг:

1) $y = \frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 2;$ 2) $y = x \cdot \sin^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{8}.$

1.65*. $f(x)$ функцияни текшириб, графигини ясанг:

$f(x) = x^2(x-2)^2.$

1.66. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ функция берилган. $y'(2)$ ни топинг.

1.67. $f(x) = \frac{1+x-2x^2}{x+1}$ функциянинг графигини ясанг.

1.68. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{18x^2 - 3x - 1}}.$$

1.3. Эгри чизиқли трапеция ва унинг юзи. Аниқ интеграл

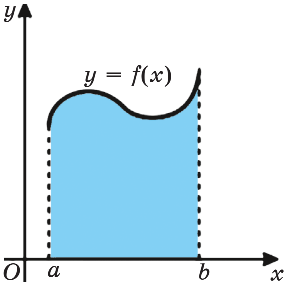
Бу мавзуда эгри чизиқли трапециянинг юзини аниқ интеграл ёрдамида топишни ўрганиб, оҳрида:

- эгри чизиқли трапециянинг таърифини биласиз;
- Ньютон-Лейбниц формуласидан эгри чизиқли трапециянинг юзини топишда фойдаланасиз;
- аниқ интеграл тушунчасини биласиз ва уни топасиз;

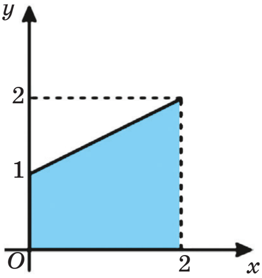
- эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топишни ўрганасиз.

1.3.1 Эгри чизиқли трапеция ва унинг юзи

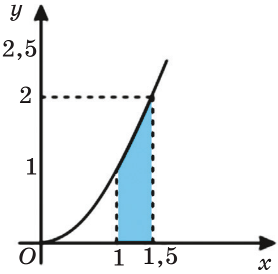
Таъриф. *Узлуксиз, номанфий $y = f(x)$ функциянинг графиги билан, Ox ўқи билан ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ясси фигура **эгри чизиқли трапеция** деб аталади (1.5-расм).*



1.5-расм



1.6-расм

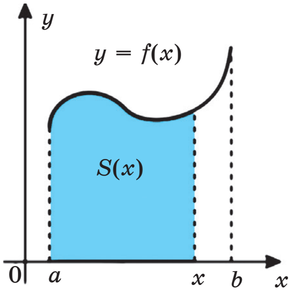


1.7-расм

Эгри чизиқли трапециянинг асоси сифатида Ox ўқидаги $[a; b]$ кесма олинади. Масалан, $f(x) = 0{,}5x + 1$, $x \in [0; 2]$ функцияга мос эгри чизиқли трапеция бизга таниш (1.6-расм).

$f(x) = x^2$, $x \in [1; 1{,}5]$ ҳолда эгри чизиқли трапеция 1.7-расмда тасвирланган.

$y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. Шу функциянинг графиги билан чегараланган ва $[a; x]$ кесмада ясалган эгри чизиқли трапециянинг юзини $S(x)$ орқали белгилайлик (1.8-расм). У ҳолда, $S(x)$ ни $[a; b]$ оралиқда аниқланган функция сифатида кўриш мумкин. Бу функция монотон ўсувчи ва $S(a)=0$ тенгликни қаноатлантиради.



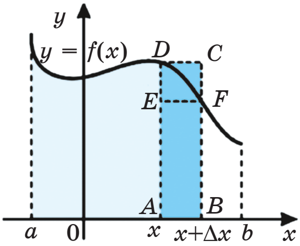
1.8-расм

Теорема. *$y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ узлуксиз функция, $F(x)$ унинг бошланғич функцияси бўлсин. У ҳолда $y = f(x)$ функциянинг графиги билан, Ox ўқи билан ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи*

$$S = F(b) - F(a)$$

формула билан аниқланади.

▲ Аввал $S(x)$ функция (эгри чизиқли трапециянинг юзи) $f(x)$ нинг бошланғич функция эканини, демак, $S'(x) = f(x)$ тенглик ба-



1.9-расм

жарилишини кўрсатайлик. Ҳосиланинг таърифига кўра

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}.$$

1.9-расмдан $S(x+\Delta x)-S(x)=S_{ABFD}$ ва $S_{ABFE}\leqslant S_{ABFD}\leqslant S_{ABCD}$ эканлиги маълум. Тўғри тўртбурчакларнинг юзи:

$$S_{ABFE}=f(x+\Delta x)\cdot\Delta x \quad \text{ва} \quad S_{ABCD}=f(x)\cdot\Delta x.$$

$f(x+\Delta x)\cdot\Delta x\leqslant S_{ABFD}\leqslant f(x)\cdot\Delta x$ тенгсизликнинг иккала томонини ҳам Δx га бўлсак,

$$f(x+\Delta x)\leqslant\frac{S_{ABFD}}{\Delta x}\leqslant f(x). \tag{1}$$

$\Delta x\to 0$ интилганда $f(x+\Delta x)\to f(x)$, бундан $\dfrac{S_{ABFD}}{\Delta x}\to f(x)$ нисбат бажарилади. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{S_{ABFD}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}$ эканлигидан, (1) қўштенгсизликдан $S'(x)=f(x)$ тенгликни оламиз. У ҳолда бошланғич функциянинг хоссасига кўра (п.1.1.)

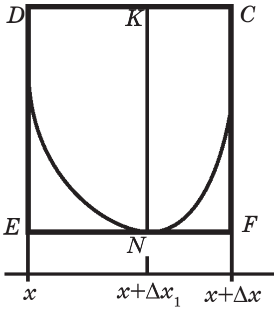
$$S(x)=F(x)+C.$$

Берилган эгри чизиқли трапециянинг юзини S орқали белгиласак, у $S=S(b)=F(b)+C$ тенглик билан аниқланади. $S(a)=0$ эканлигини эътиборга олиб, $0=S(a)=F(a)+C$. У ҳолда, $C=-F(a)$. Бундан

$$S=F(b)-F(a).$$ ■

Эслатма: $y=f(x)$ функция $[x;\ x+\Delta x]$ оралиқда камаювчи деб олдик (1.9-расм). Агар функция бу оралиқда монотон ўсувчи бўлса ҳам теорема юқоридаги каби исботланади. Фақат бунда (1) қўштенгсизликдаги ишораларни қарама-қарши ишорага ўзгартириш етарли.

Функция $[x;\ x+\Delta x]$ оралиқда монотон бўлмаса, Δx ни кичрайтириб, $[x;\ x+\Delta x]$ оралиқнинг ўрнига функциянинг монотон оралиғини олиш керак. Масалан, 1.10-расмда кўрсатилгани каби Δx катталикнинг ўрнига Δx_1 ни қўйиб, $DENK$ тўғри тўртбурчакни оламиз.



1.10-расм

1-мисол. $y = \sin x$, $x \in [0;\ \pi]$ функция графиги билан ва абсциссалар ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг (1.11-расм).

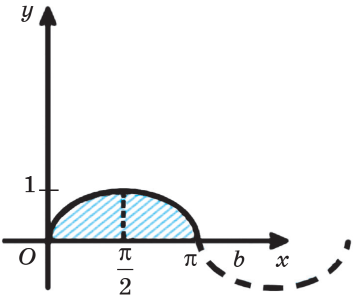
▲ $y = \sin x$ нинг бошланғич функцияларнинг бири сифатида $y = -\cos x$ ни олиш мумкин. $x \in [0;\ \pi]$ эканлигидан, $a = 0$, $b = \pi$ (1.11-расм). У ҳолда

$$S = F(b) - F(a)$$

формуладан

$$S = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Берилган фигуранинг юзи 2 га тенг.



1.11-расм

Жавоб: 2 кв.бир. ■

Шундай қилиб, $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, $f(x) \geqslant 0$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш учун қуйидаги алгоритм қўлланилади:

1) *координаталар текислигида* $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$ *функциянинг графигини ясаймиз;*

2) $y = f(x)$ *функциянинг* $F(x)$ *бошлангич функциясини аниқлаймиз;*

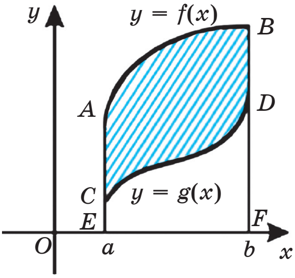
3) *агар аниқ кўрсатилмаса, эгри чизиқли трапециянинг пастки асоси бўладиган кесманинг четка нуқталарининг координаталарини* (a билан b) *аниқлаймиз;*

4) $S = F(b) - F(a)$ формула бўйича эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз.

Агар фигура $[a;\ b]$ оралиқда $f(x) > 0$, $g(x) \geqslant 0$ узлуксиз функцияларнинг графиклари билан чегараланса ва $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in [a;\ b]$ шартлар бажарилса (1.12-расм), бу фигуранинг юзи

$$S = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))$$

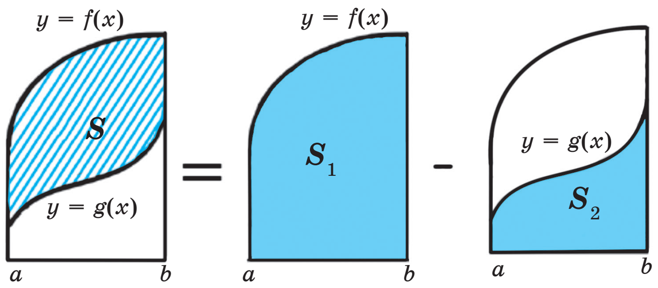
формула билан аниқланади. Бунда $F(x)$ ва $G(x)$ функциялар мос равишда $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ бошланғич функцияларнинг бири.



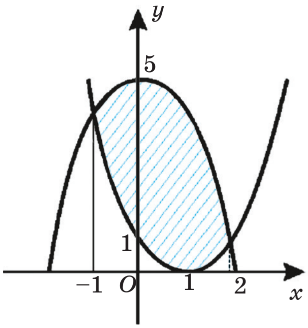
1.12-расм

▲ Ҳақиқатан, 1.13-расмдан

$$S = S_1 - S_2 = (F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a)) = (F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a)).$$ ■



1.13-расм



1.14-расм

2-мисол. $y = 5 - x^2$ ва $y = (x - 1)^2$ функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топиш керак (1.14-расм).

▲ $y = 5 - x^2$ ва $y = (x - 1)^2$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топиш учун бу функцияларни тенглаштирамиз (чунки бу функцияларнинг шу нуқталардаги қийматлари тенг).

$(x - 1)^2 = 5 - x^2$ тенгламани оламиз. Бу квадрат тенгламанинг ечимлари $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

$y = 5 - x^2$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $y = 5x - \frac{x^3}{3}$, ал $y = (x - 1)^2$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири эса $y = \frac{1}{3}(x-1)^3$. Шундай қилиб,

$$S = \left(5x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(x-1)^3\right)\Bigg|_{x=2} - \left(5x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(x-1)^3\right)\Bigg|_{x=-1} =$$

$$= \left(10 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(-5 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right) = 9 .$$

Жавоб: 9 кв.бирл. ■

1.3.2 Аниқ интеграл ва унинг хоссалари

Таърифи. *$y = f(x)$, $x \in [a; b]$ узлуксиз функция бўлсин. Унинг b ва a нуқталардаги бошланғич функция қийматларининг айирмасини шу функциянинг* ***аниқ интеграли*** *деб аталади ва уни $\int_a^b f(x)dx$ орқали белгиланади («интеграл a дан b гача эф иксдан дэ икс» деб ўқилади). a ва b сонлар интегралнинг мос равишда пастки ва юқориги чегаралари, $f(x)$ интеграл остидаги функция деб аталади.*

Шундай қилиб, таърифга кўра

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Бу ***Ньютон-Лейбниц формуласи.***

$F(b) - F(a)$ айирмани қисқача $F(x)\Big|_a^b$ орқали белгилаймиз, бундан Ньютон-Лейбниц формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

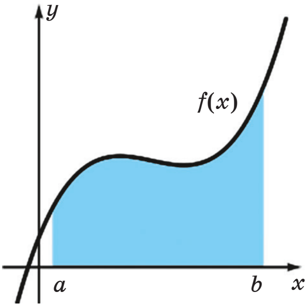
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (2)$$

3-мисол. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 2) $\int_1^2 (x^2 - 3)dx$ интегралларни ҳисоблайлик.

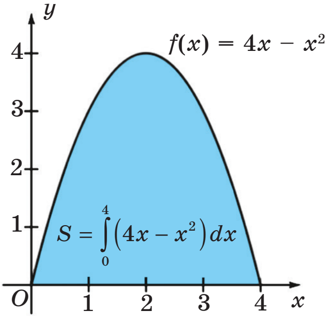
▲ 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

2) $\int_1^2 (x^2 - 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot 1\right) = -\frac{2}{3}$. ■

Аниқ интегрални юқоридан $f(x) \geqslant 0$ функция билан, пастдан абсциссалар ўқи билан ва $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топишда фойдаланиш мумкин (1.15-расм). Масалан, юқоридан $f(x) = 4 - x^2$ парабола билан, пастдан абсциссалар ўқи билан чегараланган фигуранинг юзи $S = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$ аниқ интеграл билан ҳисобланади (1.16-расм).



1.15-расм

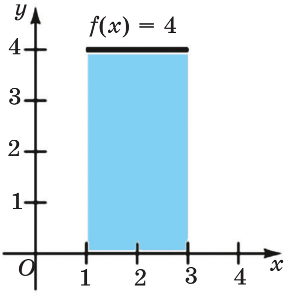


1.16-расм

Шундай қилиб, $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, $f(x) \geqslant 0$ функция учун аниқ интегралнинг геометрик маъноси – юқоридан $f(x) \geqslant 0$ функция билан, пастдан абсциссалар ўқи билан ва $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи.

4-мисол. Берилган аниқ интегрални аниқловчи фигурани ясаб, унинг юзини топиш керак:

1) $\int_1^3 4dx$; 2) $\int_0^3 (x+2)\,dx$; 3) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

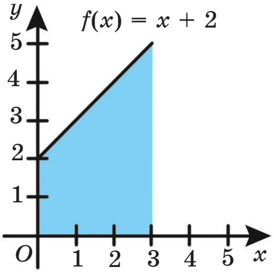


1.17-расм

▲ 1) $\int_1^3 4dx$ аниқ интегралнинг геометрик маъноси – тўғри тўртбурчакнинг юзи (1.17-расм). Геометрик йўл билан ҳисобласак, тўртбурчакнинг юзи $S = 2 \cdot 4 = 8$ (кв.бирл). Энди уни аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблайлик:

$$S=\int_1^3 4dx = 4x\Big|_1^3 = 4\cdot3-4\cdot1=12-4=$$

$$=8\ (\text{кв.бирл.}).$$



1.18-расм

2) $\int_0^3 (x+2)\,dx$ аниқ интеграл 1.18-расмда тасвирланган трапециянинг юзига тенг. Трапециянинг юзини геометрик йўл билан ҳисобласак, катта асоси $a = 5$, кичик асоси $b = 2$, баландлиги $h = 3$ эканлигидан,

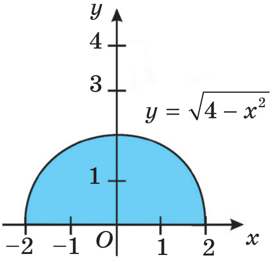
$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{5+2}{2}\cdot3=\frac{21}{2}=10{,}5\ \text{кв.бирл.}$$

Ньютон-Лейбниц формуласи бўйича бу юза қуйидагича ҳисобланади:

$$\int_0^3 (x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{9}{2}+6\right)-0 = 10{,}5.$$

3) $S = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Интеграл остидаги $y = \sqrt{4-x^2}$ функцияни квадратга кўтариб, ўзгарувчиларни бир томонга тўпласак, $y^2 + x^2 = 4$ хосил бўлади. Бу маркази координаталар бошида, радиуси 2 га тенг бўлган айлананинг тенгламаси (1.19-расм). Аниқ интеграл ярим айлананинг юзасини беради. Уни геометрик формула билан ҳисобласак:



1.19-расм

$$S = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \text{ (кв.бирл.).}$$

Аниқ интегралнинг хоссалари

1$^{\text{O}}$. *Интеграл чегараларининг ўринлари алмаштирилса, интегралнинг ишораси қарама-қаршисига ўзгаради:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx .$$

Аниқ интегралнинг таърифига кўра,

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, ал $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$.

У ҳолда, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)dx$.

Масалан, $\int_3^0 (x+2)\,dx = -\int_0^3 (x+2)\,dx$.

2$^{\text{O}}$. *Исталган $f(x)$ функция учун қуйидаги тенглик бажарилади*:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 .$$

Масалан, $\int_\pi^\pi \sin x dx$ интеграл учун

$$\int_\pi^\pi \sin x dx = -\cos x \,\Big|_\pi^\pi = -\cos\pi + \cos\pi = 0 .$$

3$^{\text{O}}$. *Исталган a, b ва c сонлар учун* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + {}$ $+\int_c^b f(x)\,dx$ *тенглик бажарилади.*

Масалан, $\int_{-1}^{1}|x|\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{1} xdx = 0,5 + 0,5 = 1$.

4$^{\text{O}}$. *Исталган* $f(x)$, $g(x)$ *функциялар билан ўзгармас* k *сони учун* $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx \pm \int\limits_c^b g(x)dx$ *ва* $\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *тенгликлар бажарилади.*

5$^{\text{O}}$. *Исталган* $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ *номанфий функция учун*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

тенгсизлик бажарилади.

Гуруҳларда ишлаш

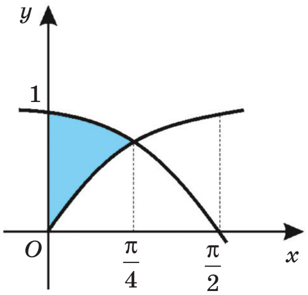
Аниқ интегралнинг хоссалари ва уларнинг натижаларини Ньютон-Лейбниц формуласи ёрдамида исботланг.

Масалан, ▲ 3°.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left(F(b) - F(c)\right) + \left(F(c) - F(a)\right) =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx\,. \text{ ■}$$

5-мисол. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \geqslant 0$ эгри чизиқлар ва ординаталар ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топиш керак (1.20-расм).



1.20-расм

▲ Аввал берилган эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини аниқлайлик:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\,.$$

Бу ечимлар ичидан мисол шартини қаноатлантирадигани $x = \dfrac{\pi}{4}$.

У ҳолда,

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \text{ кв. бирл.} \text{ ■}$$

Аниқ интегрални ҳисоблаганда аниқ интегралнинг чегараларини ҳам ўзгарувчини алмаштириш усули билан янги ўзгарувчига мос равишда алмаштириш керак:

$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^3 (2x)\,dx = \boxed{x \text{ ўзгарувчининг чегаралари}}$$

$$= \left|u = x^2+1\right| = \frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right) \quad \boxed{u \text{ ўзгарувчининг чегаралари}}$$

Ҳисоблашларни тамомлайлик:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\frac{u^4}{4}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{8}(16-1) = \frac{15}{8}\cdot$$

1. Эгри чизиқли трапеция нима?
2. Эгри чизиқли трапециянинг юзи қандай формула билан ҳисобланади?
3. Аниқ интеграл нима?
4. Ньютон-Лейбниц формуласини ёзинг.
5. Аниқ интегралнинг хоссаларини ёзиб, уларнинг маъносини тушунтиринг.

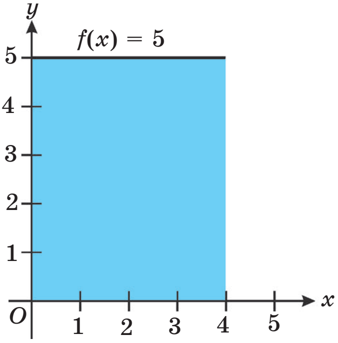
➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

https://www.desmos.com/calculator — онлайн графиктік калькулятор

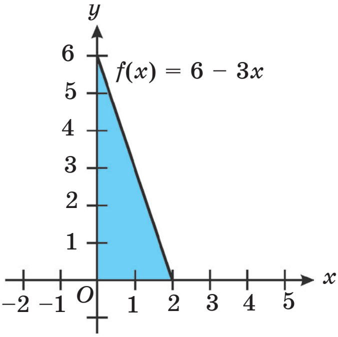
Мисоллар

А

1.69. 1.21, 1.22-расмларда кўрсатилган фигураларнинг юзаларини геометрик йўл билан ва аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланг:

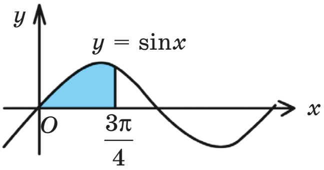


1.21-расм

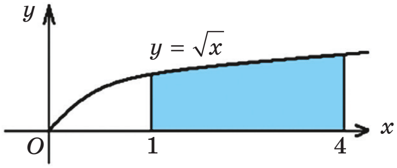


1.22-расм

1.70. 1.23, 1.24-расмда кўрсатилган эгри чизиқли трапециянинг юзини аниқ интеграл орқали ифодалаб, ҳисобланг:

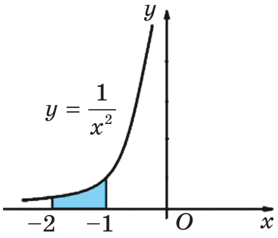


1.23-расм

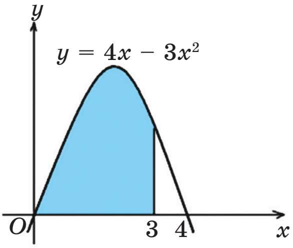


1.24-расм

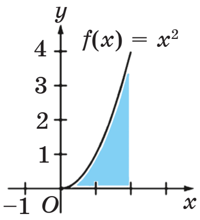
1.71. 1.25–1.27-расмларда кўрсатилган эгри чизиқли трапециянинг юзини аниқ интеграл орқали ифодалаб, ҳисобланг:



1.25-расм



1.26-расм



1.27-расм

1.72. $y = f(x)$ функция графиги билан $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан ва асциссалар ўқи билан чегараланган фигурани чизинг, натижани онлайн график калькулятор ёрдамида текширинг:

1) $y = x$, $a = 0$, $b = 2$;

2) $y = x^2$, $a = 0$, $b = 2$;

3) $y = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$;

4) $y = 1 - x^2$, $a = -1$, $b = 1$.

1.73. $y = f(x)$ функция графиги билан, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан ва асциссалар ўқи билан чегараланган фигурани чизинг:

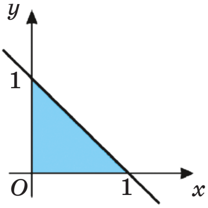
1) $y = x^2$, $a = 1$, $b = 3$;

2) $y = x^2$, $a = 0$, $b = 1$;

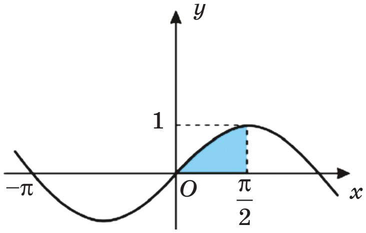
3) $y = 4x - x^2$, $a = 2$, $b = 4$;

4) $y = \frac{1}{x^2}$, $a = -2$, $b = -1$.

1.74. 1.28, 1.29-расмда тасвирланган эгри чизиқли трапециянинг қандай функциянинг графиги билан чегараланганлигини аниқлаб, унинг юзини топинг:



1.28-расм



1.29-расм

1.75. 1.72-расмда берилган фигуранинг юзини топинг.

1.76. 1.73-расмда берилган фигуранинг юзини топинг.

1.77. Ҳисобланг:

1) $\int_{2}^{6} 8dx$; 2) $\int_{-2}^{3} xdx$; 3) $\int_{-1}^{1} x^3dx$;

4) $\int_{1}^{4} 4x^2dx$; 5) $\int_{-2}^{1} (2x^2+3)dx$.

1.78. Қуйидаги эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг, мос фигурани чизинг:

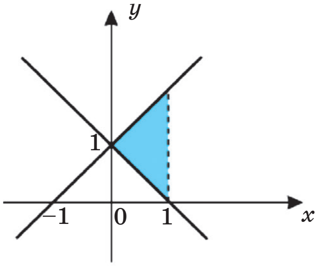
1) $y = 2 - x$, $x = 0$, $y = 0$;

2) $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

3) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$;

4) $y = x - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

1.79. 1.30-расмда тасвирланган фигуранинг қандай функциянинг графиклари билан чегараланганлигини аниқлаб, унинг юзини топинг.



1.30-расм

1.80. Юқоридан $f(x)$ функциянинг графиги билан, пастдан берилган интервал билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини Ньютон-Лейбниц формуласи билан топинг:

1) $f(x) = x + 2$ ва $[0, 4]$ интервал;

2) $f(x) = 4 - x^2$ ва $[-1, 2]$ интервал.

1.81. Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб, қуйидаги аниқ интегралларни ҳисобланг:

1) $\int_{-5}^{5} 10x^3dx$; 2) $\int_{-1}^{6} 6x(x-1)dx$; 3) $\int_{-1}^{3}(3x^2-5)dx$;

4) $\int_{-2}^{1}(12x^5-36)dx$; 5) $\int_{-1}^{1}(x^4+x^2)dx$; 6) $\int_{-5}^{4}x^2dx$.

Ҳисобланг **(1.82—1.83):**

1.82. 1) $\int\limits_{-2}^{3}(2x-1)dx$; 2) $\int\limits_{1}^{8}(3-x)dx$; 3) $\int\limits_{1}^{9}\sqrt{x}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

1.83. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{2\sin^2 x}$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$;

4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$; 5) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin xdx$.

1.84. Тест саволларига жавоб беринг. Берилган аниқ интегралнинг қийматини топинг:

1. $\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx$.

a) 5; *b*) − 3; *c*) 10; *d*) $5\frac{1}{3}$; *e*) $2\frac{1}{4}$.

2. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}4\cos\pi xdx$.

a) 4; *b*) $-\frac{1}{2\pi}$; *c*) 2π; *d*) $2\frac{1}{3}$; *e*) $\frac{4}{\pi}$.

3. $\int_{0}^{1}2\sin\pi xdx$.

a) $\frac{4}{\pi}$; *b*) $\frac{1}{2\pi}$; *c*) 15π; *d*) $\frac{2}{\pi}$; *e*) $\frac{1}{\pi}$.

4. $\int_{0}^{9}(1+\sqrt{x})dx$.

a) − 3; *b*) 9; *c*) 27; *d*) 3; *e*) 2.

Ҳисобланг **(1.85—1.88):**

1.85. 1) $\int\limits_{1}^{2}\frac{x^2+\sqrt{x}}{x}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2}(x^2+2x)dx$;

3) $\int\limits_{1}^{3}\left(x^2+1\right)dx$; 4) $\int\limits_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx$.

1.86. 1) $\int\limits_{0}^{2}\left(x^2+2\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{4}3\sqrt{x}dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2}+x^{-3}\right)dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{1}\left(\frac{3}{x^3}-2x^2\right)dx$.

1.87. 1) $\int\limits_{1}^{2}\frac{4x^5-3x^4+x^3-1}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{5x^7-4x^6+2x}{x^3}dx$;

3) $\int\limits_{2}^{3}\frac{6x^4-4x^3+7x^2-1}{x^2}dx$; 4 $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{3x^6-4x^5-7x^4+3x^2}{x^4}dx$.

1.88. 1) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(5x^4-5\cos x\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(7\sin x-3x^2\right)dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1}\left(3x^2-2x+1\right)dx$; 4) $\int\limits_{1}^{3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

1.89. Интеграл остидаги функцияни соддалаштириб, аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\left(x^2-2x\right)\left(3-2x\right)}{x-2}dx$; 2) $\int\limits_{2}^{3}\frac{\left(x^2-3x+2\right)\left(2+x\right)}{x-1}dx$;

3) $\int\limits_{2}^{3}\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)}{x^2+x-2}dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(9-x^2\right)\left(x^2-16\right)}{x^2-7x+12}dx$.

Интегрални ҳисобланг **(1.90—1.91):**

1.90. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}}\sin 2x dx$; 2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}4\cos 3x dx$.

1.91. 1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\sin\frac{x}{3}dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{7}{\cos^2 3x}dx$.

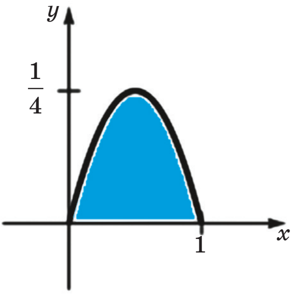
1.92. Интеграл остидаги функцияни шакл алмаштиргандан кейин интегрални ҳисобланг:

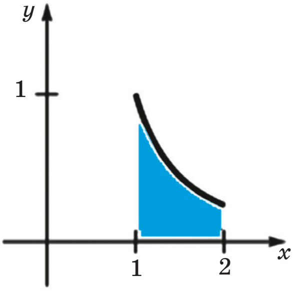
1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2}dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x dx$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 7x \cos 5x dx$.

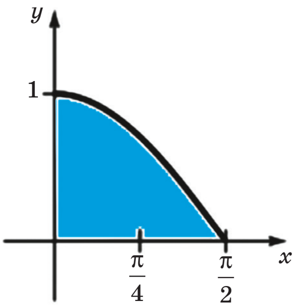
1.93. Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг:

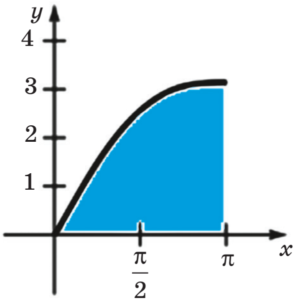
1) $y = x - x^2$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$;





3) $y = \cos x$; 4) $y = x + \sin x$;





1.94. Эгри чизиқлар билан чегараланган трапецияни чизиб, геометрик йўл билан юзини топинг:

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

1.95. Берилган тўғри чизиқлар билан чегараланган трапециянинг юзини геометрик йўл билан ва интеграл ёрдамида топинг, чизмасини чизинг:

1) $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + 4; \\ y = 0; \\ x = 0; \\ x = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 4x - 5; \\ y = 0; \\ x = -2; \\ x = -3. \end{cases}$

1.96. Кубик парабола ва тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг:

1) $\begin{cases} y = x^3 - x; \\ y = 0; \\ x = -1; \\ x = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^3; \\ y = 0; \\ x = -3; \\ x = 3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 4x^3; \\ y = 0; \\ x = 1; \\ x = 2. \end{cases}$

1.97. Берилган парабола ва абсцисса ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни чизиб, юзини топинг:

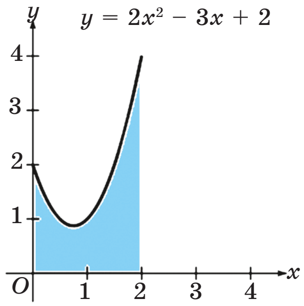
1) $\begin{cases} y = 9 - x^2; \\ y = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x; \\ y = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - x - 6; \\ y = 0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4; \\ y = 0. \end{cases}$

1.98. Берилган парабола ва тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни чизиб, юзини топинг:

1) $\begin{cases} y = 0; \\ y = x^2 + 1; \\ x = -1; \\ x = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^2 + 1; \\ y = 0; \\ x = 1; \\ x = 5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - x; \\ y = 0; \\ x = 0; \\ x = 2. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 2; \\ y = 0; \\ x = 0; \\ x = 2. \end{cases}$



1.31-расм

▲ 4) мисолда берилган парабола ва тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг чизмаси 1.31-расмда тасвирланган. Фигуранинг юзини топиш учун аниқ интегрални ҳисоблаш етарли:

$$S = \int_0^2 \left(2x^2 - 3x + 2\right) dx =$$

$$= \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^2 = \left(2\frac{2^3}{3} -\right.$$

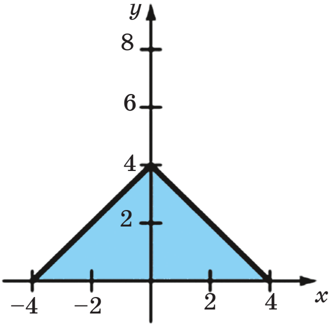
$$\left. - 3\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0\right) = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \text{ кв. бирл.}$$ ■

1.99. Қуйидаги маълумотларни аниқланг:

1) $f(x)$ функция жуфт бўлса, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ тенглик бажариладими? Жавобингизни тушунтиринг.

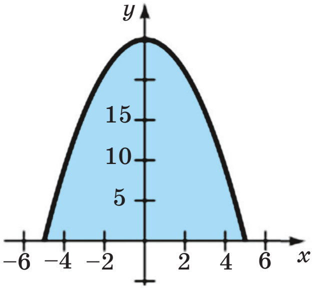
2) Қуйидаги 1.32, 1.33-расмлардан фойдаланиб, фигуранинг юзини қулай усул билан ҳисобланг.

$f(x) = 4 - |x|$



1.32-расм

$f(x) = 25 - x^2.$



1.33-расм

B

1.100. $y = f(x)$ функция графиги билан, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан ва абсциссалар ўқи билан чегараланган фигурани чизинг, юзини ҳисобланг:

1) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$;   2) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $xy = 4$, $a = 1$, $b = 4$;   4) $y = 4 - x^2$.

1.101. Эгри чизиқлар билан чегараланган фигурани чизиб, юзини топинг:

1) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{9}x^2; \\ y = x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 + 4; \\ y = 6 - x. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 2x^2 - x; \\ y = x. \end{cases}$

1.102. Эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

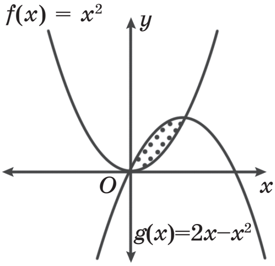
1) $\begin{cases} f(x) = x^2; \\ g(x) = 2x - x^2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}x^2; \\ g(x) = 4 - x. \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}; \\ g(x) = x. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x}; \\ x = 1; \\ x = 9. \end{cases}$

▲ 1) $\begin{cases} f(x) = x^2; \\ g(x) = 2x - x^2 \end{cases}$ функцияларнинг графикларини ясайлик (1.34-расм). Расмдан $g(x)$ функциянинг графиги $f(x)$ функциянинг графигидан юқорида жойлашган. Кесишиш нуқталарини топиш учун иккита функцияни тенглаштириб, тенгламани ечамиз:

$x^2 = 2x - x^2$;
$2x^2 - 2x = 0$;
$2x\,(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1.$

Бошланғич функцияларни топамиз:



1.34-расм

$$F(x)=\frac{x^3}{3};\ G(x)=x^2-\frac{x^3}{3}.$$

Ньютон-Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$S=\int_0^1 (G(x)-F(x))dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{2}{3}-0=\frac{1}{3}.\ ■$$

1.103. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигурани чизиб, юзини топинг:

1) $\begin{cases} y=x^2; \\ y=2-x^2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=5+3x-2x^2; \\ y=x+1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=x^2+4x; \\ y=x+4. \end{cases}$

Аниқ интегрални ҳисобланг **(1.104—1.105):**

1.104. 1) $\int_1^2 x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$; 2) $\int_1^2 \frac{x^6+8x^4+x}{x}dx$;

3) $\int_{-1}^1 (x+1)^2(2x+3)dx$; 4) $\int_6^8 (x-7)^7\,dx$.

1.105. 1) $\int_{-1}^1 (2x+3)^6\,dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-3)^{10}}dx$;

3) $\int_3^4 \sqrt{x-3}\,dx$; 4) $\int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt{5+\frac{x}{2}}}$.

1.106. Интеграл остидаги функцияни шакл алмаштириб, аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} \sin 2x\cos 2x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x+\cos x)^2\,dx$;

3) $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$; 4) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)dx$.

1.107*. Агар $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\leqslant x<0, \\ x, & 0\leqslant x<2, \\ 3, & 2\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$ бўлса, $\int_{-1}^{4} f(x)dx$ интегрални ҳисобланг.

1.108. Модулнинг хоссасидан фойдаланиб интегрални ҳисобланг:

1) $\int_0^3 |x-2|dx$; 2) $\int_{-3}^{1} |x|dx$; 3) $\int_0^4 |2x-6|dx$; 4) $\int_0^2 |2x-1|dx$.

▲ 4) $\int_0^2 |2x-1|dx$ интегрални ҳисоблайлик (1.35-расм). Модулнинг хоссасига кўра

$$|2x-1|=\begin{cases} -(2x-1), x<0,5; \\ 2x-1, \quad x\geqslant 0,5. \end{cases}$$

Бундан

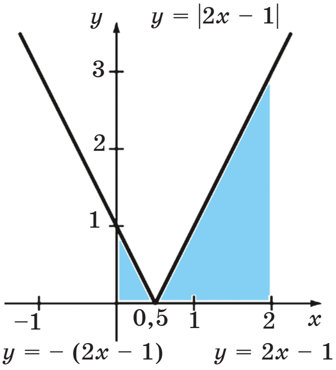
$$\int_0^2 |2x-1|dx=\int_0^{0,5}(-2x+1)dx+$$

$$+\int_{0,5}^{2}(2x-1)dx;$$

$$\int_0^{0,5}(-2x+1)dx=\frac{1}{4},$$

$$\int_{0,5}^{2}(2x+1)dx=2,25,$$

$$\int_0^2 |2x-1|dx=0,25+2,25=2,5 .$$ ■



1.35-расм

1.109. Интеграл чегараларининг қулай бўлаклаб, берилган функциянинг интегралини топинг:

1) $\int_0^3 f(x)dx$, агар $f(x)=\begin{cases} 4, & 0\leqslant x<2; \\ 1, & 2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$

2) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, агар $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x<-1; \\ 4, & -1\leqslant x<1; \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$

1.110. Эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y=x^4-29x^2+100,\ y=0;$

2) $y = 2\cos x, \quad y = 1, -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

1.111. 1) $\int_{-1}^{1}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = 0$; 2) $\int_{-1}^{1}\left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot xdx = 0$ тенгликлар бажариладиган A, B ва C сонларни топинг.

C

1.112*. Қуйидаги эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $4y = x^2, \quad y^2 = 4x$; 2) $y = \cos^5 x\sin 2x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

▲ 2) $y = \cos^5 x\sin 2x, \ y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x 2\sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin x dx .$$

Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб ушбу интегрални аниқлайлик:

$$\int \cos^6 x \sin x dx = \left|\cos x = t \Rightarrow -\sin x = dt\right| =$$

$$= \int -t^6 dt = -\frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos^7 x}{7} + C \Rightarrow$$

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin x dx = -\frac{2\cos^7 x}{7}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\cos^7 \frac{\pi}{2}}{7} + \frac{2\cos^7 0}{7} = \frac{2}{7}.$$ ■

1.113. $y = 0$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

1.114. Аниқ интегрални топинг:

1) $\int\limits_0^1 \left(2x^2 - 5\right)^3 dx$; 2) $\int\limits_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \dfrac{x}{3}} dx$; 3) $\int\limits_0^3 (1 + 2x)^9 dx$;

4) $\int\limits_1^5 \dfrac{xdx}{\sqrt{4x + 5}}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x dx$.

1.115. $f(x)$ функция тоқ бўлса, $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ аниқ интегралнинг қиймати қандай бўлади? Хулоса чиқаринг.

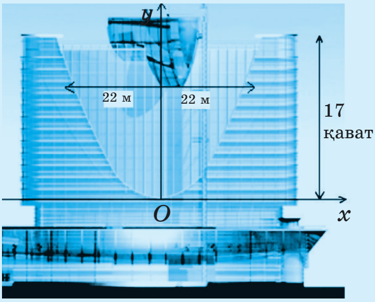
1.116. Мулоҳазанинг нотўғри эканлигини тушунтиринг:

1) $\int\limits_{-1}^{1} x^{-2}dx = (-x^{-1})\Big|_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$; 2) $\int\limits_{-2}^{1} \dfrac{2}{x^3}dx = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\dfrac{3}{4}$.

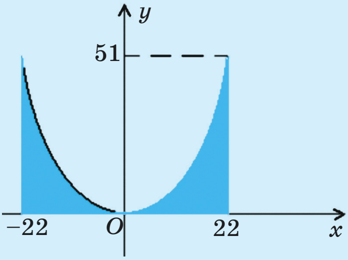
Амалий топшириқ

Ижодий ҳисобот. Бўлимнинг бошида тасвирланган «Москва» иморатининг парабола билан чегараланган қисмининг юзини топинг (1.36-расм).

Ёрдам: Параболанинг учи иморатнинг 5-қаватида жойлашган. Параболанинг сирти 17 та қаватни ўз ичига олади. Ҳар бир қаватнинг баландлиги тахминан 3 м ва параболанинг энг юқориги йўлагининг узунлиги тахминан 44 м деб олганда 1.37-расмда кўрсатилган модель хосил бўлади.



1.36-расм



1.37-расм

Такрорлашга доир машқлар

1.117. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}$; 2) $\dfrac{\cos^2x-\operatorname{ctg}^2x}{\sin^2x-\operatorname{tg}^2x}$.

1.118. 3 га бўлганда 1 га тенг қолдиқ қоладиган барча икки хонали сонларнинг йиғиндисини топинг.

1.119. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини аниқланг:

1) $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 8$;

2) $y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 49$.

1.4. Аниқ интегралнинг геометрия ва амалий масалаларда қўлланилиши

Бу мавзуда аниқ интеграл ёрдамида амалий масалаларни ечишни ўрганиб, охирида:

- масофа ва ишни топишга доир физик масалаларни ечишда аниқ интегралдан фойдаланишни ўрганасизлар;
- аниқ интегралдан фойдаланиб айланма жисмларнинг ҳажмини топиш формуласини биласиз ва қўллайсиз.

1.4.1. Масофа ва ишни топишда аниқ интегралдан фойдаланиш

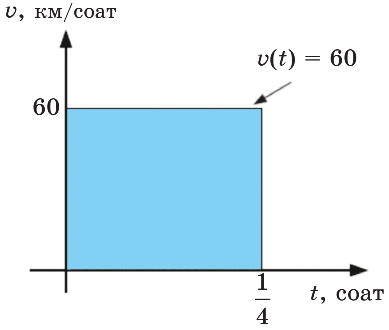
Аниқ интегрални тўғри чизиқли ҳаракат давомида босиб ўтилган йўлни (масофани) топиш учун қўллаш мумкин. Ҳосиланинг физик маъноси жисмнинг берилган нуқтадаги тезлиги эканлигини биласиз: $v(t) = s'(t)$. Шу сабабли ўрин алмаштириш

$$s(t) = \int v(t)dt$$

формуласи билан ҳисобланади. Мисоллар кўриб чиқайлик:

Машина тўғри чизиқ бўйлаб 15 мин ($\frac{1}{4}$ соат) ўзгармас 60 км/соат тезлик билан ҳаракатланди дейлик. Унинг босиб ўтган йўли

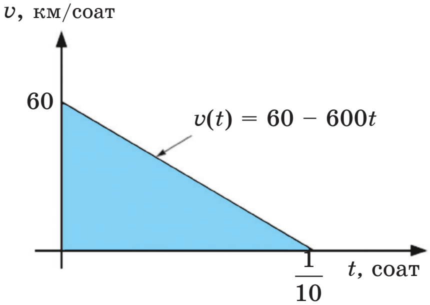
$$s = v \cdot t = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15 \text{ км}.$$



1.38-расм

Тезликнинг вақтга боғлиқлик графигини ясасак (1.38-расм), у горизонтал жойлашган тўғри чизиқ бўлади. Машинанинг босиб ўтган йўли, сон қиймати бўйича бўялган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг бўлади. У ҳолда машинанинг босиб ўтган йўлини топиш учун аниқ интегрални қўллаш мумкин:

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} 60\,dt = 15 \text{ км}.$$



1.39-расм

Энди машинанинг тезлиги монотон камаювчи бўлсин ва 6 минутдан кейин тўхтайди дейлик (1.39-расм). Бу ҳолда ўртача тезлик

$$v_{\text{орт}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{60 + 0}{2} = 30 \text{ км/соат}$$

Босиб ўтилган йўл эса:

$$\mathbf{s} = v_{\text{ўрт}} \cdot t = 30 \cdot \frac{1}{10} = 3 \text{ км}.$$

Аниқ интеграл ёрдамида ҳисобласак ҳам худди шу натижани олишимизни исботлайлик.

Дастлаб тезликнинг вақтга боғланиш тенгламасини топиб олайлик. У боғланиш – чизиқли функция. Тўғри чизиқ тенгламасининг формуласига кўра

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{v-v_1}{v_2-v_1}=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\Rightarrow\frac{v-60}{0-60}=\frac{t-0}{\frac{1}{10}-0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{10}(v-60)=-60t\Rightarrow v=60t-600t.$$

Энди аниқ интегрални қўлласак,

$$S=\int_0^{\frac{1}{10}}(60-600t)\,dt=\left(60t-300t^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{10}}=3\text{ км}.$$

Юқоридаги иккита мисолнинг натижаларидан ҳаракатдаги жисм (моддий нуқта) тезлигининг йўналиши ўзгармаса, босиб ўтилган йўлни

$$s=\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,dt \qquad (1)$$

формула билан топиш мумкин.

Тезликнинг йўналиши ўзгарса, аниқ интегралнинг қиймати манфий. Масофанинг қиймати эса мусбат бўлиши керак. Шу сабабли умумий ҳол учун босиб ўтилган йўлни қуйидаги интеграл билан топилади:

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\left|v(t)\right|dt.$$

Хулоса. *Моддий нуқта ҳаракатининг тезлиги узлуксиз $v(t)$ функция билан берилсин. У ҳолда t_1 ва t_2 вақт оралиғида моддий жисмнинг босиб ўтган йўлининг сон қиймати $y=v(t)$ функция $t=t_1$, $t=t_2$ тўғри чизиқлар ва $[t_1;\ t_2]$ интервал билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзасининг катталигига тенг.*

1-мисол. Моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $v(t)=t^3-2t+3$ (м/с) тезлик билан қўзғалсин. Нуқтанинг [0; 2] вақт оралиғида босиб ўтган йўлини топиш керак.

▲ (1) формулага кўра $s=\int_0^2\left(t^3-2t+3\right)dt=\left(\frac{t^4}{4}-t^2+3t\right)\Big|_0^2=6$ м.

Жавоб: 6 м. ■

Фараз қилайлик, моддий нуқта Ox ўқи бўйича (тўғри чизиқ бўйлаб) ўзгарувчи $F=F(x)$ куч таъсирида ҳаракатлансин. F кучнинг таъсиридан нуқтанинг $[a;\, b]$ оралиқда ўрин алмаштириш учун бажарган иши

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \qquad (2)$$

формула билан аниқланади.

2-мисол. Пружинани 1 см га чўзиш учун 0,2 кН куч билан таъсир этиш керак бўлса, уни 10 см га чўзиш учун қандай куч сарфланишини аниқлайлик.

▲ Гук қонуни бўйича пружинани чўзиш учун керак бўлган куч катталиги унинг узайишига пропорционал: $F = kx$, бунда x – пружинанинг узайиши. $x = 0{,}01$ м бўлгани учун, $0{,}2 = k \cdot 0{,}01 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 20$ – бу пропорционаллик коэффициентининг катталиги. Шундай қилиб, куч пружинага $F = 20x$ қонун билан таъсир этади. У ҳолда (2) формула бўйича пружинани 0,1 метрга (10 см) чўзганда

$$A = \int_0^{0,1} 20x\,dx = 10x^2 \Big|_0^{0,1} = 0{,}1 \text{ кДж}$$

иш бажарилади.

Жавоб: 0,1 кДж. ■

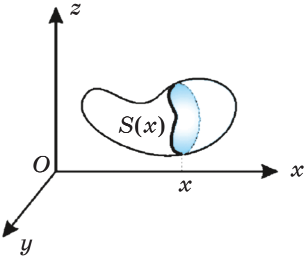
Эслатма. (1) ва (2) формулалардан моддий нуқта фақат тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилгандагина фойдаланиш мумкинлигини ёдда сақлаш лозим.

1.4.2 Жисмнинг ҳажмини топиш

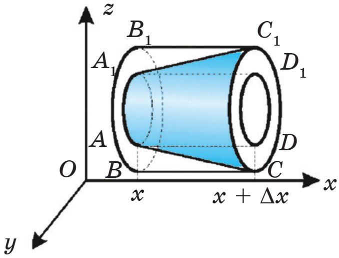
Биз эгри чизиқли трапециянинг юзини аниқ интеграл орқали ҳисоблаб топишни кўрсатдик. Энди аниқ интегралдан жисм ҳажмини топишда фойдаланиш мумкинлигини кўрамиз. Умуман, жисмнинг ҳажми тушунчаси ва унинг хоссаларини геометрия курсида чуқурроқ кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, D жисм берилсин. Унинг фазодаги $Oxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасида Oyz текисликка параллел ва абсциссаси x га тенг бўлган нуқта орқали ўтувчи текислик билан кесимининг юзи $S(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ орқали белгилайлик (1.40-расм). $S(x)$ функция $[a;\, b]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз $S = S(x)$ функция берилди деб ҳисоблайлик.

D жисмнинг ҳажмини аниқлайлик.

D жисмдан a дан x га, $x \in [a;\, b]$ гача бўлган оралиққа мос келувчи ҳажмини $V(x)$ орқали белгилайлик. У ҳолда $V'(x) = S(x)$ тенглик бажарилади. Ҳақиқатан, агар x га Δx, $\Delta x > 0$ орттирма берсак, $V(x)$ функциянинг орттирмаси қуйидагича ёзилади: $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$. 1.41-расмдан $\Delta V = V_{AA_1C_1C}$ бўлишини кўрамиз. Жисмнинг бу қисмининг ҳажми AA_1D_1D цилиндрнинг ҳажмидан катта, BB_1C_1C цилиндрнинг ҳажмидан кичик. $S_{AA_1D_1D} = S(x) \cdot \Delta x$, $S_{BB_1C_1C} = S(x + \Delta x) \cdot \Delta x$ эканлигидан,



1.40-расм



1.41-расм

$$S(x)\cdot\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant S(x+\Delta x)\cdot\Delta x \Rightarrow S(x) \leqslant \frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} \leqslant S(x+\Delta x).$$

Бундан $\Delta x \to 0$ бўлганда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} S(x) = S(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} S(x+\Delta x) = S(x)$ эканлигини эътиборга олсак,

$$V'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x} = S(x)\cdot$$

$V(x)$ функция – $S(x)$ нинг бошланғич функцияси.

Ньютон-Лейбниц формуласи бўйича

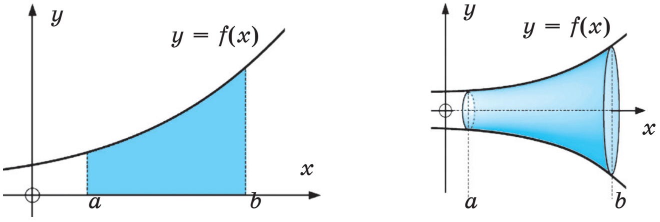
$$\int_a^b S(x)\,dx = V(b)-V(a)\cdot$$

$V(b) = V$, $V(a) = 0$ эканлигидан, $V = \int_a^b S(x)\,dx$ формула олинади.

Шундай қилиб, $V = \int_a^b S(x)\,dx$ формулани қўллаш учун $S(x)$ функция маълум бўлиши керак. Албатта, ҳар бир жисм учун $S(x)$ функциянинг кўринишини аниқлаш мураккаб масала. Бироқ, баъзи бир хусусий холларда бу функциянинг кўринишини аниқлаш мумкин. Бундай хусусий холларга айланма жисмлар мисол бўла олади.

1.4.3. Айланма жисмларнинг ҳажмлари

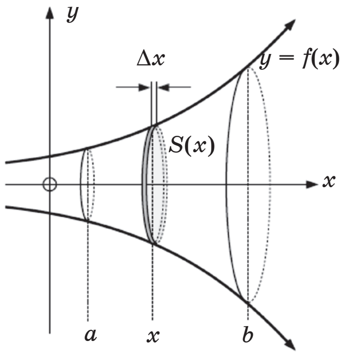
Таъриф. $[a, b]$ *кесмада* $y = f(x)$ *узлуксиз функциянинг графигини Ох ўқи атрофида айлантирганда хосил бўлган сирт билан чегараланган жисм* ***айланма жисм*** *деб аталади* (1.42-расм).



1.42-расм

Гуруҳларда ишлаш

Цилиндр, конус, кесик конус, шар фигураларини хосил қилиш учун қандай фигураларни қандай ўқ атрофида айлантирилишини айтинг.



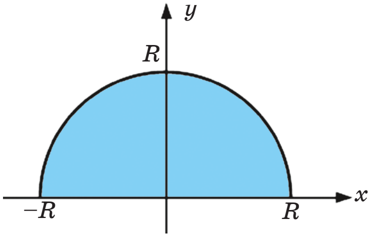
1.43-расм

Айланма жисмнинг ҳажмини топиш учун аниқ интегралдан фойдаланилади.

$[a;\ b]$ кесмадан исталган x нуқтани олайлик. Шу нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр текислик ўтказсак, кесимда доира пайдо бўлади (1.43-расм). Хосил бўлган доиранинг радиуси $f(x)$. Демак, кесимнинг юзи $S(x)=\pi f^2(x)$. Айланма жисмнинг ҳажмини топиш учун $V=\int_a^b S(x)dx$ формуладан фойдалансак, $V=\int_a^b S(x)dx = =\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

ёки

$$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx\ . \qquad (3)$$

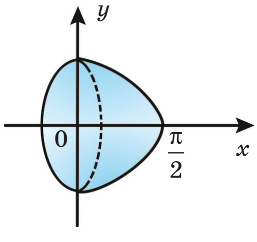


1.44-расм

1-мисол. Радиуси R бўлган шарнинг ҳажми $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ формула билан ҳисобланишини исботлаш керак.

▲ Шар ярим доирани Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида хосил бўлади (1.44-расм). Ярим доиранинг тенгламаси $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Бундан

$$V=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$ ■



1.45-расм

2-мисол. $y=\cos x,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функциянинг графигини Ox ўқи атрофида айлантирганда хосил бўладиган жисмнинг ҳажмини аниқлайлик (1.45-расм).

▲ $V=\pi\int\limits_0^b f(x)^2\,dx$ формула ва даражани пасайтириш формуласи бўйича

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\pi\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.\blacksquare$$

1. $v = v(t)$, $t\in[t_1;\ t_2]$ тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракатланадиган моддий нуқтанинг ўрин алмаштиришини аниқлайдиган формулани ёзинг.
2. Ҳаракатнинг вақтга боғлиқлик функциясининг графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзининг маъносини тушунтиринг.
3. Шар ҳажмини топиш формуласини исботланг.
4. Жисм ҳажмини аниқ интеграл орқали ҳисоблаш формуласини ёзинг.
5. Айланма жисм деб қандай жисмга айтилади?
6. Айланма жисмнинг ҳажми қандай формула билан топилади?
7. $F = F(x)$, $x\in[a;\ b]$ куч таъсирида жисм ўрин алмаштирганда бажариладиган иш қандай аниқланади?

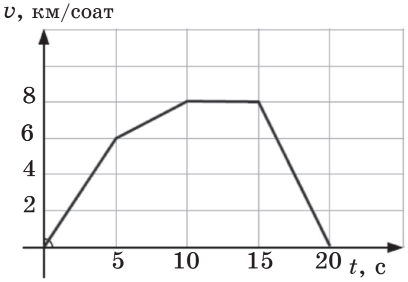
➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

https://www.desmos.com/calculator – онлайн график калькулятор

Мисоллар

А

1.120. 1.46-расмда ўқувчининг югуриш тезлигининг вақтга боғлиқлик графиги берилган. Ўқувчи югурган масофани топинг.



1.46-расм

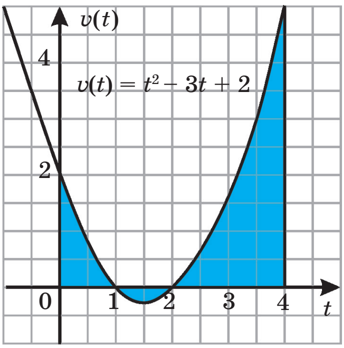
1.121. Моддий нуқта тезлигининг вақтга боғлиқлиги $v(t)$ функция билан берилган. Унинг t вақт оралиғида босиб ўтган йўлини топинг:

1) $v(t) = t - 3,\ t = 3$; 2) $v(t) = 3t + 5,\ t = 5$;

3) $v(t) = t^2 + 4t - 1,\ t = 3$; 4) $v(t) = 3t^2 - 2t + 4,\ t = 2$.

1.122. 1.122. Моддий нуқта тезлигининг вақтга боғлиқлиги $v(t) = t^2 - 3t + 2$ формула билан берилган. Дастлабки 4 секундда босиб ўтган йўлни ва бошланғич нуқтадан қандай узоқликка кетганини топинг.

▲ $v(t) = t^2 - 3t + 2$ параболанинг графиги 1.47-расмда тасвирланган. t ўқининг юқори қисмида жойлашган эгри чизиқли трапециянинг юзи мусбат томонга ҳаракатланган жисмнинг босиб ўтган йўлини, t ўқининг пастки қисмида жойлашган эгри чизиқли трапециянинг юзи қарама-қарши юрган йўлни кўрсатади. Графикка кўра ҳаракатнинг дастлабки 1 секундида моддий нуқта мусбат йўналишда ушбу йўлни босиб ўтган:



1.47-расм

$$s_1 = \int_0^1 \left(t^2 - 3t + 2\right)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

1 с ва 2 с оралиғида моддий нуқта қарама-қарши йўналишда борган:

$$s_2 = \int_1^2 \left|t^2 - 3t + 2\right|dt = \left|\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^2\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}.$$

2 с нинг оҳирида қайтадан мусбат йўналишда ҳаракатланган:

$$s_3 = \int_2^4 \left(t^2 - 3t + 2\right)dt = \frac{14}{3}.$$

Бундан бутун босиб ўтилган йўл:

$$s = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = 5\frac{2}{3} \text{ (бирлик).}$$

Бошланғич нуқтадан узоқлашган масофа эса:

$$D = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (бирлик).}$$ ■

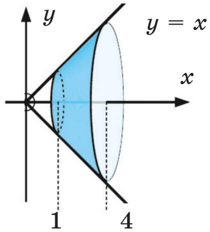
1.123. Моддий жисм тезлигининг вақтга боғлиқлик функцияси $v(t) = 1 - 2t$ м/с. Дастлабки 1 с да босиб ўтилган йўлни ва бошланғич нуқтадан қанча узоқлашганини топинг.

1.124. Моддий жисм тезлигининг вақтга боғлиқлик функцияси: 1) $v(t) = t^2 - t - 2$ м/с; 2) $v(t) = 3t^2 + 4t$ м/с. Дастлабки 3 с да босиб ўтилган йўлни ва бошланғич нуқтадан қанча узоқлашганини топинг.

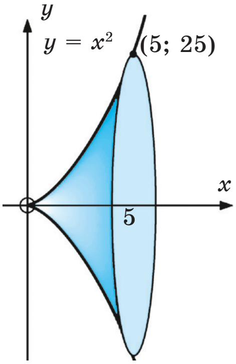
Татбиқий топшириқ

1.125. Поезд тезлигининг вақтга боғлиқлиги $v(t) = \frac{t}{10} - 3$ м/с қонуният билан ўзгаради. Поезднинг бошланғич тезлиги 45 м/с бўлса, дастлабки минутда босиб ўтилган йўлни топинг.

1.126. $V = \pi\int\limits_a^b f(x)^2\,dx$ формула орқали 1.48, 1.49-расмларда тасвирланган айланма жисмларнинг ҳажмини топинг.

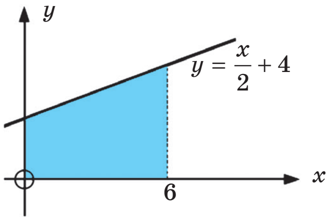


1.48-расм

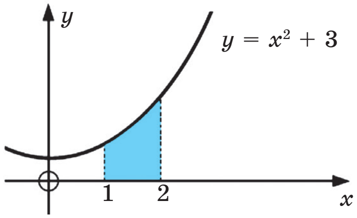


1.49-расм

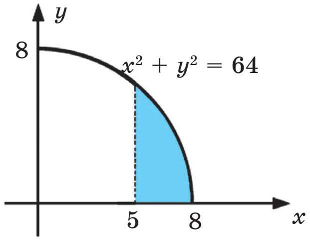
1.127. 1.50 *а, б, в*-расмларда берилган эгри чизиқли трапецияни О*x* ўқи атрофида айлантирганда хосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.



1.50, а-расм



1.50, ә-расм



1.50, *б*-расм

1.128. Эгри чизиқли трапеция О*x* ўқи атрофида айланганда хосил бўлган жисмни тасвирлаб, ҳажмини топинг:

1) $y = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; 2) $y = x^3$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = x^2$, $2 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

1.129. Эгри чизиқли трапеция Ox ўқи атрофида айланганда хосил бўлган жисмни тасвирлаб, ҳажмини топинг:

1) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 2) $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $y = \sqrt{x}$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.

1.130. Эгри чизиқли трапеция Ox ўқи атрофида айланганда хосил бўлган жисмни тасвирлаб, ҳажмини топинг:

1) $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $y = 2x - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$;

3) $y = -\frac{x}{2} + 2$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $y = \sqrt{x-2}$, $2 \leqslant x \leqslant 11$.

1.131. Пружинани 1 см га чўзиш учун 0,1 кН куч билан таъсир этиш керак. Пружинани 5 см га чўзиш учун қандай куч сарфланади?

B

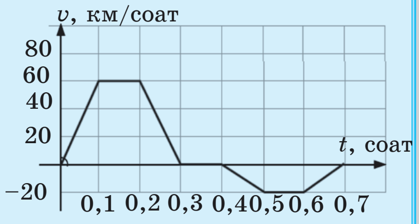
Татбиқий топшириқлар (1.132—1.135):

1.132. Машина тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланади. Ҳаракат тезлигининг вақтга боғлиқлик функциясининг графиги 1.51-расмда берилган.

1) Графикнинг t ўқидан юқорида, пастда ва t ўқида жойлашишининг маъносини тушунтиринг.

2) Машинанинг умумий босиб ўтган йўлини топинг.

3) Машинанинг бошланғич нуқта билан таққослаганда ўрин алмаштиришини аниқланг.



1.51-расм

1.133. Велосипедчи ҳаракатланишни бошлагандан кейин дастлабки 3 минут давомида тезлигини 40 км/соат гача етказди. Сўнгра 10 мин давомида ўзгармас тезлик билан ҳаракатланди. Чарчагандан кейин тезлигини 1 мин давомида 30 км/соат гача камайтириб ва шу тезлик билан яна 10 мин ҳаракатланди. Сўнгра тезлигини камайтириб 2 мин давомида тўхтади. Тезликнинг вақтга боғлиқлик графигини чизиб, велосипедчининг босиб ўтган йўлини топинг.

1.134. Моддий жисм тезлигининг вақтга боғлиқлик функцияси $v(t) = -4t^3 + 16t$ м/с. Берилган вақт оралиғида жисмнинг босиб ўтган йўлини топинг:
1) $0 \leqslant t \leqslant 3$ с; 2) $1 \leqslant t \leqslant 3$ с.

1.135. Моддий жисм тезлигининг вақтга боғлиқлик функцияси $v(t) = -3t^2 + 2t$ м/с. Дастлабки секундда босиб ўтган йўли билан бошланғич нуқтадан қанча узоқликда ўрин алмаштирганини топинг.

1.136. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигура Ox ўқи атрофида айлантирилганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг:
1) $y = x + 1,\ y = 1,\ x = 2$; 2) $y + x = 2,\ y = x,\ x = 0$;
3) $y = \dfrac{x^2}{2},\ y = x$; 4) $y = 2\sqrt{x},\ y = x$.

1.137. Эгри чизиқли трапеция Ox ўқи атрофида айлантирилганда ҳосил бўлган жисмни тасвирлаб, ҳажмини топинг:
1) $y = \cos 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; 2) $y = (x - 1)^3,\ 1 \leqslant x \leqslant 3$;
3) $y = 4\sin 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; 4) $y = \sqrt{\sin x},\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1.138*. Агар $y = f(x)$ функция $[a; b]$ оралиқда узлуксиз ва монотон бўлиб, $c \leqslant f(x) \leqslant d,\ x \in [a; b]$ тенгсизлик бажарилсин. Шу эгри чизиқни Oy ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V = \pi\int_c^d \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx \qquad (3)$$

формула билан ҳисобланишини кўрсатинг.

Умуман, амалда қулай бўлиш учун Ox ўқи атрофида айланадиган жисмлар учун

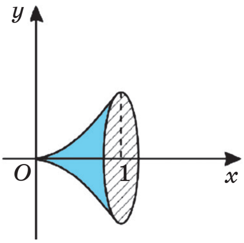
$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$$

кўринишда, (3) формуладан (Oy ўқи атрофида айлантирилган жисмлар учун)

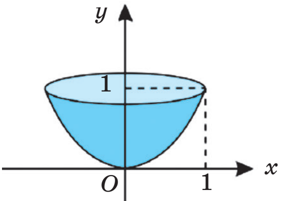
$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$$

кўринишда кўп фойдаланилади. Масалан, $y = x^2,\ x \in [0; 1]$ параболани Ox ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажми қуйидагича аниқланади (1.52-расм):

$$V_x = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}.$$



1.52-расм



1.53-расм

Ушбу эгри чизиқ Oy ўқи атрофида айлантирилганда хосил бўлган жисмнинг ҳажмини топиш учун берилган функцияни қуйидагича ёзамиз (x ни y орқали ифодалаймиз): $x = \sqrt{y}$, $y \in [0;\ 1]$. У ҳолда бизга керак бўлган жисмнинг ҳажми (1.53-расм):

$$V_y = \pi\int_0^1 x^2dy = \pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2dy = \pi\int_0^1 ydy = \frac{\pi}{2}.$$

1.139. 1) $y = 6x - x^2 - 5$; 2) $y = 2x - x^2$ парабола ва $y = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигура Ox ўқи атрофида айлантирилганда хосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

1.140. Тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг тезлиги $v = 2t + 1$ (м/с) тенглама билан берилган. Моддий нуқта дастлабки 6 м йўлни қанча вақтда босиб ўтади?

Татбиқий топшириқ

1.141. Пружинани 1 см га чўзиш учун 1 кН куч таъсир этилади. У $A = 5$ кДж иш бажарганда неча сантиметрга чўзилади?

C

1.142. Моддий жисм тезлигининг вақтга боғлиқлик функцияси берилган: $v(t) = \cos t$ м/с. Моддий жисмнинг иккита нуқта орасидагина ҳаракатланаётганини исботланг ва шу нуқталар орасидаги масофани топинг.

1.143. $y = \sqrt{4 - x^2}$ эгри чизиқни Ox ўқидан юқори қисмидаги бўлагини Oy ўқи атрофида айлантирганда хосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

1.144. Қуйидаги эгри чизиқлар билан чегараланган фигура Ox ўқи атрофида айлантирилганда хосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг. Керакли чизмаларни чизинг:

1) $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

2) $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

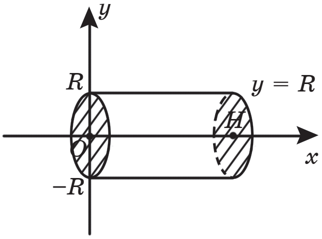
3) $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$;
4) $y = x^2$, $y^2 = x$.

1.145. Асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган 1) цилиндрнинг; 2) конуснинг ҳажмини интеграл ёрдамида ҳисобланг.

▲ 1) $y = R$

$$V = \pi\int_0^H R^2dx = \pi R^2 x\Big|_0^H =$$

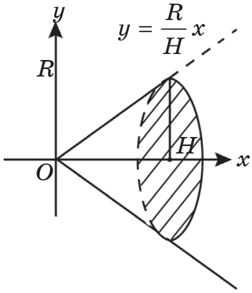
$$= \pi R^2(H - 0) = \pi R^2 H.$$



2) $y = \dfrac{R}{H}x$

$$V = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi\frac{R^2}{H^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H =$$

$$= \pi\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{H^3}{3} - 0\right) = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$ ■



1.146. Асосининг радиуси R ва r, баландлиги H бўлган конуснинг ҳажмини топинг.

1.147. Радиуси R ва марказий бурчаги α га тенг бўлган шар секторининг ҳажмини топинг.

Татбиқий топшириқ

1.148. Массаси 16 кг бўлган тошни ер сиртидан 1 м баландликка кўтарганда бажарилган ишни топинг.

1.149. $y = 2x^2$ ва $x + y = 3$ тўғри чизиқларнинг графикларини координаталар текислигининг биринчи чорагида ясанг. Парабола билан тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топинг. Парабола ва тўғри чизиқ билан чегараланган фигурани Оy ўқи атрофида айлантирганда хосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

***1.150.** Енгил машина чироғининг сирти $x = 2t^2$, $y = 4t$, $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$ тенгламалар билан моделланган. Бу эгри чизиқнинг тенгламаси $y^2 = 8x$ эканлигини кўрсатинг. Эгри чизиқ Ox ўқи атрофида айлантирилганда хосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

Такрорлашга доир машқлар

1.151. $x^2 + y^2 = 50$ айлана билан $x+7y=50$ тўғри чизиқнинг уринишини кўрсатиб, уриниш нуқтасининг координаталарини топинг.

1.152. $q = \frac{1}{2}$, $b_n = 2$, $S_n = 254$ бўлса, геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади ва n ни топинг.

1.153. Ифоданинг энг катта қийматини топинг:

1) $1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha \operatorname{tg} 2\alpha + 5\cos 2\alpha - 1$.

1.154. $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ тенгламанинг $[-\pi;\ \pi]$ оралиққа тегишли барча ечимларини топинг.

«БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ» бўлимининг хулосаси

$(a;\ b)$ оралиқда исталган x учун $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $(a;\ b)$ оралиқда $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* деб аталади.

$(a;\ b)$ оралиқда $y = F(x)$ функция $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, исталган C ўзгармас катталик учун $y=F(x)+C$ функция ҳам $y = f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади.

Исталган $x \in I$ учун $y = f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялар тўпламини шу функциянинг аниқмас интеграли деб аталади ва $\int (x)dx$ каби белгиланади.

1) $\int k dx = kx + C$; 2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1$;

3) $\int \cos x dx = \sin x + C$; 4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

Ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси олдига чиқариш мумкин:

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx.$$

Йиғиндининг интеграли қўшилувчилар интегралларининг йиғиндисига тенг:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Интеграллашнинг ўзгарувчини алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усуллари: $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$, $\int udv = uv - \int vdu$.

$y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $f(x) \geqslant 0$ узлуксиз функция, $F(x)$ унинг бошланғич функцияси бўлсин.

Номанфий узлуксиз $y = f(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган фигура *эгри чизиқли трапеция* дейилади.

Унинг юзи $S = F(b) - F(a)$ формула билан аниқланади.

$y = f(x)$, $x \in [a; b]$ узлуксиз функция бўлсин. Шу функциянинг b ва a нуқталардаги бошланғич функциялари қийматларининг айирмаси шу функциянинг *аниқ интеграли* деб аталади ва у $\int_a^b f(x)dx$ орқали белгиланади.

Ньютон-Лейбниц формуласи: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad \int_a^a f(x)dx = 0 . \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Амалий, физик масалаларни ечишда, айланма жисмларнинг ҳажмини топишда аниқ интегралдан фойдаланилади.

Терминлар номининг луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Бошланғич функция	Алғашқы функция	Первообразная	Antiderivative
Аниқмас интеграл	Анықталмаған интеграл	Неопределенный интеграл	Indefinite integral
Интеграл остидаги функция	Интеграл астындағы функция	Подынтегральная функция	Integrand
Интеграл остидаги ифода	Интеграл астындағы өрнек	Подынтегральное выражение	Expression under the integral sign
Эгри чизиқли трапеция	Қисықсызықты трапеция	Криволинейная трапеция	Curvilinear trapezium
Аниқ интеграл	Анықталған интеграл	Определенный интеграл	Definite integral
Ньютон-Лейбниц формуласи	Ньютон-Лейбниц формуласы	Формула Ньютон-Лейбница	Newton-Leibniz formula
Бўлаклаб интеграллаш	Бөліктеп интегралдау	Интегрирование по частям	Integration by parts
Ўзгарувчини алмаштириш усули	Айнымалыны алмастыру тәсілі	Метод замены переменной	Integration by substitution

II бўлим. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

«Статистика» термини лотинча «status» сўзидан олинган бўлиб, «ҳолат», «ҳол-ахвол» деган маънони билдиради. Жамиятда, табиатда рўй бераётган жараёнлар турли-туман ва мураккаб бўлади. Статистиканинг ёрдамида тадқиқотчилар табиий-ижтимоий ҳодисаларни, жараёнларни сон ёрдамида ёки сонлар нисбати орқали ҳар томонлама ўрганади. Масалан, юристлар, социологлар, психологлар жиноятга тегишли бўган ахборотни тўплаб, уларни ўрганади. Жуда катта статистик маълумотларни, сонли маълумотларни ўрганиш учун математик статистикадан фойдаланилади. Маттематик статистика – қандайдир бир қонуниятни кўриш учун маълумотларни қайта ишлаш йўлларини кўрувчи математиканинг бўлими. Унинг мақсади – илмий ва амалий хулосалар чиқариш мақсадида статистик маълумотларни тўплаш ва қайта ишлаш усулларини шакллантириш. Ҳозирги вақтда маттематик статистика усулларидан фойдаланмайдиган бирорта фан, техника, қишлоқ хўжалиги ва сиёсий-ижтимоий соҳани кўрсатиш мумкин эмас. Ушбу бўлимда математик статистиканинг бошланғич тушунчалари билан танишасиз.

Ақмола областининг фермери буғдой етиштиради. Буғдойниннг хосилдорлиги бошоқлардаги буғдой сони билан ўлчанади. Буғдой хосилдорлигини орттириш учун фермер ўғитлардан фойдаланиб, унинг буғдой хосилдорлигига таъсирини ўрганмоқчи бўлди. У ерининг бир қисмига ўғитдан фойдаланди, иккинчи қисмига ҳеч нарса фойдаланмади. Бироқ экин майдонининг иккала қисмига ҳам бир хил ишлов берди. Бўлим материалларини ўқиб, ўрганиш давомида шу иккита ердан олинган хосилни статистик усуллар билан таққослашни ўрганасиз.

Бўлимда ўрганиладиган мавзулар:

2.1. Асосий тўплам ва танланма тўплами.Дискрет ва интервалли вариацион қаторлар. Асосий ўрта статистикалар

2.2. Статистик диаграммалар: частота полигони ва гистограмма

2.3. Тасодифий катталиклар танланмасининг сонли тавсифи

2.1. Асосий тўплам ва танланма. Дискрет ва интервалли частота жадваллари. Асосий ўрта статистикалар

Бу мавзуда статистикада фойдаланиладиган асосий терминлар билан танишиб, оҳирида:

- асосий тўплам ва танланма тўпламини аниқлаб, мисол келтира оласиз;
- асосий тўплам билан танланма ҳажмини топишни ўрганасиз;
- асосий ўрта статистика қийматларини аниқлайсиз;
- дискрет тасодифий катталик билан узлуксиз тасодифий катталикни фарқлай оласиз, мисол келтирасиз;
- частота жадвали билан солиштирмали частота жадвалини тузасиз.

2.1.1. Асосий тўплам ва танланма

Баъзи биржинсли объектлар тўпламида маълум бир сонли белгиларига кўра кузатишлар олиб бориш керак бўлади. Масалан, маълум бир завод ишлаб чиқарадиган деталларнинг ўлчовларини (узунлиги, юзи, ҳажми, массаси, оғирлиги ва хоказо) текшириш керак. Бундай ҳолларда биз сон қийматли ахборотларни тўплаймиз. Баъзида берилган объектлар тўпламини тўлиқ текширилади, яъни берилган тўпламнинг ҳар бир элементининг бизга керак бўлган аломатлари ўрганилади. Амалда бундай тўлиқ текширишни бажариш, айниқса, берилган объектлар тўпламида жуда кўп элементлар бўлса, ҳар бир элементни текшириб чиқиш мумкин эмас. Масалан, маълум бир ер майдонига экилган доннинг хосилдорлигини, яъни сепилган доннинг неча фоизи униб чиққанини аниқлаш керак бўлсин. Бунда бу ер майдонини тўлиқ текшириб чиқиш, яъни ҳар бир сепилган доннинг униб чиққанини ёки униб чиқмаганини аниқлаш мумкин эмас. Бундай ҳолларда бутун тўпламдан унинг чекли бўлагини тасодифан танлаб олиб, шу танлаб олинган бўлакнинг элементлари ўрганилади.

Таъриф. *Ўрганиладиган объектлар тўплами* ***асосий тўплам*** *дейилади. Асосий тўпламдан тасодифан танлаб олинган объектлар тўплами танланма тўплам ёки оддийгина* ***танланма*** *деб аталади.*

Юқорида кўриб чиқилган мисолда берилган ер майдонига сепилган ҳамма донлар тўплами – асосий тўплам, тасодифан танлаб олинган бўлакка сепилган донлар тўплами танланма бўлади.

Гуруҳларда ишлаш

Асосий тўплам билан танланмага мисол келтиринг. Масалан, мамлакатимиздаги мактабларнинг 11-синф ўқувчиларига мактаб формасини тикиш учун ўқувчиларнинг бўйининг узунлиги ҳақидаги маълумот керак бўлади. Бунинг учун тадқиқотчилар тасодифан 4 та мактабнинг 11-синф ўқувчиларининг бўйининг узунликларини ўлчаб олди. Бунда мамлакатимиздаги ҳамма 11-синф ўқувчилари асосий тўплам, тасодифий танлаб олинган 4 та мактабнинг 11-синф ўқувчилари – танланма тўплам.

Тўпламга кирган объектлар сони тўпламнинг *ҳажми* деб аталади. Масалан, агар берилган 10 000 детал орасидан текшириш учун 100 детал тасодифан танлаб олинса, танланма ҳажми 10 000 бўлади.

2.1.2. Частота жадвали

Мисол кўриб чиқайлик.

Ақмола областининг фермери бўғдой етиштиради. Буғдой хосилдорлигини орттириш учун фермер ўғитдан фойдаланиб, уни ўрганмоқчи бўлди. У ернинг бир бўлагига ўғит солди, иккинчи бўлагига ўғит солмади. Бироқ иккала қисмидаги буғдойга бир хил ишлов берди. Кузда иккала бўлакда ўстирилган экин майдонининг ҳар биридан тасодифан 150 та бошоқдан териб олди ва ҳар бир бошоқдаги буғдой дони саналди.

Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сони:

6 7 7 4 9 5 5 5 8 9 8 9 7 7 5 8 7 6 6 7 9 7 7 7 8 9 3 7 4 8 5 10 8
6 7 6 7 5 6 8 7 9 4 4 9 6 8 5 8 7 7 4 7 8 10 6 10 7 7 7 9 7 7 8 6 8 6 8
7 4 8 6 8 7 3 8 7 6 9 7 6 9 7 6 8 3 9 5 7 6 8 7 9 7 8 4 8 7 7 7 6 6 8 6
3 8 5 8 7 6 7 4 9 6 6 6 8 4 7 8 9 7 7 4 7 5 7 4 7 6 4 6 7 7 6 7 8 7 6 6
7 8 6 7 10 5 13 4 11 12

Бу берилган маълумотларни шу ҳолида ўрганиш тадқиқотчиларга қийин бўлади, чунки улар ноқулай. Маълумотларни қайта ишлаб, уни кўргазмали турда ёзиш йўллари мавжуд. Шулардан бири—частота жадвалини тузиш. Частота жадвалини тузиш учун берилган танланма сонининг қийматларини биттадан олиб, уларни ўсиш тартибида ёзамиз. Шу тариқа олинган сонлар кетма-кетлиги ***вариаци-***

он қатор, вариацион қаторнинг ҳар бир элементи *варианта* деб аталади. Ўғит сепилган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонини кўрадиган бўлсак, ҳар бир бошоқдаги донлар сони 3 тадан 13 тагача етганини кўрамиз. Шундай қилиб, тасодифий олинган бошоқлардаги донлар сони, яъни танланма сони 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ва бошқа сонлар учрамайди. Шу олинган сонлар кетма-кетлиги бизнинг мисолдаги *вариацион қатор*, қаторнинг ҳар бир элементи – *вариантадир*. Бунда энг кичик варианта 3 ва у вариацион қаторда 4 марта учрайди, 4 варианта қаторда 13 марта учрайди, 5 сони кетма-кетликда 11 марта учрайди, шундай давом эттириб, берилган маълумотларни 2.1-жадвалга ёзамиз:

Бошоқдаги буғдой донининг сони, x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Вариацион қатор
Частота, n_i	4	13	11	28	46	27	14	4	1	1	1	Танланма ҳажми 150 га тенг

2.1-жадвал. Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сони

> **Таъриф.** *Танланма элементлари орасида тенг бўлмаган элементларни биттадан олиб, уларни ўсиш тартибида ёзганда хосил бўладиган кетма-кетлик* ***вариацион қатор*** *деб, вариацион қаторнинг ҳар бир элементи эса* ***варианта*** *деб аталади.*

Дастлабки сонлар кетма-кетликлари билан таққослаганда сонларнинг частота жадвали ёрдамида текшириш осон ва тушунарли. Вариацион қаторда x_i варианта n_i марта такрорланса, n_i сони x_i вариантанинг ***частотаси*** дейилади. Бизнинг мисолда 5 вариантанинг частотаси 11 га, 6 вариантанинг частотаси 28 га, 7 вариантанинг частотаси 46 га тенг, ва хоказо. Барча варианталар частоталарнинг йиғиндиси танланма *ҳажмини* беради. Агар вариантаaларнинг остига мос бўлган частоталарини ёзиб, жадвал тузсак, бу жадвал *вариацион қаторнинг частоталар жадвали* ёки *оддийгина частота жадвали* деб аталади (2.2-жадвал):

x_i – танланма вариантасининг элементлари	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i – частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

2.2-жадвал. Частота жадвалининг кўриниши

Гуруҳларда ишлаш

Ўғит сепилмаган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сони берилган. Шу маълумотлар асосида частота жадвалини тузинг, жавобингизни 2.4-жадвал билан (79-бет) таққосланг:

4 6 5 6 5 6 4 6 4 9 5 3 6 8 5 4 6 8 6 5 6 7 4 6 5 2 8 6 5 6 5 5 5 4 4 4
6 7 5 6 7 5 5 6 4 8 5 3 7 5 3 6 4 7 5 6 5 7 5 7 6 7 5 4 7 5 5 5 6 6 5 6 7 5
8 6 8 6 7 6 6 3 7 6 8 3 3 4 4 7 6 5 6 4 5 7 3 7 7 6 7 7 4 6 6 5 6 7 6 3 4 6
6 3 7 6 7 6 8 6 6 6 6 4 7 6 6 5 3 8 6 7 6 8 6 7 6 6 6 8 4 4 8 6 6 2 6 5 7 3

Частота жадвалини тузишда Ms Excell электрон жадваллар редакторидан фойдаланиш.

➤ **Қўшимча электрон ресурслар**

http://ourmath.ru/articles/tablitsa-i-diagramma-na-excel-legko.html

Баъзи бир маълумотларни фоизларда тавсифлаб кўрсатган маъқул. Бундай холларда *солиштирмали частоталар жадвали* фойдаланилади. Агар x_i вариантанинг частотаси n_i, танланма ҳажми n бўлса, n_i/n сони шу вариантанинг *солиштирма частотаси* деб аталади. 2.2-жадвалдаги частоталар ўрнига мос солиштирма частотани қўлласак, *солиштирма частоталар жадвали* хосил бўлади. Агар солиштирма частотани 100 га кўпайтирсак, мос вариантанинг танланма таркибидаги фоизлардаги қисми чиқади. Масалан, ўғит сепилган ердан олинган буғдой бошоқларидаги донлар сонини тавсифловчи кетма-кетликнинг солиштирма частоталари 2.3-жадвалда берилган. Бунда 8 га тенг бўлган вариантанинг танланма таркибидаги фоизлардаги қисми $\frac{27}{150}100\% = 18\%$.

Бошоқдаги буғдой донининг сони, x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Жами
Солиштирма частота, n_i/n	$\frac{4}{150}$	$\frac{13}{150}$	$\frac{11}{150}$	$\frac{28}{150}$	$\frac{46}{150}$	$\frac{27}{150}$	$\frac{14}{150}$	$\frac{4}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{150}$	1

2.3-жадвал. Ўғит сепилган ердан олинган буғдой бошоқларидаги донлар сонининг солиштирма частотаси

Солиштирма частоталар жадвали:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

2.1.2. Асосий ўрта статистик қийматлар

Берилган танланмани ўрганиб, кузатиш учун ўрта статистик қийматлар фойдаланилади: танланма қулочи, танланманинг модаси билан медианаси, танланманинг ўртача қиймати. Улар билан биз қуйи синфлардан бошлаб танишмиз. Энди уларнинг таърифларини ёдга туширамиз:

> **Таъриф.** *Танланма вариантаси элементларининг ичида энг каттаси билан энг кичигининг айирмаси* ***танланманинг қулочи*** *деб аталади ва R ҳарфи билан белгиланади:*
>
> $$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Масалан, ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сони учун танланма қулочи $R = 13 - 3 = 10$.

> **Таъриф.** *Танланма элементлари ичидан энг кўп учрайдиган элемент* ***танланманинг модаси*** *деб аталади.* Модани M_o орқали белгиланади.

Масалан, ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сони учун танланманинг модаси 7 га тенг, чунки бошоқдаги буғдой сони 7 та бўлган бошоқлар 47 марта учрайди, танланманинг бошқа қийматлари билан таққослаганда бу энг кўп учраган қиймат. Танланманинг модаси ҳар доим бир қийматли аниқланавермайди, чунки баъзи иккита ёки ундан ортиқ танланманинг ваианталарнинг частоталари бир хил ва энг катта қийматга тенг бўлиши мумкин.

Танланманинг модасини аниқлаш учун Ms Excell электрон жадваллар редакторидан фойдаланиш.

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

http://ourmath.ru/articles/kak-nayti-modu-neskolykih-tchisel-ispolyzuya-excel.html

Таъриф. *Танланма элементларининг ўрта арифметиги* ***танланманинг ўртача қиймати*** *деб аталади ва* $\overline{X}$ *ҳарфи билан белгиланади.*

$$\overline{X} = \frac{\text{барча элементларнинг йиғиндиси}}{\text{элементлар сони}}.$$

Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг ўртача қийматини топиш учун аввал барча элементларни қўшиб оламиз. Хосил бўлган йиғиндини элементлар сонига бўламиз. Танланманинг элементлар сони (танланма ҳажми) 150.

$$\overline{X} = \frac{\text{барча элементларнинг йиғиндиси}}{\text{элементлар сони}} = \frac{6+7+7+4+\ldots+4+11+12}{150}.$$

Танланма ҳажми катта бўлган сайин ўртача қийматни ҳисоблаш қийин бўлади. Шу сабабли частота жадвалидан фойдаланиб ҳисоблаш керак:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i\ n_i}{\sum n_i} = \frac{3\cdot4+4\cdot13+5\cdot11+\ldots+12\cdot1+13\cdot1}{150} \approx 6,85.$$

Шундай қилиб, ўғит солинган ерда битта бошоқдаги буғдой сонининг ўртача қиймати 6,85.

Танланманинг ўртача қийматини аниқлаш учун Ms Excel электрон жадваллар редакторидан фойдаланиш.

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

http://ourmath.ru/articles/vtchislyaem-srednee-znatchenie-neskolykih-tchisel.html

Таъриф. *Танланма элементларини ўсиш тартибида жойлаштириб, сонлар кетма-кетлиги кўринишда ёзамиз. Танланма ҳажми тоқ сон бўлса, кетма-кетликнинг ўртасида жойлашган элементни* ***танланма медианаси*** *деб аталади. Танланма элементларининг сони жуфт бўлса, кетма-кетликнинг ўртасидаги иккита соннинг ўрта арифметиги танланманинг* ***медианаси*** *бўлади. Медиана* M_e *орқали белгиланади.*

Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сони 150. У ҳолда ўсиш тартиби билан жойлаштирганда 75- ва 76-элементларнинг ўрта арифметиги медиана бўлади:

$$M_e = \frac{x_{75} + x_{76}}{2} = \frac{7+7}{2} = 7.$$

Медиана танланма элементларининг тенг иккига бўлади. Масалан, синфдаги ўқувчиларнинг назорат ишларидан олган балларининг медианаси 15 бўлса, синфнинг камида ярмининг олган балларининг сони 15 дан кам эмас деганни билдиради. Медиананинг ўрта статистик тоифасига тегишли деганимиз тўғри, бу асосан бошқа ўрта қийматлар тўлиқ маълумот бермаганда муҳим.

Танланманинг ўртача қийматини аниқлаш учун Ms Excell электрон жадваллар редакторидан фойдаланиш.

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

http://ourmath.ru/articles/vtchislenie-median-neskolykih-tchisel.html

Гуруҳларда ишлаш

2.4-жадвалдаги ўғит солинмаган ердан олинган буғдой бошоқларидаги донлар сонининг частота жадвали орқали танланманинг кулочини, ўртача қийматини, модасини ва медианасини аниқланг.

Бошоқдаги буғдой донининг сони, x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота, n_i	2	11	19	29	51	25	12	1

2.4-жадвал. Ўғит солинмаган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг частота жадвали

1. Асосий тўплам нима?
2. Танланма деганда нимани тушунасиз?
3. Математик статистиканинг асосий мақсади нима?
4. Асосий тўплам (танланма) ҳажми деганда нимани тушунасиз?
5. Танланма вариантаси нима? Частотанинг (солиштирма частотанинг) жадвали қандай тузилади?

Мисоллар

А

2.1. Берилган мисоллардаги асосий тўплам билан танланманинг ҳажмини топинг (2.1-расм):

- Қозоғистондаги енгил машиналарнинг тарқалишини ўрганиш учун тадқиқотчилар Мағистов, Алмати ва Шарқий Қозоғистон областларидаги енгил машиналарни кўриб чиқадиган бўлди.
- 10 йилдан ортиқ хайдалган машиналарнинг моторини текшириш учун тадқиқотчилар Жамбил областининг машиналарини текширадиган бўлишди.

2016 йилнинг сентябридаги енгил машиналар сони (бирлик)

	Жами	3 йилдан кам	3—7 йил	7—10 йил	10 йилдан ортиқ
Қозоғистон	**3 853 705**	**622 546**	**391 282**	**350 054**	**2 264 640**
Ақмола обл.	177 457	23 855	14 612	15 134	115 335
Ақтобе обл	155 584	36 511	19 834	15 239	72 727
Алмати обл	467 912	39 099	29 332	34 406	349 908
Атиров обл	116 809	45 317	16 012	11 388	30 449
ҒҚО	118 949	27 945	12 807	11 400	57 991
Жамбил обл	189 600	10 598	11 300	11 972	151 763
Қарағанди обл	284 717	34 174	26 061	23 987	188 063
Қостанай обл	176 960	32 960	16 015	14 918	101 904
Қизилорда обл	109 866	13 575	9 015	9 017	72 913
Манғистов обл	140 403	34 561	19 632	16 059	56 324
ЖҚО	473 580	48 364	43 594	36 557	326 771
ШҚО	159 265	15 402	10 341	10 671	116 297
СҚО	150 278	20 008	12 859	14 425	95 836
ШҚО	306 342	46 584	27 107	28 893	187 001
Нур-Сұлтан шаҳри	346 434	74 101	33 702	23 431	90 447
Алмати шаҳри	463 674	90 562	72 570	60 736	205 812
Дипломатияли	21 628	8 187	4 931	2 306	3 930
Регион кўрсатилмаган	93 977	20 743	11 558	9 515	41 169
Манба: ҚР МИМСК (Миллий иқтисодиёт министрлигининг статистика комитети)					

2.1-расм

2.2. 13 кун давомида ўқитувчи мактабга келмай қолган ўқувчилар сони ҳақида ахборот тўплаб, қуйидаги маълумотларни олди: 4 6 3 2 7 8 3 5 5 7 6 6 4. Ушбу берилганларнинг ўртача қийматини, қулочини, модаси билан медианасини аниқлаб, уларнинг маъносини тушунтиринг.

2.3. Тасодифий катталикнинг асосий тўпламидан танланма олинган:

1) 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3;

2) 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6.

1) танланма ҳажмини топинг; 2) танланманинг ўрта статистикаларини аниқланг (қулочини, модаси, медианаси, ўртача қийматини); 3) частота жадвалини ёзинг.

2.4. Қандайдир дискрет тасодифий катталикнинг асосий тўпламидан ушбу танланма олинган: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4.

1) танланманинг вариацион қаторини тузинг; 2) танланма ҳажмини ва ўрта статистикаларини аниқланг; 3) частота жадвалини ёзинг.

2.5. 11-синфдан тасодифий олинган 50 та ўқувчидан савол-жавоб ўтказиш натижасида уларнинг пойафзалларининг ўлчами қуйидаги бўлди: 40, 38, 38, 39, 36, 42, 41, 37, 37, 39, 39, 40, 41, 40, 40, 39, 42,40, 39, 38, 39, 40, 39, 40, 36, 35, 41, 41, 36, 42, 37, 40, 39, 38, 41, 38, 42, 42, 37, 35, 41, 36, 38, 39, 40, 40, 38, 39, 37, 41. Ушбу танланманинг ҳажмини, танланма варианталарини аниқланг ва частота жадвали билан солиштирма частота жадвалини тузинг.

▲ 1) Масала шатига кўра танланма ҳажми 50.

2) Савол-жавоб натижасида пойафзал ўлчамларининг 8 та тури учраган: 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42. Бу танланма варианта бўлади.

3) Берилган кетма-кетликда 35-ўлчамли пойафзални 2 ўқувчи, 36 – 4 ўқувчи, 37 – 5 ўқувчи, 38 – 7 ўқувчи, 39 – 10 ўқувчи, 40 – 10 ўқувчи, 41 – 7 ўқувчи, 42 – 5 ўқувчи кийиши аниқланди. У ҳолда частота жадвали қуйидагича ёзилади:

x_i – пойафзал ўлчами	35	36	37	38	39	40	41	42
n_i – частота	2	4	5	7	10	10	7	5

4) Аввал частота жадвалидан солиштирма частота жадвалини олиш учун частота қаторидаги сонларнинг танланма ҳажми 50 га бўламиз:

x_i – пойафзал ўлчами	35	36	37	38	39	40	41	42
$n_i/50$ – солиштирма частота	0,04	0,08	0,1	0,14	0,2	0,2	0,14	0,1

■

B

2.6. Мактабнинг 60 та ўқувчисининг уйларидан мактабгача қанча вақтда етиб келишини билиш мақсадида анкета ўтказилди. Анкета натижаларидаги маълумотлар (минутларда):
12 15 16 8 10 17 25 34 42 18 24 18 45 33 38 45 40 3 20 12 10 10 27 16 37 45 15 16 26 32 35 8 14 18 15 27 19 32 6 12 14 20 10 16 14 28 31 21 25 8 32 46 14 15 20 18 8 10 25 22. Ушбу маълумотларнинг ўртача қиймати (калькулятордан фойдаланиш

мумкин) билан медианасини аниқланг ва унинг маъносини тушунтиринг.

2.7. Частота жадвали берилган: танланманинг ҳажмини, ўртача қийматини, модасини, медианасини аниқланг:

1)

x_i	1	5	9	13
n_i	20	10	14	6

2)

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

2.8. Қандайдир тасодифий катталикни ўрганиш давомида 40 марта олиб борилган мустақил кузатишлар натижаси қуйидагича бўлди:
10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7,10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10,14, 13, 8, 10, 9, 7, 10, 9, 8, 12.
1) Танланманинг ўрта статистикаларини аниқланг;
2) Солиштирма частота жадвалини тузинг.

C

2.9. Танланманинг 30 та элементи бор. Унинг дастлабки 10 та ўлчамининг ўртача қиймати 15,7 га тенг, қолган 20 та ўлчамининг ўртача қиймати 14,3. Танланманинг ўртача қийматини топинг.

2.10. Асқар ҳар бири 12 та мисолдан тузилган еттита тест бажарди. Ҳар бир тўғри мисолга 1 балл берилади. У ушбу еттита тестдан фақат бештасинигина натижаларини била олди, улар 9, 5, 7, 9 ва 10 балл. Асқар ўқитувчидан қолган иккита тест натижасини сўраганда ўқитувчи унинг барча натижаларининг модаси 9 балл, ўртача қиймати 8 балл эканини айтди. Қолган иккита тест натижасини аниқланг.

2.2. Статистик диаграммалар: частота полигони ва гистограмма

Бу мавзуда статистикада фойдаланиладиган асосий диаграммалар билан танишасизлар. Дискрет ва узлуксиз тасодифий катталикларни статистик усуллар билан қайта ишлашни ўрганиб, оҳирида:

- дискрет ва узлуксиз тасодифий катталикларни фарқлай оласиз;
- частота жадвали билан солиштирма частота жадвалидан фойдаланиб, частота полигонини тузасиз;

- частотанинг интервалли жадвалини тузасиз;
- интервалли жадвалдан фойдаланиб гистограмма ясайсиз.

2.2.1. Частота полигони

Синов натижасида ҳар хил қиймат қабул қила оладиган катталик *тасодифий катталик* (ТК) деб аталади. Масалан, ўйин суягини ташлаганда фақат 1, 2, 3, 4, 5, 6 сонлардан биттаси тушиши мумкин. У ҳолда тушган очко сони – тасодифий катталик, тушган сонлар – тасодифий катталикнинг қийматлари. Тасодифий катталикларнинг икки тури мавжуд: дискрет ва узлуксиз тасодифий катталиклар. Агар ТК қийматлар тўплами саноқли ёки ТК нинг барча қийматларини тартиб рақамлаб чиқиш мумкин бўлса, бундай ТК *дискрет тасодифий* катталик дейилади. Дискрет тасодифий катталиклар фақатгина «яхлитланган» қийматлар қабул қилса, узлуксиз тасодифий катталиклар маълум бир сон оралиғининг исталган қийматини қабул қилиши мумкин. Дискрет катталикка мисол сифатида одамлар сонини олиш мумкин. Уларнинг сони 1,2,3 ва хоказо натурал сонлар билан ҳисоблаймиз. Бу яхлитланган сонлар, яъни 1 билан 2 орасидаги «бир ярим» йўқ, чунки «бир ярим» та одам бўлмайди. Иккинчи мисол, тестдан тўплаган баллар сони – дискрет катталик. Чунки ўқувчи 4 ёки 5 балл олиши мумкин, бироқ 4,002 каби 4 билан 5 орасида ётган сонларга тенг балл олмайди. Узлуксиз тасодифий катталикка мисол сифатида ўқувчилар бўйларининг узунликларини олиш мумкин. Бунда бўйнинг узунлиги 150 см билан 170 см орасидаги исталган сонга ўқувчи топилади, яъни узилиш йўқ.

Гуруҳларда ишлаш

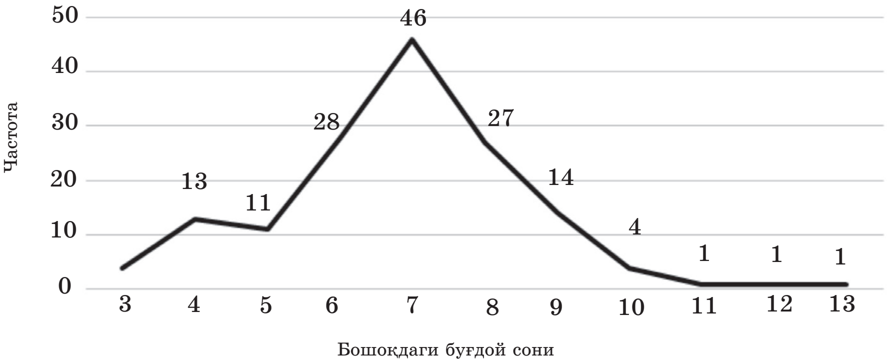
Дискрет ва узлуксиз тасодифий катталикларга кундалик ҳаётдан мисол келтиринг.

Кузатиш объектининг катталиклари дискрет бўлса, олинган маълумотларни частота полигонлари орқали график шаклда тасвирлаш мумкин.

Вертикал ўқ солиштирма частотани , иккинчи ўқ танланма сонларини кўрсатувчи текисликда $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ..., $(x_k;\ n_k)$ нуқталарни белгилаб, уларнинг тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириш натижасида хосил бўлган фигура *частота полигони* деб аталади. Умумий частота полигони орқали танланма элементларининг тахминан қандай қонуният билан тақсимланганини ва частота полигонининг ўрта статистикасини кўриб, қандайдир хулоса чиқариш мумкин. Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг частота жадвалидан частота полигонини чизамиз (2.2-расм).

(Microsoft Excel татбиқий дастурдан фойдаланиш мумкин).

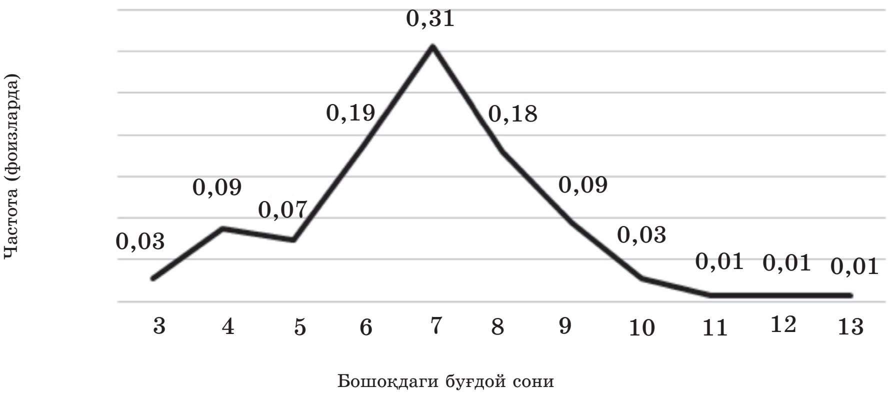
Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг частота полигони



2.2-расм

Вертикал ўққа частотани, иккинчи ўққа танланмадаги сонларни кўрсатувчи текисликда $(x_i; \frac{n_i}{n})$ нуқталарни белгилаб, уларни тўғри чизиқ кесмалари билан туташттирганда хосил бўлган фигура *солиштирма частота полигони* деб аталади. Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг солиштирма частота жадвалидан солиштирма полигонини чизсак, 2.3-расмдаги графикка эга бўламиз (Microsoft excel татбиқий дастурдан фойдаланиш мумкин).

Солиштирма частота полигони



2.3-расм

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/565707/

Гуруҳларда ишлаш

Ўғит солинмаган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг частота жадвалидан (2.4-жадвал) фойдаланиб, частота полигони ва солиштирма частота полигонини чизинг.

Амалий топшириқ

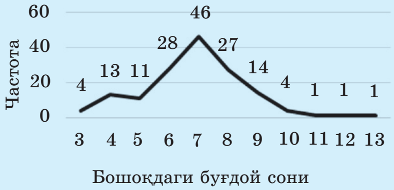
Ақмола областинининг фермери буғдой етиштирди. Буғдой хосилдорлигининг сифати бошоқдаги донлар сони билан ўлчанади. Буғдой хосилдорлигини орттириш учун фермер ўғитдан фойдаланиб, унинг хосилдорликка таъсирини ўрганмоқчи бўлди. У ерининг бир қисмига ўғит сепди, иккинчи қисмини эса ўғитламади. Бироқ иккала қисмга ҳам бир хил ишлов берди.

Ушбу бўлимни ўзлаштириш давомида шу иккита экин майдонидан олинган буғдойнинг танланмасидан фойдаланиб, унинг ўрта статистикасини ҳисоблайсизлар. Энди натижавий солиштирма таҳлил қилайлик.

№	Ўрта статистика	Ўғит солинган буғдой натижаси	Ўғит солинмаган буғдой натижаси	Таҳлил, хулоса
1	Кулоч	10	7	Ўғит солинган буғдой бошоғидаги донлар кулочи катта бўлади,яъни битта бошоқдаги донлар сони ортади
2	Ўртача қиймат	6,85	5,63	Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғида ўрта ҳисобда 6,85 та дон, ўғит солинмаган буғдой бошоғида ўрта ҳисобда 5,63 та дон бўлади, яъни ўғит ёрдамида буғдой бошоғидаги донлар сонини 1,22 тага орттириш мумкин
3	Медиана	7	6	Ўғит солинган буғдой бошоғининг ярмидан кўпида 7 та дондан кўп бўлади, ўғит солинмаган

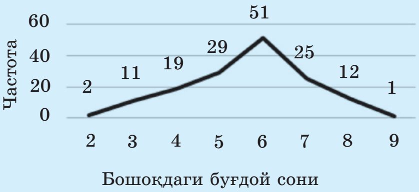
				буғдой бошоқларининг ярмидан кўпида донлар сони 6 тадан ортиқ бўлмади.
4	Мода	7	6	Ўғитлаш орқали бошоқдаги донларнинг кўпчилиги 6 та дондан 7 та донгача ортар экан

Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг частота полигони



2.4-расм

Ўғит солинмаган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг частота полигони



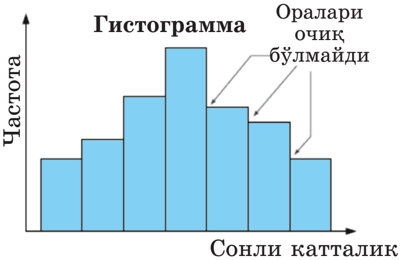
2.5-расм

Қаранг: 76-бетдаги 2.3-жадвал, 79-бетдаги 2.4-жадвал.

Ўғит солинган ва солинмаган ердан олинган буғдой бошоғидаги донлар сонининг частота жадвали

2.2.2. Гистограмма

Тасодифий катталикларни (ТК) ўрганиш давомида олинган танланма берилган сон оралиғининг исталган қийматини қабул қилиши мумкин. Агар *x* тасодифий катталик чекли ёки чексиз интервалнинг барча қийматларини қабул қилса, у узлуксиз ТК деб аталади. Бундай узлуксиз ТК ўрганиш давомида ёки танланма вариантлари жуда кўп бўлган ҳолларда мос равишда ТК частоталар полигони ёрдамида ўрганиш мумкин бўлавермайди ва бу тадбир кутилаётган натижаларни керакли даражада тавсифлай олмайди. Бундай ҳолларда интервалли частоталар қатори ва гистограмма фойдаланилади. Масалан, 11-синф ўқувчиларининг бўйлари, фараз қилайлик, 140 см билан 200 см оралиғидаги исталган қийматни қабул қилиши мумкин. Шу сабабли бўйлари тенг бўлган ўқувчилар йўқ деб ҳисоблаб, ҳар бир ўқувчининг бўйи алоҳида шахсий варианта бўлиб қолиши мумкин. Бундай танланма маълумотлари частота полигоги ёрдамида ўрганиш керакли натижа бермаслиги аниқ. Жуда кўп ахборотни ўз ичига олган ТК статистик турда қайта ишлаб тавсифлаш учун гистограммадан фойдаланилади. бунинг учун танланма қулочини ўзаро тенг бўлган сонли интервалларга бўлиб кўрсатиш керак, масалан, 11-синф ўқувчиларининг бўйининг узунлиги 140–150 см оралиғида, 151–160 см оралиғида ва хоказо интервалларга бўлиб кўриб чиқиш мумкин. Бунда частота сифатида бўйлари берилган интервалга тегишли ўқувчилар сони олинади. Горизонтал ўққа катталикларнинг интервали, вертикал ўққа шу интервалда жойлашган катталикларнинг частоталари кўрсатилади (2.6-расм). Узлуксиз ТК тавсифлаганда гистограмма устунларининг оралари очиқ бўлмайди. Ҳажми жуда катта дискрет ТК гистограмма билан тавсифлаганда устунлар орсини очиқ қилиб тасвирланади.



2.6-расм

Таъриф. ***Тасодифий катталикларнинг интервалли вариацион қатори*** *деб ўсиш тартиби билан берилган интерваллар тўпламларида ётувчи тасодифий катталикларнинг частоталари кўрсатилган жадвалга айтилади.*

Интервал	$[x_1;\, x_2)$	$[x_2;\, x_3)$	....	$[x_{n-1};\, x_n)$
Частота	N_1	N_2	....	N_{n-1}

Шундай қилиб, частотанинг интервалли вариацион қаторини қуриш учун:

- *интерваллар сонини аниқлаш керак. Бунинг учун Стерджес формуласидан фойдаланиш мумкин:* $K = \log_2 n + 1$, *бунда n – танланма ҳажми.* (*Эслатма: логарифм тушунчасини 7-бўлимда ўрганамиз. Унинг қийматини яхлитлаб калькулятор ёрдамида ҳисоблаш мумкин*);
- *ҳар бир интервалнинг энини аниқлдаш керак. Бунинг учун қатор қулочини интерваллар сонига бўлиб, интервалнинг четки нуқталари аниқланади;*
- *танланма элементларининг катталигига мос равишда ҳар бир интервалда жойлашиш частоталарини аниқлаб, жадвални тўлдириш керак.*

Гистограмма ясаш учун Ms Excell электрон жадваллар редакторидан фойдаланиш.

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

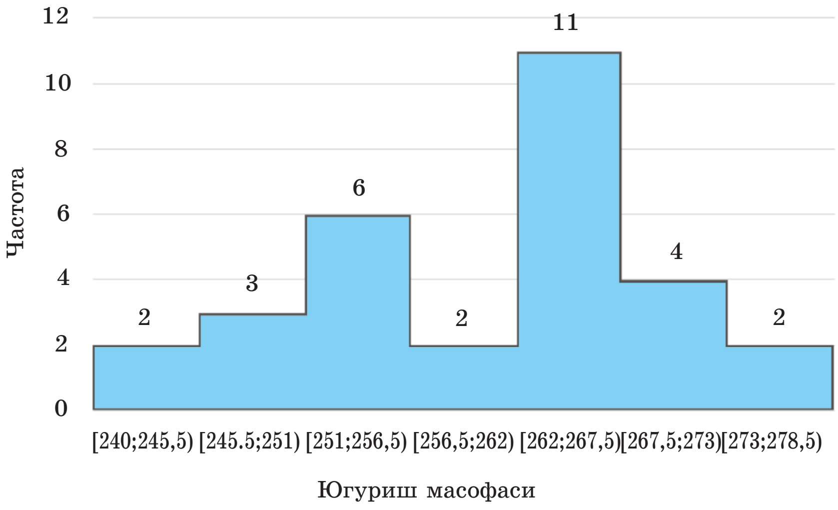
https://www.youtube.com/watch?v=EE4ZQFdFIrE
https://statanaliz.info/excel/diagrammy/gistogramma-chastot-v-excel-2016/

1-мисол. Жисмоний тарбия дарсида 1 мин ичида синфдаги 30 та ўқувчининг югуриб ўтган масофасини ўлчаганда ушбу натижалар олинган (метрларда): 244,6; 245,1; 248,0; 248,8; 250,0; 251,1; 251,2; 253,9; 254,5; 254,6; 255,9; 257,0; 260,6; 262,8; 262,9; 263,1; 263,2; 264,3; 264,4; 265,0; 265,5; 265,6; 266,5; 267,4; 269,7; 270,5; 270,7; 272,9; 275,6; 277,5. Ушбу маълумотлар бўйича интервалли вариацион қатор тузиб, унинг гистограммасини ясаш керак.

▲ Берилган танламанинг интервалли вариацион қаторини қуриш учун интерваллар сонини ҳисоблайлик: $K = \log_2 30 + 1 \approx 6$. Катталикларнинг орасида энг кичиги 244,6 м бўлса, энг каттаси 277,5 м, яъни қулочи 277,5 – 244,6 = 32,9. Бундан интервал ўлчами 5,5 метрга, тенг бўладиган 6 та гуруҳга бўлиб частота жадвалини қурамиз: 240 м билан 245,5 м оралиғида югурган 1 ўқувчи бор, 245 м билан 250 м оралиғида югурган 3 та ўқувчи бор ва хоказо давом эттириб частотанинг интервалли жадвалини оламиз.

Интервал	[240; 245,5)	[245,5; 251)	[251; 256,5)	[256,5; 262)	[262; 267,5)	[267,5; 273)	[273; 278,5)
Частота	2	3	6	2	11	4	2

Гистограммани чизсак. 2.7-расмга эга бўламиз. ■



2.7-расм

2-мисол. Сигир фермасида тасодифий олинган 25 та сигир сутининг ёғлилиги (% ҳисобида) аниқланади: 3,45; 3,56; 3,68; 3,66;3,70; 3,75; 3,78; 3,80; 3,94; 3,88; 3,86; 3,88; 3,94; 3,93; 3,90; 3,96;4,03; 4,03; 3,98; 4,00; 4,08; 4,10; 4,18; 4,35; 4,02.

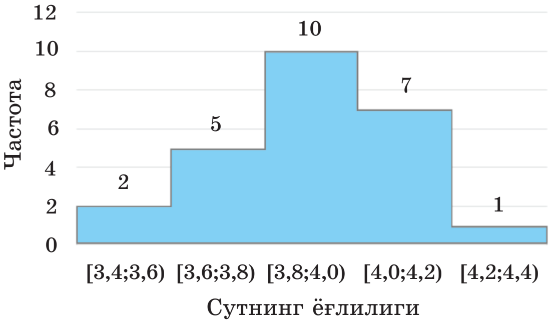
Частота интервалли жадвалини ясаб, частота гистограммасини ясаш керак.

▲ $K = \log_2 25 + 1 \approx 5$ эканлигидан, $a = 3{,}4$ ва $b = 4{,}4$ сонлар оралиғини 5 бўлакка бўламиз. У ҳолда ҳар бир [3,4; 3,5), [3,5; 3,6), [3,6; 3,7), ..., [4,2; 4,3), [4,3; 4,4) интервалларга тегишли бўлган танланиа элементлари сонини аниқлаб, қуйидаги частотанинг интервалли жадвалини оламиз:

Интервал	[3,4; 3,6)	[3,6; 3,8)	[3,8; 4,0)	[4,0; 4,2)	[4,2; 4,4)
Частота	2	5	10	7	1

Гистограмма 2.8-расмда кўрсатилган.

Солиштирма частотанинг интервалли жадвали бўйича ҳам гистограмма ясаш мумкин. ■



2.8-расм

1. Дискрет катталикка мисол келтиринг.
2. Узлуксиз катталикка мисол келтиринг.
3. Частота полигони нима? У қандай ясалади?
4. Интервалли частота жадвали деб нимага айтилади? У қандай қурилади?
5. Гистограмма қандай ясалади?

Мисоллар

А

2.11. Танланманинг частота жадвали бўйича частоталар полигонини ясанг:

x_i – пойафзал ўлчамлари	35	36	37	38	39	40	41	42
n_i	2	4	5	7	10	10	7	5

2.12. Берилган танланманинг частота жадвали бўйича унинг полигонини ясанг:

x_i	1	5	9	13
n_i	20	10	14	6

2.13. Танланманинг частота жадвали бўйича частота полигонини ясанг.

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

2.14. Танланманинг солиштирма частотасининг интервалли жадвали берилган. Унинг гистограммасини чсанг.

Интервал	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Солиштирма частота	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2.15. Танланманинг солиштирма частотасининг интервалли жадвали берилган. Унинг гистограммасини ясанг.

Интервал	[1; 3)	[3; 6)	[6;9)	[9;12)
Солиштирма частота	0,24	0,40	0,20	0,16

2.16. Дискрет тасодифий катталикнинг асосий тўпламидан танланма олинган. Танланманинг частота полигонини ясанг:
1, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 2, 2, 3, 4, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 5, 3, 5, 6, 8, 5, 3, 4, 6.

2.17. Почта орқали қандайдир бир куни юборилган товарлар массаси ўлчаниб, ушбу маълумотлар олинди (килогаммларда):
2,1; 3,0; 0,6; 1,5; 1,9; 2,4; 3,2; 4,2; 2,6; 3,1; 1,8; 1,7; 3,9; 2,4; 0,3; 1,5; 1,2.
1) частотанинг интервалли жадвалини тўлдиринг; 2) гистограмма ясанг.

Интервал	[0;1)	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5)
Частота					

2.18. Берилган маълумотларни статистик турда тавсифлаш учун частота полигони билан гистограмманинг қайси биринидан фойдаланиш кераклигини аниқланг ва уни ясанг.
1) 30 та гугурт қутисидаги гугурт чўпларининг сони

x_i – гугурт чўплари сони	47	49	50	51	52	53	55
n_i – частота	1	1	9	12	4	2	1

2) 25 та ўқувчи бўйининг узунлиги (сантиметрларгача яхлитланган)

Бўйнинг узунлиги	120—129	130—139	140—149	150—159	160—169
Частота	1	2	7	14	1

B

2.19. Танланма частотасининг интервалли жадвали берилган. 1) танланма ҳажмини топинг; 2) солиштирма частотанинг интервалли жадвалини тузинг; 3) гистограммасини ясанг.

Интервал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i	2	4	8	12	16	10	3

2.20. Область корхоналарининг битта ишчиси меҳнат унумдорлигининг ўсими (ўтган йил билан солиштирилганда % ҳисобида) ҳақида қуйидаги танланма ахборотлар берилган.

%	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130
Корхоналар сони	2	14	60	20	4

1) жадвални интервалли солиштирма частота жадвалига алмаштиринг; 2) гистограмма ясанг.

2.21. Қандайдир бир дискрет тасодифий катталикнинг асосий тўпламидан ушбу танланма олинган: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Частота полигонини ясанг.

2.22. Қандайдир бир дискрет тасодифий катталикни ўрганиш давомида 40 та мустақил кузатишлар натижаси қуйидагича бўлди: 10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10, 14, 13, 8, 10, 9, 7, 10, 9, 8, 12. Солиштирма частота полигонини ясанг.

2.23. 30 та корхонанинг молия захираси ҳақида (млрд. тенге ҳисобида) қуйидаги маълумотлар берилган: 2,2 5,3 3,4 4,5 5,1 3,4 4,3 2,7 3,5 5,8 2,3 4,4 4,7 2,1 4,8 3,6 3,5 4,2 5,7 3,7 4,2 3,4 4,3 3,4 4,3 4,1 5,3 4,8 5,1 2,4.

1) [2; 2,7), [2,7; 3,4), [3,4; 4,1), [4,1; 4,8) [4,8; 5,5), [5,5; 6) интерваллар ёрдамида частотанинг интервалли жадвалини ёзинг;

2) гистограммасини ясанг.

C

2.24. Қурилиш корхонасида ишлайдиган тасодифан олинган 50 та ишчининг ойлик маошларини ўрганиш (минг тенге ҳисобида) қуйидаги натижа берди:

71,4 70,4 71,2 70,1 69,9 72,2 72,6 72,8 74,0 71,6 72,4 72,0 76,0 70,4 74,0 69,0 71,8 73,2 75,4 72,4 70,4 72,1 75,6 76,0 72,8 73,2 70,4 68,2 73,2 73,0 74,2 72,2 76,0 69,8 71,6 69,8 73,2 74,2 71,6 72,6 70,8 72,1 70,4 72,2 69,6 72,2 73,8 72,4 73,4 72,3;

1) частотанинг интервалли жадвалини ёзинг (68 минг тенгедан бошлаб, интервал узунлигини 1 минг тенге қилиб олинг);

2) гистограммасини ясанг.

2.25. Боғбон 6 ойлик кўчатлар ичидан тасодифан танланма олиб, уларнинг узунлигини миллиметрларгача аниқлик билан ўлчади. Натижалари частотанинг интервалли жадвали билан берилган:

Кўчатларнинг узунлик интервали, мм	300–324	325–349	350–374	375–399	400–424	425–449
Частота	12	18	42	28	14	6

1. Маълумотларни тавсифловчи гистограмма ясанг:
2. Узунлиги 400 мм дан кам бўлмаган нечта кўчат бор?
3. Барча кўчатларнинг неча фоизининг узунлиги 349 мм дан узун ва 400 мм дан қисқа?
4. Агар барча кўчатлар сони 1462 бўлса, уларнинг неча фоизининг узунлиги 400 мм дан қисқа?

Такрорлаш учун машқлар

2.26. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ функциянинг жуфт-тоқликка текширинг, графигини ясанг.

2.27. Функциянинг узилиш нуқталарини аниқланг:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-2x-1}$.

***2.28.** Аниқ интегрални ҳисобланг: $\int_0^2 |1-x|\,dx$.

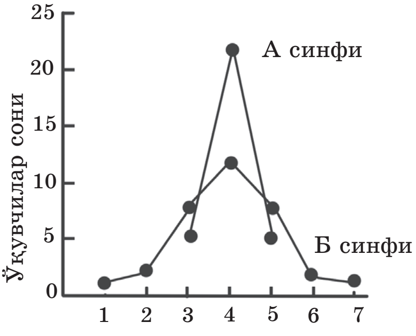
2.3 Тасодифий катталиклар танланмасининг сонли тавсифлари

Бу мавзуда танланманинг асосий сонли тавсифлари билан танишиб, оҳирида:

- дискрет тасодифий катталикларнинг танланма ўртасини топишни;
- узлуксиз тасодифий катталикнинг танланма ўртасини топишни;
- танланма дисперсиясини топишни;
- танланманинг стандарт четлашишини топишни ўрганасиз.

Мисоллар кўриб чиқамиз.

«А» ва «Б» синфларнинг ҳар бирида 32 тадан ўқувчи бор. Иккита синфнинг ўқувчилари тест топширади (IELTS) . «А» синфининг 5 та ўқувчиси 3 балл, 22 та ўқувчиси 4 балл ва 5 та ўқувчи 5 балл олди. «Б» синфининг 1 ўқувчиси 1 балл, 2 та ўқувчиси 2 балл, 7 та ўқувчиси 3 балл, 12 та ўқувчиси 4 балл, 7 та ўқувчиси 5 балл, 2 та ўқувчиси 6 балл ва 1 ўқувчиси 7 балл олди. Шу икки синф ўқувчиларининг натижаларини ўрганиш учун ўрта статистикаларни ҳисобласак, иккала синфнинг ҳам ўртача бали 4, медианаси ҳам 4. Ушбу ўрта статистикаларгагина суянсак, иккита синф ўқувчиларининг тестдан олган натижаси бир хилдай бўлади, бироқ уларнинг натижаларида «фарқ» бор. Частота полигонини ясасак (2.9-расм), «А» синфдаги ўқувчиларнинг ўртача баҳоси 4 ва ўқувчилар баҳоларининг ўртача баҳодан четлашиши 1 га тенг. «Б» синфининг ўртача баҳоси 4 бўлгани билан шу баҳодан ўқувчилар баҳоларининг четлашиши «А» синфиникидан катта. Бундай «четлашишлар» статистик турда ўлчаш учун сонли тавсифлар қўлланилади. Улар:



2.9-расм

- дисперсия;
- стандарт (ўртача квадратик) четлашиш.

Фараз қилайлик, танланманинг частота жадвали берилсин:

x_i – танланма вариантасининг элементлари	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i – частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Бунда $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$. Танланманинг ўртача қийматини $\overline{x}$ деб белгиланади ва у ушбу формула билан ҳисобланади:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k\right).$$

Танланма элементларининг ўртача қийматидан четлашишини топиш учун танланма *дисперсияси* $(\overline{D})$ билан *стандарт (ўртача квадратик) четлашиши* (σ) ушбу формула билан топилади:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 \cdot n_1 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 \cdot n_2 + \left(x_3 - \overline{x}\right)^2 \cdot n_3 + \ldots + \left(x_k - \overline{x}\right)^2 \cdot n_k\right].$$

$$\sigma = \sqrt{\overline{D}}.$$

Дисперсия билан стандарт четлашиш танланманинг ўртача қийматидан қанчалик «сочилиб» жойлашганини тавсифлайди. Шу сабабли уларнинг қиймати кичик бўлгани сайин танланма «йиғилган» ва қулочи кичик бўлади.

Узлуксиз тасодифий катталиклар учун частотанинг интервалли жадвали:

Интервал	$[x_0;\ x_1)$	$[x_1;\ x_2)$	$[x_2;\ x_3)$	...	$[x_{k-1};\ x_k)$
Частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Жадвалдан

$$x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2},\ x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ldots\ x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Нуқталар (интервалларнинг ўртаси) ёрдамида унга мос келадиган частоталарнинг вариацион қаторини оламиз:

x_i^* – танланма вариантасининг элементлари	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
n_i – частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Ушбу частоталар жадвали билан узлуксиз ТК дисперсияси билан стандарт четлашиши аниқланади.

1-мисол. Частотанинг интервалли жадвали бўйича берилган танланманинг ўртача қийматини, дисперсиясини ва стандарт четлашишини аниқлайлик:

Интервал	[3,5; 3,6)	[3,6; 3,7)	[3,7; 3,8)	[3,8; 3,9)	[3,9; 4,0)	[4,0; 4,1)	[4,1; 4,2)	[4,2; 4,3)
Частота	1	2	3	4	6	5	2	1

▲ Аввал ҳар бир интервалнинг ўртасини топиб оламиз:

$$x_1^* = \frac{3,5+3,6}{2} = 3,55,\ \ x_2^* = \frac{3,6+3,7}{2} = 3,65,\ \dots\ x_8^* = \frac{4,2+4,3}{2} = 4,25.$$

Мос танланманинг частоталар жадвали қуйидагича:

x_i^*	3,55	3,65	3,75	3,85	3,95	4,05	4,15	4,25
Частота	1	2	3	4	6	5	2	1

$$\overline{x} = \frac{1}{24}(3,55\cdot1+3,65\cdot2+3,75\cdot3+\ldots+4,25\cdot1) \approx 3,92.$$

$$\overline{D} = \frac{1}{24}\Big[(3,55-3,92)^2\cdot1+(3,65-3,92)^2\cdot2+(3,75-3,92)^2\cdot3+$$

$$+(4,25-3,92)^2\cdot1\Big] \approx 0,029.$$

$$\sigma = \sqrt{0,029} \approx 0,17.\ ■$$

1. Дискрет тасодифий катталик учун ўртача қиймат қандай ҳисобланади?
2. Узлуксиз тасодифий катталик учун ўртача қиймат қандай ҳисобланади?
3. Дисперсия ва стандарт четлашиш формулаларини ёзинг.
4. Дисперсия ва стандарт четлашишнинг статистик маъноси қандай?

Мисоллар

А

2.29. Иккита танланманинг частота полигони берилган:

Ўғит солинган ердан олинган буғдой бошоқларидаги донлар сонининг частота полигони

2.10-расм

Ўғит солинмаган ердан олинган буғдой бошоқларидаги донлар сонининг частота полигони

2.11-расм

(Қаранг: 76-бетдаги 2.3-жадвал, 79-бетдаги 2.4-жадвал. Ўғит солинган ва солинмаган ердан олинган буғдой бошоқларидаги донлар сонининг частота жадваллари)

Частота полигонига қараб, қайси танланманинг қулочи кенг эканлигини аниқланг.

Ҳар бир танланманинг ўртача қийматини топиб, унинг дисперсияси билан стандартдан четлашишини ҳисобланг. Олинган натижаларнинг маъносини тушунтиринг.

2.30. Частота жадвали берилган. Танланманинг ўртача қийматини, дисперсияси билан стандартдан четлашишини аниқланг:

x_i – танланма вариантасининг элементлари	1	5	9	13
n_i – частота	20	10	14	6

2.31. Нодир билан Эркиннинг саккизта баскетбол ўйинида тўплаган очколар жадвали берилган:

Нодирнинг очколари	23	17	31	25	25	19	28	32
Эркиннинг очколари	9	29	41	26	14	44	38	43

Ҳар бир ўйинчининг ўртача очкоси билан стандарт четлашишини топинг. Шу иккита ўйинчининг қайси бири кучли деб ўйлайсиз? Сабабини тушунтиринг.

2.32. Частота жадвали берилган. Танланманинг ўртача қийматини, дисперсияси билан стандарт четлашишини аниқланг:

x_i – танланма вариантасининг элементлари	3	4	5	7	10
n_i – частота	1	2	3	4	2

B

2.33. Танланманинг интервалли частоталар жадвали берилган. Танланманинг ўртача қийматини, дисперсияси билан стандарт четлашишини аниқланг:

Интервал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i – частота	2	4	8	12	16	10	3

2.34. Боғбон 6 ойлик кўчатлар орасидан танланма олиб, уларнинг узунликларини миллиметрларгача аниқликда ўлчади. Натижалар интервалли частоталар жадвалида берилган:

Кўчатларнинг узунлик интервали, мм	300—324	325—349	350—374	375—399	400—424	425—449
Частота	12	18	42	28	14	6

Танланманинг ўртача қийматини, дисперсияси билан стандарт четлашишини аниқланг.

Такрорлаш учун машқлар

2.35. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ функциянинг экстремум нуқталарининг ординаталарининг йиғиндисини топинг.

2.36. $g(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{x+1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

2.37. Ҳисобланг:

1) $\int(2x-3)^3dx$; 2) $\int(2x^3-3)^3dx$.

«МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ» бўлимининг хулосаси

Ўрганиладиган объектлар тўплами *асосий тўплам*, асосий тўпламдан тасодифан танлаб олинган объектлар тўплами *танланма тўплам* ёки оддийгина *танланма* деб аталади.

Танланма элементлари орасидан ўзаро тенг бўлмаган элементларни биттадан олиб, уларни ўсиш тартибида ёзганда хосил бўладиган кетма-кетлик *вариацион қатор*, вариацион қаторнинг ҳар бир элементи *варианта* деб аталади.

Частота жадвалининг кўриниши:

x_i – танланма вариантасининг элементлари	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i – частота	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Солиштирма частота жадвалининг кўриниши:

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$

Танланма вариантаси элементларининг орасида энг катта ва энг кичигининг айирмаси ***танланманинг қулочи*** *деб аталади ва R ҳарфи билан белгиланади:*

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Танланма элементлари орасида энг кўп учрайдиган элемент *танланманинг модаси* деб аталади. Мода M_0 орқали белгиланади.

Танланма элементларининг ўрта арифметиги танланманинг *ўртача қиймати* деб аталади ва $\overline{X}$ ҳарфи орқали белгиланади.

Танланманинг ўртасида жойлашган элемент *танланма медианаси* дейилади. Агар танланма элементларининг сони жуфт бўлса, у ҳолда кетма-кетлик ўртасидаги иккита соннинг ўрта арифметиги танланманинг *медианаси* бўлади. Медиана M_e орқали белгиланади.

Агар ТК қийматларининг тўплами саноқли ёки ТК нинг барча қийматларига тартиб рақами қўйиб чиқиш мумкин бўлса, бундай ТК *дискрет тасодифий катталик* деб аталади. Дискрет тасодифий катталиклар фақатгина «яхлитланган» қийматлар қабул қилса, узлуксиз тасодифий катталиклар белгили бир сон оралиғида исталган қийматни қабул қилиши мумкин.

Вертикал ўқ солиштирма частотани, иккинчи ўқ танланма сонларини кўрсатувчи текисликда $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, …, $(x_k; n_k)$ нуқталар белгилаб, уларни тўғри чизиқ кесмали билан туташтиришдан хосил бўлган фигура *частота полигони* деб аталади.

Тасодифий катталикларнинг интервалли *вариацион қатори* деб ўсиш тартибида берилган интерваллар тўпламларида ётган тасодифий катталикларнинг частоталарини кўрсатувчи жадвалга айтилади.

Интервал	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	. . .	$[x_{n-1}; x_n)$
Частота	N_1	N_2	. . .	N_{n-1}

Танланманинг ўртача қиймати, дисперсияси ва стандарт (ўртача квадратик) четлашиши – танланманинг кўп учрайдиган сонли тавсифлари.

Танланманинг ўртача қиймати $\bar{x}$ деб белгиланади ва у ушбу формула билан ҳисобланади:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \ldots + x_k \cdot n_k).$$

Танланманинг *дисперсияси* $\left(\overline{D}\right)$ билан *стандарт* (*ўртача квадратик*) *четлашиши* (σ) ушбу формула билан ҳисобланади:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \overline{x})^2 \cdot n_3 + \ldots + (x_k - \overline{x})^2 \cdot n_k\right].$$

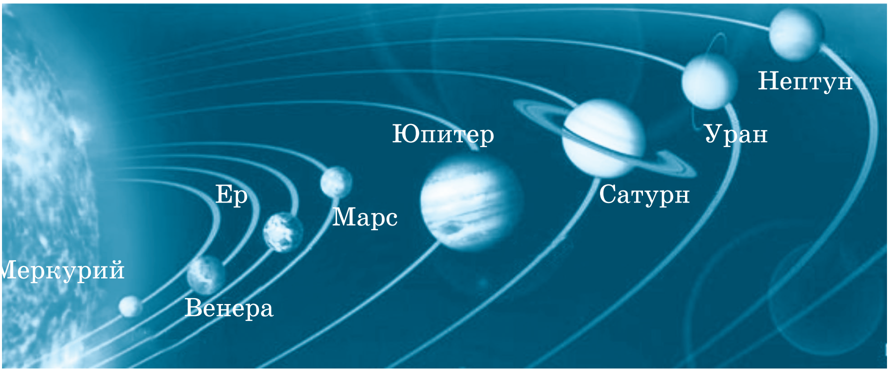
$$\sigma = \sqrt{\overline{D}}\ .$$

Дисперсия билан стандарт четлашиш танланманинг ўртача қийматидан қанчалик «сочилиб» жойлашганини тавсифлайди. Уларнинг қиймати кичик бўлган сайин танланма «йиғилган» бўлади.

Терминлар номининг луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Частота жадвали	Жиілік кестесі	Таблица частот	frequency table
Медиана	Медиана	Медиана	median
Мода	Мода	Мода	mode
Ўртача қиймат	Орта мән	Средняя величина	mean
Гистограмма	Гистограмма	Гистограмма	histogram
Қулоч	Құлаш	Размах	range
дисперсия	Дисперсия	Дисперсия	variance
Стандарт четлашиш	Стандартты ауытқу	Стандартное отклонение	standard deviation

III бўлим. ДАРАЖАЛАР ВА ИЛДИЗЛАР. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯЛАР



Даражали функция табиатда, кундалик ҳаётда юз бераётган
ҳодисаларнинг математик моделини қуриб,
уни ўрганишда кенг фойдаланилади.
Улардан бири – Кеплер қонуни.
Бўлим оҳирида Ер билан Қуёш орасидаги масофа орқали
Венеранинг Қуёш атрофида айланиш даври билан
Марсдан Қуёшгача бўлган масофани топишни ўрганасиз

Бўлимда ўрганиладиган мавзулар:

3.1. *n*-даражали илдиз ва унинг хоссалари
3.2. Рационал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари. Иррационал кўрсаткичли даража тушунча
3.3. Иррационал ифодаларни шакл алмаштириш. Иррационал кўрсаткичли даража тушунчаси
3.4. Даражали функциянинг хоссалари, графиги
3.5. Даражали функциянинг ҳосиласи ва интеграли

3.1 n-даражали илдиз ва унинг хоссалари

Бу мавзуда n-даражали илдизни ўрганиб, оҳирида:

- *n*-даражали илдизнинг таърифини;
- *n*-даражали арифметик илдизнинг таърифини биласиз;
- *n*-даражали илдизнинг хоссаларини ўрганиб, ундан мисоллар ечишда фойдаланасиз.

3.1.1 n-даражали илдизнинг таърифи

Таъриф. *Агар* n $(n>1)$ *натурал сон билан* a *ва* b *ҳақиқий сонлар учун*

$$b^n = a \tag{1}$$

тенглик бажарилса, b *сони* a *сонининг* ***n*-даражали илдизи** *деб аталади.*

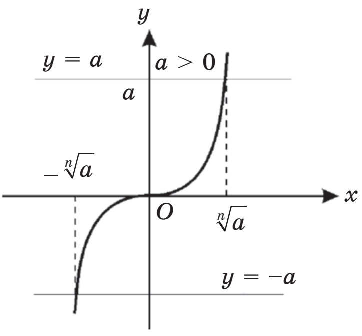
Шундай қилиб, a сонининг n-даражали илдизи деб n-даражаси a га тенг бўлган исталган b сонига айтамиз. У ҳолда, a сонининг n-даражали илдизи деб

$$x^n = a \tag{2}$$

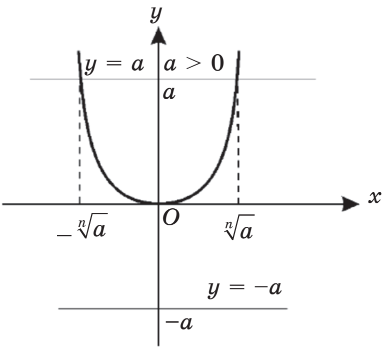
тенгламанинг илдизларига айтиш мумкин.

(2) тенгламанинг илдизларини топиш учун уни график усулда ечиб кўрамиз.

n тоқ сон бўлсин. (2) тенгламанинг ечимлари $y = x^n$ ва $y = a$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталарининг абсциссалари тенг.



3.1-расм



3.2-расм

3.1-расмда $y = x^n$ ва $y=a$ функцияларнинг графиклари исталган a сони учун битта нуқтада кесишишини кўрамиз: $a > 0$ бўлса, унинг n-даражали илдизи мусбат сон; $a = 0$ бўлса, n-даражали илдиз 0 га тенг; $a < 0$ бўлса, унинг n-даражали илдизи манфий сон.

n жуфт сон бўлсин. 3.2-расмдан кўрганимиздан, $a > 0$ бўлганда (2) тенгламанинг иккита илдизи, $a = 0$ бўлса, битта илдизи $(x = 0)$ мавжуд, $a < 0$ бўлса, у ҳолда (2) тенгламанинг илдизлари мавжуд эмас. Чунки оҳирги ҳолда $y = x^{2k}$ $(n = 2k)$ ва $y = a$ $(a < 0)$ функцияларнинг графиклари кесишмайди. Демак, агар n тоқ сон бўлса, исталган ҳақиқий соннинг ягона n-даражали илдизи мавжуд бўлади. Умуман, n-даражали илдиз $\sqrt[n]{a}$ орқали белгиланади ва у «n-даражали илдиз остида a» деб ўқилади. Бунда n – илдиз кўрсаткичи, a илдиз остидаги сон (ифода) деб аталади. Масалан, $2^5 = 32$ эканлигидан, $\sqrt[5]{32} = 2$; $(-3)^3 = -27$ эканлигидан, $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[9]{0} = 0$.

Агар n жуфт сон ва $a>0$ бўлса, a нинг n-даражали иккита илдизи мавжуд: $-\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[n]{a}$. Агар $n = 2$ бўлса, бизга маълум бўлган квадрат илдиз олмиз. Квадрат илдизларнинг кўрсаткичлари ёзилмайди. Масалан, $\sqrt[2]{3}$ ёзувнинг ўрнига $\sqrt{3}$ ёзилади; $a = 0$ бўлса, $\sqrt[n]{0} = 0$. n жуфт ва $a < 0$ бўлганда a нинг жуфт даражали илдизи мавжуд эмас. Яъни $\sqrt[n]{a}$ илдизнинг маъноси мавжуд бўлмайди.

Масалан, $3^4 = 81$, демак, $\sqrt[4]{81} = 3$; $2^6 = 64$ эканлигидан, $\sqrt[6]{64} = 2$, $\sqrt[4]{-81}$ ва $\sqrt[6]{-64}$ илдизларнинг ҳақиқий сонлар тўпламида маънога эга эмас.

Номанфий сондан олинган n жуфт даражали мусбат илдиз шу сонниг ***жуфт даражали арифметик илдизи*** (илдизнинг арифметик қиймати) деб аталади: $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$. Масалан: $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[6]{64}$.

3.1.2 *n*-даражали илдизнинг хоссалари

Илдизларга қўлланиладиган асосий қоидалар

Илдиз остидаги ифодаларни номанфий сонлар деб қабул қиламиз.

1°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ – *n-даражали илдизнинг n даражаси илдиз остидаги сонга тенг.*

2°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ – *кўпайтманинг илдизи кўпайтувчиларнинг илдизларининг кўпайтмасига тенг.*

3°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ – *илдизни даражага кўтариш учун илдиз остидаги ифодани шу даражага кўтариш етарли.*

4°. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$ – *бўлинманинг илдизи унинг суратининг илдизини махражининг илдизига бўлганга тенг.*

5°. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ – *илдиздан илдиз чиқарилганда илдиз кўрсаткичлари кўпайтирилади.*

6°. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ – *илдиз кўрсаткичи билан илдиз остидаги соннинг даража кўрсаткичларини бир хил сонларга қисқартириш мумкин.*

Ушбу хоссаларни исботлайлик.

1°-хоссанинг исботи илдизнинг таърифидан келиб чиқади.

2°-хоссанинг исботи: 1°-хосса $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$ ва даражаларни кўпайтириш қоидасидан $\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$ оламиз.

3°-хоссанинг исботи: $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$ ва $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = a^k$ тенгламадан $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ келиб чиқади.

> **Гуруҳларда ишлаш**
>
> 4°-хоссани мустақил исботланг, мисол келтиринг.

5°-хоссанинг исботи $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$ ва $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a$ тенгликлар хосил бўлади.

6°-хоссанинг исботи 1°, 3° ва 5°-хоссалардан келиб чиқади: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{km}}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[k]{a^m}\right)^k} = \sqrt[n]{a^m}$.

1-мисол. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2}$ ифодани соддалаштириш керак.

▲ Берилган илдизларнинг кўрсаткичлари 2, 3 ва 6 га тенг. Бу берилган сонларнинг энг кичик умумий карралиси 6 эканлигидан, $\sqrt{2}$ ва $\sqrt[3]{4}$ илдизларнинг кўрсаткичлари 6°-хосса бўйича 6 гача тўлдирамиз. У ҳолда 2°-хоссага кўра

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 2^4\cdot 2} = \sqrt[6]{2^8}.$$

Бундан илдиз кўрсаткичи 6 билан илдиз остидаги 2 нинг даража кўрсаткичи 8 ни 6°-хосса бўйича умумий бўлувчи 2 га қисқартириб, $\sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = = \sqrt[3]{2^3\cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$ тенглик хосил қиламиз. У ҳолда

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{2} = 2\sqrt[3]{2}.$$ ■

2-мисол. $\sqrt[7]{2^{58}}$ ифоданинг қийматини топиш керак.

▲ $\sqrt[7]{2^{58}} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8+2}} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8}\cdot 2^2} = \sqrt[7]{2^{7\cdot 8}}\cdot\sqrt[7]{2^2} = 2^8\sqrt[7]{2^2} = 256\sqrt[7]{4}$. ■

3-мисол. $\dfrac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}$ ифоданинг қийматини топиш керак.

$$\blacktriangle\ \frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[12]{36^4}\cdot\sqrt[12]{9^3}}{\sqrt[12]{24^2}} = \frac{\sqrt[12]{2^8\cdot3^8\cdot3^6}}{\sqrt[12]{2^6\cdot3^2}} = \sqrt[12]{\frac{2^8\cdot3^{14}}{2^6\cdot3^2}} = \sqrt[12]{2^2\cdot3^{12}} =$$

$$= 3\sqrt[12]{2^2} = 3\sqrt[6]{2}\ .\ \blacksquare$$

1. *a* сонининг *n*-даражали илдизи деганда нимани тушунасиз?
2. *n*-даражали арифметик квадрат илдиз деганда нимани тушунасиз?
3. *n*-даражали илдизнинг қандай хоссаларини биласиз? Уларни исботланг.

Мисоллар

А

3.1. Тенгламани ечинг:

1) $x^3 = 8$; 2) $3x^4 - 48 = 0$; 3) $x^5 = -32$;
4) $x^3 = 4$; 5) $x^4 = 10$; 6) $x^5 = 6$;
7) $x^3 = -4$; 8) $x^4 = -10$; 9) $x^6 = 7$.

3.2. *x* нинг қандай қийматларида тенглик бажарилади:

1) $\sqrt{x^2} = x$; 2) $\sqrt[3]{x^3} = x$; 3) $\sqrt[4]{x^4} = -x$?

3.3. Ифоданинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $\sqrt[4]{x}$; 2) $\sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt[6]{-x}$; 4) $\sqrt[8]{x-2}$;

5) $\sqrt[5]{3-x}$; 6) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{2x-5}}$; 7) $\sqrt[3]{\dfrac{17}{x-6}}$; 8) $\sqrt[14]{\dfrac{x+3}{x-3}}$;

9) $\sqrt[10]{\dfrac{x-5}{2-x}}$; 10) $\sqrt[7]{\dfrac{x-2}{2+x}}$; 11) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-4}}$; 12) $\sqrt[8]{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$.

3.4. Ҳисобланг:

1) $\sqrt[6]{2^6}$; 2) $\sqrt[4]{(-3)^4}$; 3) $-\sqrt[6]{25^3}$; 4) $\sqrt[3]{125}-\sqrt[4]{(-9)^4}$;

5) $\sqrt[5]{7^5}$; 6) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; 7) $\left(-3\sqrt[3]{3}\right)^3$; 8) $\sqrt[5]{32}-\sqrt[6]{27^2}$.

3.5. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt[4]{16}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$; 3) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}027}$;

5) $\sqrt[5]{-32}$; 6) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$; 7) $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}$; 8) $\sqrt[4]{0{,}0625}$;

9) $\sqrt[12]{1}$; 10) $\sqrt[7]{-1}$; 11) $\sqrt[6]{11\frac{25}{64}}$; 12) $\sqrt[5]{-0,00001}$.

3.6. Сонларни таққосланг:

1) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[4]{5}$; 2) $\sqrt{0,5}$ ва $\sqrt[4]{0,5}$; 3) $\sqrt[3]{2}$ ва $\sqrt[5]{3}$;

4) $\sqrt[3]{0,7}$ ва $\sqrt[5]{0,7}$; 5) $\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt[5]{4}$; 6) $\sqrt[4]{3}$ ва $\sqrt[4]{5}$;

7) $\sqrt[10]{8}$ ва 1; 8) $\sqrt[7]{0,85}$ ва 1; 9) $\sqrt[5]{-0,2}$ ва $\sqrt[5]{-0,3}$;

10) $\sqrt[18]{\frac{4}{7}}$ ва $\sqrt[18]{0,57}$.

3.7. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; 2) $\sqrt[4]{625\cdot 16}$; 3) $\sqrt[5]{243\cdot\frac{1}{32}}$; 4) $\sqrt[3]{125\cdot 27}$;

5) $\sqrt[3]{0,001\cdot 125}$; 6) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}\cdot 10000}$; 7) $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; 8) $\sqrt[4]{0,0016\cdot 81}$;

3.8. $a > 0$ деб олиб, кўпайтувчини илдиз олдига чиқаринг:

1) $\sqrt{4\cdot a}$; 2) $\sqrt{50\cdot a^3}$; 3) $\sqrt[4]{16\cdot a}$; 4) $\sqrt[4]{81\cdot a^6}$;

5) $\sqrt[4]{81a^2}$; 6) $\sqrt[3]{27a^3}$; 7) $\sqrt[3]{5a^4}$; 8) $\sqrt[6]{10a^8}$.

3.9. Кўпайтувчини илдиз остига киритинг:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt[3]{5}$; 3) $3\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$; 4) $3\sqrt{5}$;

5) $3\sqrt{2}$; 6) $5\sqrt[3]{2}$; 7) $2\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; 8) $b\sqrt[4]{5},\ b > 0$.

В

3.10. Айирманинг ишорасини аниқланг:

1) $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}-\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$; 3) $\sqrt[6]{0,28}-\sqrt[6]{\frac{2}{7}}$;

4) $\sqrt[8]{11}-\sqrt[8]{10}$; 5) $1-\sqrt[4]{0,99}$; 6) $\sqrt[7]{\frac{7}{11}}-\sqrt[7]{\frac{9}{19}}$;

7) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[5]{2}$; 8) $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; 9) $\sqrt[k]{3}-\sqrt[2k]{3}$.

3.11. Сонларни ўсиш тартибида жойлаштиринг:

1) $\sqrt{2};\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt{6}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{0,35};\ \sqrt[6]{0,15}$;

3) $\sqrt{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{0,3};\ \sqrt[5]{0,2}$; 4) $5\sqrt{0,1};\ 3\sqrt[3]{\frac{1}{6}};\ 2\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$.

3.12. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt[3]{\frac{64\cdot 27}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{81}{16\cdot 625}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{3^{10}\cdot 5^5}{7^{10}}}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}}$.

3.13. Ҳарфлар билан мусбат сонлар берилган. Кўпайтувчини илдиз олдига чиқаринг:

1) $\sqrt{16x^2y}$; 2) $\sqrt[4]{81ab^4}$; 3) $\sqrt[3]{125a^5x^3}$; 4) $\sqrt[3]{64b^{12}\cdot y^7}$.

3.14. Ҳарфлар билан мусбат сонлар берилган. Кўпайтувчини илдиз остига киритинг:

1) $a\cdot\sqrt{\frac{5}{a}}$; 2) $x\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{x^2}}$; 3) $b\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{b^3}}$; 4) $2c\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{16c^4}}$.

3.15. $a > 0$ бўлса,

1) $\sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$; 2) $\sqrt[2n+2]{a^3\cdot\sqrt[n]{a^3}} = \sqrt[2n]{a^3}$

тенгликларнинг бажарилишини кўрсатинг.

3.16. Берилган тенгликларнинг бажарилишини кўрсатинг:

1) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} = 1$; 2) $\sqrt[6]{1,5-\sqrt{2}} : \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[6]{0,5}$.

3.17. 1) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$; 4) $\frac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$

касрларнинг маҳражларида илдиз белгиси бўлмайдиган қилиб шакл алмаштиринг.

C

Ифодани соддалаштиринг **(3.18—3.19):**

3.18. 1) $\sqrt[6]{8x\left(7+4\sqrt{3}\right)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$;

2) $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)\left(a^2-1\right)\left(1+2a+a^2\right)}\cdot\left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$.

3.19. 1) $\sqrt{\dfrac{(a+1)\sqrt[3]{a+1}}{3a}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$;

2) $ab\sqrt[n]{a^{n-1}b^{-n}-a^{-n}b^{1-n}}\cdot\sqrt[n]{(a-b)^{-1}}$.

3.20*. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ ифоданинг қийматини топинг.

Такрорлаш учун машқлар

3.21. $4x^2-3y=0$ тенгламанинг графигини ясанг.

3.22. 1) 0; 2) −3; 3) −2 сони $x^3+x^2=6x$ тенгламанинг илдизи бўладими?

3.23. $x^2-2x+y^2+4y-20=0$ тенгламанинг графигини ясанг.

3.2 Рационал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари

Бу мвзуда рационал кўрсаткичли даража билан танишиб, оҳирида:

- рационал кўсаткичли даражанинг таърифи билан хоссаларини биласиз;
- алгебраик ифодаларни шакл алмаштириш учун рационал кўрсаткичли даражанинг хоссаларидан фойдаланишни ўрганасиз.

3.2.1 Рационал кўрсаткичли даража

Натурал m сони n га қолдиқсиз бўлинадиган ҳолда $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ тенглик бажарилади. Масалан, $\sqrt[5]{2^{10}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2$. Бу тенглик соннинг исталган каср даражасини аниқлашга имконият беради.

Фараз қилайлик, мусбат $a>0$ сон билан $r=\dfrac{m}{n}$ рационал сон берилсин. Бунда m – бутун сон, n – натурал сон. ***У ҳолда a сонининг r рационал кўрсаткичли даражаси деб*** $\sqrt[n]{a^m}$ ***ифодага айтилади:***

$$a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

$r > 0$ ва $a = 0$ бўлса, таърифга кўра $0^r = 0$. Масалан,

$$(0,2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{0,2^2};\ 3^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}};$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2,1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{21}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{21}};\ 0^{\frac{1}{2}} = 0.$$

$0^{-\frac{2}{3}}$, $(-2)^{\frac{3}{4}}$ ва $(-8)^{\frac{1}{6}}$ каби ифодалар маънога эга бўлмайди.

Ҳар қандай рационал сонни бир нечта каср сон кўринишида ифодалаш, масалан, 0,5 сонинин $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ ва хоказо касрлар кўринишида ёзиш мумкин. У ҳолда, r рационал кўрсаткичли даражанинг қиймати даража кўрсаткичи r сонини шу сонни берувчи касрларнинг қайси бири билан ёзсак ҳам ўзгармаслигини кўрсатайлик.

▲ Ҳақиқатан, ҳар бир r рационал сонни қисқармас каср кўринишда ёзиш мумкин. Фараз қилайлик, $r = \frac{m}{n}$ қисқармас каср бўлсин. r нинг каср кўринишдаги бошқа ёзувларини олиш учун $\frac{m}{n}$ касрнинг сурат ва маҳражини k натурал сонга кўпайтирамиз. Энди биз $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$ тенгликни исботласак, етарли: $a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Шуни исботлаш керак эди. ■

3.2.2. Рационал кўрсаткичли даражанинг хоссалари

Соннинг бутун кўрсаткичли даражаларининг асосий хоссалари унинг рационал кўрсаткичли даражалари учун ҳам бажарилади.

$a > 0$, $b > 0$ бўлса, исталган p ва q рационал сонлар учун:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

▲ **Исботи.** 1-хосса. Берилган p ва q рационал сонларни бир хил маҳражли касрлар орқали ёзамиз: $p = \frac{m}{n}$; $q = \frac{k}{n}$. (Масалан, $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{2}{3}$ бўлса, $p = \frac{3}{6}$; $q = \frac{4}{6}$ деб олиш мумкин). У ҳолда

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}.$$

Бундан ҳар қандай рационал p сони учун

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

тенглик келиб чиқади.Ҳақиқатан, 1-хосса бўйича $a^p \cdot a^{-p} = a^0 = 1$. Бундан $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$.

$a^{p-q} \cdot a^q = a^{p-q+q} = a^p$ тенгликдан 2-хоссанинг бажарилишини кўрамиз.

3-хоссанинг исботи: $a > 0$, $p = \dfrac{m}{n}$; $q = \dfrac{k}{l}$ бўлсин. У ҳолда $\left(a^p\right)^q =$

$$= \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[l\cdot n]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{l\cdot n}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}} = a^{p\cdot q}.$$

4-хоссанинг исботи: $p = \dfrac{m}{n}$ бўлса,

$$(a\cdot b)^p = (a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a\cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m\cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = a^p\cdot b^p. \ ■$$

Гуруҳларда ишлаш

5-хоссани мустақил исботланг, мисол келтиринг.

Таркибида рационал кўрсаткичли даражалари бўлган ифодаларни шакл алмаштиришга мисоллар кўриб чиқамиз.

1-мисол. $\dfrac{x^{\frac{3}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{4}}}$ ифодани соддалаштириш керак.

▲ Бу ифоданинг аниқланиш соҳаси $x > 0$ тенгсизлик билан берилади. Ифодани соддалаштириш учун унинг сурат ва маҳражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\frac{x^{\frac{3}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{2}{4}} - 25)}{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}} + 5)} = \frac{x^{\frac{2}{4}} - 25}{x^{\frac{1}{4}} + 5} = \frac{(x^{\frac{1}{4}})^2 - 5^2}{x^{\frac{1}{4}} + 5} =$$

$$= \frac{(x^{\frac{1}{4}} + 5)(x^{\frac{1}{4}} - 5)}{x^{\frac{1}{4}} + 5} = x^{\frac{1}{4}} - 5. \ ■$$

1. Соннинг рационал кўрсаткичли даражаси деганда нимани тушунасиз?
2. Рационал кўрсаткичли даражанинг қандай хоссаларини биласиз? Уларни исботлаб беринг.

Мисоллар

А

3.24. Каср кўрсаткичли даражани илдиз билан алмаштиринг:

1) $7^{\frac{5}{3}};\ 5^{\frac{1}{7}};\ 6^{-\frac{1}{3}};\ 10^{-0,5};$ 2) $3x^{\frac{1}{2}};\ (3x)^{\frac{1}{2}};\ \frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}};\ -y^{-\frac{2}{3}};$

3) $2,5^{-\frac{2}{3}};\ \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}};\ 0,5^{0,5};$ 4) $(ab)^{\frac{2}{3}};\ ab^{\frac{2}{3}};\ (a+b)^{\frac{2}{3}};\ a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}};$

5) $a^{0,5};\ b^{1,2};\ c^{-0,6};\ d^{-0,5};$ 6) $xy^{-1,5};\ 4(x-y)^{-1,5};\ 2x(x+y)^{-\frac{1}{8}};$

7) $5x^{\frac{2}{3}};\ 7a^{-1,5};\ ab^{\frac{5}{8}};\ (x+y)^{\frac{2}{3}};$ 8) $-3y^{-\frac{1}{2}};\ -1,2b^{-1,2};\ (ab)^{\frac{5}{8}};\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}.$

3.25. Ифодани йиғинди кўринишида ёзинг:

1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}});$ 2) $e^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}\cdot(e^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}});$

3) $(a^{\frac{2}{3}}-1)(a^{\frac{1}{3}}+2);$ 4) $(x^{-\frac{3}{4}}+2)(x^{-\frac{1}{4}}-3);$

5) $(1+b^{\frac{1}{2}})(1-b^{\frac{1}{2}});$ 6) $(2-y^{1,5})(2+y^{1,5}).$

3.26. Ҳисобланг:

1) $100^{\frac{1}{2}};\ 8^{\frac{1}{3}};\ 3,61^{-\frac{1}{2}};$ 2) $0^{\frac{5}{6}};\ 8^{1\frac{1}{3}};\ \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}};$

3) $27^{-\frac{1}{3}};\ 81^{\frac{3}{4}};\ 0,25^{-\frac{3}{2}};$ 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}};\ 16^{\frac{1}{4}};\ 343^{\frac{1}{3}};$

5) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25};\ 0,0081^{\frac{1}{4}};\ \left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}};$ 6) $(0,001)^{\frac{2}{3}};\ 256^{\frac{1}{8}};\ (0,000001)^{-\frac{1}{3}}.$

3.27. Ифодани соддалаштириб, рационал кўрсаткичли даража кўринишига келтиринг:

1) $c^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{1}{3}};$ 2) $b^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}};$ 3) $x^{0,2}\cdot x^{-1}\cdot x^{0,6};$

4) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{5}{3}};$ 5) $y^{0,8}\cdot y^{-5}\cdot y^{7,2};$ 6) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}};$

7) $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}};$ 8) $\left(x^{0,1}\right)^{-2,5};$ 9) $\left(y^{-0,5}\right)^{-1};$

10) $\dfrac{x^{\frac{3}{7}}\cdot x^{\frac{5}{21}}}{x^{\frac{1}{6}}}$; 11) $\dfrac{a^{5,2}\cdot a^{-0,8}}{a\cdot a^{0,9}}$; 12) $\dfrac{b^{0,2}\cdot b^{0,5}}{b^{-1,5}\cdot b^{3}}$.

3.28. Ҳисобланг:

1) $5^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{-0,25}\cdot 5^{\frac{4}{5}}\cdot 5^{-0,75}$; 2) $3^{\frac{3}{8}}\cdot 3^{\frac{2}{5}}\cdot 3^{-0,25}\cdot 3^{\frac{11}{40}}$;

3) $4^{0,7}\cdot 2^{-0,4}$; 4) $25^{0,3}\cdot 5^{\frac{14}{10}}$;

5) $9^{-\frac{4}{3}}\cdot 27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$; 6) $64^{\frac{1}{6}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{8}{3}}$;

7) $(81\cdot 16)^{\frac{1}{4}}$; 8) $(81\cdot 16)^{-\frac{1}{4}}$;

9) $\left(0,01\cdot\dfrac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 10) $\left(\dfrac{1}{27}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3.29. Йиғинди кўринишида ёзинг:

1) $\left(2p^{\frac{1}{3}}+q^{-1}\right)\left(2p^{\frac{1}{3}}-q^{-1}\right)$; 2) $\left(1+b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$; 4) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

5) $\left(\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{2}$; 6) $\left(\left(x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{2}$.

3.30. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ формуладан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $3 - x^2$; 2) $y^4 - 5$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}-4$;

4) $y^{\frac{2}{5}}-9$; 5) $25-p^{\frac{4}{7}}$; 6) $a-b^{\frac{1}{2}}$.

3.31. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x - 2$; 2) $10 - y$; 3) $a^{\frac{1}{16}}-16$;

4) $9c^{0,3} - 4$; 5) $a^{1,5} - y^2$; 6) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}-49$.

3.32. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$ формуладан фойдаланиб, кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3-8$; 2) $\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^3+27$; 3) $\left(p^{\frac{1}{3}}\right)^2+1$;

4) $q^{\frac{5}{6}}-125$; 5) $125-b$; 6) $y-2^{\frac{3}{2}}$;

7) $a^{0,9}-8b$; 8) $x+1000$; 9) $a^{2,4}+b^{0,5}$.

B

3.33. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{0,6}\cdot x^{-\frac{2}{5}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\left(y^{-\frac{5}{8}}\right)^{0,4}\cdot y^{0,25}$; 4) $\left(c^{\frac{5}{12}}\right)^{1,2}:\left(c^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1,5}$;

5) $a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4$; 6) $\left(c^{-\frac{3}{7}}\cdot y^{-0,4}\right)^3 c^{\frac{2}{7}}\cdot y^{0,2}$;

7) $\left(a^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)^{1\frac{1}{3}}a^{0,7}\cdot x^{0,8}$; 8) $p^{-1}q^{\frac{5}{4}}\left(p^{-\frac{2}{7}}\cdot q^{\frac{1}{14}}\right)^{-3,5}$.

3.34. Агар $x>0$ бўлса, x^6; x^{40}; x^{23}; x^{-14}; x^5; x^{-3}; x; $x^{\frac{1}{4}}$; x^{-1}; $x^{\frac{1}{3}}$ ифодаларни қандайдир бир ифоданинг квадрати кўринишида ёзинг.

3.35. Агар $y>0$ бўлса, y^6; y^{-21}; y^7; y; $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{-1,5}$; $y^{-\frac{1}{3}}$; $y^{0,2}$; $y^{-0,9}$ ифодаларни қандайдир бир ифоданинг куби кўринишида ёзинг.

3.36. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{12}}\cdot a^{-\frac{3}{8}}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$, бунда $a=125$;

2) $\left(\dfrac{b^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{6}}\cdot c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$, бунда $b=0,001$, $c=25$.

3.37. $x>0$ ва $y>0$ деб олиб, x ни y орқали ифодаланг:

1) $y=x^{\frac{2}{3}}$; 2) $y=x^{\frac{4}{7}}$; 3) $y=x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y=x^{-0,75}$;

5) $y=5x^{\frac{4}{5}}$; 6) $y=\dfrac{1}{6}x^{-\frac{2}{3}}$.

Ифодани соддалаштиринг **(3.38—3.39):**

3.38. 1) $\left(\dfrac{4}{c^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\dfrac{c^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^{\frac{1}{9}}$; 2) $\left(\dfrac{27x^{\frac{1}{2}}}{z^{0,2}}\right)^{2,5}\cdot\left(\dfrac{z^{\frac{1}{12}}}{3\sqrt[4]{3}\ x^{\frac{1}{24}}}\right)^{6}$.

3.39. 1) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^{2}-2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{4}}+c^{\frac{1}{4}}\right)^{2}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}+2x^{\frac{7}{12}}$; 4) $(a^{0,2}+x^{0,2})^2-(a^{0,2}-x^{0,2})^2$;

5) $\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$; 6) $\left(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(b+b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c\right)$.

3.40. Тенгламани ечинг:

1) $x^{\frac{1}{2}}=5$; 2) $x^{\frac{2}{3}}=4$; 3) $x^{\frac{3}{2}}=27$;

4) $x^{-0,8}=16$; 5) $x^{\frac{4}{5}}\cdot x^{1,8}=1$; 6) $x^{\frac{5}{8}}\cdot x^{\frac{3}{8}}=-25$.

3.41. Соддалаштиринг:

1) $\left(p^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)\left(p^{\frac{2}{3}}-p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{2}{3}}\right)$; 2) $\left(b^{1\frac{1}{2}}-c^{1\frac{1}{2}}\right)^{2}\left(b^{1\frac{1}{2}}+c^{1\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

3) $a+6a^{\frac{2}{3}}+12a^{\frac{1}{3}}+8$; 4) $x^2-9x^{\frac{4}{3}}+27x^{\frac{2}{3}}-27$.

3.42. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(-\dfrac{15m^{3,5}}{8n^{\frac{1}{2}}}\right)^{3}\cdot\left(-\dfrac{4n^{\frac{3}{8}}}{5m^{2,5}}\right)^{4}$; 2) $\left(-\dfrac{10x^{0,4}}{9a^{0,6}}\right)^{4}\cdot\left(-\dfrac{5x^{\frac{1}{2}}}{27a^{0,8}}\right)^{-3}$.

3.43. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x-y+x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$; 2) $u-v^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{2}}-v$;

3) $a+2a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+1$; 4) $2b^2+b^{\frac{8}{3}}+ba^{\frac{2}{3}}+2$;

5) $x+5x^{\frac{1}{2}}+4$; 6) $y^{\frac{1}{2}}-13y^{\frac{1}{4}}+36$.

C

3.44. $x - 1$ ифодани $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots a + 1)$ формуладан фойдаланиб, битта кўпайтувчиси 1) $x^{\frac{1}{4}} - 1$; 2) $x^{\frac{1}{5}} - 1$; 3) $x^{\frac{1}{6}} - 1$ бўладиган қилиб, кўпайтувчиларга ажратинг.

3.45. x ва y орасидаги боғланишни топинг:

1) $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{2}}, \\ y = t^{-\frac{1}{2}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^{\frac{1}{3}}, \\ y = t^{\frac{1}{6}}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 3t^{\frac{1}{2}}, \\ y = 2t^{-\frac{1}{3}}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}, \\ y = \dfrac{1}{3}t^{-\frac{1}{3}}. \end{cases}$

3.46. $x = \dfrac{a^2 + 1}{2a}$ деб олиб, $\dfrac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{-0,5} - (x+1)^{-0,5}}$ ифодани соддалаштиринг. Бунда $0 < a < 1$.

Такрорлаш учун машқлар

3.47. Тенгсизликни ечинг:

1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x+2}$; 2) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{x} > \dfrac{3}{x-1}$.

3.48*. Жадвалдан фойдаланмай ҳисобланг:

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$; 2) $8\cos10^\circ\cos30^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ$.

3.3 Иррационал ифодаларни шакл алмаштириш. Иррационал кўрсаткичли даража тушунчаси

Бу мавзуда иррационал кўрсаткичли даража тушунчаси билан танишиб, оҳирида:

- иррационал ифодаларни шакл алмаштирганда *n*-даражали илдизнинг хоссаларидан фойдаланишни ўрганасиз;
- мураккаб илдизлар формуласини биласиз ва қўллайсиз.

3.3.1. Иррационал кўрсаткичли даража тушунчаси

Биз асоси $a > 0$ бўлган даражани ўрганишни давом эттириб, даража кўрсаткичи ҳақиқий сон бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. Ҳақиқий сонлар тўплами – рационал ва иррационал сонлар тўпламининг билашмаси. Демак, рационал ва иррационал кўрсткичли даражалар аниқланса, ҳақиқий кўрсаткичли даража ҳам аниқланади.

Сонниг иррационал кўрсаткичли даражаси тушунчаси билан 3.3-параграфда танишдингиз. Уни аниқлаш учун иррационал сонни ортиғи билан ва ками билан рационал сонлар орқали яхлитлаш усули қўлланилади. Масалан, $3^{\sqrt{2}}$ ифодани аниқлаш учун $\sqrt{2}$ сонининг ортиғи билан ва ками билан олинган яхлитлашларининг 3 сонининг рационал даража кўрсаткичи сифатида олиб,

$$3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$$

$$3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5}$$

$$3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42}$$

....

қўштенгсизликни ёзамиз. Бу жараённи давом эттирсак, қўш тенгсизликларнинг чап ва ўнг томонларини чексиз ўнли касрлар кўринишида ёзилишини кўрамиз. Тенгсизликнинг ўнг ва чап томонларидаги даража кўрсаткичларидаги вергулдан кейин турган бир хил ўнли сонлар қадам сайин ортиб боради. Бу ўзаро тенг бўлган ўнли ишораларини $3^{\sqrt{2}}$ иррационал сонниг ўнли ишоралари сифатида қабул қиламиз.

Умуман, $a > 0$ бўлганда исталган ҳақиқий x сони учун a^x сони аниқланади ва сонниг ҳақиқий кўрсаткичли даражалари ҳам юқорида айтилган 1–5-хоссаларни қаноатлантиради.

Манфий сонларнинг тоқ кўрсаткичли илдизлари аниқланганлиги сабабли, $\frac{m}{n}$ қисқармас каср ва n тоқ сон бўлганда $a < 0$ манфий сон учун $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ифодани аниқлаш мумкин. Манфий сонниг иррационал даражаси эса аниқланмайди.

1-мисол. $\sqrt[5]{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt[7]{\frac{3}{16}}$ ифодани содалаштириш керак.

▲ $$\sqrt[5]{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt[7]{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{9}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{16}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{2^4}} = \frac{2^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{2}{5}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{7}}}{2^{\frac{4}{7}}} =$$

$$= 2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{-\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{-\frac{4}{7}} = 2^{\frac{1}{35}} \cdot 3^{-\frac{9}{35}} = \sqrt[35]{\frac{2}{3^9}}.$$ ■

Агар $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm$ $\pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ формула ***мураккаб илдизлар формуласи*** (мураккаб радикал формулалари) деб аталади.

2-мисол. $\sqrt{9-6\sqrt{2}}$ ифодани соддалаштириш керак.

▲ **1-усул.** Мураккаб илдиз формуласини қўллаймиз:

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}}=\sqrt{9-\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-72}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-72}}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{3}\,.$$

2-усул. Тўла квадратга келтириб, соддалаштириш:

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}}=\sqrt{6-6\sqrt{2}+3}=\sqrt{\sqrt{6^2}-2\sqrt{6\cdot 3}+\sqrt{3^2}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{6}-\sqrt{3}\,. \blacksquare$$

?

1. Соннинг иррационал кўрсаткичли даражани қандай аниқлаш мумкин?
2. Мураккаб илдизлар формуласини ёзинг.
3. Аниқланиш соҳасига илдизнинг даражаси қандай таъсир қилади?

Мисоллар

А

3.49. Ифодани рационал кўрсаткичли даража кўринишига келтиринг:

1) $\sqrt{3};\ \sqrt[3]{143^2};\ \sqrt[6]{\dfrac{1}{15}}$; 2) $\sqrt{0,2};\ \sqrt[5]{73^3};\ \sqrt[8]{2^{-2}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^{-2}}};\ \sqrt[3]{2b};\ \sqrt[4]{7+a}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}};\ \sqrt[4]{3a};\ \sqrt[5]{2+b}$;

5) $2,5\sqrt{40};\ a\sqrt{a};\ (x+1)^2\cdot\sqrt[4]{x+1}$; 6) $-8\sqrt[3]{2};\ -b\sqrt[3]{b};\ (y-5)^3\cdot\sqrt[4]{y-5}$.

3.50. Ифодаларни рационал кўрсаткичли даража кўринишида ёзинг:

1) $\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[15]{x}$; 2) $\sqrt[8]{a^3}\cdot\sqrt[12]{a}$; 3) $\sqrt[7]{y^2}\cdot\sqrt[3]{y^{-1}}$;

4) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$; 5) $\sqrt[10]{y\cdot\sqrt[3]{y^2}}$; 6) $\sqrt[5]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^{-3}}}$;

7) $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x}}$; 8) $\sqrt[5]{a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}}$; 9) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2\cdot\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\cdot\sqrt{b}}}$.

3.51. Касрнинг маҳражида илдиз белгиси бўлмайдиган қилиб шакл алмаштиринг:

1) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$; 2) $\dfrac{18}{\sqrt[4]{27}}$; 3) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{8}}$; 4) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{-49}}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{7}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; 7) $\dfrac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{29}{\sqrt{20}-\sqrt{9}}$.

B

3.52. Касрни маҳражидаги илдиз белгиси бўлмайдиган қилиб шакл алмаштиринг:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; 3) $\dfrac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$; 4) $\dfrac{29}{3+\sqrt[3]{2}}$.

3.53. Касрни қисқартиринг:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$; 5) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}}$; 6) $\dfrac{b\sqrt{b}-\sqrt[3]{a^2}}{a^2+b^4\sqrt{b}}$.

***3.54.** Маҳраждаги иррационалликдан қутулинг:

1) $\dfrac{1}{3+\sqrt[4]{2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}$;

4) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$; 5) $\dfrac{2}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$; 6) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

3.55. Ифодани соддалаштиринг:

$$x\sqrt[6]{x^3y\sqrt{7-4\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[6]{x^3y\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\,.$$

C

3.56. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$ айниятни исботланг.

▲ $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=a$ белгилашлар киритиб, тенгликнинг иккала томонини кубга кўтарамиз:

$$2+\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+2-\sqrt{5}=a^3;$$

$$4+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a^3.$$ Умумий кўпайтувчини қавс сиртига чиқарсак,

$$4+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)=a^3,$$

$$4+3\sqrt[3]{4-5}\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)=a^3.$$ Қавс ичидаги ифоданинг a га тенг эканлигини эътиборга олсак, $4-3a=a^3$ куб

тенгламага эга бўламиз. Уни кўпайтувчиларга ажратсак:
$a^3 + 3a - 4 = a^3 - 1 + 3a - 3 = (a - 1)(a^2 + a + 1) + 3(a - 1) =$
$= (a - 1)(a^2 + a + 4).$
Ушбу тенгламанинг илдизи $a = 1$. ■

3.57. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(a + b^{\frac{3}{2}} : \sqrt{a}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[10]{(a - b)^3}$;

2) $y\left[\left(\frac{x\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y}} - \sqrt[4]{xy}\right) : \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right) - \sqrt[4]{x}\right]^{-4}$.

3.58. Мураккаб илдизлар формуласининг тўғрилигини исботланг:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

3.59. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\left(1 + \sqrt{a}\right)\left(1 + \sqrt[4]{a}\right)\left(1 + \sqrt[8]{a}\right)\left(1 + \sqrt[16]{a}\right)\left(1 + \sqrt[32]{a}\right)\left(1 - \sqrt[32]{a}\right)$,
бунда $a = 2018$;

2) $\left(a - \sqrt{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1\right)$, бунда $a = 5$.

Такрорлаш учун машқлар

3.60. Иккиҳад кўринишида ёзинг:
1) $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$;
2) $(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

3.61. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + x = 14, \\ y^2 + xy + y = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 0. \end{cases}$

3.4. Даражали функция, унинг хоссалари ва графиги

Бу мавзуда даражали функция билан танишиб, оҳирида:

- даража кўрсаткичи ҳақиқий сон бўлган даражали функциянинг таърифини биласиз;
- даража кўрсаткичига боғлиқ бўлган даражали функциянинг графигини ясашни ўрганасиз;

- даражали функциянинг хоссаларини биласиз ва қўллайсиз;
- даражали функциянинг кундалик ҳаётда қўлланиши билан танишасиз.

> **Таъриф.** *$y = ax^{\alpha}$ $(x > 0)$ кўринишдаги функция даражали функция деб аталади. Бунда а ва α – берилган ҳақиқий сонлар, x – аргумент, α – даража кўрсаткичи.*

Таърифга кўра α даража кўрсаткичи – ҳақиқий сон, яъни рационал сон ҳам, иррационал сон ҳам бўлиши мумкин. Иррационал кўрсаткичли даражалар эса рационал кўрсаткичли даражалар орқали аниқланганлигидан рационал кўрсаткичли даражаларнигина кўриб чиқамиз. Шу сабабли исботланган хоссаларнинг ҳаммаси ҳам исталган ҳақиқий кўрсаткичли даражалар учун бажарилади деб ҳисоблаймиз. Умумий ҳолда соннинг рационал кўрсаткичли даражаси фақат мусбат сонлар учун бажарилганлигидан рационал кўрсаткичли $y = x^{\alpha}$ функциянинг аниқланиш соҳаси сифатида $(0; +\infty)$ тўпламни оламиз.

Даражали функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1°. *Даражали функция фақат мусбат қийматларгина қабул қилади, яъни ҳар бир $x \in (0; +\infty)$, α ҳақиқий сонлар учун $x^{\alpha} > 0$ тенгсизлик бажарилади.*

▲ $\alpha = 0$ бўлса, $x^{\alpha} = x^0 = 1 > 0$. Агар $\alpha = \frac{m}{n}$ $(m,\ n \in N)$ бўлса, $x^{\alpha} = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Шартга кўра $x > 0$, демак, $x^m > 0$.

Арифметик илдиз сифатида $\sqrt[n]{x^m} > 0$. Энди $\alpha = -\frac{m}{n}$ $(n,\ m \in N)$ бўлсин, у ҳолда $x^{\alpha} = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} > 0$. ■

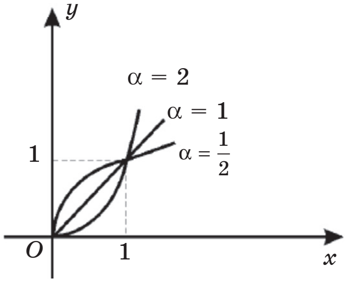
2°. *Кўрсаткичи мусбат даражали функция монотон ўсувчи, яъни $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ ва $\alpha > 0$ ҳақиқий сонлар учун $x_1^{\alpha} < x_2^{\alpha}$ тенгсизлик бажарилади.*

▲ $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha > 0$ ўсувчи бўлишини ҳосила ёрдамида текширайлик. Ҳақиқатан, $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$. Чунки $\alpha > 0$ ва $x^{\alpha-1} > 0$ (1°-хосса). У ҳолда, $y = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$ функция $(0; +\infty)$ тўпламда ўсувчи. ■

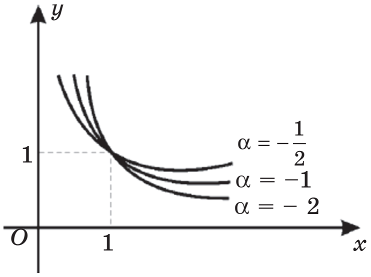
3°. *Кўрсаткичи манфий даражали бўлган функция монотон камаювчи, яъни $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар бир $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ ва $\alpha < 0$ ҳақиқий сонлар учун $x_1^{\alpha} > x_2^{\alpha}$ тенгсизлик бажарилади.*

▲ $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, $\alpha < 0$ функция берилсин. У ҳолда $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0$, чунки $\alpha < 0$, $x^{\alpha-1} > 0$. Бундан бу функция $(0; +\infty)$ оралиқда камаювчи. ■

Юқорида айтилгани каби бу хоссалар исталган ҳақиқий кўрсаткичли даражалар учун бажарилаверади. 3.3,3.4-расмларда $\alpha = 2,\ 1,\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2$ бўлганда даражали $y = x^{\alpha}$ функциянинг графиклари тасвирланган.

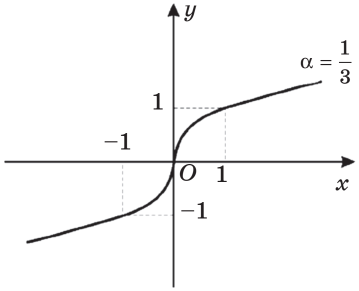


3.3-расм

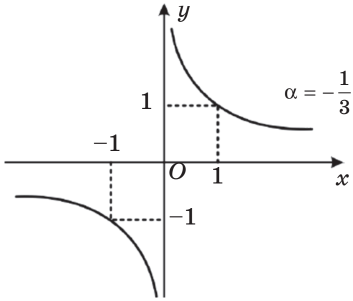


3.4-расм

Баъзида маҳражи тоқ сон бўлган каср кўрсаткичли даражали функцияларни аргументнинг манфий қийматлари учун ҳам кўриб чиқилаверади. Масалан, 3.5- ва 3.6-расмларда мос равишда $y = x^{\frac{1}{3}}$ ва $y = x^{-\frac{1}{3}}$ функцияларнинг графиклари тасвирланган.



3.5-расм



3.6-расм

1. Даражали функциянинг 1°–3°-хоссаларини келтириб чиқариб, исботлаб беринг.
2. Умумий ҳолда нима учун даражали функциянинг аниқланиш соҳаси сифатида $(0; +\infty)$ тўплам олинади?
3. а) мусбат кўрсаткичли; б) манфий кўрсаткичли даражали функция $x = 0$ нуқтада аниқланганми? Жавобингизни асосланг.
4. Нима учун кўрсаткичи $\alpha = \dfrac{m}{2n-1}$ $(n \in N,\ m \in Z)$ кўринишдаги даражали функцияларни аргументнинг манфий қийматлари учун аниқлаш мумкин?

Мисоллар

A

3.62. Сонларни ўсиш тартибида ёзинг:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}};$ 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{7}{11}};\ \left(\frac{4}{3}\right)^{0};\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}};$

3) $0{,}12^{-\frac{1}{2}}; 0{,}12^{-\frac{1}{3}}; 0{,}12^{-\frac{1}{4}}$; 4) $2{,}24^{-\frac{1}{2}}; 2{,}24^{-\frac{1}{3}}; 2{,}24^{-\frac{1}{4}}$.

3.63. Сонларни таққосланг:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ ва $\left(\frac{4}{7}\right)^{0}$;

3) $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$ ва $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$; 4) $0{,}01^{-0,5}$ ва $0{,}01^{-0,6}$.

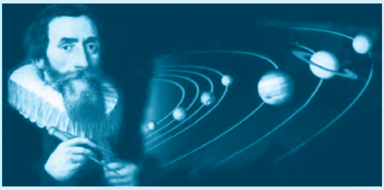
3.64. Функциянинг ўсувчи ёки камаювчи эканлигини аниқланг:

1) $y = x^{\frac{4}{3}}$; 2) $y = x^{-0,2}$; 3) $y = x^{0,2}$; 4) $y = x^{-\frac{7}{11}}$.

3.65. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$; 3) $y = x^{2}$; 4) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Тарихга назар



И. Кеплер
(1571–1630)

Даражали функция фанда жуда кенг қўлланилади. Шулардан бири— Иоганн Кеплернинг Қуёш системаси планеталарининг ҳаракати ҳақидаги учинчи қонуни. Бу қонун планеталарнинг Қуёш атрофида тўлиқ айланиб чиқадиган вақти (планеталарнинг даври деб аталади) ва планета билан Қуёшнинг орасидаги масофада боғланиш бор эканлигини кўрсатди. Аниқроқ айтсак, планетанинг даври p ва қуёшгача бўлган масофа d бўлса, $d^3 \sim p^2$ (Қуёш системаси планеталарининг даврининг квадрати унинг Қуёшгача бўлган масофасининг кубига пропорционал). Учинчи даражали илдиз билан k коэффициентни киритиб, ушбу формулани оламиз:

$$d = k\sqrt[3]{p^2}.$$

k коэффициентни, Ернинг Қуёш атрофида айланиш даври 365,25 сутка ва планетадан Қуёшгача бўлган масофа $d = 1{,}496 \cdot 10^8$ км эканлигини эътиборга олсак,

$$d = k\sqrt[3]{p^2} \Rightarrow k = \frac{d}{\sqrt[3]{p^2}} = \frac{1{,}496 \cdot 10^8}{\sqrt[3]{365{,}25^2}} = 2{,}928 \cdot 10^7.$$

Шундай қилиб, Кеплернинг учинчи қонуни:

$$d = 2{,}928 \cdot 10^7 \cdot \sqrt[3]{p^2}.$$

Топшириқ

- Кеплер қонунига кўра планетанинг даври ортган сайин унинг Қуёшгача бўлган масофаси қандай ўзгаради? Тушунтиринг.

- Марс планетасининг Қуёшни айланиб чиқиш даври 687 сутка эканлигини инобатга олиб, Марсдан Қуёшгача бўлган масофани топинг, жавобларингизни интернетдан олинган маълумотлар билан таққосланг.
- Венера планетасидан Қуёшгача бўлган масофа $1{,}082 \cdot 10^8$ км. Унинг даврини топинг.

B

3.66. Сонларни таққосланг:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$ ва $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$; 2) $0{,}132^{\sqrt{2}}$ ва $0{,}132^{-\sqrt{2}}$;

3) $\left(2\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ва $(12)^{-\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\sqrt{76}\right)^{-\frac{6}{11}}$ ва $\left(5\sqrt{3}\right)^{-\frac{6}{11}}$.

3.67. Сонларни ўсиш тартибида жойлаштиринг:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-0{,}2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{0{,}2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{3}}$; $\left(\frac{2}{7}\right)^{-\frac{6}{5}}$; $\left(\frac{13}{17}\right)^{0}$;

3) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{15}}$; $\left(\frac{4}{25}\right)^{-4}$.

3.68. Функциянинг ўсувчи ёки камаювчи эканлигини аниқланг:

1) $y = x^{\sqrt{2}}$; 2) $y = x^{-\sqrt{3}}$; 3) $y = x^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

3.69. 3.68-мисолдаги функцияларнинг графикларини ясаб, уларни мос равишда $y = x$ ва $y = \frac{1}{x}$ функцияларнинг графиклари билан таққосланг.

Ҳисобланг (**3.70—3.71**):

3.70. 1) $\left(27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 32^{\frac{2}{5}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $\left(100^{-\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{4}{3}} \cdot 0{,}25^{0{,}5} \cdot 16^{-0{,}75}\right)^{\frac{3}{4}}$;

3) $\left(6{,}25^{0{,}5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \cdot 100^{-\frac{1}{2}} \cdot 0{,}01^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

4) $\left(3^{2{,}5} \cdot \left(3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) : \left(3^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{5}{6}}\right) : \left(\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{7}}$.

3.71*. 1) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{25+4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}$;

3) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

Амалий топшириқ

3.72. Одамнинг югуриш тезлиги унинг қадамининг узунлигининг квадратига пропорционал экан. Қадами 0,6 м га тенг бўлган бола 7 м/с тезлик билан югуради. Агар у қадамини 0,65 метрга етказса, унинг тезлиги қандай бўлади?

C

3.73*. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = \sqrt[3]{x-2}$; 2) $y = (x+3)^{-\frac{1}{2}} + 1$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$.

3.74. Агар $f(x)$ функция жуфт ва:

1) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \geqslant 0$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, $x > 0$

бўлса, $f(x)$ функцияни битта формула билан ёзиб кўрсатинг.

3.75*. Агар $f(x)$ функция тоқ ва

1) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \geqslant 0$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geqslant 0$; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, $x > 0$

бўлса, $f(x)$ функцияни битта формула билан ёзиб кўрсатинг.

3.76. $x = 4(a-1)$, $a > 2$ деб олиб, $\left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ифоданинг қийматини топинг.

3.77. Агар $1 \leqslant a \leqslant 2$ бўлса, $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$ ифоданинг қийматини топинг.

3.78. Тенгламани ечинг:

1) $\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{6}{5}} = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}$; 2) $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$.

3.79. 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$ сонларни ўсиш тартибида жойлаштиринг.

3.80. Инсон танаси терисининг юзи ($м^2$) унинг бўйи билан вазнига боғлиқ ва у қуйидаги формула билан ҳисобланади: $S = 0{,}007184 \cdot h^{\frac{3}{4}} \cdot w^{\frac{2}{5}}$. Бунда h – инсоннинг бўйи, w – унинг вазни (кг ҳисобида). Ўз терингизнинг юзасини калькулятор ёрдамида ҳисоблаб кўринг.

Такрорлаш учун машқлар

3.81. 1; –1; 2; –2; 3; –3; 4; –4; … кетма-кетлик 1) қуйидан чегараланган; 2) юқоридан чегараланган бўладими?

3.82. a нинг қандай қийматларида $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ сонлар 1) арифметик прогрессиянинг; 2) геометрик прогрессиянинг;3) ҳам арифметик, ҳам геометрик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлади?

3.5 Ҳақиқий кўрсаткичли даражали функциянинг ҳосиласи ва интеграли

Бу мавзуда даражали функциянинг ҳосиласи ва интегралини топишни ўрганиб, оҳирида:

- даража кўрсаткичи ҳақиқий сон бўлган даражали функциянинг ҳосиласининг формуласини биласиз ва қўллайсиз;
- даража кўрсаткичи ҳақиқий сон бўлган даражали функциянинг интеграли формуласи билан танишасиз, уни қўллайсиз.

Ҳақиқий кўрсаткичли даражали функциянинг ҳосиласи бутун кўрсаткичли даражаларнинг ҳосиласини топиш формулалари орқали ҳисобланади.

$x > 0$ бўлганда исталган r рационал сон учун $y = x^r$ даражали функциянинг ҳосиласи ушбу формула билан ҳисобланади:

$$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}.$$

1-мисол. $y = \sqrt[3]{x^2}$ функциянинг ҳосиласини топиш керак.

▲ Рационал кўрсаткичли даражанинг таърифи $\left(\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}\right)$ бўйича берилган функцияни $y = x^{\frac{2}{3}}$ кўринишда ёзамиз.

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}. \ ■$$

2-мисол. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ функциянинг $x_0 = 1$ нуқтадаги ҳосиласини топиш керак.

▲ Рационал кўрсаткичли даражанинг таърифига кўра $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$. Бундан $y' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$;

$$y'(1) = \frac{1}{3\cdot 1\sqrt[3]{1}} = -\frac{1}{3}. \ ■$$

Бутун кўрсаткичли даражали функциянинг аниқмас интегралини топиш формуласи ҳақиқий кўрсаткичли даражали функциянинг ҳосиласини топиш учун ҳам қўлланилади:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1\,.}$$

3-мисол. $\int \sqrt[3]{x^4}\,dx$.

▲ Рационал кўрсаткичли даражанинг хоссасига кўра $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$. Бундан $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$.

$$\int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C\,.$$

Касрга бўлишда эҳтиёт бўлиш лозим: $\frac{a}{b}$ *сонига бўлиш* $\frac{b}{a}$ *сонига кўпайтириш билан бир хил.*

Интегралдан ҳосила олиб текширсак,

$$\left(\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7} + C\right)' = \left(\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}\right)' + 0 = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}\ .\ ■$$

1. Даражали функциянинг ҳосиласини топиш формуласини ёзинг.
2. Даражали функциянинг аниқмас интегралини топиш формуласини ёзинг.

Мисоллар

A

Функциянинг ҳосиласини топинг (3.83—3.84):

3.83. 1) $y = \sqrt[5]{x}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$;

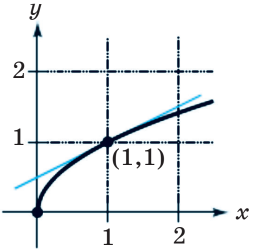
3) $y = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$.

3.84. 1) $f(x) = x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{2}{3}}$; 2) $f(t) = t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{1}{3}} + 4$;

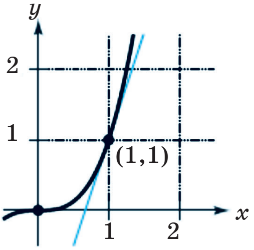
3) $f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

3.85. Даражали функцияларнинг (1; 1) нуқтада ўтказилган уринмасининг бурчак коэффициентини топинг:

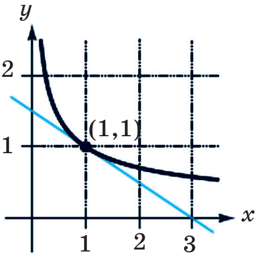
① $y = x^{\frac{1}{2}}$;



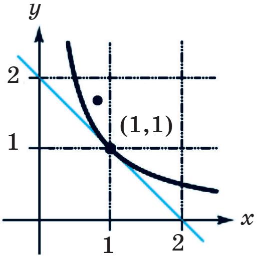
② $y = x^3$;



③ $y = x^{-\frac{1}{2}}$;



④ $y = x^{-1}$.



3.86. Жадвални тўлдиринг:

Дастлабки функция	Шакл алмаштиринг	Ҳосиласини топинг	Соддалаштиринг
$y = \frac{5}{2x^2}$	$y = \frac{5}{2}x^{-2}$	$y' = \frac{5}{2}\cdot(-2)\,x^{-2-1}$	$y' = -5x^{-3}$
$y = \frac{6}{(5x)^3}$			
$y = \frac{\pi}{(3x)^{\frac{5}{2}}}$			
$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x^{-\frac{3}{2}}}$			

3.87. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

формуладан фойдаланиб, берилган функциянинг интегралини оғзаки топинг:

1) $1,5x^{\frac{1}{2}}$; 2) $4x^{\frac{1}{3}}$; 3) $4x^{-2,5}$; 4) $\frac{1}{7}x^{\frac{2}{5}}$.

3.88. Берилган функциянинг бошланғич функциясини топинг:

1) $f(x) = 5x\sqrt{x}$; 2) $f(x) = \frac{1}{6}x^{1,75}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$.

3.89. Жадвални тўлдиринг:

Аниқмас интеграл	Шакл алмаштиринг	Интегрални топинг	Соддалаштиринг
$\int \sqrt[7]{x^3}dx$	$\int x^{\frac{3}{7}}dx$	$\frac{x^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}}+C$	$\frac{7\sqrt[7]{x^{10}}}{10}+C$
$\int \sqrt{x}dx$			
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$			

3.90. Даражали функциянинг интегралини топинг ва натижани ҳосила олиб текширинг:

1) $\int 2x^{-\frac{1}{3}}dx$; 2) $\int 14x^{0,4}dx$; 3) $\int -1,2x^{-0,6}dx$.

В

3.91. Функциянинг берилган нуқтадаги уринмасининг тенгламасини топинг ва натижани https://www.desmos.com/calculator-онлайн график калькулятор ёрдамида текширинг: $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$, M (1; 2).

3.92. Функция ҳосиласининг берилган нуқтадаги қийматини топинг:

1) $y = x^{-\frac{2}{5}}(2x-2)$, $x_0 = -2$; 2) $y = x^3(x-5)^{\frac{6}{7}}$, $x_0 = 2$.

3.93. Интегрални ҳисобланг:

1) $\int x^7dx$; 2) $\int x^3\sqrt[4]{x}dx$;

3) $\int \frac{x^3+3x^2-\sqrt[3]{x}+1}{x\sqrt{x}}dx$; 4) $\int 5\sqrt{x}dx + \int \frac{6}{x\sqrt{x}}dx$.

3.94. Берилган $f'(x)$ ҳосила бўйича $f(x)$ функцияни топинг ва интеграл орқали текширинг:

1) $x\left(3x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$; 2) $6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - 7x^2\sqrt{x}$; 4) $\left(5\sqrt{x}\right)^3 - \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$.

3.95. $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$ функциянинг $M(1;\ 1{,}5)$ нуқта орқали ўтувчи бошланғич функциясини топинг.

3.96. $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини топинг.

1) $f(x) = 1{,}5x^2 - \dfrac{4}{x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{4}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4} + 5x^{\frac{3}{2}}$.

3.97. Интегрални рационал кўрсаткичли даражанинг хоссаларидан фойдаланиб топинг:

1) $\int \sqrt[3]{x}dx$; 2) $\int \sqrt[3]{x^7}dx$; 3) $\int -12\sqrt[10]{x^6}dx$;

4) $\int -2\sqrt[4]{x^5}dx$; 5) $\int -\dfrac{3}{2\sqrt{x}}dx$; 6) $\int -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}dx$.

3.98. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}; \\ y = \sqrt{2x} \end{cases}$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигурани ясаб, юзини топинг.

3.99. Аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int\limits_3^4 \sqrt{x-3}dx$; 2) $\int\limits_{-8}^{8} \dfrac{dx}{\sqrt{5 + \dfrac{x}{2}}}$.

Такрорлаш учун машқлар

3.100. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

1) $\sin\dfrac{17\pi}{4}$; 2) cos2; 3) tg3,3π; 4) ctg90.

3.101. Умумий ҳади $a_n = 2^{7-n}$ формула билан берилган кетма-кетликнинг дастлабки 10 та ҳадини топинг.

«ДАРАЖАЛАР ВА ИЛДИЗЛАР. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ» бўлимининг хулосаси

Агар $n > 1$ натурал сон билан a ва b сонлар учун $b^n = a$ тенглик бажарилса, b сони a сонининг *n-даражали илдизи* деб аталади. Номанфий сондан олинган n-даражали мусбат илдиз шу соннинг *n-даражали арифметик илдизи* деб аталади $\sqrt[n]{a}$, $a > 1$.

n-даражали илдизнинг хоссалари:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;   2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;   3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$;   5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;   6. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

a сонининг r рационал кўрсаткичли даражаси деб $\sqrt[n]{a^m}$ ифоданинг қийматига айтилади:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

Рационал кўрсаткичли даражанинг хоссалари ($a > 0$, $b > 0$):

1°. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;   2°. $a^p : a^q = a^{p-q}$;   3°. $(a^p)^q = a^{pq}$;

4°. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;   5°. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Мураккаб илдизлар формуласи:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} .$$

$y = ax^\alpha$ $(x > 0)$ кўринишдаги функция даражали функция деб аталади. Бунда a ва α – берилган ҳақиқий сонлар. Даражали функция фақат мусбат қийматларгина қабул қилади, яъни барча x, $x \in (0; +\infty)$ ва α ҳақиқий сонлар учун $x^\alpha > 0$ тенгсизлик бажарилади.

$x > 0$ бўлганда исталган r рационал сон учун $y = x^r$ даражали функциянинг ҳосиласи қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Терминлар номининг луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Даражали функция	Дәрежелік функция	Степенная функция	Power function
Даража кўрсаткичи	Дәреже көрсеткіш	Показатель степени	Exponent
Иррационал	Иррационал	Иррационал	Irrational
Рационал	Рационал	Рациональный	Rational
Функциянинг хоссалари	Функцияның қасиеттері	Свойства функции	Function properties
n-даражали илдиз	n-дәрежелі түбір	Корень n- ой степени	n-th root
Аниқланиш соҳаси	Анықталу облысы	Область определения	Domain

IV бўлим. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Иррационал тенгламалар Пифагор теоремасидан бошлаб геометриянинг кўпгина масалаларини ечишда, шу билан бир қаторда фигурали учиш, биология, физика, авиацияда ҳам қўлланилади.

Фигурали учишда айланиш учун қадамнинг узунлигини ўлчашда, жониворнинг яшаш худудининг зичлигини ҳисоблаш ёки Эйнштейннинг солиштирмалилик назариясидаги жисм тезлиги, самолётнинг тезлигини топиш учун иррационал тенгламаларни ечиш керак.

Эйнштейннинг солиштирмалик назариясига кўра m, l катталикларни топиш формулалари:

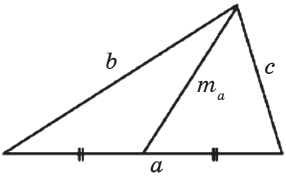
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

бунда m_0, l_0 – мос равишда жисмнинг дастлабки массаси билан узунлиги, v – жисмнинг тезлиги, c – ёруғлик тезлиги.

Учбурчакнинг медианасини топиш формуласи:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$$



Бўлимда кўриб чиқиладиган мавзулар:

4.1. Иррационал тенгламалар ва тенгламалар системалари

4.2. Иррационал тенгсизликлар

4.1 Иррационал тенгламалар ва тенгламалар системаси

Бу мавзуда иррационал тенгламаларни кўриб чиқиб, оҳирида:

- иррационал тенгламанинг таърифини биласиз ва унинг ҚҚМБҚТ ни аниқлай оласиз;
- иррационал тенгламани даражага кўтариш орқали еча оласиз;
- иррационал тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усули орқали еча оласиз;
- иррационал тенгламалар системасини ечишни ўзлаштирасиз.

Таъриф. *Ўзгарувчиси илдиз белгиси остида бўлган тенглама **иррационал тенглама** дейилади.*

Масалан, $\sqrt[3]{x}-2=0$, $\sqrt{6-x}-\sqrt{x-7}=5$, $\sqrt{x^2-5}=2$ ва хоказо тенгламалар – иррационал тенгламалар. $x^2-\sqrt[5]{3+\sqrt{3}}=\sqrt{7}$ тенглама иррационал тенглама эмас, чунки бу ерда илдиз белгиси остида ўзгарувчи йўқ. Жуфт кўрсаткичли илдизлари бўлган иррационал тенгламалар (таркибида ўзгарувчиларнинг ҳар бир қийматида) маънога эга бўлавермайди. Шу сабабли иррационал тенгламаларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини (ҚҚМБҚТ) топиш керак.

Масалан, $\sqrt{6-x}-\sqrt{x-7}=5$ тенгламанинг ҚҚМБҚТ и $\begin{cases}6-x\geqslant 0,\\ x-7\geqslant 0\end{cases}$ тенгламалар системаси билан аниқланади. Демак, ҚҚМБҚТ – бўш тўплам. Бундан тенгламанинг ечими мавжуд эмас.

Яна бир мисол кўриб чиқайлик: $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-2}=0$. Тенгламанинг ҚҚМБҚТ и $\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ x-2\geqslant 0\end{cases}$ тенгламалар системасининг ечими бўлади. Системани ечсак, тенгламанинг ҚҚМБҚТ и фақат битта элементдан ташкил топганлигини кўрамиз: $\{2\}$. Шу сонни тенгламага қўйиб текшириб, унинг илдиз эканлигига ишонч хосил қиламиз.

Иррационал тенгламаларни даражага кўтариш орқали ечиш

Иррационал тенгламаларни ечишнинг асосий усули – тенгламанинг иккала томонини керакли даражага кўтариш. Мақсад – илдиз белгисидан қутилиш. Тенгламадаги берилган илдизнинг даража кўрсаткичига кўра баъзида квадратга кўтариб, кубга кўтариб илдиздан қутилиш керак. Бироқ, жуфт даражага кўтарганда чет илдизлар хосил бўлиши мумкин, шу сабабли топилган ечимларни тенгламага қўйиб текшириш керак.

1-мисол. $\sqrt{x^2-5}=2$ тенгламани ечамиз.

▲ Бу тенгламанинг иккала томонини ҳам квадратга кўтарамиз: $x^2-5=4$. Бундан $x^2=9$, яъни $x=3$ ва $x=-3$ қийматлар топилади. Шу топилган сонлар тенгламанинг ечими бўладими ёки бўлмайдими? Шуни текширамиз. Ҳақиқатан, уларни шу тенгламага қўйсак, сонли айният хосил бўлади: $\sqrt{3^2-5}=2$ ва $\sqrt{(-3)^2-5}=2$, у ҳолда, $x=3$ ва $x=-3$ берилган тенгламанинг ечимлари.

Жавоб: ±3. ■

8, 9-синфларда ўтган таърифни ёдга туширайлик: “Ечимлар тўплами бир хил бўлган тенгламалар (тенгсизликлар) ***тенгкучли тенгламалар (тенгсизликлар)*** деб аталади». Баъзида улар ***бир қийматли*** тенгламалар (тенгсизликлар) деб ҳам аталади.

Теорема. *$\sqrt[2k]{g(x)} = h(x)$ кўринишда берилган иррационал тенглама $\begin{cases} g(x) = (h(x))^{2k} \\ h(x) \geqslant 0 \end{cases}$, тенгламалар системаси билан тенгкучли. $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ кўринишда берилган иррационал тенглама $f(x) = (g(x))^{2k+1}$ тенглама билан тенгкучли.*

$\sqrt[2k]{g(x)} = h(x)$ кўринишда берилган иррационал тенгламанинг $\begin{cases} g(x) = (h(x))^{2k} \\ h(x) \geqslant 0 \end{cases}$, тенгламалар системаси билан тенгкучли эканлигини исботлаш учун арифметик квадрат илдизнинг таърифини ёдга тушириш етарли. Тоқ даражага кўтарганда ишора сақланганлиги сабабли, $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ кўринишда берилган иррационал тенглама $f(x) = (g(x))^{2k+1}$ тенглама билан тенгкучли.

2-мисол. $\sqrt{x} = x - 2$ тенгламани ечиш керак.

▲ **1-усул.** Тенгламанинг иккала томонини ҳам иккинчи даражага кўтарамиз:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 - 4x + 4, \\ x - 2 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \geqslant 2 \end{cases} - \text{ҚҚМБҚТ}.$$

Биринчи тенгламанинг илдизлари $x = 1$ ва $x = 4$. Бунда $x = 1$ сони берилган тенгламанинг илдизи бўлмайди, чунки у ҚҚМБҚТ га тегишли эмас. $x = 4$ сони ҚҚМБҚТ га тегишли бўлганидан тенгламанинг илдизи бўлади.

Жавоб: $x = 4$.

2-усул. Берилган тенгламани квадратга кўтариб, $x^2 - 5x + 4 = 0$ квадрат тенглама хосил қиламиз. Бу тенгламанинг илдизлари $x = 1$ ва $x = 4$. Энди ушбу топилган сонлар тенгламанинг ечими бўлиш, бўлмаслигини аниқлаш учун текшириш бажарамиз.

Текшириш: $x = 1$ бўлса, берилган тенгламадан $\sqrt{1} = 1 - 2$ ёки $\sqrt{1} = -1$ нотўғри тенгликни оламиз. У ҳолда 1 сони тенгламанинг ечими бўла олмайди, у *чет илдиз*.

$x = 4$ бўлса, берилган тенгламадан $\sqrt{4} = 4 - 2$ ёки $\sqrt{4} = 2$ кўринишдаги тўғри, рост тенгликни оламиз. Бундан $x = 4$ сони берилган тенгламанинг илдизи бўлади.

Жавоб: $x = 4$. ■

Таркибида x ўзгарувчиси бўлган баъзи бир иррационал тенгламаларда илдиз белгиси бир неча марта учраши мумкин. Бундай ҳолларда тенгламани бир неча марта даражага кўтариш керак бўлади.

3-мисол. $\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x-2}=1$.

▲ Аввал ҚҚМБҚТ ни аниқлайлик:

$$\begin{cases} 2x+2\geqslant 0, \\ 3x-2\geqslant 0, \\ \sqrt{2x+2}-1\geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -1, \\ x\geqslant \dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow x\geqslant \frac{2}{3}.$$

Берилган тенгламани $\sqrt{2x+2}=1+\sqrt{3x-2}$ кўринишда ёзиб, унинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$\left(\sqrt{2x+2}\right)^2=\left(1+\sqrt{3x-2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x+2=1+2\sqrt{3x-2}+3x-2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x-2}=3-x\ .$$

Оҳирги тенглама теоремага кўра ушбу система билан тенгкучли:

$$\begin{cases} 3-x\geqslant 0, \\ \left(2\sqrt{3x-2}\right)^2=(3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 3, \ \text{ҚҚМБҚТ}, \\ 12x-8=9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 3, \\ x^2-18x+17=0. \end{cases}$$

Квадрат тенгламанинг иккита илдизи мавжуд:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 3, \\ x=17 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing \ \text{ва} \ \begin{cases} \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 3, \\ x=1. \end{cases} \Rightarrow x=1.$$

Жавоб: $x = 1$. ■

Ушбу мисолаги тенгламани ечиш давомида ҚҚМБҚТ нинг тўлдириб борилганини кўрдик. Масалан, 3-мисолнинг бошида ҚҚМБҚТ $x\geqslant\frac{2}{3}$ тенгсизлик билан, мисол оҳирида ҚҚМБҚТ $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 3$ қўштенгсизлик билан аниқланади.

Гуруҳларда ишлаш

Илдизнинг даражаси тоқ бўлганда ҚҚМБҚТ ҳақида нима дейиш мумкин?

Иррационал тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиш орқали ечиш

Иррационал тенгламаларга янги ўзгарувчи киритиш усули кўп қўлланилади. Ушбу усул орқали берилган иррационал тенгламани соддалаштиришга ёки рационал кўринишга келтириш мумкин. Тенглама таркибида такрорланадиган ўхшаш ифодалар бўлса, уни янги ўзгарувчи киритиш орқали ечиш мумкин.

4-мисол. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}+\sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}}=2,5$ тенгламанинг илдизини топиш керак.

▲ Тенгламада ўхшаш ифода бор эканлиги кўриниб турибди. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=t$ деб янги ўзгарувчи киритсак, $\sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}}=\dfrac{1}{t}$. У ҳолда дастлабки тенглик қуйидагича ёзилиб, ечилади:

$$t+\frac{1}{t}=2,5\Rightarrow t^2-2,5t+1=0\Rightarrow t_1=2;\ t_2=\frac{1}{2}\cdot$$

Ушбу топилган t нинг қийматини ўрнига қўйиб,

$\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=2$ ва $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=\dfrac{1}{2}$ иррационал тенгламаларни оламиз.

Энди хосил бўлган тенгламаларнинг илдизларини топамиз:

1) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=2\Rightarrow\dfrac{3x-2}{2x+3}=4\Rightarrow x=-2,8$.

2) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{3x-2}{2x+3}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=1,1$.

Кўп ҳолларда тенгламанинг ҚҚМБҚТ ини аниқлаб, сўнгра тенгламани ечиш давомида топилган сонларнинг ҚҚМБҚТ га тегишлилигини эмас, тенгламани қаноатлантиришини текшириш осон. Масалан, ушбу мисолда ҳам шундай текшириш қулай.

Илдизларнинг тенгламани қаноатлантиришини текширамиз:

$x=-2,8$ учун $\sqrt{\dfrac{3\cdot(-2,8)-2}{2\cdot(-2,8)+3}}+\sqrt{\dfrac{2\cdot(-2,8)+3}{3\cdot(-2,8)-2}}=\sqrt{4}+\sqrt{\dfrac{1}{4}}=2,5$.

Тенгламани қаноатлантиради.

$x=1,1$ учун $\sqrt{\dfrac{3\cdot1,1-2}{2\cdot1,1+3}}+\sqrt{\dfrac{2\cdot1,1+3}{3\cdot1,1-2}}=\sqrt{\dfrac{1,3}{5,2}}+\sqrt{\dfrac{5,2}{1,3}}=2,5$. Бу ҳам тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: 1,1 ; –2,8. ■

Янги ўзгарувчи киритиш усули билан иррационал тенгламани ечишга яна битта мисол кўриб чиқамиз.

5-мисол. $\sqrt[5]{(x-2)^2}-\sqrt[5]{x-2}=2$ тенгламани ечамиз.

▲ $\sqrt[5]{x-2}=u$ деб олсак, $\sqrt[5]{(x-2)^2}=u^2$.

Берилган тенгламага янги ўзгарувчи киритамиз:

$$\boldsymbol{u^2-u-2=0\Rightarrow u_1=-1;\ u_2=2.}$$

У ҳолда $\sqrt[5]{x-2}=-1$ ва $\sqrt[5]{x-2}=2$ иррационал тенгламаларни оламиз. Бу тенгламаларни алоҳида ечамиз:

1) $\sqrt[5]{x-2}=-1 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=(-1)^5 \Rightarrow x_1=1;$

2) $\sqrt[5]{x-2}=2 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5=2^5 \Rightarrow x_2=34.$

Топилган иккита ечим ҳам тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: 1; 34. ■

Таркибида камида битта иррационал тенгламаси бўлган система *иррационал тенгламалар системаси* деб аталади. Иррационал тенгламалар системасини ҳам бошқа системаларни ечишда қўлланиладиган усуллар (қўшиш усули, ўрнига қўйиш усули, янги ўзгарувчи киритиш усули ва хоказо) ёрдамида ечилади. Мисол кўриб чиқамиз.

6-мисол.

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2\end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш керак.

▲ Системанинг ҚҚМБҚТ и $x \geqslant 0$ ва $y \geqslant 0$ тенгсизликлар билан аниқланади. Аввал иккинчи тенгламасини шакл алмаштирамиз: $x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2 \Leftrightarrow x-2\sqrt{xy}+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 - -\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-2=0$. Бунда $\sqrt{x}-\sqrt{y}=u$ деб белгиласак, $u^2-u-2=0$ квадрат тенглама оламиз. Унинг илдизлари: $u_1=2$; $u_2=-1$. Бундан $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2$ ёки $\sqrt{x}-\sqrt{y}=-1$. Шундай қилиб, берилган тенгламалар системаси

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=-1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sqrt{x}=10,\\ 2\sqrt{y}=6;\end{cases}\\ \begin{cases}2\sqrt{x}=7,\\ 2\sqrt{y}=9;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=25,\\ y=9;\end{cases}\\ \begin{cases}x=12,25,\\ y=20,25\end{cases}\end{array}\right.$$

тенгламалар системалари тўплами билан тенгкучли.

Топилган ечимлар ҚҚМБҚТ га тегишли.

Жавоб: (25;9), (12,25; 20,25). ■

Гуруҳ ҳисоботи

Гуруҳларда

$$\begin{cases} \sqrt{-x-3}+y=2t, \\ 5+2y-\sqrt{3-2x-x^2}=t \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ягона ечими мавжуд эканлигини кўрсатинг ва уни топинг.

1) Системанинг ҚҚМБҚТ и қандай?
2) Топилган ҚҚМБҚТ натижасидан қандай хулоса чиқади?
3) Мисолнинг жавоби қандай?
4) ҚҚМБҚТ қайси бир сон оралиғига тенг бўлса, мисонинг нечта жавоби бўлар эди? Жавобингизни асослаб тушунтиринг.

1. Иррационал тенгламанинг таърифини айтинг.
2. Иррационал тенгламанинг аниқланиш соҳаси қандай топилади?
3. Иррационал тенгламани ечишнинг асосий усулининг алгоритмини айтиб беринг.
4. Тенгламани ечганда янги ўзгарувчи киритиш усулини тасифланг.

Мисоллар

А

4.1. Тенгламани оғзаки ечинг:

1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x}=3$; 3) $\sqrt{x}=0$; 4) $\sqrt{x}=-1$.

4.2. Қуйидаги тенгламалар иррационал тенглама бўладими:

1) $x+\sqrt{x}=2$; 2) $x\sqrt{7}=1+x$;
3) $y+\sqrt{y^2+9}=2$; 4) $\sqrt{x-1}=3$?

4.3. x_0 сони тенгламанинг илдизи бўладими:

1) $\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$, $x_0=4$;
2) $\sqrt[3]{2-x}=\sqrt[3]{x-2}$, $x_0=2$;
3) $\sqrt{1-x}=-\sqrt{1+x}$, $x_0=0$?

4.4. Тенгламанинг ҚҚМБҚТ ини аниқланг:

1) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$; 2) $\sqrt{x-7}+3=\sqrt{5-x}$;
3) $\sqrt[3]{2-3x}+\sqrt[3]{3x+5}=1$; 4) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=5$.

4.5. Ўзгарувчининг қандай қийматларида тенглик бажарилишини аниқланг:

1) $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{x^2-16}$; 2) $\sqrt{x(x-1)}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{1-x}$.

4.6. Тенгламанинг иккала томонини даражага кўтариш орқали ечимини топинг:

1) $\sqrt{x^4+19}=10$; 2) $\sqrt[3]{x^2-28}=2$;

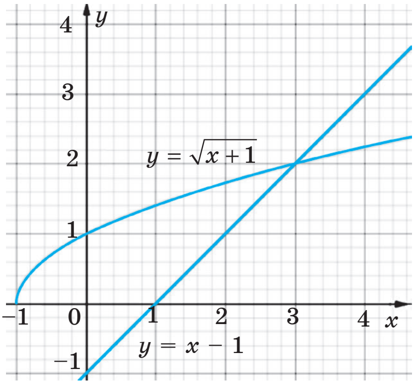
3) $\sqrt{61-x^2}=5$; 4) $\sqrt[3]{x-9}=-3$.

4.7. Тенгламани иккала томонини даражага кўтариш усули билан ечинг ва жавобларни график усулда текширинг:

1) $\sqrt{x+1}=x-1$; 2) $x+\sqrt{2x+3}=6$;

3) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 4) $3+\sqrt{3x+1}=x$.

▲ 1) $\sqrt{x+1}=x-1$ тенгламани график усулда ечиш учун $y=\sqrt{x+1}$ ва $y=x-1$ функцияларнинг графикларини ясаб, кесишиш нуқтасининг абсциссасини топиш керак. ■



4.1-расм

4.8. Тенгламани иккала томонини даражага кўтариш орқали ечинг:

1) $\sqrt{2x-1}-x=-1$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=2$;

3) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$; 4) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

4.9. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$; 2) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$;

3) $\sqrt[3]{x^2-8}=x-2$; 4) $\sqrt[3]{x^2+x^3-6x+8}=x$.

4.10. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1,\\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2\sqrt{2},\\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 7, \\ -3\sqrt[4]{x} + 4\sqrt[4]{y} = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{5}, \\ 5\sqrt{y} - 2\sqrt{x} = \sqrt{5}. \end{cases}$

4.11. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} = 6$; 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x-1}$;

3) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x+2}$; 4) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} = 2x$.

Икки марта даражага кўтариш орқали ечинг **(4.12—4.13):**

4.12. 1) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}} = 3$; 2) $\sqrt{\sqrt{x^2-16}+x} = 2$;

3) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}} = 4$; 4) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}} = 1$.

4.13. 1) $\sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-4}$; 2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$;

3) $2 + \sqrt{10-x} = \sqrt{22-x}$; 4) $\sqrt{1-2x} - 3 = \sqrt{16+x}$.

4.14. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5; \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10; \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6. \end{cases}$

4.15. Янги ўзгарувчи киритиш орқали ечинг:

1) $\sqrt{x-3} - 6 = \sqrt[4]{x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[6]{x+1} = 3$;

3) $\sqrt[4]{x-5} = 30 - \sqrt{x-5}$; 4) $3\sqrt[10]{x^2-3} + \sqrt[5]{x^2-3} = 4$.

B

Тенгламаларни ечинг **(4.16—4.17):**

4.16. 1) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{\dfrac{x+6}{x+3}}$; 2) $\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{2x+1}$;

3) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$; 4) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$.

4.17. 1) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x+7}$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3(x-1)}$;

3) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$; 4) $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x+2}$.

4.18. Янги ўзгарувчи киритиш орқали тенгламаларни ечинг:

1) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=5$; 2) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$;

3) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$; 4) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$;

5) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$; 6) $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30$.

▲ 6) $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30$ тенглама учун янги ўзгарувчи киритайлик: $y=\sqrt{2x^2+3x+9}$, $y\geqslant 0$. У ҳолда $2x^2+3x=y^2-9$. Дастлабки тенглама ушбу кўринишга келади: $y^2-9-3+y=30$.

$$\begin{cases} y^2+y-42=0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$$

квадрат тенгламанинг иккита ечими мавжуд:

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y=-7 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \text{ ва } \begin{cases} y\geqslant 0, \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow y=6.$$

Дастлабки тенгламага қайтамиз: $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$, $2x^2+3x+9=36$,

$2x^2+3x-27=0$, $x_1=3$, $x_2=-4{,}5$.

Жавоб: −4,5; 3. ■

4.19. Тенгламаларни кўпайтувчига ажратиш орқали ечинг:

1) $\sqrt{\dfrac{3x-5}{3x+5}}+\left(\dfrac{3}{4}x+2\right)\cdot\sqrt{9x^2-25}=0$;

2) $\sqrt{\dfrac{6x-5}{6x+5}}+(3x+4)\cdot\sqrt{36x^2-25}=0$;

3) $\sqrt{(4x+5)(3x-2)}=4x+5$;

4) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$.

Тенгламалар системасини ечинг **(4.20—4.21)**:

4.20. 1) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8, \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+2xy}=8, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$

4.21. 1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3y-2x}{y}}+\sqrt{\dfrac{4y}{3y-2x}}=2\sqrt{2}, \\ 3\left(x^2+1\right)=(y+1)(y-x+1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{1-5x}=5-\sqrt{5x-3y}, \\ \sqrt{2-3y}-1=\sqrt{5x-3y}. \end{cases}$

C

4.22. $\sqrt{x-5}+\sqrt{x^2+4}=0$ тенгламани ечмасдан унинг ечими мавжуд эмаслигини тушунтиринг.

***4.23.** Тенгламани иккиҳаднинг тўла квадратини қўллаб ечинг:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$;

2) $\sqrt{x^2+4-4x}+\sqrt{x^2+9-6x}=1$.

4.24. $\sqrt{x-4a+16}-2\sqrt{x-2a+4}+\sqrt{x}=0$ тенгламани a параметрга нисбатан ечинг.

▲ Тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\sqrt{x-2a+4}.$$

Тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарсак,

$$2x-4a+16+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=4x-8a+16 \text{ ёки}$$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4a+16}=x-2a.$$

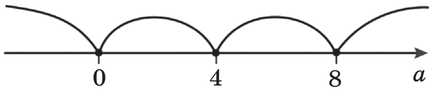
Яна иккала томонини квадратга кўтарамиз: $16x=4a^2$, $x=\dfrac{a^2}{4}$. a параметрнинг қандай қийматларида тенгламанинг ечими мавжуд эканлигини аниқлаймиз. Бунинг учун x нинг ўрнига $\dfrac{a^2}{4}$ қўйсак,

$$\sqrt{a^2-16a+64}-2\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{a^2}=0;$$

$$\sqrt{(a-8)^2}-2\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{a^2}=0;$$

$$|a-8|-2|a-4|+|a|=0.$$

Модулли тенгламани ечиш учун тўртта интервални кўриб чиқамиз (4.2-расм):



4.2-расм

$a\leqslant 0$ бўлганда $8-a-\ 2(4-a)-a=0$, $0\ =\ 0$. Тенглик бажарилади. Шу сабабли $a\leqslant 0$ ҳолда тенгламанинг ечими мавжуд. $0 < a < 4$ бўлса, $8-a-2(4-a)+a=0$, $a=0$. Тенгламанинг ечими мавжуд эмас.

Агар $4 \leqslant a < 8$ бўлса, тенгламанинг ечими мавжуд эмас, чунки $8 - a - 2(a - 4) + a \neq 0$.
Агар $8 \leqslant a < \infty$ бўлса, тенглик бажарилади, ёчунки $a - 8 - 2a + 8 + a = 0$, $0 = 0$.
Жавоб: $a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$ бўлганда тенгламанинг ечими $x = \dfrac{a^2}{4}$, $0 < a < 8$ бўлганда тенгламанинг ечими мавжуд эмас. ■

4.25*. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{\cos^2 0,5x - 6\cos 0,5x + 9} - \sqrt{4\cos^2 0,5x - 12\cos 0,5x + 9} = 1$;

2) $\sqrt{(\sin 3x - 4)^2} - \sqrt{9 - 6\sin 3x + \sin^2 3x} = 6$.

$$▲\ 1)\ \sqrt{(\cos 0,5x - 3)^2} - \sqrt{(2\cos 0,5x - 3)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\cos 0,5x - 3| - |2\cos 0,5x - 3| = 1.$$

Модулларни очиш учун модулнинг ичини баҳолаймиз:

$$-1 \leqslant \cos 0,5x \leqslant 1$$

эканлигидан, $-4 \leqslant \cos 0,5x - 3 \leqslant -2$; $|\cos 0,5x - 3| = 3 - \cos 0,5x$.

Худди шундай $|2\cos 0,5x - 3| = 3 - 2\cos 0,5x$.

Тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$3 - \cos 0,5x - 3 + 2\cos 0,5 = 1 \Rightarrow \cos 0,5x = 1$; $x = 4\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

Жавоб: $4\pi n$, $n \in \mathrm{Z}$. ■

4.26.** $\begin{cases} x - a = 2\sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 + 2x + 8y + 15 \end{cases}$ тенгламалар системасининг камида битта ечими бўладиган қилиб, ***a параметрнинг барча қийматларини топинг.

4.2 Иррационал тенгсизликлар

Бу мавзуда иррационал тенгсизликларни ечиш йўллари билан танишиб, қуйидаги кўринишдаги иррационал тенгсизликларни еча оласиз:

- $\sqrt[2k+1]{f(x)} > a$, $\sqrt[2k+1]{f(x)} < a$;
- $\sqrt[2k]{f(x)} > a$, $\sqrt[2k]{f(x)} < a$.

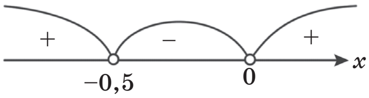
Теорема. *Иррационал тенгсизликнинг иккала томонини ҳам тоқ кўрсаткичли даражага кўтарганда берилган тенгсизлик билан тенгкучли тенгсизлик хосил бўлади.*

1-мисол. $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}} > -1$ тенгсизликни ечамиз.

▲ Тоқ даражали илдиз бўлганлиги сабабли аниқланиш соҳаси $x \neq 0$. Бу тенгламанинг иккала томонини кубга кўтарсак, тенгсизликнинг белгиси ўзгармайди. Бундан $\dfrac{x+1}{x} > -1$ тенгсизликни оламиз, уни интерваллар усули билан ечамиз:

$$\frac{x+1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x+1+x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x} > 0 .$$

Касрнинг сурати ёки маҳражини нолга айлантирадиган нуқталарни аниқлаймиз: $x = -\dfrac{1}{2}$; $x = 0$. Бу нуқталар сонлар ўқини учта интервалга бўлади. Тенгсизликнинг чап томонидаги касрнинг ҳар бир интервалдаги ишораларини аниқлаймиз (4.3-расм).



4.3-расм

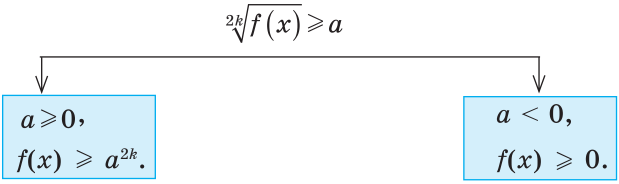
Жавоб: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty)$. ■

Теорема. *Иррационал тенгсизликни иккала томонини ҳам номанфий бўлган ҳолдагина уни жуфт кўрсаткичли даражага кўтариб, берилган тенгсизлик билан тенгкучли тенгсизлик хосил қилиш мумкин.*

Илдизнинг даража кўрсаткичи жуфт сон бўлганда $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a$ иррационал тенгсизликни ечиш учун a сонининг барча қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини, яъни номанфий ва манфий бўлиш имкониятларини кўриб чиқамиз (4.4-расм).

Агар $a \geqslant 0$ бўлса, теоремага кўра тенгсизликнинг иккала томонини жуфт кўрсаткичли даражага кўтарамиз: $f(x) \geqslant a^{2k}$.

$a < 0$ бўлса, жуфт даражали илдиз остидаги ифоданинг маъноси номанфий сон бўлганлигидан фақат аниқланиш соҳасини ечим сифатида оламиз: $f(x) \geqslant 0$.



4.4-расм

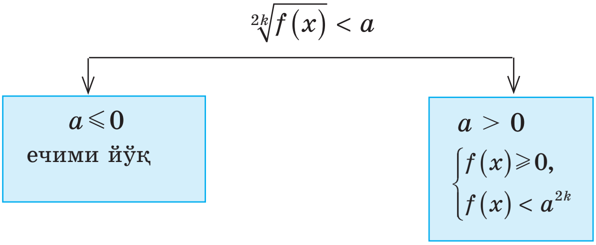
2-мисол. $\sqrt[4]{5x-4} \geqslant 2$ тенгсизликни ечамиз.

▲ Тенгсизликнинг иккала томони ҳам мусбат эканлигидан теоремага кўра жуфт даражага кўтарамиз. Бу тенгламанинг иккала томонини ҳам тўртинчи даражага кўтарсак, $5x - 4 \geqslant 16$. Тенгсизликни ечсак, $x \geqslant 4$.

Жавоб: $[4; +\infty)$. ■

Даража кўрсаткичи жуфт сон бўлганда $\sqrt[2k]{f(x)} < a$ иррационал тенгсизликни ечиш учун a сонининг номанфий ва манфий бўлиш имкониятлари 4.5-расмда кўрсатилган. $a \leqslant 0$ бўлса, жуфт кўрсаткичли илдизнинг қиймати манфий сондан кичик бўлмайди, унинг ечими мавжуд эмас. $a > 0$ бўлса, тенгсизликнинг иккала томонини даражага кўтариб, уни ҚҚМБҚТ си билан бирга ушбу системага алмаштирамиз:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k}. \end{cases}$$



4.5-расм

3-мисол. $\sqrt{3x+2} < 4$ тенгсизликни ечамиз.

▲ Тенгсизликнинг иккала томони ҳам мусбат бўлганлигидан теоремага кўра жуфт даражага кўтарамиз. ҚҚМБҚТ ни эътиборга олсак,

$$\begin{cases} 3x+2 \geqslant 0, \\ 3x+2 < 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x < \dfrac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leqslant x < 4\frac{2}{3}.$$

Жавоб: $\left[-\frac{2}{3}; 4\frac{2}{3}\right)$. ■

1. Иррационал тенгсизликларни ечиш теоремаларини келтириб чиқаринг.
2. Жуфт илдиз кўрсаткичли иррационал тенгсизликни ечиш схемаларини чизинг ва тушунтиринг.

Мисоллар

А

4.27. Тенгсизликларни оғзаки ечинг:

1) $\sqrt{x} > 2$; 2) $\sqrt{x} < 3$; 3) $\sqrt{x} \geqslant 0$; 4) $\sqrt{x} < -1$.

4.28. Иррационал тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{1-x} \leqslant 2$; 2) $\sqrt{x-3} \leqslant 5$; 3) $\sqrt{2x+3} \geqslant 3$; 4) $\sqrt{x+5} < 4$.

4.29. Берилган функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{14+5x-x^2}} + \sqrt{x^2-x-20}$; 2) $y = \sqrt{4x-x^2} \cdot \sqrt{x^2-1}$.

4.30. Иррационал тенгсизликларнинг ечимларининг мавжуд, мавжуд эмаслигини аниқлаб, ечинг:

1) $\sqrt[4]{3-5x} > -2$; 2) $\sqrt[4]{3-5x} < -2$;

3) $\sqrt{x^2+x-6} > -2$; 4) $\sqrt{x-2} > 4$.

4.31. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt[3]{9-2x} \leqslant 2$; 2) $\sqrt[3]{1-2x^2} > -3$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{2x-2}{3x+6}} < 1$.

4.32. Иррационал тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{(x+3)(4x+5)} < 6$; 2) $\sqrt{(x-2)(2x+3)} > 3$;

3) $\sqrt{x^2-x} < \sqrt{2}$; 4) $\sqrt[4]{6x-x^2} \geqslant -5$.

В

4.33. Тенгсизликни интерваллар усули билан ечинг:

1) $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{3x+6}} > 1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}} > -1$;

3) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$; 4) $\sqrt{x^3-x^2} \geqslant \sqrt{2-x-x^2}$.

4.34. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt[5]{x^2-4x} > \sqrt[5]{3-2x}$; 2) $\sqrt[3]{x^2+1} > x+1$;

3) $\sqrt[3]{x^2+3x+3} < \sqrt[3]{2x+4}$.

4.35. Тенгсизлкни иккала томонини ҳам иррационал ифода бўладиган тенгсизликни 4.6-расмда кўрсатилган схемадан фойдаланиб ечинг:

1) $2\sqrt{2x+1} > 3\sqrt{-x^2-x+6}$; 2) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$;

3) $\sqrt{x-1} > \sqrt{2x^2-3x-5}$; 4) $\sqrt{x-1} < \sqrt{x^2+1}$.

$$\begin{tikzcd} \sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)} \arrow[d, Rightarrow] \\ \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases} \end{tikzcd}$$

4.6-расм

4.36. Тенгсизликнинг иккала томонининг ишорасини аниқлаб, 4.7-расмда кўрсатилган схема ёрдамида тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{7-2x} > x-2$; 2) $\sqrt{5-2x} < 6x-1$;

3) $\sqrt{x^2} > x+1$; 4) $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$.

$$\begin{tikzcd} & \sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x) \end{cases} & & \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \end{tikzcd}$$

4.7-расм

1) ▲

$$\begin{tikzcd} & \sqrt{7-2x} > x-2. \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ x-2 \geqslant 0; \arrow[d] & & x-2 < 0. \arrow[d] \\ \begin{cases} 7-2x > (x-2)^2, \\ x-2 \geqslant 0. \end{cases} \arrow[d] & & \begin{cases} x-2 < 0, \\ 7-2x \geqslant 0. \end{cases} \arrow[d] \\ 2 \leqslant x < 3 \arrow[r] & (-\infty;\ 3) & (-\infty;\ 2) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

■

4.37. Иррационал тенгсизликни 4.8-расмда кўрсатилган схемадан фойдаланиб ечинг:

1) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$; 2) $\sqrt{x+61} < x+5$;

3) $\sqrt{x^2-3x+2} < 5-x$.

$$\begin{tikzcd} \sqrt[2k]{f(x)} < \varphi(x) \arrow[d] \\ \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < \varphi^{2k}(x). \end{cases} \end{tikzcd}$$

4.8-расм

3) ▲

$$\begin{tikzcd} & \sqrt{x^2-3x+2} < 5-x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \begin{cases} 5-x > 0, \\ x^2-3x+2 \geqslant 0, \\ x^2-3x+2 < (5-x)^2, \end{cases} \arrow[d] & & \begin{matrix} 5-x \leqslant 0. \\ \varnothing \end{matrix} \\ (-\infty; 1] \cup \left[2; \dfrac{23}{7}\right). & & \end{tikzcd}$$

■

4.38. Иррационал тенгсизликларни ечинг:

1) $\sqrt{2x-3} > x$; 2) $\sqrt{x+18} > 2+x$; 3) $\sqrt{4x+5} < x$;

4) $\sqrt[3]{2x-1} < x-1$; 5) $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$; 6) $\sqrt{x^2+3x+x} < 2x+1$.

C

4.39. Параметрли иррационал тенгсизликларни ечинг:

1) $\sqrt[4]{x+a} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{5x^2+a^2} \geqslant -3x$;

3) $\sqrt{x-a} \geqslant 2x+1$; 4) $\sqrt[3]{a+x^3} - x < \sqrt[3]{a}$.

4.40*. Модул белгиси бўлган иррационал тенгсизликларни ечинг:

1) $\sqrt{3-|x|} \geqslant x$; 2) $\sqrt{4x+5} > |x-1|$; 3) $\sqrt[3]{x^2-4|x|} > \sqrt[3]{|3-2x|}$.

Такрорлаш учун машқлар

4.41. Функциянинг ҳосиласини топинг:
$y = (x^2 - 2x + 3) \cdot \sin 2x$.

4.42. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$ функциянинг графигига $x_0 = 1$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

«ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР»
бўлимининг хулосаси

Илдиз белги остида ўзгарувчиси бўлган тенгламалар *иррационал тенгламалар* деб аталади. $\sqrt[2k]{g(x)} = h(x)$ кўринишда берилган иррационал тенглама $\begin{cases} g(x) = (h(x))^{2k}, \\ h(x) \geqslant 0 \end{cases}$ тенгламалар системаси билан тенгкучли, $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ кўринишда берилган иррационал тенглама $f(x) = (d(x))^{2k+1}$ тенглама билан тенгкучли.

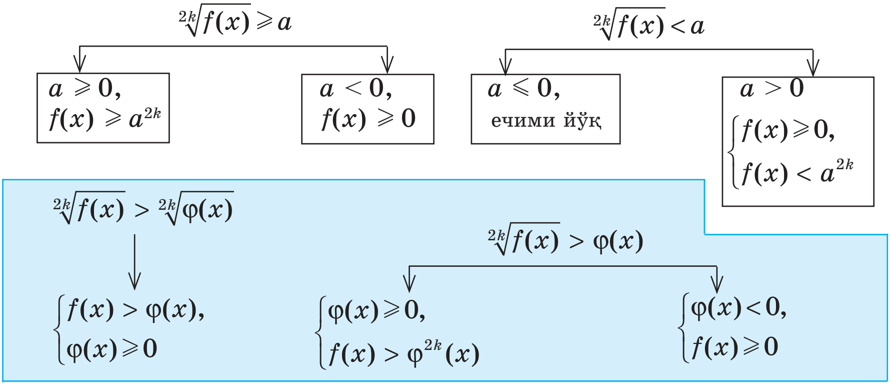
Иррационал тенгламаларни ечишда даражага кўтариш ва янги ўзгарувчи киритиш усуллари кўп қўлланилади.

Тенгламанинг ҚҚМБҚТ ини аниқлаб, сўнгра тенгламани ечиш давомида топилган сонларнинг ҚҚМБҚТ га тегишлилигини текширмай, уларнинг тенгламани қаноатлантиришини текширган осон.

Иррационал тенгсизликнинг иккала томонини ҳам тоқ кўрсаткичли даражага кўтарганда берилган тенгсизлик билан тенгкучли тенгсизлик хосил бўлади.

Иррационал тенгсизликнинг иккала томонини ҳам номанфий бўлган ҳолдагина уни жуфт кўрсаткичли даражага кўтариб, берилган тенгсизликка тенгкучли тенгсизлик олиш мумкин.

Тенгсизликларни ечиш схемалари:



$$\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant a$$

$$a \geqslant 0,\quad f(x) \geqslant a^{2k}$$

$$a < 0,\quad f(x) \geqslant 0$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < a$$

$a \leqslant 0$, ечими йўқ

$$a > 0\quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < a^{2k} \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{\varphi(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \varphi(x)$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > \varphi^{2k}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Терминлар номининг луғати

Ўзбек тилида	Қозоқ тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
Иррационал тенглама	Иррационал теңдеу	Иррациональное уравнение	Irrational equation
Иррационал тенгсизлик	Иррационал теңсіздік	Иррациональное неравенство	Irrational inequality
Тенгламалар системаси	Теңдеулер жүйесі	Система уравнении	System of equations
Тенгламанинг (тенгсизликнинг) қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами (ҚҚМБҚТ)	Теңдеудің (теңсіздік-тің) мүмкін мәндер жиыны (ММЖ)	Область допустимых значении (ОДЗ) уравнения (неравенства)	Domain of equation
Тенгламанинг илдизлари	Теңдеудің түбірі	Корень уравнения	The root of the equation

V бўлим. КОМПЛЕКС СОНЛАР

$$i = \sqrt{-1}$$

Комплекс сонлар татбиқий математикада, жумладан ўзгарувчан токни ҳисоблаганда муҳим ўрин тутади. Оҳирги юз йил ичида комплекс сонлар ва комплекс аргументли функциялар назарияси жадал ривожланиб, бу назария картографияда, электротехникада, гидромеханикада, аэромеханикада, сонлар назариясида ва бошқа кўпгина табиат ва техника соҳаларида ўз ўрнини топди. Бу бўлимда комплекс сонлар устида турли амаллар бажаришни ўрганасиз.

Бўлимда ўрганиладиган мавзулар:

5.1. Мавҳум бирлик. Комплекс соннинг таърифи
5.2. Алгебраик кўринишда берилган комплекс сонлар устида амаллар бажариш
5.3. Квадрат тенгламаларнинг комплекс сон бўладиган илдизлари. Алгебранинг асосий теоремаси

5.1 Мавҳум сонлар.
Комплекс сонларнинг таърифи

Бу мавзуда мавҳум бирлик ва комплекс соннинг таърифи билан танишиб, оҳирида:

- комплекс сон ва унинг модулининг таърифини биласиз;
- комплекс сонлар текислигида комплекс сонни тасвирлайсиз;
- қўшма комплекс сон таърифини ва унинг хоссаларини биласиз.

5.1.1 Комплекс сон тушунчаси

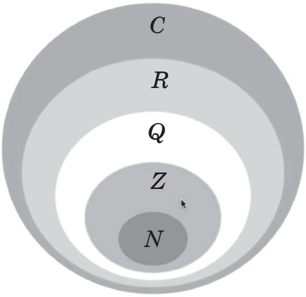
Ҳозирга қадар биз ҳақиқий сонлар тўпламини ўрганиб келдик. Ҳақиқий сонлар тўпламида чизиқли тенгламаларнинг ва дикриминанти номанфий квадрат тенгламаларнинг ҳамма вақт ечими мавжуд. Дискриминанти манфий квадрат тенгламаларнинг ҳақиқий сонлар тўпламида ечими мавжуд эмас. Масалан, $x^2 + 1 = 0$ ва $x^2 - 4x + 5 = 0$ каби тенгламаларнинг ҳақиқий ечимлари бўлмаслигини яхши биламиз. Шу сабабли бундай тенгламаларнинг ечимлари мавжуд бўладиган қилиб ҳақиқий сонлар тўпламини кенгайтириш эҳтиёжи туғилади. Бундай усуллар билан биз яхши танишмиз. Масалан, $x + a = b$ (a, $b \in N$) натурал сонлар тўпламида ечиш имконияти бўлмаганликдан нол ва манфий бутун сонларни киритиб, натурал сонлар тўпламини бутун сонлар тўпламигача кенгайтирдик. Бутун сонлар тўпламида $ax = b$ тенгламанинг ечими бўлмаганлигидан каср сонлар тушунчаси киритилиб, рационал сонлар тўпламини олдик. Энг оҳирида, $x^2 - 2 = 0$ тенгламани кўриб чиқиб, унинг рационал ечими бўлмаслигини кўрсатиб, иррационал сон тушунчасини киритиб, рационал сонлар тўпламини ҳақиқий сонлар тўпламигача кенгайтирдик.

Худди шундай исталган квадрат тенгламанинг илдизлари мавжуд бўладиган қилиб, ҳақиқий сонлар тўпламини кенгайтириш эҳтиёжи туғилади. Бу тўплам *комплекс сонлар тўплами* деб аталади ва у C – «complex» сўзининг дастлабки ҳарфи билан белгиланади.

Шундай қилиб, биз N – натурал сонлар тўплами, Z – бутун сонлар тўплами, Q – рационал сонлар тўплами, R – ҳақиқий сонлар тўплами тушунчаларини киритдик ва улар учун қуйидаги муносабатлар ўрнатилишини кўрсатдик (5.1-расм):

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

Комплекс сонлар тўплами билан танишиш учун аввал $x^2 + 1 = 0$ тенгламани кўриб чиқамиз. Бу тенгламанинг ҳақиқий сонлар тўпламида илдизи мавжуд эмас. Чунки квадрати – 1 га тенг бўлган ҳақиқий сон топилмайди. Шу сабабли квадрати – 1 га тенг бўлган янги сон киритиш керак. Ушбу янги сонни i орқали белгилаймиз. У ҳолда $i^2 = -1$ тенглик бажарилади деб ҳисоблаймиз. ***i* сони мавҳум бирлик** деб аталади.



5.1-расм

Шундай қилиб, $\boldsymbol{x^2 + 1 = 0}$, $\boldsymbol{x^2 = -1}$ тенгламанинг илдизлари $\boldsymbol{x_1 = i}$, $\boldsymbol{x_2 = -i}$. Мавҳум бирлик ёрдамида манфий сондан арифметик илдиз чиқариш мумкин. Масалан:

$$\sqrt{-4} = 2i, \sqrt{-9} = 3i, \sqrt{-64} = 8i.$$

Энди комплекс сонларга таъриф бериш мумкин.

Таъриф. *Агар* a *ва* b *ҳақиқий сонлар бўлса,* $z = a + bi$ *кўринишдаги сон* ***комплекс сон*** *деб аталади.*

Бунда a – комплекс соннинг ҳақиқий қисми, b – унинг мавҳум қисми, i – мавҳум бирлик: $i^2 = -1$. $\mathrm{Re(z)} = a$, $\mathrm{Im(z)} = b$.

Таъриф. *Иккита комплекс соннинг мавҳум ва ҳақиқий қисмлари мос равишда тенг бўлса, улар* ***ўзаро тенг комплекс сонлар*** *деб аталади.*

$a = 0$ бўлса, z сони *мавҳум сон* деб аталади, $b = 0$ бўлса, z сони – ҳақиқий сон. $z = 0 = 0 + 0i$ комплес соннинг ҳақиқий қисми билан мавҳум қисми ҳам нолга тенг.

$z = 2 + 5i$ бўлса, унинг ҳақиқий қисми $\mathrm{Re}(z) = 2$ ва мавҳум қисми $\mathrm{Lm}(z) = 5$. $z = 3 - 4i$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми $\mathrm{Re}(z) = 3$ ва мавҳум қисми $\mathrm{Lm}(z) = -4$. $z = 6i$ соннинг ҳақиқий қисм $\mathrm{Re}(z) = 0$, мавҳум қисми $\mathrm{Lm}(z) =6$.

Инглиз тилидан таржима қилинганда Real – *ҳақиқий*, Imaginary – *мавҳум* деган маънони англатади.

Комплекс сонлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламининг кенгайиши бўлганлигидан ҳар қандай сонни комплекс сон деб қабул қилиш мумкин, чунки $\forall a \in R$ учун $a = a + 0i$.

1-мисол. $z = x + 3i$ ва $w = -2 + yi$ комплекс сонлар ўзаро тенг бўладиган қилиб, x билан y нинг қийматини топиш керак.

▲ Таърифга кўра $z = w$ тенглик бажарилиши учун $x = -2$, $y = 3$ бўлиши керак. ■

Таъриф. $z = a + bi$ *комплекс сонга* $\bar{z} = a - bi$ *комплекс сон* ***қўшма*** *сон деб аталади. Бу сонлар* ***ўзаро қўшма*** *сонлар деб ҳам аталади.*

2-мисол. i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1} , i^{-2} сонларнинг қийматларини топиш керак.

▲ $i^2 = i \cdot i = -1;$ $\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i;$ $\quad i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1;$

$i^5 = i^4 \cdot i = i;$ $\quad i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1;$ $\quad i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i \cdot i} = -i$;

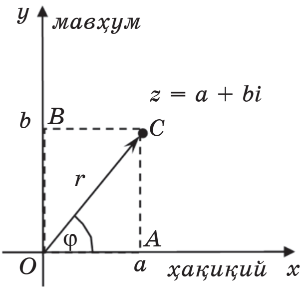
$i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = -1$. ■

Тарихга назар

Комплекс сон тушунчаси – дастлаб XVI асрда италиялик Дж.Кордано ва Р.Бомбелли ўрганган дискриминанти манфий квадрат тенгламаларнинг, асосан куб тенгламаларнинг ечимларига боғлиқ равишда келиб чиққан тушунча. 1572 йили чоп этилган «Алгебра» номли китобда Р.Бомбелли комплекс сонлар устида арифметик амаллар бажарган. Дастлаб комплекс сонларнинг амалда аниқ тушунчаси (интерпретацияси) бўлмагани учун бундай илдизларни «мумкин бўлмаган», «мавҳум» деб ҳисоблаб, шундай илдизлари бўлган тенгламаларни “илдизи йўқ” тенгламалар қаторига қўшган. Комплекс сонларнинг ҳар томонлама қўлланилиши фақат XVIII асрда бошланган. Ана шу вақтда комплекс сонлардан интеграл ҳисобларида, жумладан, механикада ва геометрияда қўлланилиши комплекс аргументли функцияларни ўрганишга олиб келди. Комплекс сонларга текисликдаги нуқта ёки вектор деган геометрик тушунчани 1797 йили даниялик ер ўлчовчи К.Вессель (1745–1818) беоган, немис математиги Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) комплекс сонлардан арифметикада, алгебрада, геометрия ва математик анализда фойдаланган асарларидан кейингина кўпчилик комплекс сонларнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, ундан тўлиқ фойдалана бошлади. Математикага «комплекс сон» терминини киритган ва олий алгебранинг асосий теоремасининг тўлиқ исботини биринчи бўлиб К.Гаусс таклиф қилган.

5.1.2. Комплекс сонларнинг геометрик маъноси

Комплекс сонларни Oxy координаталар текислиги ёрдамида текисликнинг нуқталари сифатида ифодалаш мумкин (5.2-расм). Агар $z = a$ ҳақиқий сон бўлса, унга Ox ўқида $A(a;\ 0)$ нуқта; $z = bi$ мавҳум сонга Oy ўқида жойлашган $B(0;\ b)$ нуқта мос келади, яъни абсциссалар ўқида ҳақиқий сонлар, ординаталар ўқида таза мавҳум сонлар белгиланади. Шу сабабли Ox – ўқини ***ҳақиқий ўқ*** деб, Oy ўқини эса ***мавҳум ўқ*** деб атайди. Текисликдаги ҳар бир $C(a;\ b)$ нуқтага $z = a + bi$ комплекс сонни мос қўямиз. Бу ўзаро бир қийматли мослик. Шундай қилиб, комплекс сонлар тўплами билан текислик нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди.



5.2-расм

Баъзида комплекс сонларни тасвирлаш учун $C(a;\ b)$ нуқтанинг ўрнига $\overrightarrow{OC}$ радиус-вектор қўлланилади. Комплекс сонларни радиус-вектор орқали тасвирлаш улар устида бажариладиган амалларнинг геометрик маъносини кўриш учун қулай. Радиус-векторнинг узунлиги *комплекс соннинг модули* деб аталади. ΔOAC тўғри бурчакли учбурчак бўлганлигидан, Пифагор теоремасига кўра $OA = a$, $OB = b$, $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z| = r$ – комплекс соннинг модули ($r \geqslant 0$).

Таъриф. ***$z \neq 0$ комплекс соннинг аргументи*** *деб унга мос келувчи $\overrightarrow{OC}$ радиус-векторнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан хосил қиладиган бурчакка айтилади. Агар бурчак соат стрелкасига қарши йўналишда ҳисобланса, бу бурчак мусбат ишорали, соат стрелкаси билан йўналишдош бўлса, манфий ишора билан олинади, $z = a + bi$ комплекс соннинг аргументи $\varphi = Argz$ ёки $\varphi = Arg(a + bi)$ орқали белгиланади.*

$z = 0$ соннинг аргументи аниқланмайди. Бундан комплекс соннинг аргументи ҳақида сўз юритганда $z \neq 0$ деб ҳисоблаймиз.

Берилган $z \neq 0$ комплекс сон учун унинг аргументи 2π га каррали сонгача бўлган аниқликда топилади. Агар φ унинг аргументи бўлса, у ҳолда $\varphi \pm 2\pi k$ ($k \in Z$) бурчаклар ҳам z нинг аргументи бўлади. Шундай қилиб, ҳар бир комплекс соннинг чексиз кўп аргументлари мавжуд ва улар бир-бирларидан 2π га каррали қўшилувчиларгагина фарқланади. Бундан комплекс сонларнинг аргументларини бирқийматли аниқлаш мақсадида келишилган ҳолда унинг аргументларининг фақат биттасигина олинади. Уни $\varphi = argz$ орқали белгилаб, ***аргументнинг асосий қиймати*** деб аталади ва $-\pi \leqslant argz \leqslant \pi$ тенгсизлик бажариладиган қилиб олинади.

Тригонометрик функцияларнинг таърифидан

$$\varphi = Arg(a + bi)$$

учун

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

тенгликлар бажарилишини кўрамиз.

3-мисол. $z_1 = 4 - 3i$ ва $z_2 = -2 - 2i$ комплекс сонларнинг модулини топиш керак.

$$\blacktriangle\ r_1 = |z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.\ \blacksquare$$

Гуруҳларда ишлаш

1. $z = a + bi$ комплекс комплекс сон билан унга қўшма $\bar{z} = a - bi$ сонларни комплекс текисликда тасвирланг, уларнинг модуллари билан агументлари ҳақида хулоса чиқаринг ва мисол келтиринг.

2. z комплекс сони билан унга қарама-қарши $(-z)$ сонларни комплекс текисликда тасвирланг, уларнинг комплекс сонлар текислигида ўзаро қандай жойлашгани ҳақида хулоса чиқаринг ва мисол келтиринг.

Комплекс сонлар текислиги баъзи бир адабиётларда ***Арган диаграммаси*** *деб ҳам аталади.*

➢ **Қўшимча электрон ресурслар**

Берилган хавола орқали комплекс сонлар текислигида тасвирланган сонларнинг гўзаллигини кўра оласизлар.

https://www.geogebra.org/m/xzEhH5K5

4-мисол. 1) $|z - 3 + 2i| = 4$; 2) $|z - 3 + 2i| \leqslant 4$ муносабатларни қаноатлантирувчи барча z комплекс сонлар тўпламининг геометрик маъносини аниқлаймиз.

▲ 1) $|z - 3 + 2i| = 4$ тенгликни қаноатлантирувчи барча $z = x + iy$ комплекс сонлар тўпламининг маркази $(3; -2)$ нуқтада радиуси 4 га тенг айланани аниқлайди. Ҳақиқатан, $|z - 3 + 2i| = |(x - 3) + i(y + 2)| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = 4 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ айлананинг тенгламасини оламиз.

2) Худди шундай $|z - 3 + 2i| \leqslant 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 16$ эканлигидан бу тенгсизлик билан маркази $(3; -2)$ нуқтада, радиуси 4 га тенг бўлган доира аниқланади. ■

1. Мавҳум бирлик деб қандай сонга айтилади? Унинг квадратга кўтарилган қиймати нечага тенг бўлади?
2. Комплекс сон деб нимага айтилади ва унинг қисмлари нега $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ деб белгиланади?
3. Қандай ҳолларда комплекс сон ҳақиқий сон бўлади?
4. Иккита комплекс сон тенг бўлиши учун қандай шарт бажарилиши керак?
5. Комплекс сонлар текислигида комплекс сон қандай аниқланади?
6. Комплекс сонинг модули билан аргументининг геометрик маъносини тушунтиринг.
7. Қандай сон берилган сонга қўшма сон деб аталади?

Мисоллар

А

5.1. Ушбу сонларни мавҳум бирлик орқали оғзаки ифодаланг:

1) $\sqrt{-9}$; 2) $\sqrt{-\frac{1}{4}}$; 3) $\sqrt{-64}$; 4) $\sqrt{-5}$; 5) $\sqrt{-8}$.

5.2. $z = 3 + 4i$ ва $w = 1 - 2i$ комплекс сонларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини айтинг, уларга қўшма бўлган комплекс сонни оғзаки аниқланг.

5.3. $z = 2 + 3i$ ва $w = 6 - 4i$ сонлар берилган .Ушбу сонларни топинг:

1) $\mathrm{Re}(z)$; $\mathrm{lm}(w)$; $\bar{z}$; 2) $-\bar{z}$; $\mathrm{Re}(\bar{z})$; $\mathrm{lm}(z)$;

3) $\mathrm{Re}(\bar{w})$; $-\bar{w}$; $\bar{w}$.

5.4. Берилган сонларни илдиздан чиқариб, комплекс сонлар текислигида тасвирланг:

1) $\sqrt{-81}$; 2) $\sqrt{-\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt{64}$; 4) $\sqrt[3]{-27}$; 5) $\sqrt[3]{125i}$.

5.5. $z = 3 + 4i$ ва $w = 5 - 12i$ сонлар учун

1) $|z|$; 2) $|w|$; 3) $|\bar{z}|$; 4) $|\bar{w}|$

катталикларни топинг ва уларни таққослаб, комплекс сон билан унга ўзаро қўшма бўлган соннинг модули ҳақида хулоса чиқаринг.

5.6. Қуйидаги комплекс сонларни комлекс сонлар текислигида тасвирланг ва уларнинг модулини топинг:

1) $z = 3 + 2i$; 2) $z = 4i$; 3) $z = -5 + i$; 4) $z = -6 - 5i$.

B

5.7. z ва w комплекс сонлар ўзаро тенг бўладиган ҳақиқий x ва y сонларни топинг:

1) $z = x^2 + xyi - 5 + i$ ва $w = xi - y^2 + yi$;

2) $z = x^2(1 + i) - 3x$ ва $w = y^2\,(i - 1) - i$.

5.8. z ва унга қўшма w комплекс сонлар берилган. Ҳақиқий x ва y сонларни топинг:

1) $z = 2x^2 - 3i - 1 + yi$, $w = y + x^2i - 3 - 2i$;

2) $z = (x + i)^2 + y^2$, $w = 12 + yi + i$.

5.9. $z = 2 - 4i$ комплекс сон учун берилган сонларни комплекс сонлар текислигида тасвирланг:

1) z; 2) $-z$; 3) $\bar{z}$; 4) $-\bar{z}$;

5) iz; 6) $-iz$; 7) $i\bar{z}$; 8) $\overline{(iz)}$.

5.10. $z_1 = 1 + \sqrt{3i}$ ва $z_2 = -2 - 2i$ сонларнинг модули билан аргументларини топинг.

5.11. z комплекс сон учун қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исботланг:

1) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$; 2) $\mathrm{lm}\ (z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

5.12. Комплекс сонлар текислигида қуйидаги нуқталарни белгиланг:

-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2 - 3i$; $-4 - 2i$; $3 + i$; $-6 + 2i$; $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$.

5.13. Сонларнинг модули билан аргументларини топинг ва комплекс сонлар текислигида тасвирланг:

1) $z = 1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2i}$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

C

5.14. Ушбу шартларни қаноатлантирувчи барча $z = x + yi$ комплекс сонлар тўпламини тасвирланг:

1) $x = 2$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $\mathrm{Re}\ z = \mathrm{Im}\ z$; 4) $\mathrm{Im}\ z = 2\mathrm{Re}z$.

5.15. Комплекс текисликда ушбу шартларни қаноатлантирувчи тўпламни белгиланг:

1) $|z| = 5$; 2) $|z| \leqslant 6$; 3) $|z - (2 + i)| \leqslant 3$; 4) $6 \leqslant |z - i| \leqslant 7$.

5.16*. Комплекс текисликда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тўпламни белгиланг:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \leqslant 5$; 3) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$;

4) $\arg z = 0$; 5) $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; 6) $|z - 1| = \dfrac{1}{3}$;

7) $|z - 3 + 2i| \leqslant 2$.

Такрорлаш учун машқлар

5.17. Соддалаштиринг: $\dfrac{\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{24}}$.

5.18. $x^2 + y^2 = 49$ тенгламанинг графигини ясанг ва уни тавсифланг.

5.2. Алгебраик кўринишда берилган комплекс сонлар устида амаллар бажариш

Бу мавзуда комплекс сонлар устида амаллар бажаришни ўрганиб, оҳирида:

- алгебраик кўринишда берилган комплекс сонлар устида амаллар бажаришни биласиз;
- мавҳум бирликни бутун даражага кўтариш қонунини мисоллар ечишда қўллайсиз;
- комплекс сондан квадрат илдиз чиқарасиз.

5.2.1. Алгебраик кўринишда берилган комплекс сонлар устида арифметик амаллар бажариш

Ҳақиқий сонлар устида бажариладиган арифметик амаллар комплекс сонлар устида ҳам бажарилади.

$z_1 = a + bi$ ва $z_2 = c + di$ комплекс сонлар учун:

1°. *Қўшиш амали.*

$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i.$

2°. *Айириш амали.*

$z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b- d)i.$

3°. *Кўпайтириш амали (бу амални бажарганда қавсни очиб, $i^2 = -1$ эканлигини инобатга олиш етали).*

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + adi + bi \cdot c + b \cdot d \cdot i^2 = ac + {} + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i.$

4°. *Бўлиш амали (маҳражида комплекс соннинг қўшмасига кўпайтириш орқали бажарилади, $i^2 = -1$ эканлигини инобатга олиш етарли).*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

1-мисол. Комплекс сонлар устида арифметик амаллар бажарайлик.

▲ 1) $z_1 = 2 - i$ ва $z_2 = -4 + 3i$ сонларнинг йиғиндисини топамиз: $z_1 + z_2 = (2 + (-1) \cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)i = -2 + 2i.$

2) $z_1 = 2 - 3i$ ва $z_2 = -4 + 5i$ сонларнинг кўпайтмасини ҳисоблайлик:
$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3i) + 2 \cdot 5i - 3i \cdot 5i = 7 + 22i.$

3) $z_1 = 3 - 2i$ ва $z_2 = 3 - i$ сонларнинг нисбатини ҳисоблайлик:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10}i. \blacksquare$$

2-мисол. $\dfrac{9-4i}{2+3i}$ сонини $x + yi$ кўринишга келтириш керак.

▲ Бунинг учун касрнинг сурат ва маҳражини $2 + 3i$ сонига қўшма $2 - 3i$ сонга кўпайтирамиз:

$$\frac{9-4i}{2+3i}=\frac{(9-4i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{18-27i-8i+12i^2}{4-(3i)^2}=\frac{18-27i-8i-12}{4+9}=$$

$$=\frac{6-35i}{13}=\frac{6}{13}-2\frac{9}{13}i\,.\ ■$$

Жуфтларда ишлаш

$x, y \neq 0$ учун ушбу тенгликни исботланг:

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}\,.$$

5.2.2. Мавҳум бирликни бутун даражага кўтариш қонунларини мисоллар ечишда қўллаш

$i^2 = -1$ эканлигини эътиборга олиб, мавҳум бирликни бутун даражага кўтариш қонунларини изласак,

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1.$$

Шу сабабли исталган бутун k учун:

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i\ (k \in N).$$

3-мисол. $i^{17} + i^{18} + i^{19}$ ҳисоблайлик.

▲ $i^{17} + i^{18} + i^{19} = (i^4)^4 \cdot i + (i^4)^4 \cdot i^2 + (i^4)^4 \cdot i^3 = i - 1 - i = -1.$ ■

5.2.3. Комплекс сондан квадрат илдиз чиқариш

4-мисол. $\sqrt{3-4i}$ илдизни топамиз.

▲ $\sqrt{3-4i} = x + yi$ деб белгиласак, $(x + yi)^2 = 3 - 4i$ тенглик бажарилиши керак. Қавсни очсак, $x^2 + 2xyi - y^2 = 3 - 4i$. Тенглик бажарилиши учун тенгликнинг иккала томонидаги мавҳум ва ҳақиқий қисмлари тенг бўлиши керак:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

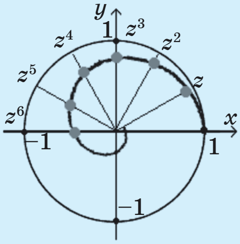
Тенгламалар системасидан ушбу ечимларни топамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ва} \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $\sqrt{3-4i} = 2-i$ ва $\sqrt{3-4i} = -2+i$ ёки $\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$. ■

Амалий топшириқ

Комплекс сонлар текислигида $z = 1 + i$ сонини ва унинг 2, 3, 4, … 10 даражаларини тасвирланг. Шу сонларнинг комплекс текисликдаги нуқталарини эгри чизиқ билан туташтиринг. Натижада хосил бўлган фигурани тавсифланг. Энди шу текисликда $\overline{z} = 1 - i$ сонини ва унинг 2, 3, 4, … 10 даражаларини тасвирланг. Шу сонларнинг комплекс текисликдаги нуқталарини эгри чизиқ орқали туташтиринг. Натижада хосил бўлган фигурани тавсифланг (5.3-расм).



5.3-расм

1. Комплес сонлар устида қандай арифметик амаллар бажариш мумкин?
2. Комплекс сонларни бўлиш амали қандай бажарилади?
3. i^n қонунини келтириб чиқариб, исботлаб беринг.

Мисоллар

А

5.19. Амалларни бажаринг:

1) $(8 + 6i) + (6 + 4i)$; 2) $(5 - i) - (6 - 2i)$;

3) $3(4 + 6i) + 9(1 - 2i)$; 4) $3i(7 - 4i)$.

5.20. Ифодани соддалаштиринг:

1) $(9 + 2i)(1 + 3i)$; 2) $(4 - i)(3 + 2i)$;

3) $(7 + 3i)^2$; 4) $(3 + 2i)^3$;

5) $(1 + 2i)(3 - 4i)(5 + 6i)$.

5.21. $z = 2 + 3i$ ва $w = 6 - 4i$ сонлардан фойдаланиб, ушбу сонларни топинг:

1) $\overline{z} + \overline{w}$; 2) $\overline{z} - \overline{w}$; 3) $\text{lm}(z + \overline{z})$;

4) $\text{Re}(w - \overline{w})$; 5) $z\overline{z} - w\overline{w}$; 6) $z\overline{w} - \overline{z}w$.

5.22. $p + qi = \dfrac{1}{3+4i}$ тенглик бажариладиган p ва q сонларни топинг.

5.23. Касрнинг сурат ва маҳражини маҳражининг қўшмасига кўпайтириб, комплекс сонларнинг мавҳум ва ҳақиқий қисмларини топинг:

1) $\frac{1}{5+12i}$; 2) $\frac{1}{6+8i}$; 3) $\frac{1}{3+i}$; 4) $\frac{1}{6-i}$.

5.24. Берилган тенгликни қаноатлантирувчи ҳақиқий a ($a > 0$) ва b сонларни топинг:

1) $(a + bi)^2 = 21 + 20i$; 2) $(a + bi)^2 = -40 - 42i$;

3) $(a + bi)^2 = -9 - 12i$; 4) $(a + bi)^2 = i$.

5.25. Берилган сонларни $x + yi$ кўринишда ёзинг:

1) $\frac{2+3i}{1+i}$; 2) $\frac{-4+3i}{-2-i}$; 3) $\frac{5i}{6-2i}$; 4) $\frac{7+5i}{6-2i}$.

5.26. $(3 + 2i)(1 + yi)$ кўпайтма 1) ҳақиқий сон; 2) мавҳум сон бўладиган y ҳақиқий сонни топинг.

5.27. $z = 1 - i$ сони берилган. Ушбу катталикларни топинг:

1) z^3; 2) $\frac{1}{z^3}$; 3) $z^3\,\overline{z}$.

▲ 2) $z^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1-3i+3i^2-i^3} = \frac{1}{-2-2i} =$

$= \frac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2} = \frac{-2+2i}{8} = -0{,}25 + 0{,}25i.$ ■

5.28. $(x + yi)^2 = a + bi$ тенгликдан фойдаланиб, квадрат илдизларни топинг:

1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{9i}$; 4) $\sqrt{-25i}$.

5.29. $(x + yi)^2 = a + bi$ тенгликдан фойдаланиб, квадрат илдизни топинг:

1) $\sqrt{4-3i}$; 2) $\sqrt{3+4i}$; 3) $\sqrt{12+5i}$; 4) $\sqrt{6+8i}$.

B

5.30. Ҳисобланг:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$; 2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

3) $3(2-i)\cdot(1-i)$; 4) $(1+3i)(-7+2i)$;
5) $(2-i)^2$; 6) $(1+2i)^3$.

5.31. Тенгламани ечинг ($x, y \in R$):
1) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$; 2) $2x+(1+i)(x+y)=7+i$;
3) $(3-y+x)(1+i)+(x-y)(2+i)=6-3i$.

5.32. Илдизларни ҳисобланг:
1) $\sqrt{7-24i}$; 2) $\sqrt{-252-64i}$;
3) $\sqrt{16-12i}$; 4) $\sqrt{21+20i}$.

5.33. Ҳисобланг:
1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;
4) $\frac{5}{1+2i}$; 5) $\frac{2i-3}{1+i}$; 6) $\frac{2+3i}{i}$;
7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

5.34. z^{-1} ни топинг:
1) $z=7-12i$; 2) $z=3+4i$; 3) $z=-3+7i$; 4) $z=i$.

5.35. $\frac{1}{i}, \frac{1}{i^2}$ ва $\frac{1}{i^3}$ катталикларнинг қийматини топинг ва исталган натурал n учун $\frac{1}{i^n}$ катталикнинг қийматини ҳисоблайдиган қонуният топинг.

5.36. Берилган сонларни $x+yi$ кўринишда ёзинг:
1) $\frac{3-2i}{i}$; 2) $\frac{p+qi}{r+si}$; 3) $\frac{(2+i)(3-2i)}{1+i}$; 4) $\frac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$.

5.37. Соддалаштиринг:
1) $\frac{1}{3+i}-\frac{1}{3-i}$; 2) $\frac{1+i}{1-i}-(1+2i)(2+2i)+\frac{3-i}{1+i}$;
3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 4) $2i(-1+i)+\left(\sqrt{3}-i\right)^3+(1+i)(1-i)$.

5.38. Сонларни даражага кўтаринг:
1) $(-1+i)^5$; 2) $(1+i)^{10}$.

5.39. Ҳисобланг:

$i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}$.

5.40. Айниятни исботланг:

1) $\frac{2-i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$; 2) $\frac{\sqrt{m}+i\sqrt{n}}{\sqrt{m}-i\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}+i\sqrt{m}}{\sqrt{n}-i\sqrt{m}}$.

5.41. $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ тенгликни қаноатлантирувчи a ва b ҳақиқий сонларни топинг.

5.42. $\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}$ ифодани соддалаштиринг.

▲ $$\left(\frac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^{-4}=\left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}=\left(\frac{-14-4i}{2-7i}\right)^{4}=16\left(\frac{-7-2i}{2-7i}\right)^{4}.$$

Энди иккита комплекс сонни бўлиб оламиз:

$$\frac{-7-2i}{2-7i}=\frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{-14-49i-4i+14}{4+49}=\frac{-53i}{53}=-i.$$

Ифоданинг қийматига эга бўламиз: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$. ■

5.43. Комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини топинг:

1) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 2) $\frac{4+3i}{3+4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$;

3) $\frac{1+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}+2i$; 4) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

5.44. Берилган тенгламаларни қаноатлантирувчи ҳақиқий x ва y сонларни топинг:

1) $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-2i}=1$; 2) $3x-(1-i)(x-yi)=2+3i$;

3) $\frac{x}{2-i}+\frac{yi}{3+i}=\frac{2}{1+i}$; 4) $x+yi=(1-i)(2+8i)$.

2) $3x - (1 - i)(x - yi) = 2 + 3i$,
$3x - ((x - y) + (-x - y)i) = 2 + 3i$,
$(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i$ комплекс сонлар тенг бўлиши учун уларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари тенг бўлиши керак. Бундан:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3. \end{cases} \quad x = -1\ ,\ y = 4.$$

C

5.45. Ҳисобланг:

1) $(1 + i\sqrt{3}\,)^3(1 - i)^7$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\dfrac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

5.46. Тенгламани қаноатлантирувчи x билан y нинг барча ҳақиқий қийматларини топинг:

1) $\dfrac{i}{x} + \dfrac{i}{y} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{5i}{y}$; 2) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$;

3) $-\dfrac{2}{y} + xi = 3$; 4) $(2 - i)x + (1 + i)y = 5 - i$.

5.47. Тенгламаларни комплекс сонлар тўпламида ечинг. Ечимни $a + bi$ кўринишда беринг.

1) $(1 + i)z = 3 + i$; 2) $(3 - 4i)(z - 1) = 10 - 5i$;

3) $(2 + i)(z - 7 + 3i) = 15 - 10i$; 4) $(3 + 5i)(z + 2 - 5i) = 6 + 3i$.

5.48. $z^2 = 2\bar{z}$ тенгликни қаноатлантирувчи барча z комплекс сонларни топинг.

5.49. z ва w комплекс сонлар қуйидаги тенгламалар системасидаги ечими:

$$\begin{cases} z + iw = 13, \\ 3z - 4w = 2i. \end{cases}$$

z ва w сонларни топинг ва жавобларни $x + yi$ кўринишда ёзинг.

5.50. $z = 2 + 3i$ комплекс сон $-\,z^2 + (a - 1)z + 16 + bi = 0$ тенгламанинг илдизи. a ва b ҳақиқий сонларни топинг.

5.51*. $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\dfrac{b}{|b|}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ формуланинг тўғрилигини исботланг.

Такрорлаш учун машқлар

5.52. Иккиҳад кўринишида ёзинг:

$$(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2))(a^2 - ab + b^2).$$

5.53. Тенгламалар системасини ечинг: $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 1, \\ 3y + x = 20. \end{cases}$

5.3. Квадрат тенгламаларнинг комплекс сон бўлган илдизлари. Алгебранинг асосий теоремаси

Бу мавзуда квадрат тенгламаларнинг комплекс сон бўлган илдизларини топишни ўрганиб, оҳирида:

- комплекс сонлар тўпламида квадрат тенгламаларни еча оласиз;
- алгебранинг асосий теоремасини ва унинг натижасини билиб оласиз.

Комплес сонлар алгебраик тенгламаларни ечиш давомида пайдо бўлган. $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ва $a, b, c \in R$ квадрат тенгламанинг илдизлари $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ формула билан топилишини ва $D = b^2 - 4ac$ сони дискриминант деб аталишини биласиз. Дискриминантнинг қиймати:

$D > 0$ бўлса, тенгламанинг иккита ҳар хил ҳақиқий илдизи мавжуд;

$D = 0$ бўлса, тенгламанинг иккита бир хил ҳақиқий илдизи мавжуд;

$D < 0$ бўлса, тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмаслигини биламиз. Бироқ $D < 0$ бўлганда ҳам квадрат тенгламанинг иккита илдизи мавжуд, фақат улар комплекс сонлар тўпламида бўлади.

1-мисол. 1) $x^2 = -4$, 2) $x^2 + x + 2 = 0$ тенгламани ечиш керак.

▲ 1) $x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$.

2) $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$. ■

2-мисол. 1) $x^2 + 4$, 2) $x^2 + 11$ ифодалани кўпайтувчиларга ажратиш керак.

▲ 1) $x^2 + 4 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$.

2) $x^2 + 11 = \left(x - \sqrt{11}i\right)\left(x + \sqrt{11}i\right)$. ■

Бу мисоллардан $z = a + bi$ сони қандайдир квадрат тенгламанинг комплекс илдизи бўлса, унинг қўшмаси $\bar{z} = a - bi$ ҳам шу тенгламанинг илдизи бўлишини текшириш қийин эмас (уни мустақил текширинг.

Алгебранинг асосий теоремаси. *Даражаси ноль бўлмаган исталган кўпҳаднинг комплекс сонлар тўпламида камида битта илдизи мавжуд бўлади.*

Бу теореманинг исботи мураккаб бўлганлигидан мактаб курсида ўрганилмайди.

Алгебранинг асосий теоремасининг натижаси. *Исталган n-даражали кўпҳаднинг комплекс сонлар тўпламида, каррали илдизларининг барчасини қўшиб олганда роппа-роса n та илдизи мавжуд бўлади.*

Чизиқли тенгламанинг битта илдизи мавжуд эканлигини биламиз, квадрат тенгламанинг эса комплекс сонлар тўпламида иккита илдизи мавжуд эканлигини кўрдик. Худди шундай, куб тенгламаларнинг ҳам учта илдизи мавжуд эканлигини баъзи бир тенгламалардан кўрамиз. Агар куб тенгламаларнинг ягона ҳақиқий илдизи мвжуд бўлса, у ҳолда унинг қолган иккита илдизи қўшма комплекс сонлар бўлади.

$z = a + bi$ сони қандайдир тенгламанинг комплекс илдизи бўлса, унинг қўшмаси $\overline{z} = a - bi$ ҳам шу тенгламанинг илдизи бўлишини эътиборга олсак, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ куб тенгламанинг илдизлари ҳақида қуйидаги хулосани чиқарамиз:

Куб тенгламанинг учала илдизи ҳам ҳақиқий сон ёки битта илдизи ҳақиқий сон, бошқа илдизи қўшма комплекс сонлар бўлади.

Гуруҳларда ишлаш

Тўртинчи даражали тенгламанинг илдизларининг таркиби қандай сонлар бўла олиши ҳақида хулоса чиқаринг.

3-мисол. $1 + 2i$ комплекс сон $4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 0$ тенгламанинг илдизи бўлишини кўрсатиб, унинг бошқа илдизини топиш керак.

▲ Аввал $1 + 2i$ сони берилган тенгламанинг илдизи бўлишини кўрсатайлик. Ҳақиқатан, $z^2 = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ ва $z^3 = (1 + 2i)^3 = (1 + 2i)(-3 + 4i) = -11 - 2i$ эканлигидан, топилган қийматларни берилган тенгламага қўйиб, ушбу айниятга эга бўламиз: $4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(-11 - 2i) - 11(-3 + 4i) + 26(1 + 2i) - 15 = (-44 + 33 + 26 - 15) + (-8 - 44 + 52)i = 0 + 0i = 0.$

Энди тенгламанинг бошқа илдизларини топайлик. Алгебранинг асосий теоремасининг натижасига кўра 3-даражал тенгламанинг учта илдизи мавджуд. Битта илдизи $1 + 2i$ комплекс сон бўлса, унга қўшма $1 - 2i$ сон ҳам берилган тенгламанинг илдизи бўлади. Иккита илдизи комплекс сон бўлса, учинчи илдизи ҳақиқий сон бўлиши керак. Бу илдизни a деб белгилаб, кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(z - a)$. Қавсни очиб, гуруҳлаймиз:

$4z^3 - 11z^2 + 26z - 15 = 4(z^2 - z + 2zi - z + 1 - 2i - 2zi + 2i + 4) \times$ $\times (z - a) = 4(z^2 - 2z + 5)(z - a) = 4z^3 - 4az^2 - 8z^2 + 8az + 20z - 20a.$

Мос даражаларнинг коэффициентларини тенглаштирамиз (номаълум коэффициентлар усули). z^2 коэффициентлари: $-11 = -4a - 8$; z коэффициентлари: $26 = 8a + 20$; озод ҳадлари: $-15 = -20a$.

Барча тенгламаларнинг ечимлари бир хил: $a = \frac{3}{4}$.

Жавоб: $z_1 + 2i$; $z_2 = 1 - 2i$; $z_3 = \frac{3}{4}$. ■

1. Квадрат тенгламанинг битта комплекс илдизи берилса, иккинчисини тезда аниқлаш мумкинми?
2. Алгебранинг асосий теоремаси ва унинг натижасини айтинг, тушунтиринг.

Есептер

A

5.54. x комплекс сон учун қуйидаги чала квадрат тенгламаларни ечинг:

1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $4x^2 - 9 = 0$; 3) $x^2 + 5 = 0$;
4) $x^2 - 25 = 0$; 5) $x^2 + 25 = 0$; 6) $x^2 - 5 = 0$.

5.55. x комплекс сон учун қуйидаги куб тенгламаларни кўпайтувчиларга ажратиш орқали ечинг:

1) $x^3 - 4x = 0$; 2) $x^3 + 2x = 0$; 3) $x^3 + 4x = 0$;
4) $x^3 - 3x = 0$; 5) $x^3 + 3x = 0$.

5.56. x комплекс сон учун 4-даражали тенгламаларни ечинг:

1) $x^4 + x^2 = 6$; 2) $x^4 - 1 = 0$; 3) $x^4 = 81$.

5.57. Квадрат тенгламани ечинг:

1) $x^2 - 10x + 29 = 0$; 2) $4x^2 + 6x + 25 = 0$;
3) $x^2 + 14x + 50 = 0$; 4) $2x^2 + 5 = 6x$;
5) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 4 = 0$; 6) $2x + \frac{1}{x} = 1$.

5.58. Чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^2 - 9$; 2) $x^2 - 7$; 3) $x^2 + 7$;
4) $2x^2 + 9$; 5) $4x^2 - 1$; 6) $4x^2 + 1$;
7) $2x^2 - 9$; 8) $x^3 - x$; 9) $x^4 - 16$;
10) $x^4 - 1$; 11) $x^3 + x$.

5.59. Тенгламани ечинг:

1) $z^2 + 2z + 2 = 0$;
2) $z^2 - 2z + 5 = 0$;
3) $z^2 - 4z + 13 = 0$;
4) $z^2 + 6z + 34 = 0$;
5) $4z^2 - 4z + 17 = 0$;
6) $z^2 + 4z + 6 = 0$.

5.60. Биквадрат тенгламани ечинг:

1) $z^4 + 2z^2 = 3$;
2) $z^4 = z^2 + 6$;
3) $z^4 + 5z^2 = 36$;
4) $z^4 + 9z^2 + 14 = 3$;
5) $z^4 + 1 = 2z^2$;
6) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

B

5.61. Квадрат тенгламанинг иккита илдизи $2 \pm \sqrt{3}i$ бўйича тенглама тузинг.

5.62. Комплекс сонлар тўпламида тенгламани ечинг:

1) $z^2 + 4iz - 13 = 0$;
2) $z^2 - 6iz - 10 = 0$;
3) $z^2 - iz - 0,5 = 0$;
4) $z^2 + 8iz - 25 = 0$.

5.63. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг ва кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^2 + x + 1 = 0$;
2) $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$;
3) $x^2 + 3x + 4 = 0$;
4) $x^2 - 27 = 0$;
5) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$;
6) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$.

5.64. $3z^3 - 2z^2 + 22z + 40 = 0$ куб тенглама учун

1) $1 + 3i$ сони тенгламанинг илдизи бўлишини кўрсатинг;

2) тенгламанинг ягона ҳақиқий илдизи бўлишини тушунтиринг;

3) бошқа илдизларини топинг.

5.65. $z = -4$ сони $z^3 + 6z^2 + 12z + 16 = 0$ тенгламанинг илдизи эканлигини эътиборга олиб, тенгламанинг бошқа илдизларини топинг.

5.66. $2z^3 - z^2 + 4z + k = 0$ тенгламанинг битта илдизи $z = 1 + 2i$ сонига тенг.

1) бошқа комплекс илдизини топинг.

2) учинчи ҳақиқий сон бўладиган илдизини ва k нинг қийматини топинг.

5.67. $z = 6$ сони $z^3 - 10z^2 + 37z + p = 0$ тенгламанинг илдизи эканлигини эътиборга олиб,

1) p нинг қийматини топинг;

2) тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

5.68. $a = 1 + i$ комплекс сон $z^3 + 3z^2 + pz + q = 0$ тенгламанинг илдизи (бунда p ва q – ҳақиқий сонлар). Дастлаб a^2 ва a^3 сонларни топиб олиб тенгламага қўйиш орқали $p = -8$ ва $q = 10$ бўлишини кўрсатинг. Тенгламанинг бошқа иккита илдизини топинг.

C

5.69. p ва q сонлар – ҳақиқий сонлар. $\alpha = 1 + 2i$ сони $z^2 + (p + 5i)z + q(2 - i) = 0$ тенгламанинг илдизи. Ҳақиқий p ва q сонларни топинг. Тенгламанинг бошқа илдизини топинг.

5.70. Тенгламанинг комплекс сонлар тўпламида ечинг ва кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^3 - 6x + 9 = 0$; 2) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$;
3) $x^3 + 9x - 26 = 0$; 4) $x^3 - 4x + 2 = 0$;
5) $x^3 + 18x + 15 = 0$; 6) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

5.71*. $\bar{z}$ сони – z комплекс соннинг қўшмаси. Қуйидаги тенгламани қаноатлантирувчи z сонини топинг:

1) $z^2 + \bar{z} = 0$; 2) $z^2 - \bar{z} = 0$.

5.72. $a = 1 + i$ ва $\beta = 2 - i$ комплекс сонлар илдизи бўладиган тўртинчи даражали кўпҳад ёзинг.

5.73. $a = 1 + 4i$ сони $z^3 + 5z^2 + kz + m = 0$ тенгламанинг илдизи (бунда k ва m – ҳақиқий сонлар). k коэффициентни топинг ва $m = 119$ бўлишини кўрсатинг. Тенгламанинг қолган илдизларини топинг.

Такрорлаш учун машқлар

5.74. Ифоданинг ишорасини аниқланг:

1) $\sin\frac{17\pi}{4}$; 2) tg $3{,}3\pi$.

«КОМПЛЕКС СОНЛАР»
бўлимининг хулосаси

$i^2 = -1$ тенглик бажариладиган i сони *мавҳум бирлик* деб аталади.

a ва b ҳақиқий сонлар бўлса, $z = a + bi$ кўринишдаги сон *комплекс сон* деб аталади. Иккита комплекс соннинг мавҳум ва ҳақиқий қисмлари мос равишда тенг бўлса, у ҳолда улар ўзаро тенг комплекс сонлар деб аталади.

$z = a + bi$ комплекс сонга $\bar{z} = a - bi$ комплекс сон *қўшма*, бу сонлар ўзаро *қўшма сонлар* деб ҳам аталади.

$z \neq 0$ *комплекс соннинг аргументи* деб унга мос келадиган радиус-векторнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ясайдиган бурчагига айтилади. Бурчак соат стрелкаси йўналишига қарши йўналишда ҳисобланса, бу бурчак мусбат ишора билан, соат стелкаси билан йўналишдош бўлса, манфий ишора билан олинади, $z = a + bi$ комплекс соннинг аргументи $\varphi = \mathrm{Arg}z$ ёки $\varphi = \mathrm{Arg}(a + bi)$ орқали белгиланади.

1. Қўшиш амали:

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i.$$

2. Айириш амали:

$$z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i.$$

3. Көбейту амалын қолдану үшін жақшаны ашып, $i^2 = -1$ эканлигини инобатга олиш етарли.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + b \cdot d \cdot i^2 = $$
$$= ac + adi + bci - bd = ac - bd + (ad + bc)i.$$

4. Бўлиш амали маҳражида комплекс соннинг қўшмасига кўпайтириш орқали бажарилади, $i^2 = -1$ эканлигини инобатга олиш етарли.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Исталган бутун k учун

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = \mathrm{i},\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i\ (k \in N).$$

Даражаси ноль бўлмаган исталган кўпҳаднинг комплекс сонлар тўпламида камида битта илдизи мавжуд бўлади.

Исталган n-даражали кўпҳаднинг комплекс сонлар тўпламида, каррали илдизларининг барчасини қўшиб олганда роппа-роса n та илдизи мавжуд бўлади.

Терминлар номининг луғати

Ўзбек тилида	**Қозоқ тилида**	**Рус тилида**	**Инглиз тилида**
Мавҳум бирлик	Жорамал бірлік	Мнимая единица	Imaginary unit
Комплекс сон	Комплекс сан	Комплексное число	Complex number
Қўшма сон	Түйіндес сан	Сопряженное число	Conjugate number
Ҳақиқий сон	Нақты сан	Действительное число	Real number
Тенгламанинг илдизи	Теңдеудің түбірі	Корень уравнения	Root of the equation
Комплекс сонлар текислиги (Арган диаграммаси)	Комплекс сандар жазықтығы (Арган диаграммасы)	Плоскость комплекс-ных чисел (Диаграмма Аргана)	Complex number plane (Argand diagram)

МИСОЛЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

10-синф материалларини такрорлаш

0.1. 1) $(-\infty;-4)\cup(-4;1,5)\cup(1,5;+\infty)$; 2) $x\geqslant-1$; 3) R; 4) $x\geqslant 2$. **0.2.** 1) $(3x-2)^2$; 2) $\sqrt{\sin x+1}$. **0.3.** 1) 2; 2) 0. **0.4.** 1) $\mathrm{tg}^2\alpha$; 2) $\mathrm{tg}5\alpha$; 3) $-\cos\alpha-\sin\alpha$. **0.5** 1) теріс; 2) теріс; 3) 0; 4) теріс. **0.7** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. **0.8** 1) $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$; 3) $x=$ $=(-1)^n\arcsin\frac{5}{6}+\pi n,\ n\in Z$, 5) $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$. **0.9.** 1) $\left[-\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$; 4) $\left(-\frac{\pi}{6}+4\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+4\pi n\right)$. **0.10.** 3) $\frac{2}{(x+1)^2}$; 6) $(3+x^5)\cos x-\left(3x+\frac{x^6}{6}\right)\sin x$. **0.11.** 2) $8(x^2-4x+1)^3(x-2)$; 5) 1. **0.12.** 1) $\min\limits_{[-1;\,2]} y=-8$; $\max\limits_{-1\le x\le 2} y=3$. **0.13.** 2) $(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$. **0.15.** 1) $\left(1;\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$. **0.16.** 1) $(0;4)\cup$ $\cup(5;+\infty)$; 2) $\left[-3;\frac{13}{5}\right]$. **0.17.** 1) $(-\infty;-2]\cup[2;4)$. **0.18.** 1) $4-x$. **0.19.** 1) $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$. **0.20.** 1) $4\sin(2,5x)\cos x\cos(0,5x)$. **0.22** 1) $\varnothing$; 2) $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **0.23.** 1) $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$; 3) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. **0.24.** 1) $\frac{\sin(3x-2)}{2\sqrt{x-2}}+3\sqrt{x-2}\cos(3x-2)$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\times$ $\times\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. **0.25.** 1) $x=-1$, II текті үзіліс нүктесі, $x=5$, I текті үзіліс нүктесі. **0.26.** 1) $\frac{1}{192}$; 3) $-\frac{1}{4}$. **0.27.** 1) $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ — функция ойыс, $(-3;1)$ – функция дөңес. **0.29.** 6840. **0.30.** $\frac{5}{6};\frac{1}{6}$. **0.32.** 2) $x(x+1)(x^2+x+7)$. **0.33.** $-\frac{28}{45}$. **0.34.** $\sin(\alpha+\beta)$ ва $\cos(\alpha-\beta)$ формулаларын қолданып өрнектің мәні тұрақты сан екенін көрсету керек. **0.35.** 1) $\frac{\pi}{2}-x=\sqrt{x}$ теңдеуін шешу керек; 2) $\varnothing$. **0.36.** 2) $\varnothing$. **0.37.** 1) $x=-1$ — вертикаль асимптота, $y=3x-2$ — көлбеу асимптота. **0.38.** $m=\frac{4}{15}$. **0.41.** $n=12$.

I бўлим

1.3. 1) $F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $F'(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+x\right)'=\left(2\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x\right)'=$ $=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}+1=-\frac{1}{x\sqrt{x}}+1$. **1.4.** 1) $F(x)=x^2-x+C$; 2) $F(x)=\frac{5}{4}x^4-$ $-4x+C$; 3) $F(x)=\frac{7}{3}x^3-3\sin x-3x+C$. **1.5.** 1) $\left(\frac{2}{x^3}+C\right)'=\left(2x^{-3}+C\right)'=$

$= 2\cdot(-3)\cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$; 2) $\left(2x^4 - \frac{1}{2x} + C\right)' = 8x^3 + \frac{1}{2x^2}$. **1.6.** 1) $\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} +$

$+ C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$. Текшириш: $\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C\right)' = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $\int 7x^{\frac{4}{3}}dx = 7\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} +$

$+ C = 3x^{\frac{7}{3}} + C$. Текшириш: $\left(3x^{\frac{7}{3}} + C\right)' = 3\cdot\frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = 7x^{\frac{4}{3}}$; 3) $\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$

$+ C = 2\sqrt{x} + C$. Текшириш: $\left(2\sqrt{x} + C\right)' = 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$. **1.8.** 1) $f(x) = \frac{5}{2}x^2 -$

$-\frac{1}{x^3} + C$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + C$; 3) $f(x) = \frac{(x-3)^3}{3} + C$; 4) $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{x^2} + C$;

5) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{x} + 4x + C$. **1.9.** 1) $\mathrm{tg}x + x + C$; 2) $-\cos x + 3\sin x + C$;

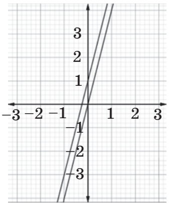
3) $\frac{x^4}{4} + \cos x + C$; 4) $-\mathrm{ctg}x + \frac{3}{2}\sin x + C$; 5) $3\sin x - \mathrm{ctg}x + C$; 6) $x^6 + \frac{1}{2}\cos x + C$.

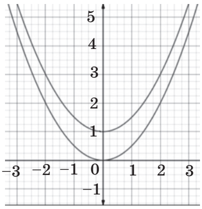
1.10. 1) $\frac{x^8}{8} + C$; 2) $\frac{4}{17}x^{\frac{17}{4}} + C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; 4) $\frac{x^3}{3} - 4x + C$;

5) $-8\cos x - 9\mathrm{tg}x + C$. **1.11.** 2) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}$; 3) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}$.

1.12. 1) $f(x) = x^2 - x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 3x + 4$; 3) $-\frac{3}{x^2} + 7$.

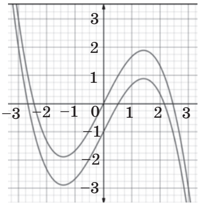
1.13. (−∞; +∞) − ўсувчи. **1.14.** (−∞; 0) − камаювчи; (0; +∞) − ўсувчи.

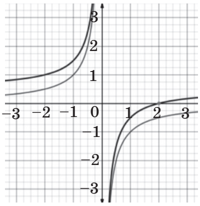




1.15 . $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ — камаювчи. **1.16.** $\left(-\infty; 0\right) \cup \left(0; +\infty\right)$ — ўсувчи.

$\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ — ўсувчи;





1.17. 1) $F(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{4}{x}+C$; 2) $F(x)=-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}+2x^2\sqrt{x}+C$. **1.18.** 1) $\frac{1}{6}y^6+2y^4+C$. **1.19.** 1) $F'(x) = 35x^4 + 5 \cdot 2\cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = 35x^4 - 15\sin 6x$; 2) $24x^3 + 5 \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 24x^3 + 10\sin 4x$. **1.21.** 1) $3x^3-12x^2\sqrt{x}+12,5x^2+C$; 2) $6x\sqrt{x}-3x^2+0,4x^2\sqrt{x}+C$. **1.22.** 1) $t-\frac{3}{2t}+C$; 2) $2t+\frac{1}{6}t^3+C$. **1.23.** 1) $\frac{2}{3}x^3-2\sqrt{x}+C$; 2) $4x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$; **1.24.** 1) $F(x)=\sin x+\cos x+2\sqrt{2}$. **1.25.** 1) $\sin\alpha - \cos\alpha + C$; 2) $\mathrm{tg}x - x + C$. **1.26.** 1) $h(t) = -5t^2 + 6t + 2$; 2) $t=\frac{6+\sqrt{76}}{10}$; 3) $h_{\max}(t) = 3,8$. **1.27.** 1) $\frac{x^2}{2}-x+C$; 2) $\frac{(x+3)^8}{8}+C$. **1.28.** 1) $f(x)=2\sqrt{x}-5$; 2) $3x^2 + 8x + 5$. **1.29.** 1) $F'(x) = x^6 - 4\sin 2x$; 2) $F'(x)=\frac{6\mathrm{arctg}3x}{1+9x^2}$. **1.30.** $F(x) = x + \sin x$. **1.31.** $f(x)=3x-\frac{1}{10}x^2+7$. **1.32.** 1) $f(x)=\frac{x^2}{2}-1$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$. **1.33.** $f(x)=2$; **1.34.** $f(x)=x-1$. **1.35.** $t=10$ с, $s = 700$ м. **1.37.** $\upsilon_0=10\sqrt{21}$. **1.39.** 1) $y' = (x - 1) \cdot [2\sin x + x\cos x - \cos x]$; 2) $y'=\frac{2x\cos 2x}{\left(1-x^2\right)^2}-\frac{2\sin 2x}{1-x^2}$. **1.40.** 1) $x_0=1$, $y=0,5x-0,5$. **1.43** 1) $\frac{10}{9}\sin 9x+C$; 2) $-\frac{7}{4}\cos 4x+C$; 3) $\frac{1}{14}(2x-3)^7+C$; 4) $\frac{1}{42}(7x-9)^6+C$; 5) $\frac{2}{3}\sin 3x+C$; 6) $\frac{1}{18}(3x-8)^6+C$; 7) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}4x+C$; 8) $\frac{1}{12}(3x-1)^4+C$; 9) $x+\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **1.44** 1) $\frac{1}{12}(3x+2)^4+C$; 2) $\frac{1}{192}(x-2)^6+C$; 3) $-\frac{1}{4(1-2x)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{9(3x+1)^3}+C$. **1.45.** 3) $\frac{1}{243}(x+3)^6+C$. **1.46.** 1) $-\frac{1}{2}\mathrm{tg}(1-2x)+C$;

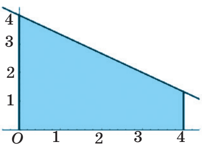
2) $-2\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)+C$; 3) $\frac{1}{4}\cos(3-4x)+C$; 4) $-\frac{1}{3}\sin(2-3x)+C$; 5) ctg(4 – – x) + C; 6) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}\left(4(x+1)\right)+C$; 7) sin3$x$ + C. **1.48.** 1) $\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C$; 2) $\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C$; 3) $\frac{1}{8}(4x-\sin 4x)+C$; 4) $\frac{1}{8}(4x+\sin 4x)+C$. **1.49.** 1) sin$xcosx$ + C; 2) tg$x$ + C; 3) –ctg$x$ + C; 4) $-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$. **1.50.** 1) $x$sin$x$ + cos$x$ + C; 2) $\frac{1}{4}(\sin 2x-2x\cos 2x)+C$; 3) $\frac{1}{4}(2x\sin 2x+\cos 2x)+C$. **1.51.** 1) $\frac{3\mathrm{tg}(4x-1)}{4}+\cos(2x-3)+5x+C$; 2) $-2x-\frac{5}{4}\sin(7-4x)+\frac{4}{3}\mathrm{ctg}(2-$ $-3x)+C$. **1.52.** 1) $\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+C$; 2) $\frac{1}{16}(2\sin 4x-\sin 8x)+C$; 3) $\frac{1}{16}(4\sin 2x+\sin 8x)+C$; 4) $-\frac{1}{14}(7\cos x+\cos 7x)+C$; 5) $3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **1.53.** 1) $\frac{(x+2)^9}{2304}+C$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{3y^2+1}+C$; 3) $\frac{2\left(1-5x^3\right)}{\sqrt[5]{\left(1-5x^3\right)^3}}+C$; 4) $\frac{1}{1-2x^3}+$ $+C$. **1.54.** 1) $\int x(x+1)^3dx=\begin{vmatrix} u=x,\ dv=(x+1)^3 \\ du=dx,\ v=\frac{(x+1)^4}{4}\end{vmatrix}=\frac{x(x+1)^4}{4}-\frac{(x+1)^5}{20}+C$;

2) $\int(2x+1)\sqrt{x-5}dx=\begin{vmatrix} x-5=t,\ \ dx=dt \\ x=t+5\end{vmatrix}=\int(2t+11)\sqrt{t}dt=\frac{4t^2\sqrt{t}}{5}+\frac{22t\sqrt{t}}{3}=$ $=\frac{4(x-5)^2\sqrt{x-5}}{5}+\frac{22(x-5)\sqrt{x-5}}{3}+C$. **1.55.** $\int\frac{x^5-3}{x^2}dx=\int x^3dx-\int\frac{3}{x^2}dx=\frac{x^4}{4}+$ $+\frac{3}{x}+C$. **1.56.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C$; 2) $-\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C$; 3) $-3\sqrt[3]{\cos x}$ + C; 4) $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\mathrm{tg}x+C$. **1.57.** 1) $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$; 2) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$; 3) $-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x+$ C; 4) $\mathrm{tg}^7 x+C$. **1.58.** 1) $\frac{1}{9}\left(2\sqrt{3x-4}-\frac{26}{\sqrt{3x-4}}\right)+C$; 2) $\frac{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^5}}{10}-\frac{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}{4}+C$; 3) $-\frac{3x^2-3x+1}{3(x-1)^3}+C$. **1.59.** 1) $\frac{1}{10}\left(\sqrt[3]{(3x+12)^2}(8x-33)\right)+$ $+C$; 2) $\frac{4x-5}{4(5-2x)^2}+C$; 3) ln|x – 1| + C; 4) sin(x^2 + x + 4) + C. **1.60.** 1) $\frac{4}{3}\left(\sqrt{\left(\sqrt{t}+1\right)^3}\right)+C$; 2) $\frac{4}{9}\left(\sqrt{\left(\sqrt{t^3}+1\right)^3}\right)+C$. **1.61.** 1) 2$xsinx$ –

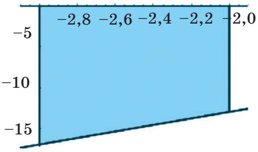
$-(x^2-2)\cos x + C$; 2) $\frac{1}{27}\left(\left(9x^3-6x\right)\sin 3x\right)+\left(9x^2-2\right)\cos 3x + C$; 3) $\frac{x\sin 2x}{4}+$ $+\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x^2}{4}+C$; 4) $-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{x^2}{4}+C$. **1.62.** $-\frac{\cos^6 x}{3}+C$. **1.63.** 1) $\frac{3x}{8}+$ $\frac{3\cos x\sin x}{8}+\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+C$; 2) $\frac{3x}{8}-\frac{3\cos x\sin x}{8}-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+C$.

1.64. 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$. **1.66.** $-\frac{\sqrt{2}}{36}$. **1.67.** 0. **1.68.** $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. **1.74.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **1.75.** 1) 2; 2) $\frac{8}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{4}{3}$. **1.76.** 1) $8\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $5\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$. **1.77.** 1) 32; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 0; 4) 84; 5) 15. **1.78.** 1) 2; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 1; 4) 4. **1.79.** 1. **1.80.** 1) 16; 2) 9. **1.81.** 2) 329; 3) 8; 4) −234; 5) $\frac{16}{15}$; 6) 63. **1.82.** 1) 0; 2) −10,5; 3) $17\frac{1}{3}$; 4) 2. **1.83.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $\sqrt{3}$. **1.84.** 1) $\frac{16}{3}$; 2) $\frac{4}{\pi}$; 3) $\frac{4}{\pi}$; 4) 27. **1.85.** 1) $\frac{4\sqrt{2}-1}{2}$; 2) $\frac{20}{3}$; 3) $\frac{32}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$. **1.86.** 1) $\frac{20}{3}$; 2) 16; 3) −2; 4) $-\frac{57}{8}$. **1.87.** 1) 9; 2) 47; 3) $\frac{209}{6}$; 4) $\frac{15}{2}$. **1.88.** 1) π^5; 2) $7-\frac{\pi^3}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{28}{3}$. **1.89.** 1) $-\frac{13}{6}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $\frac{11}{6}$; 4) $-\frac{74}{3}$. **1.90.** 1) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **1.91.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $3\sqrt{3}-3$; 3) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{7}{3}$. **1.92.** 1) $\frac{2\sqrt{2}+5\pi}{8}$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) π; 4) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **1.93.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $\frac{4+\pi^2}{2}$.

1.95. 1) $\frac{32}{3}$

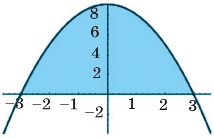


2) 15

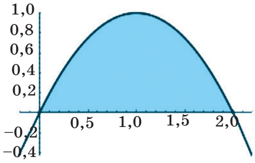


1.96. 1) 0,5; 2) 13,5; 3) 15.

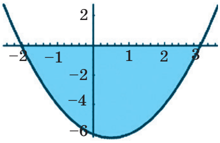
1.97. 1) 36



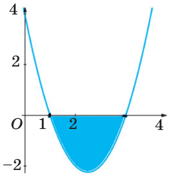
2) $\frac{4}{3}$



3) $\frac{125}{6}$

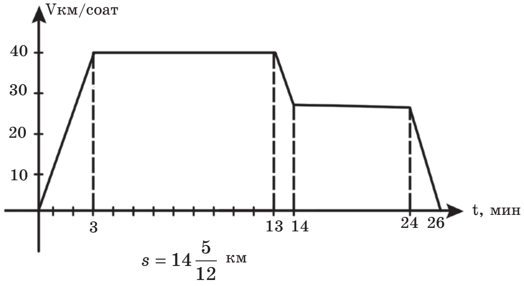


4) $\frac{9}{2}$



1.98. 1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{160}{9}$; 3) $\frac{2}{3}$. **1.99.** 1) 16; 2) $\frac{500}{3}$. **1.100.** 1) 0.5; 2) 1; 3) ln256; 4) $\frac{32}{3}$. **1.101.** 1) 13,5; 2) 4,5; 3) $\frac{1}{3}$. **1.102.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 18; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{104}{3}$. **1.103.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) 9; 3) $\frac{125}{6}$; 4) $\frac{4}{3}$. **1.104.** 1) $\frac{19}{6}$; 2) $37\frac{3}{4}$; 3) $\frac{32}{3}$; 4) 0.

1.105. 1) $\frac{39062}{7}$; 2) $\frac{1\,690\,981}{4\,608\,000\,000\,000}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 8. **1.106.** 1) $\frac{2-\sqrt{2}}{16}$, 2) $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) $1-\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.107.** 1) 8,5. **1.108.** 1) 2,5; 2) 5; 3) 10; 4) 2,5. **1.109.** 1) 9; 2) $\frac{38}{3}$. **1.110.** 1) $\frac{10244}{15}$; 2) $\frac{12\sqrt{3}-12-\pi}{3}$. **1.111.** 1) $A=-3C$, B — исталган сон; 2) $B = 0$; A, C — исталган сонлар. **1.112.** 1) 16; 2) $\frac{2}{7}$. **1.113.** $2\sqrt{2}$. **1.114.** 1) $-85\frac{6}{7}$; 6) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ **1.120.** 110 м. **1.121.** 1) 4,5; 3) 24. **1.123.** 0,5 м; 1 м. **1.124.** 1) $\frac{31}{6}$ м; 1,5 м. **1.125.** 2880 м. **1.126.** 1) 21π; 2) 625π. **1.127.** *а*) 186π; *ә*) 29,2π; *б*) 63π. **1.128.** 1) 36π; 2) $\frac{127\pi}{7}$; 3) 198,4π; 4) 8π. **1.129.** 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 4) 2,5π. **1.130.** 2) $1\frac{1}{15}\pi$; 4) 40,5π. **1.131.** 12,5 Дж. **1.132.** 1) мусбат йўналиш, манфий йўналиш, ҳаракатланмаган; 2) 16 км; 3) 8 км. **1.133.**



$s = 14\frac{5}{12}$ км

1.134. 1) 9 м; 2) 13 м. **1.135.** $\frac{1}{12}$ м. **1.136.** 1) $8\frac{2}{3}\pi$; 3) 1,6π. **1.137.** 2) $\frac{128\pi}{7}$; 4) 2π. **1.139.** 2) $\frac{16}{15}\pi$. **1.140.** 2 с. **1.141.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ см.

1.142. 1 м. **1.143.** $\frac{16}{3}\pi$ **1.144.** 2) $\frac{25}{4}\pi$; 4) $\frac{1}{31}\pi$. **1.148.** 156,8 Дж. **1.149.** $\frac{32}{15}\pi$.

1.150. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$. **1.151.** (1;7). **1.152.** $b_1 = \frac{1}{32}$, $n = 7$. **1.153.** 1) энг катта қиймати: $\sqrt{2} + 1$; энг кичик қиймати: $-\sqrt{2} + 1$; 2) $[-4; 4]$. **1.154.** $\frac{5}{6}\pi$ ва $-\frac{7}{6}\pi$.

II бўлим

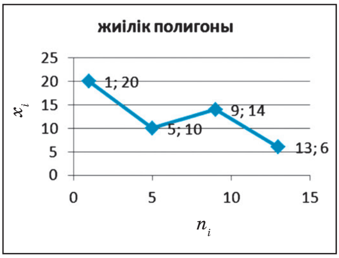
2.1. 1) 3 853 705; 914 657; 2) 264 640; 151 763. **2.2.** $\bar{x} \approx 5{,}17$; $R = 6$; $M_0 = 6$; $M_e = 5{,}5$. **2.3.** 1) танланма ҳажми 20, $R = 4$; $M_0 = 3$; $M_e = 3$, $\bar{x} = 3{,}15$. **2.4.** 2.4. Ҳажми 15, $R = 8$; $M_0 = 7$; $M_e = 5$, $\bar{x} \approx 5{,}33$.

$x(i)$	2	3	4	5	7	10
n	3	1	2	3	4	2

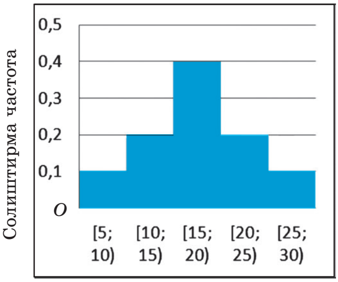
2.6. $M_e = 18$, $\bar{x} \approx 21{,}5$. **2.7.** 1) танланма ҳажми 50; $M_0 = 1$; $M_e = 5$, $\bar{x} = 5{,}48$. **2.8.** 1) ҳажми 40; $M_0 = 9$; $M_e = 9{,}5$; $\bar{x} = 9{,}8$; $R = 8$. **2.9.** $\bar{x} \approx 14{,}8$. **2.10.** 7; 9.

2.11.

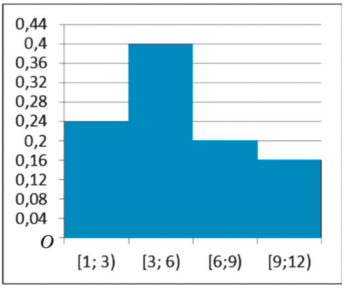
2.12.



2.14.

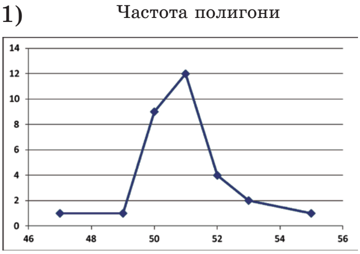


2.15.



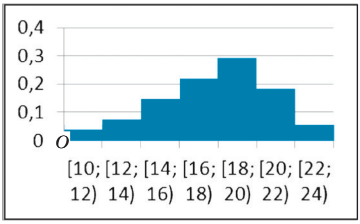
2.16.

2.18. 1)

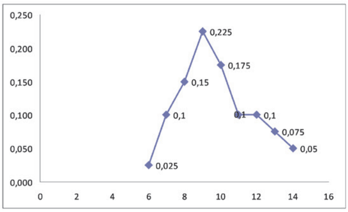


2.19. 2)

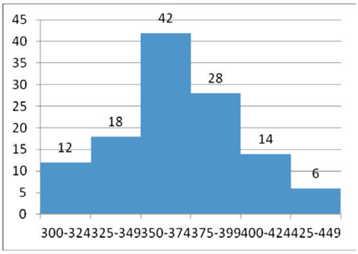
Интер-вал	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24)
n_i	0,04	0,07	0,15	0,22	0,29	0,18	0,05



2.22.



2.25. 1)



2.29. 2.29. Ўғит солинган буғдой бошоқлари учун $\bar{x} \approx 6{,}85$; $D \approx 2{,}97$; $\sigma \approx 1{,}72$. Ўғит солинмаган буғдой бошоқлари учун $\bar{x} \approx 5{,}63$; $D \approx 1{,}98$; $\sigma \approx 1{,}41$. **2.30** $\bar{x} = 5{,}48$; $D \approx 18{,}3$; $\sigma \approx 4{,}3$. **2.31.**

	Ўртача очколар сони	Ўртача квадратик четлашиш	Ўртача очколар сони бўйича Эркин Нодир билан таққослаганда кучли бўлгани билан , Нодирнинг ўртача квадратик четлашиши кам, яъни у ўзгармас
Нодир	25	24,75	
Эркин	30,5	157,75	

2.32 $\bar{x} \approx 6{,}2$; $D \approx 4{,}64$; $\sigma \approx 2{,}15$. **2.33** $\bar{x} \approx 17{,}8$; $D \approx 8{,}39$; $\sigma \approx 2{,}9$. **2.34** $\bar{x} \approx 368{,}67$; $D \approx 1018{,}06$; $\sigma \approx 31261$.

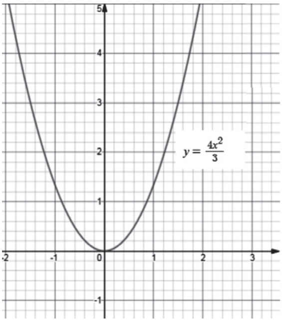
III бўлим

3.1. 4) $\sqrt[3]{4}$; 5) $\pm\sqrt[4]{10}$; 6) $\sqrt[5]{6}$; 7) $-\sqrt[3]{4}$; 8) $\varnothing$; 9) $\pm\sqrt[6]{7}$. **3.2.** 1) мусбат; 2) исталган; 3) манфий. **3.3.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[2; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$;

6) $(2{,}5;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ -3] \cup (3;\ +\infty)$; 9) $(2;\ 5]$; 10) $(-\infty;\ -2) \cup$ $\cup\ (-2;\ +\infty)$; 11) $(-2;\ 1] \cup (2:\ +\infty)$; 12) $(-\infty;\ -1) \cup [2;\ +\infty)$. **3.4.** 1) 2; 2) 3; 3) -5; 4) -4; 5) 7; 6) -2; 7) -81; 8) -1. **3.5.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) 0,3; 5) -2; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-1\frac{1}{2}$; 8) 0,5; 9) 1; 10) -1; 11) $1\frac{1}{2}$; 12) $-0{,}1$. **3.6.** 1) $\sqrt{5} > \sqrt[4]{5}$; 2) $\sqrt{0,5} < \sqrt[4]{0,5}$; 3) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$; 4) $\sqrt[3]{0,7} < \sqrt[5]{0,7}$; 5) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{4}$; 6) $\sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{5}$; 9) $\sqrt[5]{-0,2} > \sqrt[5]{-0,3}$; 10) $\sqrt[18]{\frac{4}{7}} > \sqrt[18]{0,57}$. **3.7.** 1) 6; 2) 10; 3) 1,5; 4) 15; 5) 0,5; 6) $\frac{10}{3}$; 7) 6; 8) 0,6. **3.8.** 1) $2\sqrt{a}$; 2) $5a\sqrt{2a}$; 3) $2\sqrt[4]{a}$; 4) $3a\sqrt{a}$; 6) $3a$; 7) $a\sqrt[3]{5a}$. **3.9.** 1) $\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{40}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{45}$; 5) $\sqrt{18}$; 6) $\sqrt[3]{250}$; 7) $\sqrt[5]{4}$; 8) $\sqrt[4]{5b^4}$. **3.10.** 1) +; 2) +; 3) −; 4) +; 5) +; 6) +; 7) +; 8) −; 9) +. **3.11.** 1) $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{6}$; 2) $\sqrt[6]{0,15}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{0,35}$; 3) $\sqrt[5]{0,2}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{0,3}$; 4) $2^6\sqrt{\frac{1}{3}}$; $3^3\sqrt{\frac{1}{6}}$; $5\sqrt{0,1}$. **3.12.** 1) $2\frac{2}{5}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{45}{49}$; 4) $1\frac{7}{20}$. **3.13.** 1) $4x\sqrt{y}$; 2) $3b\sqrt[4]{b}$; 3) $5ax\sqrt[3]{a^2}$; 4) $4b^4y^2\sqrt[3]{y}$. **3.14.** 1) $\sqrt{5a}$; 2) $\sqrt[3]{8x}$; 3) $\sqrt[4]{3b}$; 4) $\sqrt[5]{2c}$. **3.17.** 1) $\frac{\sqrt[3]{75}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; 3) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$; 4) $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$. **3.18.** 1) $2\sqrt[3]{x}$; 2) $\frac{a}{2}\frac{\sqrt[4]{a-1}\sqrt{a-1}}{a+2}$.

3.19. 1) $\frac{\sqrt[6]{a}}{3}$; 2) 1. **3.20.** $2\sqrt{2}$.

3.21.



3.24. 1) $\sqrt[5]{7^3}$, $\sqrt[7]{5}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $3\sqrt{x}$, $\sqrt{3x}$, $\frac{1}{5}\sqrt[5]{y}$, $-\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{6,25}}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{0,5}$; 4) $\sqrt[3]{(ab)^2}$, $a\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[3]{(a+b)^2}$, $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}$; 5) $\sqrt{a}$, $b\sqrt[5]{b}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{c^3}}$, $\frac{1}{\sqrt{d}}$; 6) $\frac{x}{y\sqrt{y}}$, $\frac{4}{(x-y)\sqrt{x-y}}$, $\frac{2x}{\sqrt[8]{x+y}}$; 7) $5\sqrt[3]{x^2}$, $\frac{7}{a\sqrt{a}}$, $a\sqrt[8]{b^5}$, $\sqrt[3]{(x+y)^2}$;

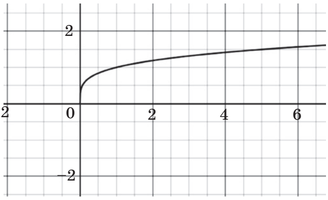
8) $-\frac{3}{\sqrt{y}}$, $-\frac{1,2}{b\sqrt[5]{b}}$, $\sqrt[8]{(ab)^5}$, $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$. **3.25.** 1) $ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x$; 2) $y^{\frac{1}{3}}+e^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; 3) $a+2a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $x^{-1}-3x^{-\frac{3}{4}}+2x^{-\frac{1}{4}}+6$; 5) $1-b$; 6) $4-y^3$. **3.26.** 1) 10; 2; 1,9; 2) 0; 16; $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{1}{3}$; 27; 8; 4) $\frac{1}{7}$; 2; 7; 5) 2; 0,3; $\frac{1}{5}$. 6) 0,01; 2; 100. **3.27.** 1) $c^{\frac{5}{6}}$; 2) $b^{\frac{1}{6}}$; 3) $x^{-0,2}$; 4) $a^{\frac{15}{6}}$; 5) y^3; 6) $a^{\frac{1}{6}}$; 7) $a^{\frac{2}{3}}$; 8) $x^{-\frac{1}{4}}$; 9) $y^{\frac{1}{2}}$; 10) $x^{\frac{1}{2}}$; 11) $a^{\frac{5}{2}}$; 12) $b^{-\frac{4}{5}}$. **3.28.** 1) 1; 2) $3^{0,8}$; 3) 2; 4) 25; 5) 9; 6) 32; 7) 6; 8) $\frac{1}{6}$; 9) 70; 10) 15. **3.29.** 1) $4p^{\frac{2}{3}}-q^{-2}$; 2) $1+2b^{\frac{1}{2}}+b$; 3) $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$; 4) $a+2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}$; 5) $a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$; 6) $x^{-2}-2x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y$. **3.30.** 1) $\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)$; 2) $\left(y^2-\sqrt{5}\right)\left(y^2+\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)$; 4) $\left(y^{\frac{1}{5}}-3\right)\left(y^{\frac{1}{5}}+3\right)$; 5) $\left(5-p^{\frac{2}{7}}\right)\times$ $\times\left(5+p^{\frac{2}{7}}\right)$; 6) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$. **3.31.** $\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$; 2) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{y}\right)\times$ $\times\left(\sqrt{10}+\sqrt{y}\right)$; 3) $\left(a^{\frac{1}{32}}-4\right)\left(a^{\frac{1}{32}}+4\right)$; 4) $(3c^{0,15}-2)(3c^{0,15}+2)$; 5) $(a^{0,75}-y)(a^{0,75}+$ $+\,y)$; 6) $\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}-7\right)\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{8}}+7\right)$. **3.32.** 1) $\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)\left(x+2x^{\frac{1}{2}}+4\right)$; 2) $\left(y^{\frac{1}{2}}+3\right)\times$ $\times\left(y-3y^{\frac{1}{2}}+9\right)$; 3) $\left(p^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(p^{\frac{2}{3}}-p^{\frac{1}{3}}+1\right)$; 4) $\left(q^{\frac{2}{5}}-5\right)\left(q^{\frac{4}{5}}+5p^{\frac{2}{5}}+25\right)$; 5) $(5-b)^{\frac{1}{3}}\left(25+5b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$; 6) $\left(y^{\frac{1}{3}}-\sqrt{2}\right)\left(y^{\frac{2}{3}}+\sqrt{2}y^{\frac{1}{3}}+2\right)$; 7) $\left(a^{0,3}-2b^{\frac{1}{3}}\right)\Big(a^{0,6}+$ $+\,2a^{0,3}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\Big)$; 8) $\left(x^{\frac{1}{3}}+10\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-10x^{\frac{1}{3}}+100\right)$; 9) $\left(a^{0,8}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{0,16}-a^{0,8}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$. **3.33.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{6}}$; 6) $\frac{1}{cy}$; 7) $a^{\frac{31}{30}}x^{-\frac{4}{45}}$; 8) q. **3.34.** $(x^3)^2$; $(x^{20})^2$; $\left(x^{\frac{23}{2}}\right)^2$; $(x-7)^2$; $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2$; $\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{8}}\right)^2$; $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2$. **3.35.** $(y^2)^3$; $(y-7)^3$; $\left(y^{\frac{7}{3}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{1}{9}}\right)^3$; $\left(y^{\frac{1}{15}}\right)^3$; $\left(y^{-\frac{3}{10}}\right)^3$. **3.36.** 1) 5; 2) 2. **3.37.** 1) $x=y^{\frac{3}{2}}$; 2) $x=y^{\frac{7}{4}}$; 3) $x=y^{\frac{2}{3}}$; 4) $x=y^{-\frac{4}{3}}$; 5) $x=\left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{5}{4}}$; 6) $x=(6y)^{\frac{3}{2}}$. **3.38.** 1) 1; 2) x. **3.39.** 1) $1+C$; 2) $-2b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}$; 3) $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}$;

4) $4a^{0,2}x^{0,2}$; 5) $x - y$; 6) $b^{\frac{3}{2}} - c^{\frac{3}{2}}$. **3.40.** 1) $x = 25$; 2) $x = 8$; 3) $x = 9$; 4) $x = \frac{1}{32}$; 5) $x = 1$; 6) $x = -25$. **3.41.** 1) $p + q$; 2) $b^6 - 2b^3c^3 + c^6$; 3) $\left(a^{\frac{1}{3}} + 2\right)^3$; 4) $\left(x^{\frac{2}{3}} - 3\right)^3$. **3.42.** 1) $-2,7m^{\frac{1}{2}}$; 2) $-240x^{0,1}$. **3.43.** 1) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; 2) $\left(u^{\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}}\right)\left(u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; 3) $\left(a^{\frac{1}{3}} + 1\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1\right)$; 5) $\left(x^{\frac{1}{2}} + 4\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; 6) $\left(y^{\frac{1}{4}} - 9\right)\left(y^{\frac{1}{4}} - 4\right)$. **3.44.** 1) $\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 1\right)$; 2) $\left(x^{\frac{1}{5}} - 1\right) \times$ $\times \left(x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{5}} + 1\right)$; 3) $\left(x^{\frac{1}{6}} - 1\right)\left(x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + 1\right)$. **3.45.** 1) $x = \frac{1}{y}$; 2) $x = y^2$; 3) $y = \frac{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$; 4) $y = \frac{4^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}{3}$. **3.46.** $\frac{a-1}{2}$. **3.47.** 1) $(-2;-1) \cup (0;\ +\infty)$; 2) $\left(-2;-\frac{4}{5}\right) \cup (0;\ 1)$.

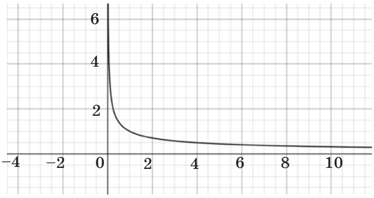
3.48. $$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$
$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$
3.49. 3) $3^{\frac{1}{2}}$; 5) $250^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{3}{2}}$; $(x+1)^{\frac{9}{4}}$; **3.50.** 1) $x^{\frac{1}{6}}$; 3) $y^{\frac{-1}{21}}$; 6) $x^{\frac{1}{4}}$; 7) $x^{\frac{1}{2}}$; 9) 1. **3.51.** 1) $\frac{5\sqrt[3]{16}}{4}$; 2) $\frac{2\sqrt[4]{27^3}}{3}$; 4) $-\frac{2\sqrt[3]{49^2}}{49}$; 6) $-\frac{7}{3}\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$; 8) $\frac{20}{11}\left(\sqrt{20} + \sqrt{9}\right)$. **3.52.** 1) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$; 3) $4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$. **3.53.** 1) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{b}$; 4) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{ab^3} + b$. **3.54.** 1) $\frac{27 + 3\sqrt{2} - 9\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8}}{79}$; 3) $\frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3}\right)\left(9 + 3\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3}\right)}{9}$; 5) $\left(\sqrt[8]{5} - \sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)$; 6) $\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt[4]{2}\right) \times$ $\times \left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)$. **3.55.** $x^2\sqrt[3]{y}$. **3.57.** 2) − 1; **3.58.** Нұсқау: теңдік-

тің екі жағын квадраттау керек. **3.59.** 1) – 2017. **3.60.** 2) $a^6 - b^6$. **3.61.** 2) (– 3; 1), (3; – 1). **3.62.** $\left(\frac{4}{3}\right)^0$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{7}{11}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$. **3.63.** 4) $0{,}01^{-0{,}5} < 0{,}01^{-0{,}6}$. **3.64.** 1) ўсувчи;

3.65. 1)

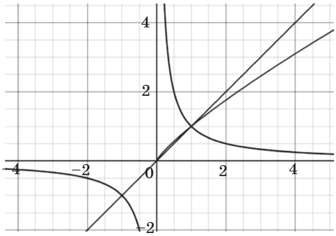


2)



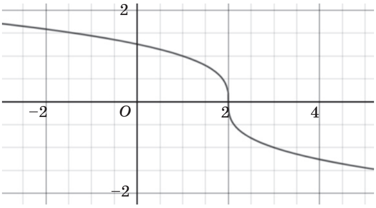
3.66. 1) <; 4) <. **3.67.** 1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-0{,}2} < \left(\frac{3}{2}\right)^{0{,}2} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{15}} < \left(\frac{4}{25}\right)^{-4}$.

3.68. 1) ўсувчи; 3) ўсувчи; **3.69.** $y^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ функция $y = x$ ва $y = 1\backslash x$ функциялар билан $x = 1$ нүктесінде қиылысады.

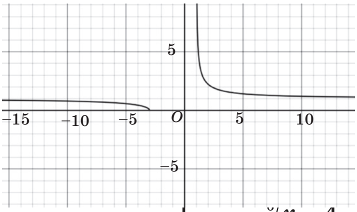


3.70. 1) $3\sqrt[4]{8}$; 4) $3\sqrt{2}$. **3.71** 1) 4.

3.73. 1)



3)



3.74. $|f(x)|$. **3.77.** $2\sqrt{a-1}$. **3.78.** 1) 1. **3.81.** Бўлмайди. **3.83.** 1) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; 3) $\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

3.84. 2) $\frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$. **3.85.** 1) 0,5; 4) – 0,5. **3.87.** 3) $-\frac{8}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$; 4) $5x^{\frac{7}{5}} + C$. **3.88.** 1) $2x^{\frac{5}{2}} + C$; 3) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$. **3.90.** 2) $10x^{1{,}4} + C$. **3.92.** 1) $\frac{16}{5\sqrt[5]{4}}$.

3.93. 2) $\frac{4}{17}x^{\frac{17}{4}} + C$; 3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$. **3.94.** 1) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + C$;

3) $4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{7}{2}} + C$. **3.95.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt[3]{x} - \frac{4}{6}$. **3.96.** 2) $-\frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} + 2x^{\frac{5}{2}} + C$. **3.97.** 4) $-\frac{8}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C$; 6) $\frac{4}{\sqrt[3]{x}} + C$. **3.98.** $\frac{4}{3}$. **3.99.** 2) 8. **3.100.** 1) +; 2) +; 3) +; 4) 0. **3.101.** $\frac{513}{16}$.

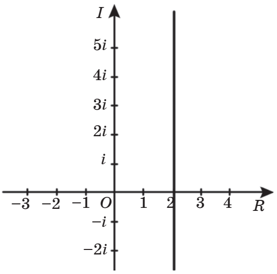
IV бўлим

4.2. 1) ҳа; 2) йўқ; 3) ҳа; 4) йўқ. **4.3.** 1) йўқ; 2) ҳа; 3) йўқ. **4.4.** 1) $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$, 3) R; 3) $[-\ 2;\ +\infty)$. **4.5.** 1) $(-\infty;\ -\ 4] \cup [4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$. **4.6.** 1) − 3; 3; 2) − 6; 6; 3) − 6; 6; 4) − 18. **4.7.** 1) 3; 2) 3; 3) 5; 4) 8. **4.8.** 1) $2 + \sqrt{2}$; 2) 4; 3) 5; 4) 10. **4.9.** 1) 1; 3; 2) 5; 3) 0; 3; 4; 4) 2; 4. **4.10.** 1) (27; − 1); 2) (4; 64); 3) (16; 8); 4) (20; 5). **4.11.** 1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 0; 0,4. **4.12.** 1) 61; 2) 4; 3) − 2; 4) 3. **4.13.** 1) 4; 2) 7; 3) 6; 4) − 12. **4.14.** 1) (9; 1); 2) (− 2; 4). **4.15.** 1) 84; 2) 0; 3) 630; 4) − 2; 2. **4.16.** 1) 0; 2) 0; 3) 7; 8; 4) 1. **4.17.** 1) ∅; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **4.18.** 1) − 6; − 1; 2) 0; 1; 3) 1; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) − 1; 4; 6) − 4,5; 3. **4.19.** 1) − 3; 3) − 1,25; 4) $\frac{1}{3}$. **4.20.** 2) (4; 4). **4.21.** 1) (2; 4). **4.23.** 1) ∅; 2) [2; 3]. **4.25.** 1) $4\pi n$. **4.26.** a $[-3 - 2\sqrt{6};\ -3] \cup \{5\}$. **4.28.** 1) [− 3; 1]; 2) [3; 28); 3) [3; +∞); 4) [− 5; 11). **4.29.** 1) [5; 7). **4.30.**1) $\left[-\infty;\frac{3}{5}\right)$; 2) ∅; $(-\infty;\ -\ 3] \cup [2;\ +\infty)$; 4) (18; + ∞). **4.31.** 1) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; 2) $(-\sqrt{14};\ \sqrt{14})$. 3) $(-\infty;\ -\ 8) \cup (-\ 2;\ +\infty)$. **4.32.** 1) $(-\ 5{,}25;\ -\ 3] \cup [-\ 1{,}25;\ 1)$; 2) $(-\infty;\ -\ 2{,}5) \cup$ $\cup\ (3;\ +\infty)$; 3) $(-1;\ 0] \cup [1;\ 2)$; 4) [0; 6]. **4.36.** 1) (− 4; − 2); 2) $\left(\frac{1}{2};2\right]$; 3) $\left(\frac{3}{4};2\right)$; 4) {1}. **4.37.** 1) $(-\infty;\ -\ 1) \cup (3;\ +\infty)$; 2) (−∞; 0). **4.38.** 1) $\left(\frac{-17+\sqrt{2089}}{18};2\right]$; 2) (4; 6]; 3) $[2{,}5;\ 1 + \sqrt{3})$; 4) [1; +∞). **4.39.** 1) $[16 - a;\ +\infty)$; 2) $\left(-\frac{a}{2};+\infty\right]$. **4.40.** 1) $\left[-3;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$; 2) $(3 - \sqrt{13};\ 3 + \sqrt{13})$. **4.42.** $y = -\frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2}$.

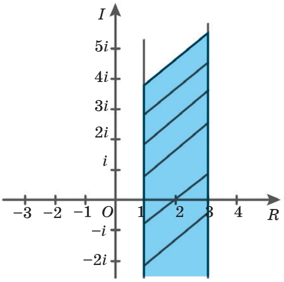
V бөлім

5.3. 1) 2; − 4; 2 − 3i. **5.4.** 1) 9i; 2) 0,25i. **5.5.** 1) 5; 2) 13. **5.6.** 1) $\sqrt{11}$; 2) 16. **5.7.** 1) (− 2; 1); (1; − 2); (2; 1); (1; 2). **5.8.** 1) (1; 4); (− 1; 4). **5.9.** 1) − 2 − 4i; 7) − 4 + 2i. **5.10.** $|z_1| = 2$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$; $|z_2| = 2\sqrt{2}$; $\varphi_2 = -\frac{3\pi}{4}$.

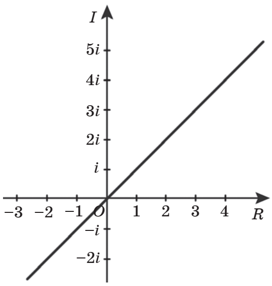
5.14. 1)



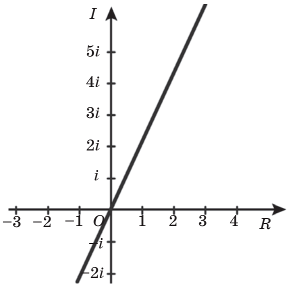
2)



3)

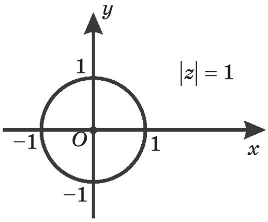


4)

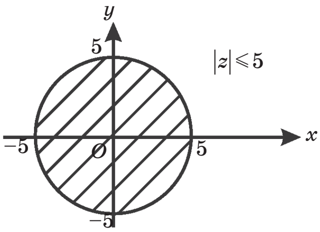


5.15. 1) 1) маркази координаталар бошида ва радиуси 5 га тенг бўлган айлана; 2) маркази координаталар бошида ва радиуси 6 га тенг бўлган доира; 3) маркази (2;1) ва радиуси 3 га тенг бўлган доира.

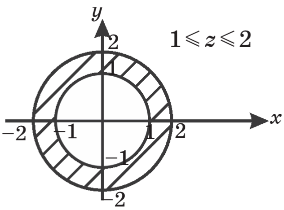
5.16. 1)



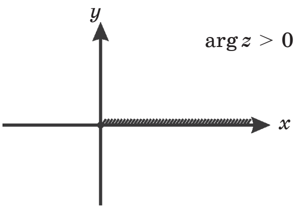
2)



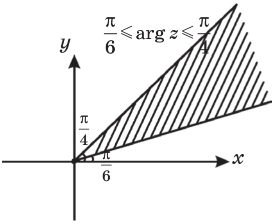
3)



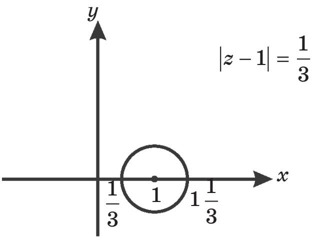
4)



5)



6)



5.19. 1) $10i + 14$; 4) $21i + 12$. **5.20.** 3) $5 + 42i$; 5) $43 + 76i$. **5.21.** 1) $8 + i$; 4) 0; 5) -39. **5.22.** $p = \frac{3}{25}$; $q = -\frac{4}{25}$. **5.23.** 1) $\frac{5}{169} - \frac{12}{169}i$; 4) $\frac{6}{37} + \frac{i}{37}$. **5.24.** 1) $a = 5$; $b = 2$; 4) $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.25.** 1) $0{,}5i + 2{,}5$; 4) $\frac{11}{10}i + \frac{4}{5}$. **5.26.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$. **5.27.** 1) $-2 - 2i$; 4) $-0{,}25 + 0{,}25i$. **5.28.** 1) ± 2; 2) $\pm 2i$; 3) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$; 4) $\pm\left(-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i\right)$. **5.31.** 1) $x = 1$; $y = 2$; 2) $x = 3$; $y = -2$. **5.32.** 1) $\pm(4 - 3i)$; 1) $\pm(16 - 2i)$. **5.33.** 1) i; 2) i; 3) $0{,}25 + 0{,}25i$. **5.34.** 3) $-\frac{3}{58} - \frac{7}{58}i$; 4) $-i$. **5.35.** $-i, -1, i$; агар $n = 4k + 1 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = -i$; агар $n = 4k + 2 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = -1$; агар $n = 4k + 3 \Rightarrow \frac{1}{i^n} = i$; агар $n = 4k \Rightarrow \frac{1}{i^n} = 1$. **5.36.** 1) $-2 - 3i$; 2) $\frac{pr + qs}{r^2 + s^2} + \frac{qr - ps}{r^2 + s^2}i$. **5.37.** 1) $-0{,}2i$; 2) $-7i + 3$. **5.38.** 1) $4 - 4i$. **5.39.** 1. **5.43.** 1) $1\frac{5}{13} - \frac{i}{13}$; 2) $-0{,}72 - 0{,}96i$. **5.44.** 1) $x = 1\frac{1}{3}$; $y = 1\frac{2}{3}$; 4) $x = 10$; $y = 6$. **5.45.** 1) $-64(i + 1)$; 2) -1. **5.46.** 2) $x = 1$; $y = 2$; 3) $x = 0$; $y = -\frac{2}{3}$. **5.47.** 1) $z = 2 - i$. **5.48.** $z = -1 \pm \sqrt{3}\,i$. **5.50.** 4) $a = -7$; $b = 11$. **5.51.** Нұсқау: теңдеудің екі жағын квадраттау керек. **5.54.** 1) $x = \pm 3i$; 4) $x = \pm 5$. **5.55.** 1) 0; ± 2. **5.56.** 1) $\pm\sqrt{2}$; $\pm i\sqrt{3}$; 4) ± 3; $\pm 3i$. **5.57.** 1) $5 \pm 2i$; 2) $-3 \pm 4i$. **5.58.** 3) $(x - \sqrt{7}\,i)(x + \sqrt{7}\,i)$. **5.59.** 1) -1; $\pm i$; 6) $-2 \pm \sqrt{2}\,i$. **5.60.** 1) ± 1; $\pm\sqrt{3}\,i$; 6) $\pm i$. **5.61.** $z^2 - 4z + 7 = 0$. **5.62.** 1) $z = -2i \pm 3$; 2) $z = 3i \pm 1$. **5.63.** 1) $\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 2) $(x - 1)(x + 1 - \sqrt{3}\,i)(x + 1 + \sqrt{3}\,i)$. **5.64.** $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = 1 - 3i$; $z_1 = -\frac{4}{3}$. **5.65.** $-1 \pm \sqrt{3}\,i$. **5.66.** 1) $1 - 2i$; 2) $z = -1{,}5$; $k = 15$. **5.67.** 1) $p = -78$; 2) $2 \pm 3i$. **5.68.** 2) $z_2 = 1 - i$; $z_3 = -5$. **5.69.** $p = -1$; $q = 7$; $z_2 = 1 - 2i$. **5.70.** 1) $(x + 3)\left(x - \frac{3 + \sqrt{3}t}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{3}t}{2}\right)$. **5.71.** 2) $z_1 = 0$; $z_2 = -1$; $z_{3/4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

МУНДАРИЖА

10-СИНФ МАТЕРИАЛЛАРИНИ ТАКРОРЛАШ

I бўлим. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

II бўлим. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКАНИНГ ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАРИ

III бўлим. ДАРАЖАЛАР ВА ИЛДИЗЛАР. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ

IV бўлим. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

V бўлим. КОМПЛЕКС СОНЛАР

АЛГЕБРА ЖӘНЕ АНАЛИЗ БАСТАМАЛАРЫ

ЕКІ БӨЛІМДІ

1-БӨЛІМ

Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика
бағытындағы 11-сыныпқа арналған оқулық

(өзбек тілінде)